

**Elektronická učebnice k předmětu  
Úvod do matematických metod fyziky**

Petr Kolář

# Obsah

Úvod	1
Použité označení a zkratky	3
<b>1 Přehled studijních textů k matematickému aparátu fyziky</b>	<b>4</b>
1.1 Studijní materiály pro matematické metody ve fyzice . . . . .	4
1.2 Studijní materiály pro systémy souřadnic . . . . .	5
1.3 Studijní materiály pro limity a jejich výpočty . . . . .	6
1.4 Studijní materiály pro derivace funkcí . . . . .	6
<b>2 Systémy souřadnic</b>	<b>7</b>
2.1 Systémy souřadnic v rovině . . . . .	7
2.1.1 Kartézský systém . . . . .	8
2.1.2 Polární systém . . . . .	10
2.2 Systémy souřadnic v prostoru . . . . .	13
2.2.1 Kartézský systém . . . . .	13
2.2.2 Cylindrický (válcový) systém . . . . .	14
2.2.3 Sférický (kulový) systém . . . . .	15
<b>3 Limita funkce</b>	<b>18</b>
3.1 Funkce . . . . .	18
3.1.1 Zavedení pojmu funkce . . . . .	18
3.1.2 Některé důležité funkce . . . . .	20
3.2 Limita funkce . . . . .	24
3.2.1 Zavedení pojmu limita funkce . . . . .	24
3.2.2 Vlastnosti a výpočet limit . . . . .	27
<b>4 Derivace funkce</b>	<b>30</b>
4.1 Zavedení pojmu derivace . . . . .	30
4.2 Výpočet derivací . . . . .	33
4.3 Derivace vyšších řádů . . . . .	40
4.4 Matematické aplikace derivací . . . . .	41
4.4.1 L'Hospitalovo pravidlo . . . . .	41
4.4.2 Průběh funkce . . . . .	42
4.4.3 Taylorův rozvoj . . . . .	48
4.5 Fyzikální aplikace derivací . . . . .	51
4.5.1 Využití derivací k definování fyzikálních veličin . . . . .	51
4.5.2 Derivace vektorů . . . . .	52
4.5.3 Aproximace pomocí Taylorova rozvoje . . . . .	56

4.5.4	Další aplikace derivací ve fyzice . . . . .	59
	<b>Literatura</b>	<b>60</b>

# Úvod

Námět k vytvoření této práce vznikl zejména z popudu studentů učitelského studia fyziky a některých studentů oboru obecná fyzika na MFF UK<sup>1</sup>, kteří se sháněli po dalších studijních textech k předmětu *Úvod do matematických metod fyziky*.

Při tvorbě práce byla nejdříve provedena drobná rešerše již existujících studijních textů, které se věnují problematice aplikování matematických metod ve fyzice. Začalo se u známých publikací, které jsou běžně dostupné v knihovnách, jako je například *Matematický aparát fyziky* od prof. J. Kvasnici, a jsou dostupné zejména ve fakultní knihovně MFF UK. Dále byla obrácena pozornost na zdroje umístěné na internetu, které byly vyhledávány pomocí internetového prohlížeče Google (ostatní prohlížeče dávaly obdobné výsledky) a analyzováno bylo prvních třicet odkazů vždy pro určitá klíčová slova. Průzkum pomocí internetu byl proveden mezi daty 30. 11. a 6. 12. 2013 pro klíčová slova *matematické metody ve fyzice, soustavy souřadnic, systémy souřadnic, limita, diferenciální počet, derivace* (všechny pouze v českém jazyce).

Z rešerše vyplynulo, že není úplně jednoduché získat materiály, které by odpovídaly hlavním cílům předmětu *Úvod do matematických metod fyziky* vyučovaném na MFF UK. Cílem této práce je tedy vytvoření studijního textu, který by studentům co nejvíce pomohl s úvodem do vysokoškolské matematiky a s vytvořením si fyzikální představy u matematických metod aplikovaných na popis přírody.

Při tvorbě textu se vycházelo zejména z příprav a textů dr. A. Hladíka, prof. J. Podolského a dr. V. Žáka k přednáškám a cvičením předmětu *Úvod do matematických metod fyziky*. Reflektovány jsou také zkušenosti autora s problematikou matematických metod aplikovaných ve fyzice, s daným předmětem a s věkovou skupinou studentů, jíž je text věnován.

Při psaní tohoto studijního materiálu byla snaha o vytvoření čtivého textu, který by byl psán jazykem blízkým studentům, kteří právě přišli ze střední školy na školu vysokou. Z těchto důvodů nebyly kladeny příliš vysoké nároky na matematickou rigoróznost, a proto rozhodně nelze považovat tento studijní text za učebnici například matematické analýzy. Zároveň bylo vytvořeno větší množství obrázků, které by měly pomoci s představou probírané problematiky. Text byl vytvořen v programu L<sup>A</sup>T<sub>E</sub>X a obrázky v editoru Zoner Callisto 5 Free.

Práce je rozčleněna do čtyř kapitol. V první kapitole jsou doporučeny a stručně diskutovány některé dostupné studijní texty, které se týkají problematiky rozebírané v této práci. Další tři kapitoly tvoří postupně *Systémy souřadnic*, *Limita funkce* a *Derivace funkce* (kde jsou nastíněny i základy *vektorové algebry*) a postihují větší část obsahu předmětu *Úvod do matematických metod fyziky*, což

---

<sup>1</sup>Matematicko-fyzikální fakulta Univerzity Karlovy v Praze

představuje *vektorová algebra, systémy souřadnic, funkce a její derivace* a *integrál funkce*. Kapitoly na sebe postupně navazují a odkazují na sebe. V textu se snažíme o postupné osvojování poznatků matematických metod ve fyzice a na probraných poznatcích dále stavět. Z tohoto důvodu se začíná se systémy souřadnic, jelikož se pomocí nich potom vyšetřují funkce, vektory a fyzikální problémy dále v textu. Navazují limity, kde se snažíme čtenáře připravit na kapitolu věnující se derivacím funkcí. Kapitola věnující se derivacím začíná fyzikální motivací pro jejich zavedení a tuto práci uzavírá oddíl s názvem *Fyzikální aplikace derivací*, kde jsou shrnuty poznatky vyložené v předchozím textu a názorně ukázány některé jejich aplikace ve fyzice.

V probíraných tématech nejsou dokázána všechna uvedená tvrzení, ale jsou uvedeny odkazy na literaturu, kde jsou příslušné důkazy k nalezení.

Tato práce předpokládá, že je čtenář seznámen se středoškolskou matematikou a fyzikou.

# Použité označení a zkratky

V matematických a fyzikálních textech se objevuje mnoho způsobů značení, přičemž každý rád používá to, na které je zvyklý. Aby nedocházelo k nedorozuměním, uvedeme hned na začátku práce značení, které bude dále používáno.

$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$	$\mathbb{N}$ rozšířená o 0
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina záporných reálných čísel

$k$	skalár
$\mathbf{b} = (x_1, x_2, \dots)$	vektor o souřadnicích $x_1, x_2, \dots$
$A = [a_1, a_2, \dots]$	bod o souřadnicích $a_1, a_2, \dots$

$\sim$	úměrnost
$\doteq$	přibližná rovnost
$\approx$	je aproximováno
$\hat{=}$	symbol „odpovídá“
$\stackrel{\text{l'H}}{=}$	symbol „použití l'Hospitalova pravidla“
$\stackrel{\text{k}}{=}$	rovnost pro kartézský systém
$\stackrel{\text{p}}{=}$	rovnost pro polární systém
$\leq$	menší nebo rovno
$\geq$	větší nebo rovno
$<$	menší
$>$	větší
$\ll$	mnohem menší
$\gg$	mnohem větší

# Kapitola 1

## Přehled studijních textů k matematickému aparátu fyziky

### 1.1 Studijní materiály pro matematické metody ve fyzice

Tento text není samozřejmě prvním, který se věnuje aplikacím matematických metod ve fyzice a ze kterého lze tudíž čerpat. Již existující práce nabízejí jiný pohled na vykládanou problematiku a obsahují i partie, kterými se v této práci nebudeme zabývat.

Zřejmě nejčastěji se budeme v následujícím textu odkazovat na skripta sepsaná profesorem Kopáčkem, *Matematická analýza nejen pro fyziky*. Tato skripta sestávají ze čtyř dílů, přičemž my budeme využívat prvního ([1]). Jak napovídá název, jsou to skripta určená pro kurz matematické analýzy pro studenty fyziky (a nejen pro ně) na MFF UK. Obsahují tedy podstatnou část toho, co potřebuje fyzik znát z oblasti matematické analýzy, a jsou zde i partie, které mohou být pro matematiky nezajímavé, ale fyzici se bez nich neobejdou. Příkladem za všechny mohou být například diferenciální rovnice ve tvaru totálního diferenciálu. Skripta jsou napsána čtivě a je zde mnoho příkladů, aby byla látka vykládána názorně. Nezbyvá tedy, než „Kopáčka“ (jak se jeho skriptům zkráceně říká) doporučit k přečtení. Navíc ke každému dílu skript vyšly zvlášť *Příklady z matematiky nejen pro fyziky* ([2]), kde si lze látku matematické analýzy skutečně dobře procvičit.

Známa a oblíbená je také publikace profesora Kvasnici, *Matematický aparát fyziky* ([3]), která osvětluje vybrané, pro fyziky nezbytné, partie matematiky. Obsahuje důležité části algebry, analytické a diferenciální geometrie (křivky, plochy), vektorové a tenzorové analýzy, funkcí a jejich rozvoje, diferenciálních rovnic a pravděpodobnosti a statistiky. Na probírané partie je v této publikaci nahlíženo spíše „vysokoškolsky“ – například z hlediska použitého jazyka nebo provádění důkazů. Na rozdíl od *Matematického aparátu fyziky* nabízí tato bakalářská práce přechodný článek mezi středoškolskou a vysokoškolskou matematikou a věnuje se i partiím, jejichž znalost je v *Matematickém aparátu fyziky* předpokládána.

V anglicky psané literatuře můžeme nahlédnout do publikace *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide* ([4]). Názory na tuto knihu se různí, ale většinou jsou kladné. Je to velmi rozsáhlá publikace postihující ve 23 kapitolách mnoho užitečného. Nemá smysl vypisovat zde všechny kapitoly, jed-

noduše je zde k nalezení diferenciální počet, funkce, potřebné partie z algebry, řady a pravděpodobnost a statistika.

Zřejmě nejrozsáhlejší práce zaměřená na využití matematických metod, se kterou se můžeme setkat, je *Přehled užití matematiky I a II* ([5] a [6]) od profesora Rektoryse a jeho dalších spolupracovníků. Tyto dvě knihy jsou určeny především inženýrům a přírodovědcům, kteří potřebují matematiku používat k řešení problémů ve své odborné praxi, a proto neobsahují důkazy matematických vět a tvrzení. Jako známka kvality tohoto díla může být brán fakt, že bylo přeloženo do anglického jazyka a vydáno v nakladatelství M.I.T. Press a dokonce se na MIT<sup>1</sup>, což je jedna z nejprestižnějších technických univerzit na planetě Zemi, stalo oficiální studijní příručkou.

Existuje také velké množství materiálů věnujících se matematickým metodám ve fyzice, které lze nalézt na internetu. Problém může být v tom, že na internetu si může dát kdokoli cokoli, tedy i naprosto scestné materiály, které nám při studiu spíše uškodí, než pomohou. To ale neplatí samozřejmě o všech a můžeme některé doporučit.

Nedělá-li nám problém slovenský jazyk, můžeme čerpat ze skript ([7]) sepsaných k předmětu *Matematické metody vo fyzike* vyučovaném na Fakultě matematiky, fyziky a informatiky Univerzity Komenského v Bratislavě. Podle popisu se jedná o analogii předmětu *Úvod do matematických metod fyziky* a navazujících *Matematických metod ve fyzice I*, které jsou pro studenty učitelství fyziky vyučovány na MFF UK, a proto je analogická též náplň skript. Lze zde tedy nalézt stejná témata, ale jinak formulovaná a vykládaná, což může pomoci s pochopením nejasností, kterých jak doufáme, bude co nejméně. K prostudování jsou zde kapitoly zabývající se derivacemi, integrály, maticemi, nekonečnými řadami, diferenciálními rovnicemi, systémy souřadnic, vektorovou analýzou a vlnovou rovnicí. Práce obsahuje mnoho řešených příkladů, z nichž některé jsou pojaty jako fyzikální aplikace zrovna probírané matematické metody, což může být užitečným doplněním přednášek a cvičení určených pro studenty MFF UK.

To byly materiály zaměřené přímo na matematické metody používané ve fyzice nebo popřípadě v jiných přírodovědných oborech. Byly však vytvořeny i konkrétněji zaměřené materiály, ze kterých je možné čerpat, a my tu některé z nich pro jednotlivá témata doporučíme.

## 1.2 Studijní materiály pro systémy souřadnic

Za reprezentanty zdrojů, kde lze nalézt teorii věnovanou systémům souřadnic a které jsou umístěny na internetu, si uvedme dvě práce.

Na stránkách matematické sekce MFF UK je volně přístupná diplomová práce Jana Končela nesoucí název *Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole* ([8]). Práce zahrnuje pouze kartézský systém (ten se typicky objevuje na středních školách), ale jsou zde uvedeny i některé historické zajímavosti. Nenajdou se zde ovšem fyzikální aplikace, jelikož se jedná o práci věnovanou analytické geometrii. Na druhou stranu jsou zde i části věnované dalším partiím, které se fyzikům také hodí, jako jsou například vektory nebo plochy v prostoru.

Dále nám může posloužit text věnující se systémům souřadnic sepsaný pro

---

<sup>1</sup>Massachusetts Institute of Technology



zájemce o řešení fyzikální olympiády, který nese název *Souřadnice ve fyzice* ([9]). Pokud jsou nám známy derivace, oceníme, že text obsahuje také část věnovanou rychlostem a zrychlením v různých systémech a příklady s aplikacemi. Za zmínku stojí i to, že je zde rozebrána těžištvá souřadnicová soustava.

### 1.3 Studijní materiály pro limity a jejich výpočty

Zadáme-li do internetového vyhledávače klíčové slovo „limita“, nalezneme nám nepřehledné množství odkazů, kde je toto téma více či méně zpracované. My budeme některé zajímavé odkazy z toho velkého množství stručně diskutovat.

Existuje server [www.matematika.cz](http://www.matematika.cz), na který lze narazit v souvislosti s vyhledáváním informací o limitech, a zde jsou v sekci *Matematika polopatě* ([10]) umístěny články věnující se mimo jiné matematické analýze, tedy i limitám. Autor článků vše doplňuje velkým počtem obrázků, což napomáhá lepšímu pochopení. Jak bylo zmíněno, nejsou zde pouze limity, ale najdou se také články věnované derivacím a integrálům. Dále je zde také kombinatorika, lineární algebra nebo třeba geometrie.

Poměrně dost rozsáhlý je e-learnigový kurz *Matika krokem* ([11]), který je určen pro přípravu k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy. Tento kurz má zatím (k datu 6. 12. 2013) dvě kapitoly: komplexní čísla a limita, derivace, integrál. U tohoto materiálu můžeme ocenit opravdu velký počet řešených příkladů, kdy si můžeme jednotlivé části řešení postupně odkrývat. Jsou zde podkapitoly věnované aplikacím derivací a integrálů.

Internet nabízí i videoprezentace. Kladné ohlasy mají např. videa Marka Valáška *Mathematicator* ([12]). Na přibližně deseti až dvacetiminutových videích zpracovává různá témata z matematiky a věnuje se mimo jiné právě limitám, funkcím, derivacím, integrálům a diferenciálním rovnicím.

Na internetu je dostupné množství příkladů. Jako příklad můžeme uvést server [www.priklady.eu](http://www.priklady.eu), kde je sekce věnovaná matematice a ke každému tématu jsou zde řešené příklady. Limity lze nalézt pod odkazem Funkce. Kromě matematiky jsou zde též příklady z fyziky.

### 1.4 Studijní materiály pro derivace funkcí

Derivace a vůbec celý diferenciální počet je vystavěn na limitech a zdroje věnující se limitám často obsahují též příklady na derivace. Pro derivace můžeme doporučit [10], [11] a [12].

Na závěr si doporučíme *Sbírku řešených úloh z fyziky* ([13]), která vzniká na Katedře didaktiky fyziky MFF UK. Kromě velkého množství příkladů z fyziky jsou zde i části věnované přímo matematickým metodám, matematické analýze a lineární algebře. V částech věnovaných matematice si lze procvičit problematiku matematických metod; příklady z fyziky jsou názornou aplikací matematických metod ve fyzice.

# Kapitola 2

## Systémy souřadnic

Systémy souřadnic patří mezi základní nástroje, které nám pomáhají s analýzou fyzikálních problémů tím, že určitým způsobem označují body prostoru (např. jim přiřazují čísla, názvy, symboly atd.), aby bylo možné jednoznačně určit polohu objektů, které uvažujeme nebo pozorujeme.

Souřadnice jsou v podstatě nezbytnou pomůckou k tomu, aby si lidé, ne jenom fyzici, mezi sebou rozuměli. Představte si situaci: Mladý fyzik přijede na mezinárodní konferenci a chce se ubytovat v hotelu. Přijde na recepci a zde, po ověření jeho rezervace, dostane klíč od pokoje. Jak má ale nebohý fyzik poznat, který pokoj je jeho a kam pasuje klíč, který dostal? Vedení hotelu je našťastí vynalézavé, nechalo očíslovat patra a vstupní dveře pokojů a na klíč přidělat visačku s nápisem: 3. patro, pokoj 4, čímž se celá situace vyjasnila. Aby návštěvníci hotelu nebloudili bezradně po chodbách, byl v budově vytvořen jednoduchý systém souřadnic, který jednoznačně určuje polohy pokojů v hotelu. V našem ilustračním případě to jsou dvě souřadnice: patro a číslo pokoje na patře. Tento jednoduchý příklad má ilustrovat fakt, že má smysl systémy souřadnic zavádět a že nám pomohou jednoznačně určovat polohu.

Dalším příkladem systému souřadnic jsou třeba názvy měst a ulic dohromady s čísly popisnými. Potom jsme schopni jednoznačně určit polohy našich domů a můžeme si posílat poštu. Známý je také systém GPS, který nám za pomoci signálů z několika družic pomáhá určovat polohu na Zemi – GPS souřadnice.

Chceme-li pomocí souřadnic jednoznačně popsat všechny body prostoru, kterých je nekonečně mnoho, nabízí se využít reálná čísla. Reálná čísla mají tu výhodu, že reálná osa je spojitá, tedy každému bodu na přímce můžeme přiřadit reálné číslo. Systém souřadnic potom vytvoříme tak, že každému bodu prostoru přiřadíme podle určitého pravidla několik reálných čísel (souřadnic) tak, aby byl popis poloh jednoznačný (tedy žádné dva navzájem různé body prostoru nebudou mít stejné všechny souřadnice, ale budou se v alespoň jedné lišit).

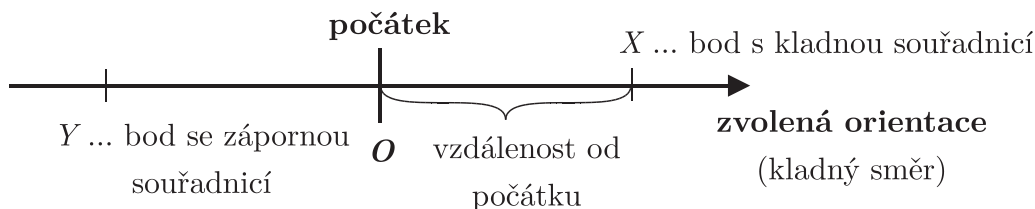
### 2.1 Systémy souřadnic v rovině

Než si zavedeme systémy souřadnic v rovině, zmíníme tu ještě jednodimenzionální případ, tedy přímku. Zavést systém souřadnic na přímce není nic těžkého: Jeden bod přímky si zvolíme jako *počátek* a určíme si *orientaci* – na jednu stranu od počátku budou souřadnice kladné a na druhou záporné. Jako souřadnici bodu budeme brát v podstatě vzdálenost od zvoleného počátku. Ke vzdálenosti, což

je nezáporné reálné číslo, přidáme znaménko podle zvolené orientace, viz *obrázek 2.1*.

Tento systém souřadnic se hodí k analýze fyzikálních problémů, kde se všechno pohybuje pouze po jedné přímce, např. hmotný bod pohybující se přímočarým pohybem, hmotný bod oscilující na pružině atd.

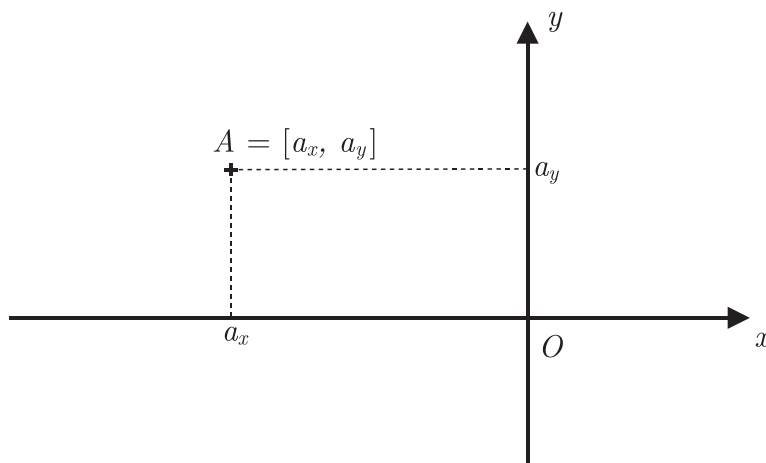
Zajímavějším případem je zavedení souřadnic v rovině, kde se nejčastěji využívají dva systémy souřadnic: *kartézský* a *polární*.



Obrázek 2.1: Systém souřadnic na přímce

### 2.1.1 Kartézský systém

Začneme tím nejjednodušším systémem, se kterým jsme se pravděpodobně potkali v matematice už na základní škole. Kartézský systém v rovině tvoří dvě orientované navzájem kolmé přímky, které nazýváme osy, a obvykle je značíme  $x$  a  $y$  (nebo také  $x_1$  a  $x_2$ ). Počátek kartézského systému souřadnic je umístěn v jejich průsečíku. Libovolnému bodu v rovině se potom přiřazují dvě čísla – sou-



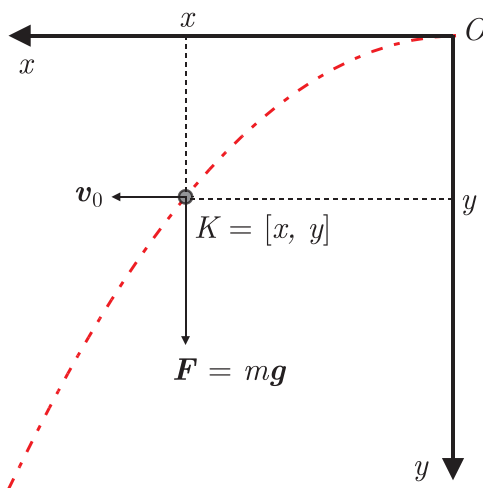
Obrázek 2.2: Kartézský systém souřadnic v rovině a bod  $A = [a_x, a_y]$ , kde  $a_x < 0$ ,  $a_y > 0$

řadnice – kolmá vzdálenost od osy  $y$  (až na případné znaménko), což je souřadnice  $x$ , a kolmá vzdálenost od osy  $x$  (až na případné znaménko), což označujeme jako souřadnici  $y$ . Na *obrázku 2.2* je znázorněn kartézský systém souřadnic a v něm bod  $A$  o souřadnicích  $a_x$  a  $a_y$ . V jazyce matematiky tvoří souřadnice  $a_x, a_y$  uspořádanou dvojici, která se označuje jako  $[a_x, a_y]$ . Stručně potom zapisujeme, že  $A = [a_x, a_y]$ .

Je asi na první pohled zřejmé, že se skutečně jedná o jednoznačný popis všech bodů roviny. Jsou-li dva body roviny navzájem různé, liší se v hodnotě alespoň jedné souřadnice.

Kartézské souřadnice mají širší využití než souřadnice na přímce<sup>1</sup>, což souvisí s tím, že už jsme schopni popisovat body celé roviny.

Zkoumáme-li objekt, který se pohybuje v rovině, a umíme-li jeho pohyb rozložit na dva přímočaré pohyby, jejichž směry jsou na sebe kolmé, potom pro popis plně doceníme kartézský systém. Jako příklad si můžeme vzít pohyb kamene, který nezbedný hoch hodil vodorovným směrem z rozhledny. Prchající lidé pod rozhlednou mohou (mají-li na to čas) pozorovat, že se kámen pohybuje po určité křivce, a ti znalí základních fyzikálních zákonů mohou tento pohyb pomocí kartézského systému analyzovat. Hoch udělal kameni určitou rychlost ve vodorovném směru, takže se kámen v tomto směru pohybuje rovnoměrně. Potom na kámen působí ještě tíhová síla, a pohybuje se tedy rovnoměrně zrychleně směrem k Zemi (uvažujeme homogenní tíhové pole a zanedbáme další síly působící na kámen, např. odpor vzduchu). To jsou dva na sebe kolmé pohyby, z nichž se skládá výsledný pohyb. Pro analýzu je vhodné zvolit kartézskou soustavu souřadnic, kde budou mít osy stejné směry jako výše zmíněné pohyby a kde budeme umět jednoduše popsat, jak se mění souřadnice kamene v čase. Tento příklad je znázorněn na *obrázku 2.3*, kde rychlost, kterou chlapec udělal kameni, je označena jako  $\mathbf{v}_0$  a tíhové zrychlení jako  $\mathbf{g}$ . Obecná poloha kamene je znázorněna bodem  $K = [x, y]$  a trajektorii, kterou kámen opíše, znázorňuje červená čerchovaná čára (obrázek zachycuje situaci od okamžiku, kdy kámen ztratil kontakt s chlapcovou rukou).



Obrázek 2.3: Pohyb kamene v kartézském systému souřadnic

Pro souřadnice kamene můžeme pomocí známých vztahů napsat, jak se mění s časem<sup>2</sup>, tedy

$$x = v_0\tau \quad \text{a} \quad y = \frac{1}{2}g\tau^2, \quad (2.1)$$

kde  $\tau$  je čas, který měříme od okamžiku, kdy kámen ztratil kontakt s chlapcovou

<sup>1</sup>Dá se říct, že souřadnice na přímce jsou speciálním případem kartézských souřadnic v rovině.

<sup>2</sup>Kromě obvyklého  $t$  se ve fyzice pro čas používá i řecké písmeno  $\tau$ , které čteme „tau“.

rukou. *Vztahy 2.1* jsou z matematického hlediska jednoduché díky tomu, že jsme si šikovně zvolili soustavu souřadnic.

*Vztahy 2.1* jsou také parametrickým vyjádřením trajektorie a pokud se zbavíme parametru ( $\tau$ ), získáme rovnici trajektorie ve zvoleném systému souřadnic. Nejjednodušší je vyjádřit si čas  $\tau$  pomocí souřadnice  $x$ , tj.  $\tau = x/v_0$ , a potom dosadit do rovnice pro souřadnici  $y$ . Dostáváme

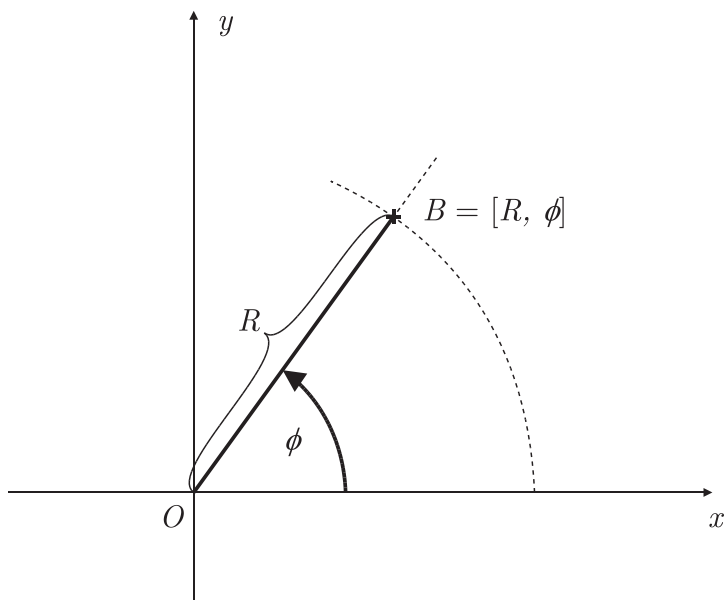
$$y = \frac{1}{2} \frac{g}{v_0^2} x^2. \quad (2.2)$$

Jelikož jsou  $g$  a  $v_0$  konstanty, je *rovnice 2.2* rovnicí paraboly s vrcholem v počátku (známe už ze střední školy:  $y = kx^2$ , kde  $k$  je konstanta).

Toto všechno jsme schopni získat díky systému souřadnic a základním fyzikálním poznatkům. V naší analýze bychom mohli zajít ještě dál, kdybychom znali další počáteční podmínku – výšku rozhledny. Potom bychom mohli spočítat, za jakou dobu kámen dopadne na zem a také, jak daleko od paty rozhledny to bude. Snad se tu tím již nemusíme zdržovat a doufejme, že jsme si dostatečně názorně ukázali užitečnost kartézského systému.

### 2.1.2 Polární systém

Druhým hojně využívaným systémem souřadnic v rovině je tzv. *polární systém*. Každý bod  $B$  roviny má dvě polární souřadnice: vzdálenost  $R$  tohoto bodu od počátku a úhel  $\phi$ , který svírá polopřímka vedená daným bodem a počátkem (průvodič  $BO$ ) s nějakou referenční polopřímkou. Běžně se jako referenční polopřímka



Obrázek 2.4: Polární systém souřadnic a bod  $B = [R, \phi]$

bere *kladná poloosa*  $x$ , což se ukáže výhodné, až budeme hledat souvislost mezi kartézským a polárním systémem. Důležitá je také dohodnutá orientace úhlu  $\phi$  – úhel odečítáme proti směru hodinových ručiček od kladné poloosy  $x$ .

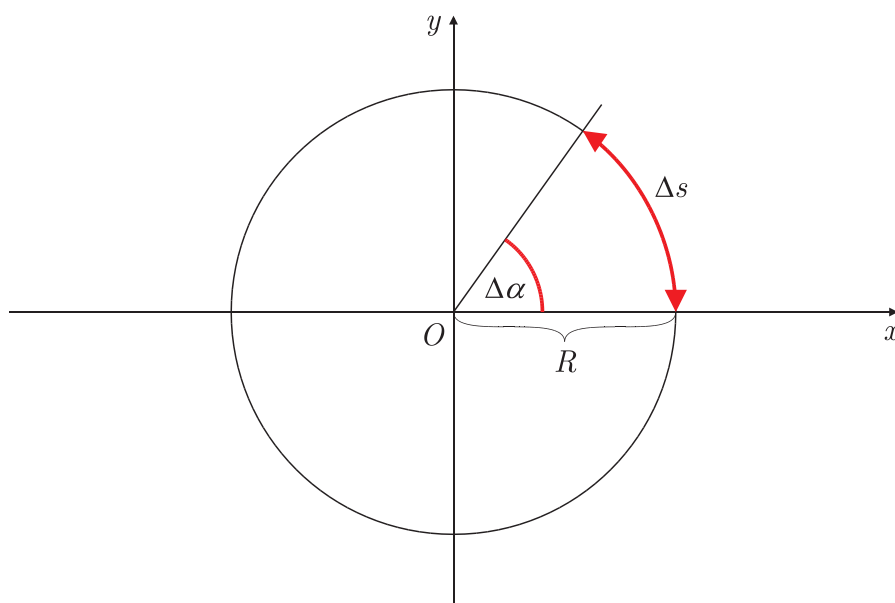
Na *obrázku 2.4* je vyznačen bod  $B$  a jeho polární souřadnice  $R$  a  $\phi$  (na obrázku je znázorněn jak polární, tak kartézský systém, které mají společný počátek).

Souřadnice  $R$  vyjadřuje vzdálenost bodu  $B$  od počátku a z toho důvodu nemůže být záporná, tj.  $R \in \langle 0, \infty \rangle$ .

Úhel  $\phi$  může nabývat všech možných hodnot od  $0^\circ$  do  $360^\circ$  (kvůli jednoznačnosti bez  $360^\circ$ , jelikož je to stejný úhel jako  $0^\circ$ ), čemuž v obloukové míře (v radiánech) odpovídá  $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ . Rozsah ve stupních jsme si uvedli pouze pro názornost, dále již budeme u rovinných úhlů pracovat téměř výhradně s radiány.

U polárního systému nastává menší problém s jednoznačností v počátku. Počátek je bod, jehož souřadnice  $R$  je nulová. Jaká je ale jeho souřadnice  $\phi$ ? Ta může nabývat jakékoliv z možných hodnot  $\langle 0, 2\pi \rangle$ , což odporuje požadavku na jednoznačnost systému. My ale tento nedostatek polárnímu systému odpustíme a nezanevřeme na něj, jelikož nám na oplátku přinese mnoho výhod při řešení některých fyzikálních problémů.

V rychlosti si zde pro připomenutí ještě shrneme, co je to *oblouková míra* a s ní související *radiány*. Na *obrázku 2.5* je kružnice o poloměru  $R$ , je zde vyznačen úhel  $\Delta\alpha$  a oblouk  $\Delta s$ , který odpovídá úhlu  $\Delta\alpha$ . Jelikož se jedná o obloukovou



Obrázek 2.5: Kružnice o poloměru  $R$  s vyznačeným obloukem náležícím úhlu  $\Delta\alpha$

míru, úhel  $\Delta\alpha$  definujeme pomocí oblouku  $\Delta s$  jako

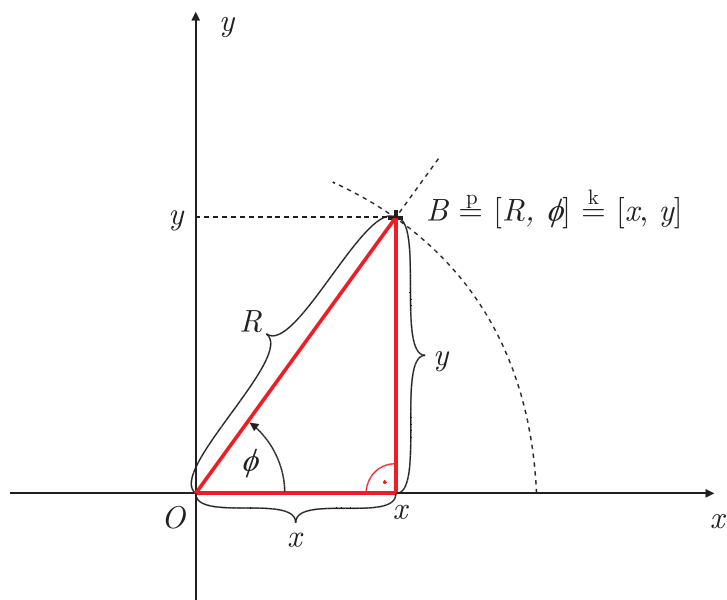
$$\Delta\alpha = \frac{\Delta s}{R}. \quad (2.3)$$

Jednotkou takového úhlu je *radián* a značí se rad (značka „rad“ se často vynechává).

Ze *vztahu 2.3* si vyjádříme délku oblouku  $\Delta s = \Delta\alpha R$ . Nyní si vezmeme půlkružnici (oblouk odpovídající úhlu  $180^\circ$ ), jejíž délka je  $\Delta s = \pi R$ , protože délka celé kružnice je podle známého vztahu  $2\pi R$ . Ze dvou předchozích vztahů nám vyplývá, že pro půlkružnici je  $\Delta\alpha = \pi$ , tj.  $180^\circ \cong \pi$  rad.

Důležité je také umět převádět souřadnice různých systémů mezi sebou, což nám může často usnadnit práci či v některých případech vůbec umožní problém vyřešit.

Na *obrázku 2.6* je bod  $B$  znázorněn v kartézském i polárním systému souřadnic se společným počátkem  $O$ . Bod  $B$  má souřadnice  $[x, y]$ , respektive  $[R, \phi]$ ; červeně je vyznačen pravoúhlý trojúhelník, z něhož snadno určíme převodní vztahy mezi kartézskými a polárními souřadnicemi.



Obrázek 2.6: Bod  $B$  v kartézském i polárním systému souřadnic

Začneme přechodem od kartézských souřadnic k polárním. Je vidět, že  $R$  je přeponou pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami  $x$  a  $y$ . Vypočítáme ho tedy podle *Pythagorovy věty* jako

$$R = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (2.4)$$

Dále si můžeme všimnout, že  $y/x$  je tangens<sup>3</sup> úhlu  $\phi$ , tj.

$$\tan \phi = \frac{y}{x}. \quad (2.5)$$

Převod polárních souřadnic na kartézské je stejně jednoduchý a snadno ho provedeme pomocí goniometrických funkcí. Ze zmíněného pravoúhlého trojúhelníku je vidět, že  $\cos \phi = x/R$  a  $\sin \phi = y/R$ , tj.

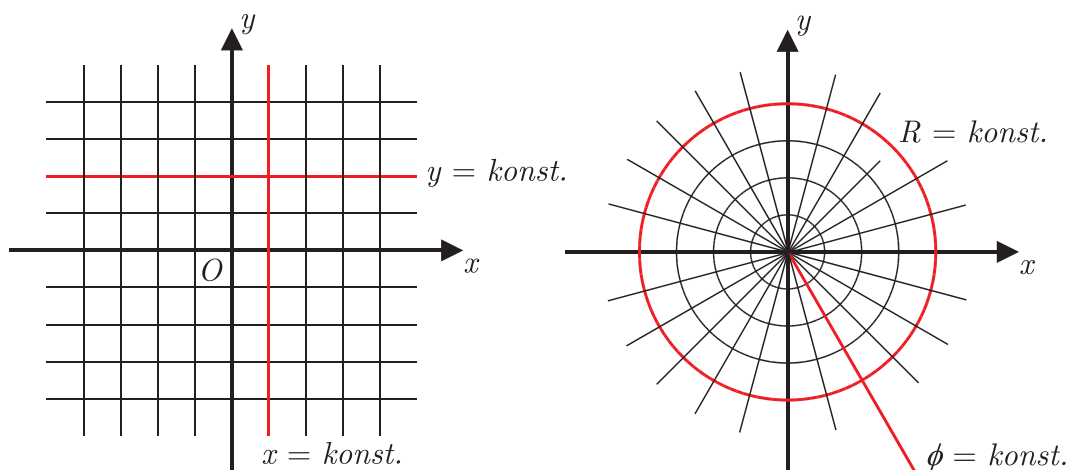
$$x = R \cos \phi, \quad (2.6)$$

$$y = R \sin \phi. \quad (2.7)$$

To je vše, co nyní potřebujeme vědět o systémech souřadnic v rovině. Snad jenom poslední poznámka: Polární souřadnice velmi oceníme při analýze pohybů po kružnicích nebo elipsách – příkladem mohou být planety ve Sluneční soustavě. Bod, který se pohybuje po kružnici, má totiž při vhodné volbě polárního systému souřadnici  $R$  konstantní a stačí pouze znát, jak se s časem mění  $\phi$ , kdežto v kartézském systému není v tomto případě ani jedna souřadnice konstantní.

Pro zajímavost a porovnání jsou na *obrázku 2.7* znázorněny množiny bodů s jednou konstantní souřadnicí (jak kartézského, tak polárního systému).

<sup>3</sup>Kromě běžného značení tg se též používá tan (zejména na kalkulačkách).



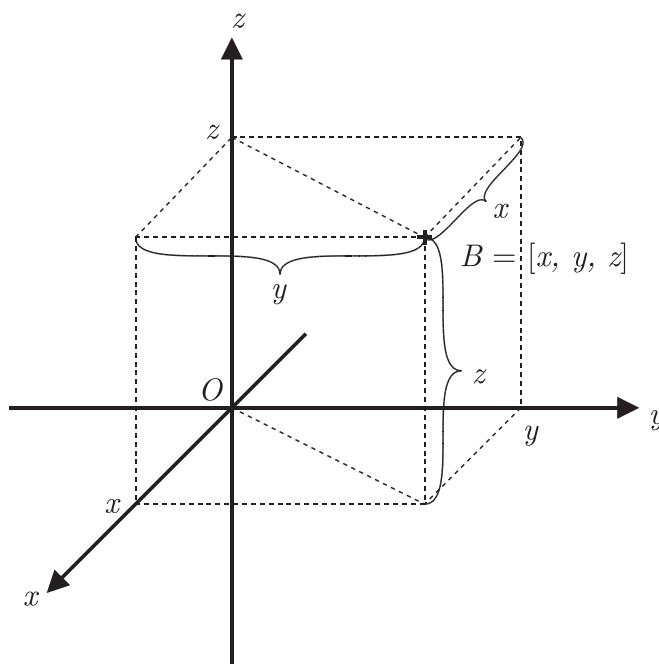
Obrázek 2.7: Množiny bodů s jednou konstantní souřadnicí

## 2.2 Systémy souřadnic v prostoru

Jelikož jsme se již podrobněji seznámili se systémy souřadnic používanými v rovině, systémy souřadnic v prostoru nám nebudou činit obtíže, protože jsou do jisté míry analogické.

### 2.2.1 Kartézský systém

Zobecnění kartézských souřadnic z roviny do prostoru není skutečně vůbec nic náročného – jednoduše přidáme další orientovanou kolmici, osu  $z$ , která nás dostane z roviny  $xy$  do prostoru, viz *obrázek 2.8*. Na obrázku je vyznačen bod  $B$  a jeho kartézské souřadnice.



Obrázek 2.8: Bod  $B$  v kartézském systému souřadnic v prostoru

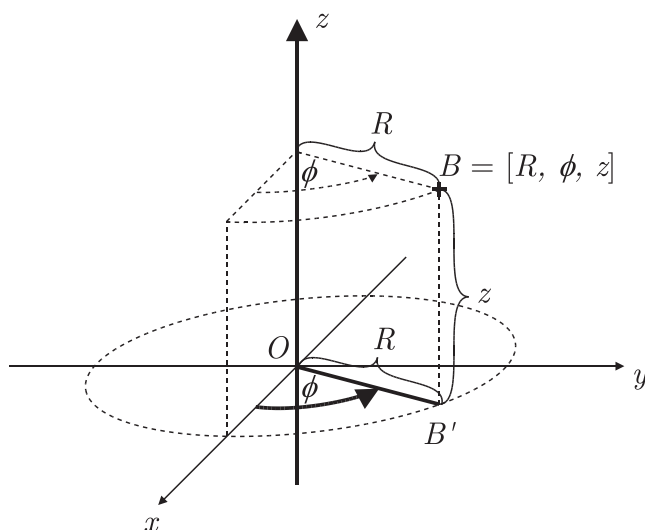


Vzhledem k tomu, že už se nacházíme v prostoru, neodpovídají souřadnice vzdálenostem od os, ale jedná se o vzdálenosti od rovin určených vždy dvěma osami. Souřadnice  $x$  (až na znaménko) je (kolmá) vzdálenost bodu od roviny  $yz$ , obdobně  $y$  od roviny  $xz$  a  $z$  od  $xy$ . Místo  $x$ ,  $y$  a  $z$  se také můžeme setkat s označením  $x_1$ ,  $x_2$  a  $x_3$ .

Na *obrázku 2.8* si také všimněme, jak je zvolena osa  $z$  vzhledem k osám  $x$  a  $y$ . Podle toho, jak ji zvolíme, rozlišujeme kartézské systémy na *pravotočivé* a *levotočivé*. Položíme-li pokrčené prsty pravé ruky tak, aby směřovaly od šipky osy  $x$  k šipce osy  $y$ , a ukazuje-li vztyčený palec ve směru šipky osy  $z$ , potom se jedná o pravotočivý systém – což je případ na našem obrázku. Pokud popsany postup funguje pro levou ruku, potom máme levotočivý systém. V běžné praxi se většinou volí systém pravotočivý.

## 2.2.2 Cylindrický (válcový) systém

*Cylindrické* nebo též *válcové* souřadnice vycházejí ze souřadnic *polárních*. Do prostoru nás opět dostane osa  $z$ , která je stejná jako v systému kartézském. Souřadnice  $z$  bude vzdálenost bodu od roviny  $xy$  (až na případné znaménko). Souřadnice  $R$  byla v polárním systému zavedena jako vzdálenost bodu  $B$  od počátku a to platí obdobně i nyní, ale jedná se o vzdálenost kolmého průmětu  $B'$  (do roviny  $xy$ ) od počátku – viz *obrázek 2.9*. To je jediná věc, na kterou si musíme dát u vál-



Obrázek 2.9: Bod  $B$  v cylindrickém systému souřadnic

cových souřadnic pozor – když odečítáme souřadnice  $R$  a  $\phi$ , pracujeme v rovině  $xy$  (popřípadě v některé z rovin, která je s rovinou  $xy$  rovnoběžná).

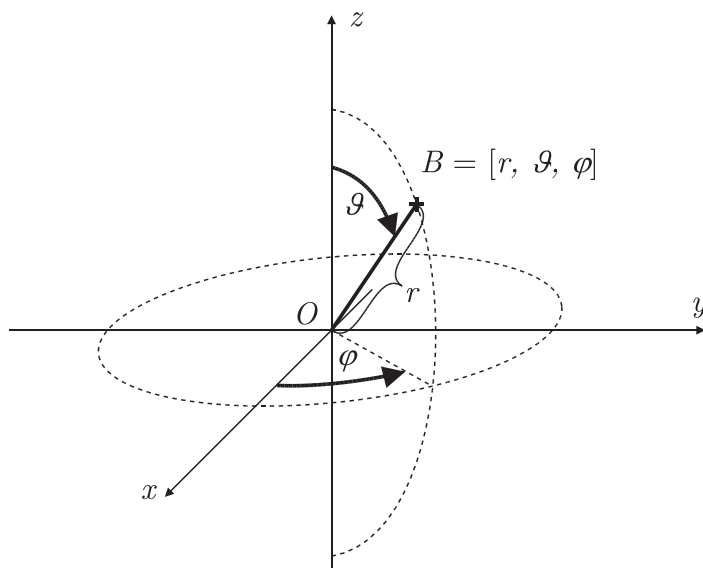
Na obrázku je také vidět, že  $R$  se dá interpretovat ještě jedním způsobem a to jako vzdálenost bodu  $B$  od osy  $z$ .

Převodní vztahy mezi cylindrickými a kartézskými souřadnicemi jsou naprosto stejné jako v případě kartézského a polárního systému v rovině:  $R = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $\tan \phi = y/x$ ,  $x = R \cos \phi$ ,  $y = R \sin \phi$  (*vztahy 2.4 až 2.7*). Jenom doplníme rovnici týkající se souřadnice  $z$ :

$$z_c = z_k, \quad (2.8)$$

kde  $z_c$  je souřadnice v cylindrickém systému a  $z_k$  v kartézském (rovnice 2.8 nám říká, že dále můžeme používat  $z$  bez indexu).

### 2.2.3 Sférický (kulový) systém



Obrázek 2.10: Bod  $B$  ve sférickém systému souřadnic

*Sférické* souřadnice jsou poslední, které uvedeme v tomto přehledu. Jak napovídá název, budou tyto souřadnice souviset s *kulovou plochou* – *sférou*.

Podobně jako jsme si při definování polárního a válcového systému pomáhali kartézskými souřadnicemi, tak kartézský systém využijeme i nyní. Na *obrázku 2.10* je bod  $B$  v kartézském a sférickém systému souřadnic, přičemž sférické souřadnice jsou označeny jako  $r$ ,  $\vartheta$  a  $\varphi$ .

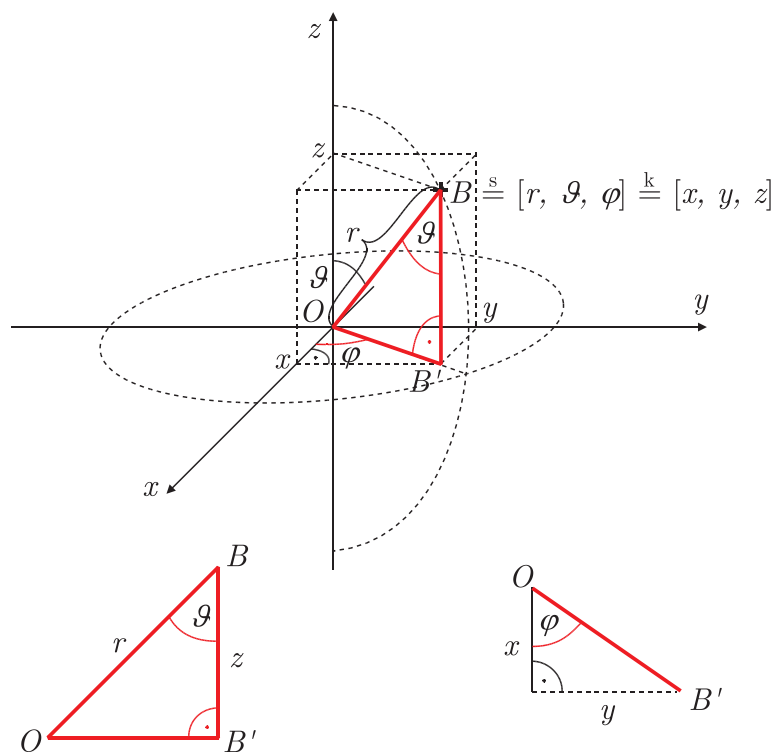
Souřadnice  $r$  znamená vzdálenost bodu  $B$  od počátku, tedy může být opět pouze nezáporná.

Souřadnice  $\vartheta$  je úhel, který svírá průvodič bodu  $B$  (tj. spojnice bodu  $B$  a počátku  $O$ ) s kladnou poloosou  $z$  a podle dohody může nabývat hodnot z intervalu  $\langle 0, \pi \rangle$ .

Souřadnice  $\varphi$  je ve sférickém systému stejná jako ve válcovém, respektive v polárním. Průvodič bodu  $BO$  se promítne do roviny  $xy$  (viz *obrázek 2.11*, úsečka  $B'O$ ) a úhel, který svírá tento průmět s kladnou poloosou  $x$ , je souřadnice  $\varphi$  (respektuje se opět dohodnutý směr). Úhel  $\varphi$  může nabývat hodnot z intervalu  $\langle 0, 2\pi \rangle$ .

Podle definice a za pomoci *obrázku 2.10* si můžeme představit, jak by vypadala množina bodů s konstantní souřadnicí  $r$ . Takové body by v prostoru vytvořily kulovou plochu o poloměru  $r$  se středem v počátku – zřejmě proto označení „sférické souřadnice“.

K určování polohy na Zemi se používají tzv. *zeměpisné souřadnice*, které souvisí se sférickým systémem (uvažujeme-li Zemi kulatou). Když si vezmeme množinu bodů s konstantní souřadnicí  $r$  (poloměr Země) a  $\vartheta$ , získáme *rovnoběžku*, jejíž zeměpisná šířka je  $|\vartheta - \pi/2|$ . Analogicky je *poledník* množina bodů s konstantním



Obrázek 2.11: Bod  $B$  ve sférickém a kartézském systému souřadnic

$r$  a  $\varphi$ , přičemž zeměpisná délka odpovídá  $\varphi$ . Zeměpisná šířka a délka se obvykle uvádí ve stupních.

Pro úplnost si ještě uvedeme převodní vztahy mezi uvedenými systémy souřadnic. K tomu si pomůžeme pravoúhlými trojúhelníky, *Pythagorovou větou*, goniometrickými funkcemi a *obrázkem 2.11*.

Z obrázku je patrné, že  $r$  je tělesová úhlopříčka kvádrů o hranách  $x$ ,  $y$  a  $z$ . Proto  $r$  spočítáme jako

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (2.9)$$

To lze snadno odvodit z červeně vyznačeného trojúhelníka, když si uvědomíme, že jeho odvěsna v rovině  $xy$ , tj. úsečka  $OB'$  (kolmý průmět  $r$  do roviny  $xy$ ), má velikost  $\sqrt{x^2 + y^2}$  a druhá odvěsna je  $z$ .

Z červeného trojúhelníku odvodíme i  $\vartheta$ . Když využijeme funkci tangens, dostaneme

$$\tan \vartheta = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{z} \quad (2.10)$$

Souřadnice  $\varphi$  má stejný charakter jako v polárním a cylindrickém systému, a tudíž se opět určí jako

$$\tan \varphi = \frac{y}{x}, \quad (2.11)$$

což je vidět i z obrázku.

Nyní si vyjádříme kartézské souřadnice pomocí sférických. Začneme se souřadnicí  $z$ , jelikož je to nejjednodušší. V červeném trojúhelníku platí, že  $\cos \vartheta = z/r$ , tj.

$$z = r \cos \vartheta \quad (2.12)$$

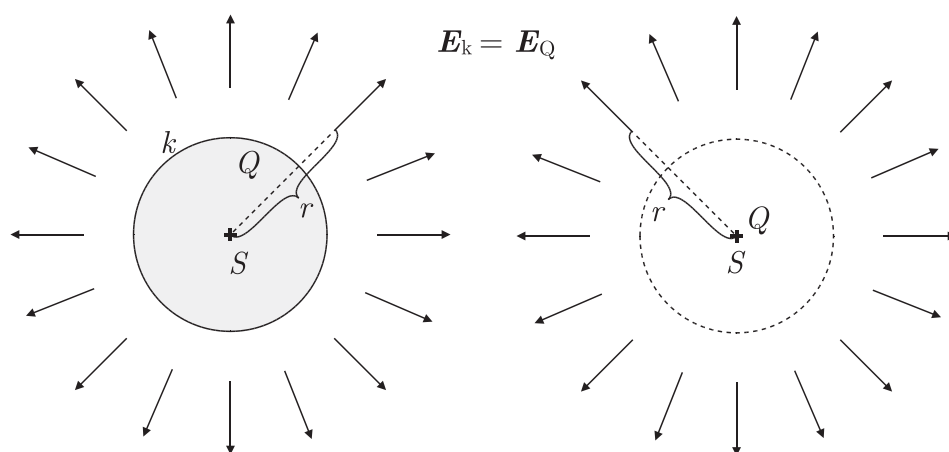
Souřadnice  $x$  a  $y$  určíme pomocí úhlu  $\varphi$  a kolmého průmětu  $r$  do roviny  $xy$ , což je  $r \sin \vartheta$  (úsečka  $OB'$ ). Pro souřadnici  $x$  platí, že  $\cos \varphi = x/r \sin \vartheta$ , tedy

$$x = r \sin \vartheta \cos \varphi \quad (2.13)$$

Pro  $y$  je postup analogický a dostáváme

$$y = r \sin \vartheta \sin \varphi \quad (2.14)$$

Na úplný závěr nesmíme zapomenout na využití sférických souřadnic. Zvolit sférické souřadnice je vhodné v situacích, kdy se vyskytuje sférická symetrie. Například gravitační pole hmotného bodu míří radiálně do jediného bodu a se vzrůstající vzdáleností klesá velikost jeho intenzity ve všech směrech stejným způsobem ( $\sim 1/r^2$ ). To znamená, že množiny bodů, kde má intenzita stejnou velikost, tvoří sféry (pokud pracujeme s potenciálem, abychom se vyhnuli vektorům, tvoří tyto sféry tzv. *ekvipotenciální* plochy – množiny bodů se stejným potenciálem).



Obrázek 2.12: Elektrostatické pole nabitě vodivé koule  $k$  a bodového náboje  $Q$

Dalším příkladem může být elektrostatické pole nabitě vodivé koule. Z *Gaussova zákona elektrostatiky* vyplývá, že vně vodivé koule  $k$  s celkovým nábojem  $Q$  a se středem v bodě  $S$  je elektrostatické pole stejné, jako kdyby byl v bodě  $S$  umístěn pouze bodový náboj  $Q$  (viz *obrázek 2.12*). Elektrická intenzita v tomto případě tvoří opět radiální, tj. sféricky symetrické pole, a pro  $r$  větší než poloměr koule  $k$  platí, že  $E_k = E_Q = cQ/r^2$ , kde  $c$  je konstanta charakterizující dané prostředí, v němž se koule a bodový náboj nachází.

# Kapitola 3

## Limita funkce

Limity jsou důležitým matematickým aparátem, na kterém je vystavěna matematická analýza. Jelikož se ve fyzice hojně využívají derivace, integrály a diferenciální rovnice, což jsou partie matematické analýzy, rozhodně nebude od věci se s limity seznámit alespoň na základní úrovni.

Výklad matematické analýzy začíná většinou limity posloupností, potom přijde slavný matematik Heine a jednou větou převede vše na limity funkcí. My se tu nechceme zabývat matematickou analýzou do podrobností, a proto rovnou přeskočíme na limity funkcí, protože se chceme rychle dostat k derivacím funkcí (a později též k integrálům funkcí).

Abychom posloupnosti úplně neodstrčili a nekřivdili jim, tak musíme připomenout, že mají ve fyzice nezastupitelné místo. Analyticky lze totiž vyřešit pouze „velmi málo“ úloh. Oproti tomu posloupnosti nabízí širokou škálu metod, jak lze v reálném čase a s požadovanou přesností vyřešit rovnice a problémy, na které je zbytek matematiky analýzy krátký. Kdybychom při našem fyzikálním bádání potřebovali vyřešit rovnici  $x = \cos x$ , mohli bychom narazit. Takováto rovnice se musí řešit numericky a k tomu nám poslouží posloupnosti. Podobných rovnic, které se musí řešit numericky, je naneštěstí pro nás mnohem více než rovnic řešitelných analyticky. Nebudeme zde dále rozebírat numerické metody a jak konkrétně s v nich využijí posloupnosti, ale vrátíme se k limitám funkcí, o které nám nyní jde.

Abychom mohli počítat limity funkcí, je dobré si v rychlosti připomenout, co to je funkce.

### 3.1 Funkce

#### 3.1.1 Zavedení pojmu funkce

Funkce si osvětlíme pomocí pojmu funkce reálné proměnné. *Funkce jedné reálné proměnné* je zobrazení

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}.$$

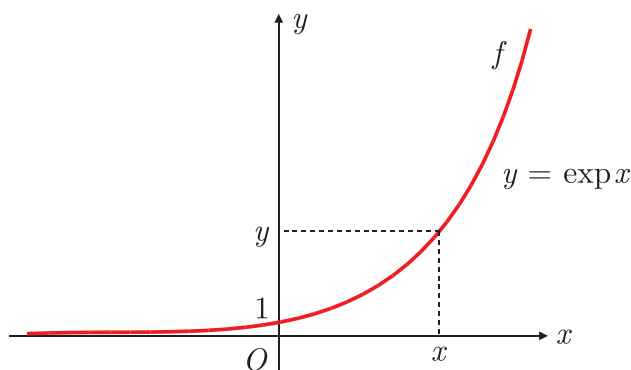
Co ale tento zápis znamená? Zjednodušeně lze říci, že funkce  $f$  je předpis přiřazující podle určitého pravidla reálnému číslu nějaké reálné číslo, a to nejvýše jedno.

Definici obecnějšího pojmu než je funkce, totiž pojmu zobrazení, si můžeme uvést pomocí množin: *Nechť  $M$ ,  $N$  jsou neprázdné množiny. Binární relaci  $f \subset$*

$M \times N$  nazýváme zobrazení z  $M$  do  $N$ , jestliže  $\forall x \in M$  a  $\forall y_1, y_2 \in N$  platí:  $([x, y_1] \in f \wedge [x, y_2] \in f) \Rightarrow (y_1 = y_2)$ . A lze říci, že funkce jsou zobrazení<sup>1</sup>, se kterými se „hezky počítá“, tedy zobrazení, kde zobrazujeme mezi číselnými obory.

U funkce reálné proměnné  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je  $M$  i  $N$  množina  $\mathbb{R}$  (nebo její podmnožiny), binární relace přiřadí proměnné  $x$  podle určitého pravidla  $y$  a udělá z nich uspořádanou dvojici  $[x, y]$ . Poslední část definice zobrazení je pouze matematicky zapsaná podmínka, že se k  $x$  smí přiřadit nejvýše jedno  $y$ .

Ukažme si to na příkladu: Mějme funkci  $f$ , která reálnému číslu  $x$  ( $x \in \mathbb{R}$ ) přiřadí číslo  $y \in \mathbb{R}$  podle pravidla<sup>2</sup>  $y = \exp x$ , tedy  $f : x \mapsto \exp x$ . Nesmíme zapomenout na podmínku, že každému  $x$  je přiřazeno nejvýše jedno  $y$ , což ale naše „přiřazovací pravidlo“ splňuje, takže je vše v pořádku. Předchozí slovní vyjádření lze zapsat zkráceně jako  $f : y = \exp x$  a znázorněno je na *obrázku 3.1*, čemuž říkáme *graf* funkce.



Obrázek 3.1: Graf funkce  $f : y = \exp x$  v kartézském systému souřadnic

Můžeme si všimnout, že graf funkce je umístěn v kartézském systému souřadnic, protože proměnná  $x$  a jí přiřazené  $y$  tvoří uspořádanou dvojici  $[x, y]$ , což můžeme chápat jako souřadnice bodu v kartézské rovině  $xy$ .

Kromě značení  $f : y = \exp x$  se také používá  $f(x) = \exp x$ , ale jedná se o dva ekvivalentní zápisy téže funkce, a je na nás, pro který se rozhodneme. Ve fyzice se budeme setkávat spíše s druhou možností, protože se tím zdůrazňuje, na čem zkoumaná fyzikální veličina (funkce) závisí. Například poloha hmotného bodu bývá často funkcí času (hmotný bod se pohybuje), a abychom to zdůraznili, nepíšeme pouze  $\mathbf{r}$ , ale  $\mathbf{r}(t)$ , přičemž  $\mathbf{r}$  je označení polohového vektoru hmotného bodu.

U funkce  $y = f(x)$  rozlišujeme tzv. *definiční obor*  $D_f$  a *obor hodnot*  $H_f$ . *Definiční obor* je množina všech  $x$ , pro které má funkce smysl (pro tato  $x$  jsme schopni vypočítat hodnoty  $y$ ), to je tzv. *maximální definiční obor*. Nebo se jako definiční obor bere podmnožina maximálního definičního oboru. *Obor hodnot* je množina všech  $y$ , která získáme dosazením všech  $x$  z definičního oboru do předpisu funkce. V řeči množin je definiční obor a obor hodnot funkce reálné proměnné  $D_f = \{x; f(x) \text{ je definováno}, x \in \mathbb{R}\}$  a  $H_f = \{y; y = f(x), x \in D_f\}$ . Pokud

<sup>1</sup>Ze zmíněných pojmů je nejobecnější pojem binární relace, pod ním zobrazení, a pak funkce. Funkce budeme ještě dále dělit.

<sup>2</sup> $\exp x = e^x$

se podíváme znovu na definici zobrazení, kterou jsme si uvedli výše, zjistíme, že  $M = D_f$  a  $N = H_f$ .

Hodnoty *exponenciály*  $\exp x$  jsme schopni vypočítat pro všechna  $x \in \mathbb{R}$ , takže  $D_f$  je množina všech reálných čísel  $\mathbb{R}$ . Pokud se z nějakého důvodu rozhodneme definovat ji pouze na intervalu, který je podmnožinou  $\mathbb{R}$ , potom by byl definiční obor pouze tento zvolený interval.

Obor hodnot exponenciály můžeme vyčíst z grafu. Je-li  $D_f = \mathbb{R}$ , potom je  $H_f = (0, +\infty)$ .

Kdybychom se rozhodli, že si funkci  $f : y = \exp x$  definujeme pouze pro  $x \in \langle 0, 1 \rangle$ , potom by byl definiční obor  $D_f = \langle 0, 1 \rangle$  a obor hodnot  $H_f = \langle 1, e \rangle$ .

Vrátíme se ještě k pojmu *graf* funkce, který tu používáme v souvislosti s obrázkem funkce, a řekneme si pořádně, o co se jedná. *Grafem funkce*  $f$  označujeme množinu všech uspořádaných dvojic  $[x, f(x)]$ ,  $x \in D_f$ , což je jednoduše množina všech bodů se souřadnicemi  $x$  a  $y = f(x)$ .

### 3.1.2 Některé důležité funkce

Funkce se dělí na mnoho různých typů a my si některé základní osvěžíme. Nej-jednodušší je zřejmě funkce typu

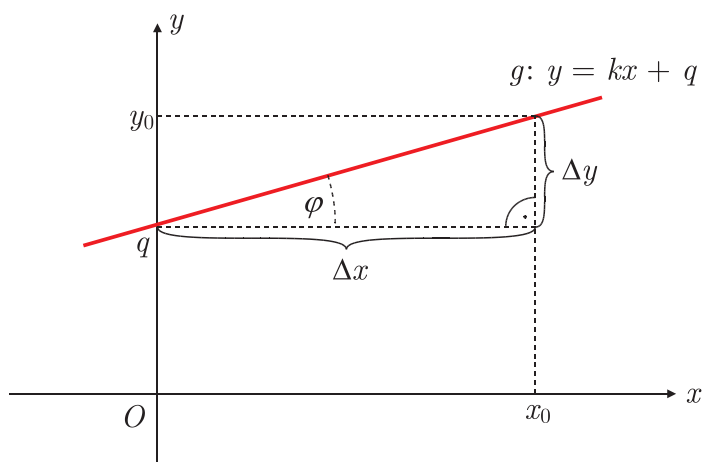
$$f : y = k, \tag{3.1}$$

kde  $k \in \mathbb{R}$  je konstanta. Této funkci říkáme *konstantní funkce*. Jelikož má pro všechna  $x \in D_f$  stejnou funkční hodnotu, je grafem rovnoběžka s osou  $x$ , která protíná osu  $y$  v bodě  $[0, k]$ .

Dalším typem je tzv. *lineární funkce*, která je daná rovnicí

$$g : y = kx + q, \tag{3.2}$$

kde  $k$  a  $q$  jsou konstanty ( $k, q \in \mathbb{R}$ ), přičemž  $k$  se nazývá *směrnice* a  $q$  *absolutní člen*. Obecná lineární funkce je znázorněna na *obrázku 3.2*. Jak je vidět, grafem



Obrázek 3.2: Lineární funkce v kartézském systému souřadnic

lineární funkce je přímka. Absolutní člen  $q$  nám říká, kde přímka (graf funkce) protíná osu  $y$ . Průsečík s osou  $y$  má souřadnici  $x = 0$ , po dosazení do *vztahu 3.2*

získáme funkční hodnotu  $y = 0 \cdot x + q = q$  a hledaný průsečík má tedy souřadnice  $[0, q]$ .

Směrnice  $k$  říká, jak velký je sklon přímky – jak rychle roste (pro  $k > 0$ ), popřípadě klesá ( $k < 0$ ). Tuto vlastnost směrnice si ověříme v pravoúhlém trojúhelníku na *obrázku 3.2*. Sklon přímky nám charakterizuje úhel  $\varphi$ . Když si to rozmyslíme, zjistíme, že je to úhel, který svírá přímka (graf) s osou  $x$ , přičemž jako  $\varphi$  se vždy bere příslušný ostrý úhel. Když je tento úhel velký, má také přímka velký sklon; pokud se úhel  $\varphi$  „zmenšuje“, blíží se přímka k rovnoběžce s osou  $x$ , až s touto rovnoběžkou splyne pro  $\varphi = 0$ .

Využijeme-li funkci tangens v pravoúhlém trojúhelníku na *obrázku 3.2*, získáme vztah

$$\tan \varphi = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_0 - q}{x_0 - 0} = \frac{(kx_0 + q) - q}{x_0} = \frac{kx_0}{x_0} = k. \quad (3.3)$$

*Vztah 3.3* nám ukazuje, že směrnice  $k$  má skutečně vypovídající hodnotu o tom, jaký má přímka sklon (jak strmě roste nebo klesá). Zjednodušeně, pro rostoucí  $\varphi$  roste i  $\tan \varphi$ , a tedy i  $k$ ; pro klesající  $\varphi$  klesá i  $\tan \varphi$  a stejně i  $k$ . Pokud je  $k = 0$ , získáme konstantní funkci  $y = q$  diskutovanou výše.

$$\begin{aligned} \varphi \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right) &\Rightarrow \tan \varphi > 0 \Rightarrow k > 0 && \text{rostoucí} \\ \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right) &\Rightarrow \tan \varphi < 0 \Rightarrow k < 0 && \text{klesající} \\ \varphi = 0 &\Rightarrow \tan \varphi = 0 \Rightarrow k = 0 && \text{konstantní} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Dalším typem je funkce ve tvaru *polynomu* stupně  $n$ , jejíž obecný tvar je

$$h : y = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_3 x^3 + a_2 x^2 + a_1 x + a_0, \quad (3.5)$$

kde  $n \in \mathbb{N}$  a  $a_i \in \mathbb{R}$ ;  $i = 0, 1, 2, \dots, n$ ;  $a_n \neq 0$ .

Polynom stupně  $n = 2$  má svůj speciální název – *kvadratická funkce*, jejímž grafem je *parabola*. Na *obrázku 3.3* je speciální případ grafu funkce ve tvaru polynomu stupně dva, tedy parabola, a polynomu stupně tři. Když se nejedná o speciální případy, mohou být grafy polynomů velmi komplikované, viz *obrázek 3.3* (dole).

V příkladu jsme se již setkali s *exponenciálou*  $\exp x$ , což je speciální případ *exponenciální funkce*. Název „exponenciální“ se používá z toho důvodu, že se proměnná  $x$  nachází v exponentu. Rovnice obecnější exponenciální funkce má tvar

$$i : y = ka^{cx} + b, \quad (3.6)$$

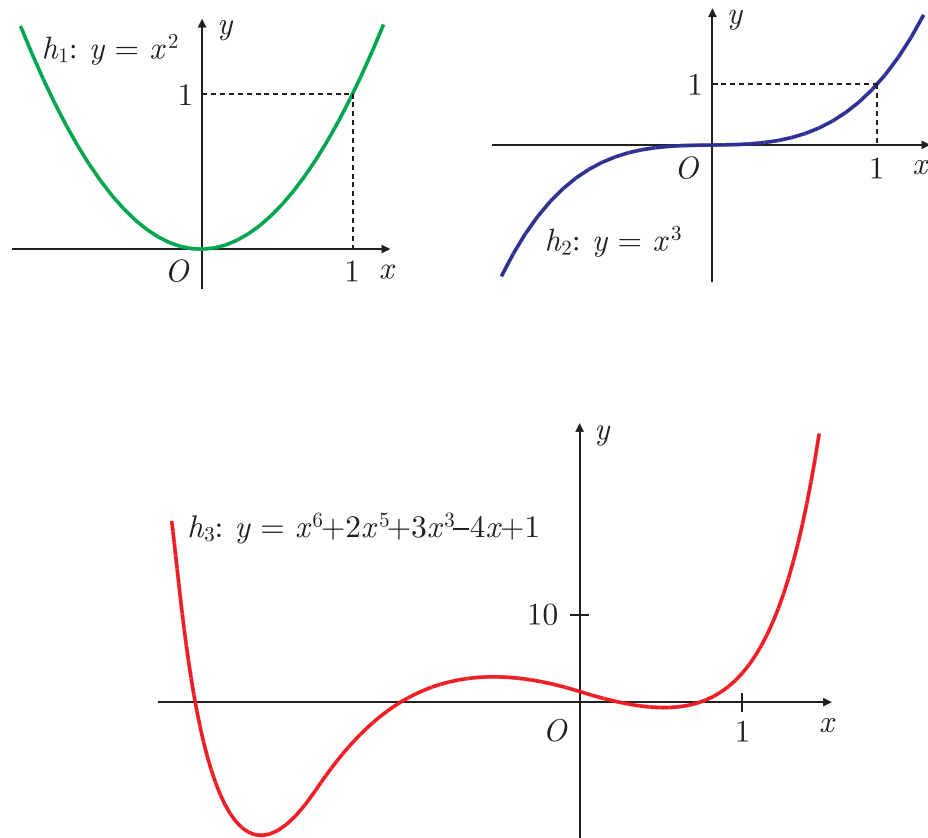
kde  $a, c, k \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ;  $a \neq 1$ ;  $b \in \mathbb{R}$ . Graf exponenciální funkce pro speciální případ, kdy  $a = e$ ,  $b = 0$ ,  $c = 1$  a  $k = 1$ , je na *obrázku 3.1*.

Typ funkce, který se nabízí připomenout po exponenciální, je funkce *logaritmická* daná rovnicí

$$j : y = k \log_a(x + c) + b, \quad (3.7)$$

kde  $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ ;  $b, c, k \in \mathbb{R}$ ;  $k \neq 0$ . Pro  $a = e$  má logaritmus speciální název – *přirozený logaritmus* a značí se místo  $\log_e x$  jednodušeji  $\ln x$ . Pokud se u logaritmu neuvádí základ  $a$ , jedná se o tzv. *dekadický logaritmus*, tj.  $\log_{10} x = \log x$ , není-li řečeno jinak. Na *obrázku 3.4* je graf funkce  $j : y = \log x$ .





Obrázek 3.3: Grafy funkcí ve tvaru polynomu v kartézském systému souřadnic (v grafech je různé měřítko na osách  $x$  a  $y$ )

Posledním typem, který si uvedeme v tomto krátkém přehledu, jsou funkce *goniometrické*. Jsou to funkce *sinus*, *kosinus*, *tangens* a *kotangens*<sup>3</sup> a v obecnějším tvaru je zapisujeme jako

$$l_1 : y = k \sin(ax + c) + b, \quad (3.8)$$

$$l_2 : y = k \cos(ax + c) + b, \quad (3.9)$$

$$l_3 : y = k \tan(ax + c) + b, \quad (3.10)$$

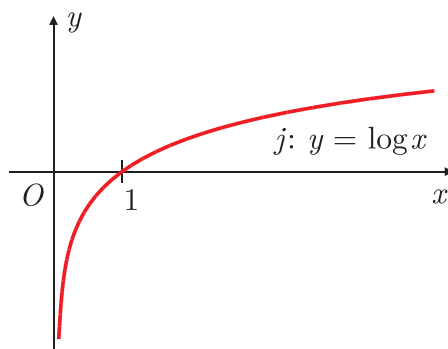
$$l_4 : y = k \cot(ax + c) + b, \quad (3.11)$$

přičemž  $a, b, c, k \in \mathbb{R}$ ;  $a, k \neq 0$ . Grafy speciálních případů uvedených funkcí jsou na *obrázku 3.5*.

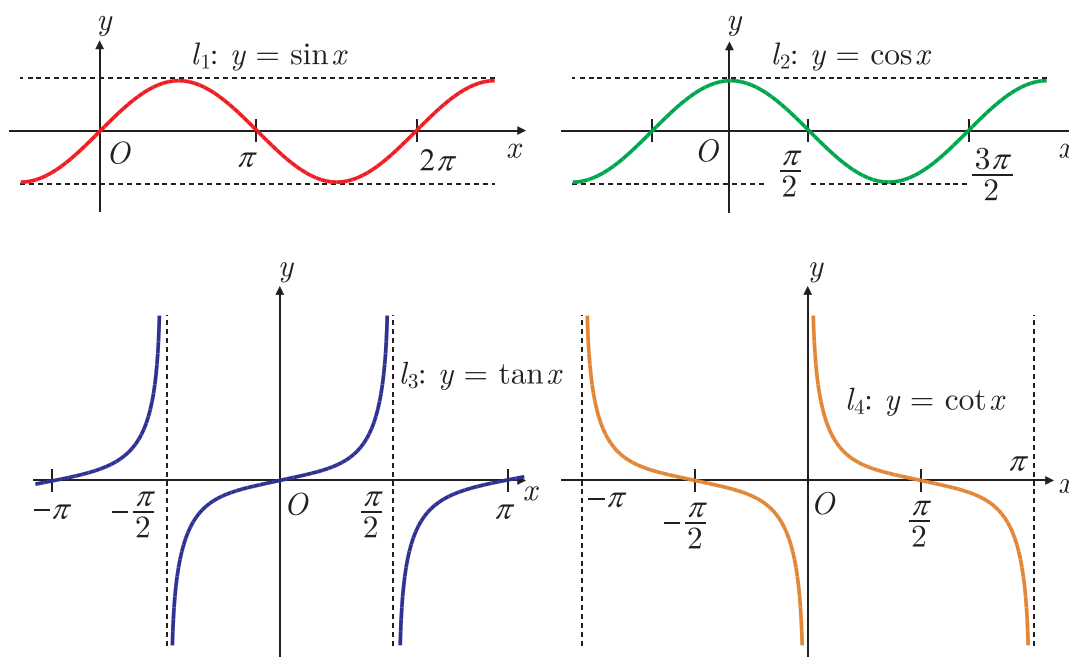
Později se nám bude hodit, když si připomeneme, že funkce tangens je definována jako  $\tan x = \sin x / \cos x$  a  $\cot x = \cos x / \sin x$ .

Tímto přehledem jsme samozřejmě nevyčerpali všechny funkce, kterými se zabývá matematická analýza, ale jako základ, na němž budeme dále stavět, nám to postačí. Za zmínku stojí např. ještě cyklometrické a hyperbolické funkce, ale ty si připomeneme, až je budeme potřebovat. V následujících kapitolách se budeme zabývat diferenciálním počtem, kde budou vystupovat zejména výše uvedené funkce.

<sup>3</sup>Tangens značíme  $\tan$ , příp.  $\operatorname{tg}$ ; kotangens se značí  $\cot$ , příp.  $\operatorname{cotg}$ .



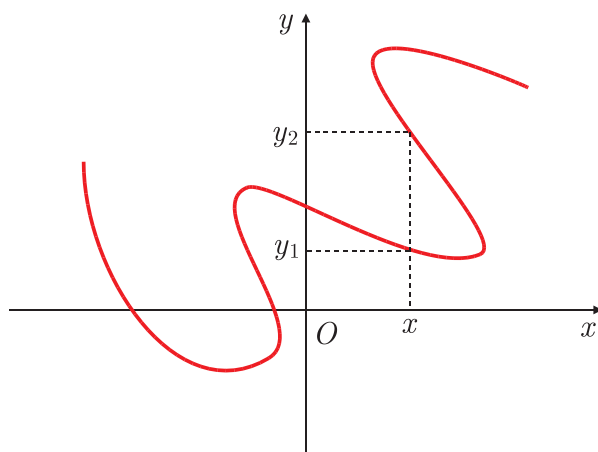
Obrázek 3.4: Logaritmická funkce se základem 10 v kartézském systému souřadnic



Obrázek 3.5: Goniometrické funkce v kartézském systému souřadnic

Na grafech dosud uvedených funkcí si všimněme, že některé grafy jsou tvořeny souvislou nepřerušovanou křivkou (exponenciála, sinus, kosinus atd.) a jiné jsou naopak tvořeny oddělenými křivkami (tangens, kotangens atd.). To nám napovídá, že se funkce dělí na *spojité* a *nespojité*. Zjednodušeně můžeme říci, že grafem spojité funkce je nepřerušovaná křivka, ale přesněji se o spojitosti funkce zmíníme, až budeme mít k dispozici pojem *limita*.

Doposud bylo vše, čím jsme se zabývali, funkce, a tudíž vyvstává otázka, co funkce není. Podle toho, jak jsme si funkci definovali, je funkce zobrazení, které splňuje podmínku, že každému  $x$  je přiřazeno nejvýše jedno  $y$ . Všimněme si, že opačně to neplatí; když k jednomu  $y$  bude existovat více  $x$ , tak to může být funkce, není tam problém v definici. Podíváme-li se znovu třeba na funkci sinus, je vidět, že jednomu  $y$  (např.  $y = -1$ ) je přiřazeno nekonečně mnoho  $x$ . Když se ale vrátíme k původní podmínce z definice funkce a podíváme se na křivky v kartézské rovině, které bychom mohli podezřít z toho, že jsou grafem nějakých funkcí, zjistíme, že mnohé křivky grafem funkce nejsou. Na *obrázku 3.6* je křivka, která evidentně nesplňuje podmínku z definice funkce (pro jedno  $x$  je tu více  $y$ ),



Obrázek 3.6: Křivka v kartézském systému souřadnic, která není grafem funkce a nemůže tedy být grafem funkce.

## 3.2 Limita funkce

### 3.2.1 Zavedení pojmu limita funkce

Teď, když jsme si zopakovali některé základní poznatky o funkcích, můžeme se podívat na pojem limita.

Víme, jak vypadají funkce jedné reálné proměnné pro  $x \in (-\infty, +\infty)$ . Matematiky ale také zajímalo, jak se funkce chovají v nekonečnách a nebo také v tzv. *bodech nespojitosti*. To, co nám, zvědavým matematikům a fyzikům, dá na tyto otázky odpověď, je pojem *limita*. Limitě totiž vůbec nevadí, že nevíme, co se s funkcemi děje přímo v nekonečnu nebo bodech nespojitosti. Limita se „rozhledne“ po okolí bodu (nekonečna jsou tzv. *nevlastní body*), který je předmětem našeho zájmu, a řekne nám, jak se funkce chová ve zkoumaném bodě na základě chování v okolí tohoto bodu.

Velmi zjednodušeně, ale názorně můžeme říct, že *limita* funkce  $f$  v daném bodě je její *očekávaná hodnota*. Pořádnou definici limity si uvedeme později.

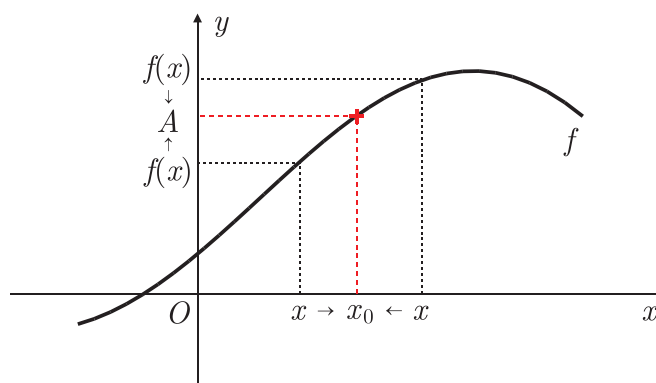
Pro limitu funkce  $f$  v bodě  $x_0$  budeme používat značení

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A, \quad (3.12)$$

kde  $x \rightarrow x_0$  znamená, že  $x$  se blíží k  $x_0$ , což je zdůraznění toho, že limita zkoumá chování funkce v blízkosti (okolí) bodu  $x_0$  a podle toho usoudí, jak to bude vypadat v  $x_0$ .

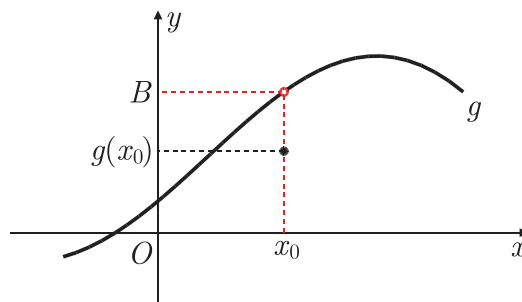
Ukažme si to na příkladu. Na *obrázku 3.7* je funkce  $f$  a nás zajímá, jak se chová v bodě  $x_0$  – takže necháme limitu, ať funkci prozkoumá. Jaká je  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ? Na obrázku je vidět, že když se proměnná  $x$  blíží ke zvolenému  $x_0$ , tak se zároveň  $f(x)$  blíží k hodnotě  $A$ . Na základě tohoto chování se dá vcelku logicky očekávat, že  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A = f(x_0)$ .

Je zřejmé, že pro spojité funkce („funkce s nepřetrženým grafem“) bude limita funkce  $f$  pro všechna  $x_0 \in D_f$  rovna funkční hodnotě  $f(x_0)$ . V předchozí větě jsme vlastně intuitivně vymysleli definici spojitosti funkce: *Funkce  $f$  je na intervalu  $(a, b)$  spojitá právě tehdy, když  $\forall x_0 \in (a, b)$  je  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .*



Obrázek 3.7: Limita funkce  $f$  v bodě  $x_0$

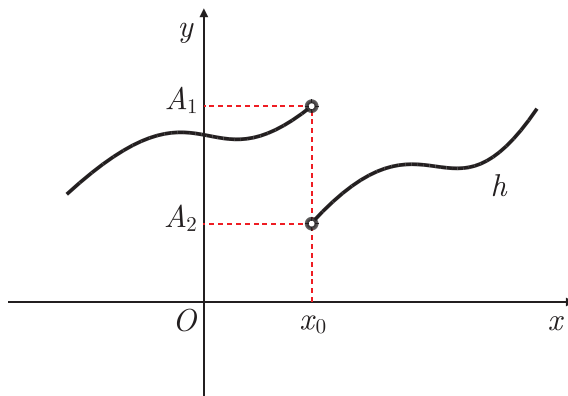
Předtím jsme se zmínili, že nás budou zajímat body nespojitosti a nevlastní body. Podívejme se tedy na funkci  $g$ , která je na *obrázku 3.8* (graf funkce  $g$  je tvořen přerušovanou křivkou a bodem) a která je v bodě  $x_0$  „přetržená“, tj. nespojitá. Jelikož se limita stará pouze o  $x$  v těsném okolí  $x_0$  (ale ne přímo v  $x_0$ ),



Obrázek 3.8: Limita funkce  $g$  v bodě  $x_0$

nijak nepozná, že si  $g(x_0)$  „odskočila“ a není rovna očekávané hodnotě. Limita tedy očekává hodnotu  $B$ , a je tedy rovna  $B$ , zatímco funkční hodnota je jiná, tj.  $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = B \neq g(x_0)$ .

Nespojité funkce ale nemusí být tak „hezké“, jako je funkce  $g$  na *obrázku 3.8*. Zjistěme, jaká je limita funkce  $h$  v bodě  $x_0$ , viz *obrázek 3.9*. Zkoumáme-li funkci



Obrázek 3.9: Limita funkce  $h$  v bodě  $x_0$

$h$  v hodnotách vlevo od  $x_0$  (pro  $x < x_0$ ), očekáváme v  $x_0$  hodnotu  $A_1$ . Naopak,

jdeme-li zprava ( $x > x_0$ ), očekáváme hodnotu  $A_2$ . Jelikož  $A_1 \neq A_2$ , říkáme, že limita neexistuje – není žádný rozumný důvod upřednostnit jedno z čísel  $A_1$ ,  $A_2$  a na druhé zapomenout a rozhodnout o limitě. Z tohoto důvodu se pro tyto případy zavádí pojem *jednostranná limita*.

Jednostranné limity zkoumají funkci pouze z jedné strany od bodu  $x_0$ . Pro případ funkce  $h$  na *obrázku 3.9* je limita zleva v bodě  $x_0$

$$\lim_{x \rightarrow x_0^-} h(x) = A_1, \quad (3.13)$$

přičemž  $x \rightarrow x_0^-$  značí, že se k  $x_0$  blížíme zleva (z menších hodnot, proto znaménko minus). Limita zprava je

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} h(x) = A_2, \quad (3.14)$$

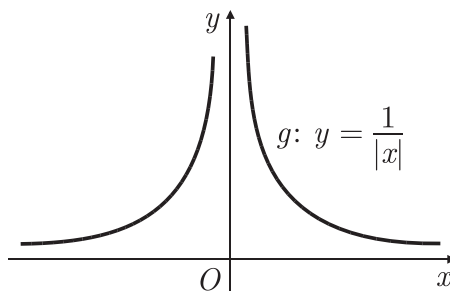
$x \rightarrow x_0^+$  logicky znamená, že se  $x$  blíží k  $x_0$  zprava.

Pro limity platí jednoduchá matematická věta, kterou nebudeme dokazovat, jelikož zatím nemáme limity matematicky pořádně zdefinované. *Mějme funkci  $f$  a zvolme si bod  $x_0 \in D_f$ ,  $A \in \mathbb{R}$ . Potom platí*

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A. \quad (3.15)$$

Když se vrátíme k funkci  $f$  na *obrázku 3.7* a rozmyslíme si, jak je to s jednostrannými limitami v bodě  $x_0$ , bude nám předchozí věta připadat zřejmá i bez důkazu.

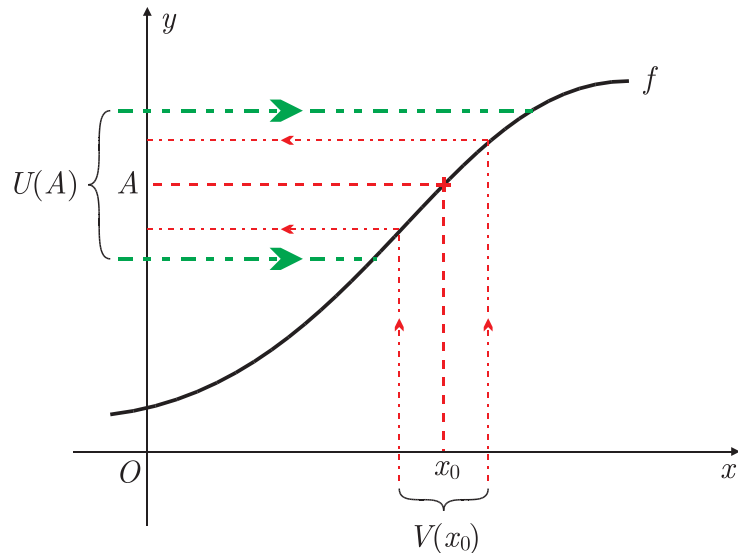
Nyní se konečně dostaneme k nekonečnu. Vezmeme si funkci  $y = 1/|x|$ , viz *obrázek 3.10*, a zajímá nás její limita v nule, tj.  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x|$ . Blížíme-li se k 0



Obrázek 3.10: Funkce  $g : y = 1/|x|$  v kartézském systému souřadnic

zprava i zleva, rostou hodnoty  $y$  nade všechny meze (ať si zvolíme jakoukoliv mez, tak ji naše funkce svými hodnotami přežije, jak budeme dosazovat čísla bližší a bližší k 0), a tedy  $\lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = +\infty$ . Je to podobné, jako by nám limita dovolila „dělit nulou“, protože když máme „ $1/0$ “, ptáme se, „kolikrát se nula vejde do jedničky?“. Můžeme si představit, že nulu lze pořád dokola přidávat a takto se jednička nikdy nevyplní – odpověď je tedy nekonečněkrát (pro jistotu upozorníme, že dělit nulou nelze, předchozí úvahy byly pouze pro představu).

Limity nám také řeknou, jak funkce vypadají v „nedohlednu“, tj. když  $x \rightarrow \pm\infty$ . Například  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty$ , na čemž není asi nic překvapivého. Když půjdeme na druhou stranu, tak např.  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$  (vlastně dělíme jedničku stále vyšší mocninou  $e$ ), což je krásně vidět na grafu exponenciály na *obrázku 3.1*.



Obrázek 3.11: Definice limity funkce  $f$  v bodě  $x_0$

Když už máme hrubou představu o tom, co to limita je, uvedme si její pořádnou definici.

Mějme funkci  $f$ , okolí  $U(A)$  a  $V(x_0)$ . Říkáme, že  $A$  je limitou funkce  $f$  v bodě  $x_0$ , jestliže  $\forall U(A) \exists V(x_0)$  tak, že  $\forall x \in V(x_0)$ ,  $x \neq x_0$ , platí, že  $f(x) \in U(A)$ . Píšeme  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ . S prohlédnutím definice by nám měl pomoci obrázek 3.11. Kdyby nás limity zajímaly více, tak například v [1], s. 54, jsou limity definovány se vší parádou.

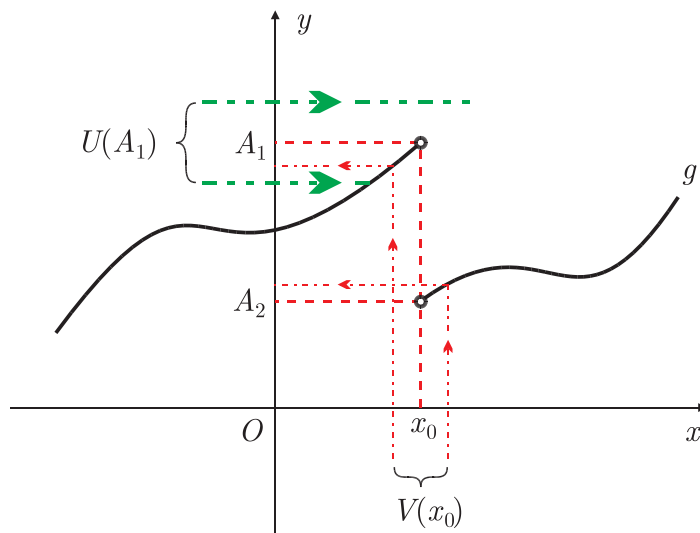
Doufejme, že definice limity nás utvrzuje v tom, že jsme si udělali správnou představu o limitách. Říká nám, že limita funkce v bodě  $x_0$  je takové číslo  $A$ , pro které platí, že když si vezmeme jakékoliv jeho okolí  $U(A)$  (libovolně malý interval  $(A - \varepsilon, A + \varepsilon)$ ,  $\varepsilon > 0$ ), vždy najdeme okolí  $V(x_0)$  (vhodný interval  $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ ,  $\delta > 0$ ) takové, že funkční hodnoty  $f(x)$  pro všechna  $x$  ( $x \neq x_0$ ) z tohoto okolí budou spadat do  $U(A)$ . A to je „jenom trochu složitě“ řečeno, že zkoumáme funkci v okolí bodu  $x_0$  a podle toho si děláme představu o tom, jak to vypadá přímo v bodě  $x_0$ .

Na obrázku 3.9 byla funkce, u které v bodě  $x_0$  limita neexistovala. Pokud si vezmeme obdobnou funkci, viz obrázek 3.12 a nakreslíme si příslušná okolí, zjistíme, že nám definice limity řekne to samé, co jsme předtím určili intuitivně. Limita neexistuje, protože kdybychom předpokládali, že limitou bude  $A_1$ , nejsme schopni nalézt okolí  $V(x_0)$  takové, že všechna  $f(x)$ , kde  $x \in V(x_0)$  a  $x \neq x_0$ , „spadnou“ do  $U(A_1)$ . Pro  $A_2$ , případně další kandidáty na limitu, je to analogické.

### 3.2.2 Vlastnosti a výpočet limit

Než si vypočteme pár ukázkových příkladů, uvedeme si základní pravidla platící pro limity:

- Funkce má v daném bodě nejvýše jednu limitu.
- $f \leq g$  nebo  $f < g \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \alpha f(x) = \alpha \lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$



Obrázek 3.12: Funkce  $g$ , která nemá limitu v bodě  $x_0$

- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g) = \lim_{x \rightarrow x_0} f + \lim_{x \rightarrow x_0} g$ ,  
až na případ, kdy na pravé straně vychází jedna limita  $+\infty$  a druhá  $-\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} (f \cdot g) = (\lim_{x \rightarrow x_0} f) \cdot (\lim_{x \rightarrow x_0} g)$ ,  
až na případ, kdy na pravé straně vychází jedna limita 0 a druhá  $\pm\infty$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\lim_{x \rightarrow x_0} f}{\lim_{x \rightarrow x_0} g}$ ,  
pokud  $\lim_{x \rightarrow x_0} g \neq 0$
- $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = f(\lim_{x \rightarrow x_0} g(x))$  nebo  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(g(x)) = \lim_{y \rightarrow g(x_0)} f(y)$

Zmíněná pravidla jsou v podstatě matematické věty, pro které platí určité předpoklady, jak je u každého z nich alespoň částečně naznačeno. V literatuře najdeme uvedené a další věty pro limity funkce například v [1], odst. 3.6.

Nyní spočítáme několik základních příkladů, které pro nás mohou představovat návod, jak řešit limity. Obecně se budeme snažit „chytrými úpravami“ převést výraz v limitě na tvar, do něž lze dosadit a kdy už bude evidentní, jaké hodnoty limita nabývá. Evidentní nejsou výrazy „0/0,  $\infty/\infty$ ,  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ “ atd. (tzv. *neurčitě výrazy*).

### Př. 1

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3}{5} = ? \quad (3.16)$$

Nejprve si vezmeme velmi jednoduchý příklad. Když dosadíme bod, ve kterém nás limita zajímá, bude evidentní, jaká je limita (nezískáme neurčitý výraz).

$$\lim_{x \rightarrow 5} \frac{x^3}{5} = \frac{5^3}{5} = 25 \quad (3.17)$$

Funkce  $x^3/5$  je totiž v bodě  $x_0 = 5$  spojitá, a protože je v takovém případě limita rovna funkční hodnotě (viz funkce  $f$  na *obrázku 3.7*), je limita v příkladě rovna  $x_0^3/5$ .

**Př. 2**

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = ? \quad (3.18)$$

Druhý příklad na první pohled evidentní není. Když dosadíme, získáme neurčitý výraz „0/0“. Můžeme si ale všimnout, že výraz v čitateli lze rozložit a pak částečně zkrátit s výrazem ve jmenovateli (krácení probíhá mimo bod  $x = 1$ , kde by to zlobilo, ale limita si tohoto bodu nevšímá). Potom získáme limitu výrazu, v kterém stačí už jen dosadit (protože takto získaná funkce je již v  $x_0 = 1$  spojitá).

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x - 1)(x + 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} (x + 1) = 2 \quad (3.19)$$

Funkce  $(x^2 - 1)/(x - 1)$  a  $x + 1$  jsou mimo bod  $x_0 = 1$  stejné.

**Př. 3**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2}{1 + 2x^2} = ? \quad (3.20)$$

Ve třetím příkladě dělíme polynom polynomem a  $x \rightarrow +\infty$ . V takovém případě se v limitě projeví pouze nejvyšší mocniny  $x$  („utíkají“ do nekonečna rychleji než nižší mocniny). To je vidět, když vytkneme v čitateli i ve jmenovateli nejvyšší mocninu  $x$ . Potom jdou členy obsahující  $x$  k nule ( $1/x$  a  $1/x^2$  jdou pro  $x \rightarrow +\infty$  k nule) a limitu nijak neovlivní. V našem případě jsme vytkli v čitateli i ve jmenovateli  $x^2$ , což se hezky zkrátí.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x - x^2}{1 + 2x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2(\frac{1}{x} - 1)}{x^2(\frac{1}{x^2} + 2)} = -\frac{1}{2} \quad (3.21)$$

**Př. 4**

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x}{5^x + 6^x} = ? \quad (3.22)$$

U exponenciál je výpočet analogický jako u mocnin; vytýkáme členy, které nejrychleji „běží“ do nekonečna. Potom nám u „pomalejších“ exponenciál vzniknou výrazy typu  $(a/b)^x$ , kde  $0 < a < b$ , což jde k nule, když se zvětšuje  $x$  k nekonečnu. Pro úplnost, výraz  $(c/d)^x \rightarrow \infty$  pro  $c > d > 0$  a  $x \rightarrow +\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3^x + 4^x}{5^x + 6^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x \left( \left( \frac{3}{4} \right)^x + 1 \right)}{6^x \left( \left( \frac{5}{6} \right)^x + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4^x}{6^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left( \frac{4}{6} \right)^x = 0 \quad (3.23)$$



# Kapitola 4

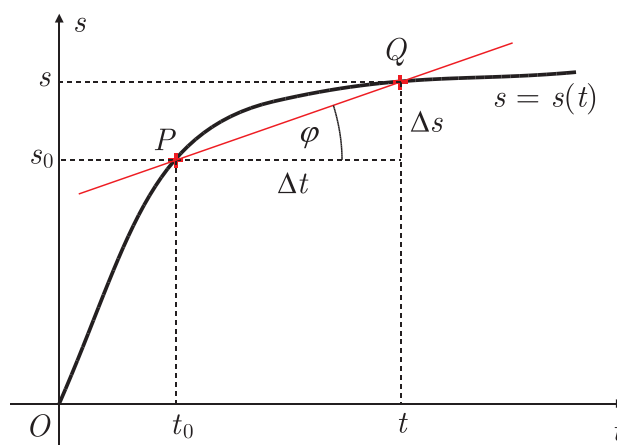
## Derivace funkce

### 4.1 Zavedení pojmu derivace

V této kapitole se dostáváme na začátek velice mocného matematického aparátu, který je v dnešní fyzice nepostradatelný, a tím je tzv. *diferenciální počet*.

Za diferenciální počet vdčíme (nejen) dvěma géniům své doby, kteří nezávisle na sobě vytvořili základy této části matematiky. Byli jimi Isaac Newton a Gottfried Wilhelm Leibniz.

Proč vlastně vniklo to, čemu dnes říkáme diferenciální počet? Představme si, že jsme Isaacové Newtonové a máme problém. Dovedeme popsat dráhu hmotného bodu jako funkci času, tj.  $s = s(t)$ . Dovedeme dokonce říct, jaká je průměrná rychlost hmotného bodu na nějakém časovém intervalu  $\Delta t$ , což je změna dráhy  $\Delta s$  za čas  $\Delta t$ , tj.  $v_p = \Delta s / \Delta t$ . Co ale nedovedeme, je určit okamžitou rychlost hmotného bodu, jinak řečeno rychlost „v jednom bodě  $t$ “. Narážíme tím na problém, že pro fyziky nejsou důležité pouze hodnoty funkce  $s = s(t)$ , ale také to, jak se tyto hodnoty mění.



Obrázek 4.1: Závislost dráhy hmotného bodu na čase a sečna určená body  $P$ ,  $Q$

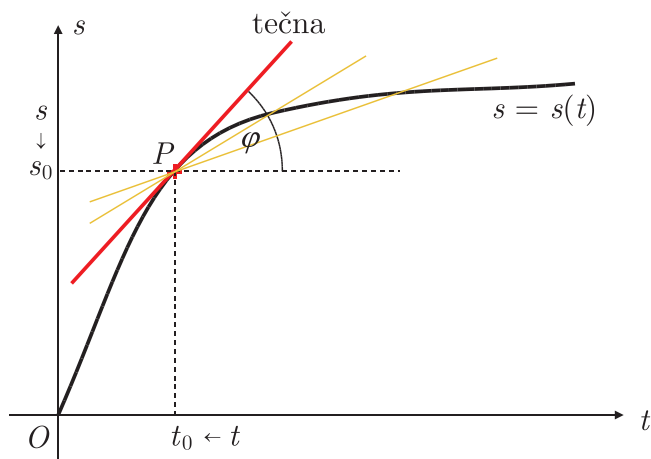
Abychom mohli vyřešit náš problém, vezměme si funkci  $s = s(t)$  na *obrázku 4.1*. Funkce  $s$  popisuje závislost dráhy hmotného bodu na čase. Dráha je vzdálenost uražená od zvoleného počátku, neboli délka trajektorie. Proto je funkce  $s$  neklesající.

Nejdříve si ověříme, že umíme určit průměrnou rychlost. Vezměme si časový interval  $\langle t_0, t \rangle$  a zajímá nás průměrná rychlost  $v_p$  na tomto zvoleném intervalu. Časovému okamžiku  $t_0$  odpovídá v grafu bod  $P$  a okamžiku  $t$  odpovídá bod  $Q$ . Když chceme zjistit průměrnou rychlost mezi těmito body, ptáme se, jakou rychlostí se musí hmotný bod pohybovat, aby se za čas  $\Delta t = t - t_0$  dostal rovnoměrným pohybem, tj. rychlostí  $v_p = konst.$ , z bodu  $P$  do bodu  $Q$ <sup>1</sup>. Při rovnoměrném pohybu pro  $v \neq 0$  musí dráha  $s$  lineárně narůstat s časem, proto  $s = vt + s_0$ , kde  $v = konst.$  Snadno nahlédneme, že grafem  $s = s(t)$  rovnoměrného pohybu je přímkou a rychlost  $v$  je její směrnici (viz *lineární funkce* v části 3.1). Kdyby se tedy hmotný bod pohyboval z bodu  $P$  do bodu  $Q$  průměrnou rychlostí  $v_p = konst.$ , grafem by byla úsečka  $PQ$ , což je část *sečny* určené body  $P$  a  $Q$ . Chceme-li tedy zjistit průměrnou rychlost, stačí nám určit směrnici sečny  $PQ$  (viz *vztah 3.3*).

$$v_p = \tan \varphi = \frac{s - s_0}{t - t_0} = \frac{\Delta s}{\Delta t} \quad (4.1)$$

Tímto jsme ale dospěli ke vztahu, který jsme očekávali, takže nás nijak nepřekvapí.

Stále ale zůstává problém s určením okamžité rychlosti. Protože jsme ale již vyzbrojeni limitami, snadno se s tímto problémem vypořádáme. Zajímá nás nyní okamžitá rychlost, resp. změna funkce  $s = s(t)$  v bodě  $P$ , resp. v  $t_0$ . Když se přiblížíme s bodem  $Q$  blízko k bodu  $P$ , získáme průměrnou rychlost na velmi malém intervalu  $\Delta t$ , která se zřejmě blíží kýžené okamžité rychlosti. Pokud se bude bod  $Q$  dále přibližovat k  $P$  až na nekonečně malou vzdálenost, tj. body  $P$  a  $Q$  splynou, stane se ze sečny  $PQ$  *tečna* v bodě  $P$ , viz *obrázek 4.2*.



Obrázek 4.2: Závislost dráhy hmotného bodu na čase a tečna v bodě  $P$

Právě tečna, respektive její směrnice, přirozeně popisuje, jak se funkce mění v bodě, a to my přesně hledáme – okamžitá rychlost v nějakém bodě je „změna dráhy v daném bodě“ (přesněji: změna dráhy na nekonečně krátkém časovém intervalu)<sup>2</sup>.

<sup>1</sup>Upozorníme, že body  $P, Q$  nejsou body trajektorie (např. patníky u silnice), ale pouze body na grafu funkce  $s(t)$ .

<sup>2</sup>Naše úvahy provádíme s dráhou  $s = s(t)$ , což je skalární funkce, a její změna je opět skalár. Ve fyzice je okamžitá rychlost definována jako vektor  $\mathbf{v}$ , který se spočítá jako derivace polohového vektoru  $\mathbf{r}$  podle času  $t$ , tj.  $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ . Veličina, kterou zde nazýváme okamžitá rychlost, je ve skutečnosti pouze velikost okamžité rychlosti.

Okamžitou rychlost v bodě  $P$  tedy spočteme jako směrnici tečny v bodě  $P$  (přičemž víme, že  $k = \tan \varphi$ , viz *vztah 3.3*). Zbývá jenom vymyslet, jak směrnici tečny vypočítat.

Na *obrázcích 4.1 a 4.2* má bod  $P$  souřadnice  $[t_0, s_0]$ , kde  $s_0 = s(t_0)$ , a bod  $Q = [t, s(t)]$ . Směrnice sečny se spočítá jako  $k_s = \tan \varphi = (s - s_0)/(t - t_0)$  ( $k_s = v_p$ ). Výše jsme si řekli, že aby se ze sečny  $PQ$  stala tečna v bodě  $P$ , musí se bod  $Q$  přiblížit na nekonečně malou vzdálenost k bodu  $P$ , s čímž nám pomůže limita. Směrnici tečny  $k_t$  tedy spočítáme jako limitu směrnice sečny pro  $t$  jdoucí k  $t_0$ , tj.  $t \rightarrow t_0$ . Když si okamžitou rychlost označíme jako  $v$ , potom pro  $k_s \rightarrow k_t$  je

$$k_t = v = \tan \varphi = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0}. \quad (4.2)$$

Řešením našeho problému s okamžitou rychlostí jsme přišli na definici *derivace*. Odvozený *vztah 4.2* má totiž význam nejen pro dráhu jako funkci času, ale i obecně pro funkce jedné reálné proměnné. Můžeme si tedy pojem derivace formulovat obecněji.

Mějme funkci  $f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ . Potom *derivace funkce  $f$  v bodě  $x_0 \in \mathbb{R}$  charakterizuje změnu hodnot funkce  $f$  v bodě  $x_0$  a počítá se jako směrnice tečny ke grafu funkce  $f$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$ , tj.*

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (4.3)$$

kde

$$\frac{df}{dx}(x_0) \quad (4.4)$$

je označení *derivace funkce  $f$  podle proměnné  $x$  v bodě  $x_0$* .

Kromě uvedeného značení derivace v bodě  $x_0$  se můžeme setkat i s jinými způsoby, a to

$$\frac{df}{dx}(x_0) = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} = f'(x_0), \quad (4.5)$$

popřípadě s dalšími podobnými.

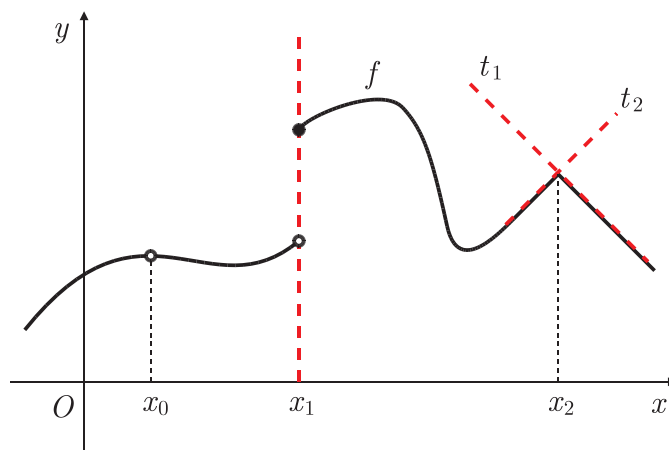
Pokud bychom se chtěli podívat na definici derivace hlouběji, lze tuto problematiku nalézt v [1], s. 90.

Výše jsme zmínili derivaci funkce „podle proměnné  $x$ “. To znamená, že chceme zjistit, jak se funkce mění v závislosti na proměnné  $x$ . Když potom dosadíme konkrétní  $x_0$ , zjistíme derivaci v bodě. Je zřejmé, že výsledek obecně závisí na volbě bodu  $x_0$ . Derivací funkce  $f$  tedy získáme opět funkci, kterou značíme  $f' : x \mapsto f'(x)$ . Její funkční hodnota pro  $x_0$  je směrnici tečny grafu funkce  $f$  v bodě  $[x_0, f(x_0)]$ . Musíme dát ale pozor, aby byla derivace pro dané  $x_0$  definována, resp. aby pro daná  $x_0$  existovala tečna. Obecně je  $D_{f'} \subset D_f$ .

Doplňme si ještě k definici derivace, že jinak ji můžeme zapsat ve tvaru

$$\frac{df}{dx}(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \quad (4.6)$$

Rozmysleme si, kdy by mohl nastat problém s existencí derivace funkce, viz *obrázek 4.3*. Nejdříve se podíváme na definici derivace, tj. na *vztah 4.3*, a všimneme si, že když nebudeme mít definováno  $f(x_0)$ , nemáme definovanou ani derivaci



Obrázek 4.3: Funkce, která nemá v bodech  $x_0$ ,  $x_1$ ,  $x_2$  derivaci

(v bodě  $x_0$  na obrázku 4.3 tedy neexistuje derivace funkce  $f$ , resp. tam není definována).

Další potíž je v bodech nespojitosti, kde se funkce skokově mění (v bodě  $x_1$  na obrázku 4.3). Tečna, která by popisovala skok funkce, by musela mít směrnici  $+\infty$ , popř.  $-\infty$ , jelikož by to musela být kolmice na osu  $x$ .

Problémy s tečnou, resp. s derivací, nastávají u funkce s „hrotem“ ( $x_2$  na obrázku 4.3). Když bychom konstruovali tečnu na hrotu pomocí sečny, jako u definice derivace, tedy přibližovali body určující sečnu na nekonečně malou vzdálenost, přicházely by v úvahu dvě možné tečny  $t_1$  a  $t_2$ . Jak ale poznat, která ze dvou možných tečen je ta lepší, správná? Jednu tečnu nelze rozumně upřednostnit před druhou, a derivaci proto nedefinujeme.

Ještě než se budeme věnovat výpočtu a využití derivací, zmiňme se zde o tom, jakou si o derivaci můžeme udělat „fyzikální“ představu. Geometricky se tedy jedná o směrnici tečny, resp. o funkci, jejíž funkční hodnoty jsou směrnice tečen ke grafu původní funkce (té, kterou jsme zderivovali). Když se ale podíváme opět na definici derivace, vztah 4.3 nebo 4.6, můžeme si všimnout, že děláme limitu z výrazu, ve kterém je v čitateli rozdíl funkčních hodnot a ve jmenovateli rozdíl bodů z definičního oboru. V limitě jsou tyto rozdíly typicky nekonečně malé a říká se, že jsou *infinitesimální*. Potom můžeme symbol  $df/dx$  chápat (opět zdůrazněme „fyzikálně“) jako podíl infinitesimálního (nekonečně malého) přírůstku hodnot funkce  $f$  a infinitesimálního přírůstku proměnné  $x$ , tj.  $df \doteq \Delta f = f(x) - f(x_0)$  a analogicky  $dx \doteq \Delta x = x - x_0$  (obojí pro  $x$  blízké  $x_0$ ).

Zdůrazněme ještě jednou, že představa derivace jako podílu infinitesimálních rozdílů je matematicky problematická, ale i přesto se fyzikům hodí, aby si byli schopni představit, co se děje se světem, když ho popisují nástroji diferenciálního počtu.

## 4.2 Výpočet derivací

Rovnou si vezměme konkrétní funkci, např.  $f(x) = x^2$ , a vypočítejme její derivaci. Jediné, co máme zatím k dispozici, je definice derivace. Když do ní (vztah 4.3)

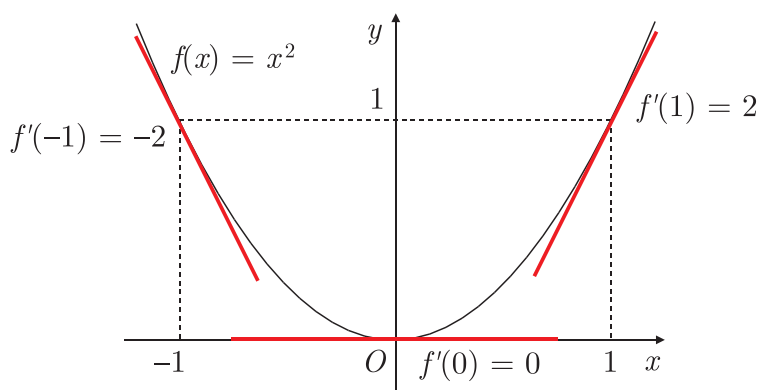
dosadíme, máme

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0}. \quad (4.7)$$

S takovýmto typem limity jsme se již setkali v závěru *části 3.2* v příkladě 2. S výpočtem takovéto limity si tedy již poradíme.

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^2 - x_0^2}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{(x - x_0)(x + x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x + x_0) = 2x_0 \quad (4.8)$$

Získali jsme derivaci v obecném bodě  $x_0$ . Když si teď zvolíme, v jakém konkrétním bodě chceme derivaci vypočítat, stačí dosadit do odvozeného vztahu. Například  $f'(0) = 0$ , tedy v bodě  $x_0 = 0$  je směrnice tečny ke grafu funkce  $f(x) = x^2$  rovna nule, tj. tečna je rovnoběžná s kartézskou osou  $x$  (v našem případě s ní dokonce splývá), což je vidět i na *obrázku 4.4*. Na obrázku jsou též vyznačeny



Obrázek 4.4: Funkce  $f(x) = x^2$  a její tečny v bodech  $-1$ ,  $0$  a  $1$

tečny v bodech  $-1$  a  $1$ .

Co kdybychom ale chtěli vypočítat derivaci funkce  $f(x) = x^5$ ? Tak dosadíme do definice a vydělíme polynom polynomem,  $(x^5 - x_0^5)/(x - x_0)$ , a tím získáme limitu, jejíž hodnota je evidentní, tj.

$$\begin{aligned} f'(x_0) &= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^5 - x_0^5}{x - x_0} = \\ &= \lim_{x \rightarrow x_0} (x^4 + x^3x_0 + x^2x_0^2 + xx_0^3 + x_0^4) = x_0^4 + x_0^4 + x_0^4 + x_0^4 + x_0^4 = 5x_0^4 \end{aligned} \quad (4.9)$$

Poněkud zdlouhavé a nepraktické. Navíc jsme měli štěstí, že jsme derivovali jenom jednoduchý polynom  $x^5$ . Kdyby bylo zadání komplikovanější, zapotili bychom se mnohem více. Komu by se chtěla počítat derivace pomocí definičního vztahu s limitou třeba funkce

$$f(x) = \frac{5e^x(x \sin x - \cos x)}{\tan x + \ln x^5} ? \quad (4.10)$$

Matematici na to měli stejný názor a z definičního vztahu derivace odvodili pro různé typy funkcí vztahy pro jejich derivace a dále odvodili pravidla derivování, když funkce sčítáme, násobíme, skládáme atd.

Už jsme derivovali jednoduché polynomy, tak si nyní odvodme vztah pro derivaci  $f(x) = x^n$ , kde  $n \in \mathbb{N}$ . Dosadíme do *vztahu 4.3*, tj.

$$f'(x_0) = (x^n)' \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x^n - x_0^n}{x - x_0}, \quad (4.11)$$

po vydělení polynomů máme

$$f'(x_0) = (x^n)' \Big|_{x=x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} (x^{n-1} + x^{n-2}x_0 + x^{n-3}x_0^2 + \dots + xx_0^{n-2} + x_0^{n-1}) \quad (4.12)$$

a získali jsme limitu ze součtu  $n$  sčítanců (je jich skutečně  $n$ , u každého sčítance máme  $x^k$ , kde se  $k$  postupně snižuje z  $n-1$  až na nulu). V limitě však již můžeme dosadit  $x_0$  a nevznikne neurčitý výraz, nýbrž je evidentní, čemu se limita rovná. Získáme součet  $n$  sčítanců  $x_0^{n-1}$ , a tedy

$$f'(x_0) = (x^n)' \Big|_{x=x_0} = nx_0^{n-1}, \quad (4.13)$$

nebo můžeme prostě psát

$$f'(x) = (x^n)' = nx^{n-1}. \quad (4.14)$$

*Vztah 4.14* jsme si odvodili pouze pro  $n \in \mathbb{N}$ , aby se nám dobře počítala limita v definici derivace. Odvozená rovnice ale platí pro libovolné  $n \in \mathbb{R}$ , ale potom musíme dát pozor na definiční obory  $D_f$  a  $D_{f'}$ , aby se nám například nestalo, že budeme počítat druhou odmocninu ze záporného čísla (pohybujeme se zatím stále v oboru reálných čísel).

To jsme si ukázali jedno z nejjednodušších odvození obecného vztahu pro derivaci nějaké funkce. Vůbec nejsnadnější je odvodit derivaci konstantní funkce. Jelikož nám má derivace říkat, jak se funkce mění s proměnnou  $x$ , podle které derivujeme, a konstantní funkce se nikde nemění, je logické, že bude derivace všude nulová. Kdybychom tomu nevěřili, stačí si dosadit za  $f(x)$  i  $f(x_0)$  konstantu  $k$  do definičního *vztahu 4.3* a vidíme, že je roven 0.

Odvodit další vztahy je obtížnější, ale matematici to už naštěstí udělali za nás. My jim za tato odvozená pravidla budeme vděční a pouze si je uvedeme a postupně vtiskneme do paměti. *Tabulka 4.1* uvádí vztahy pro derivace základních funkcí, kterými jsme se částečně zabývali v *části 3.1*. U funkcí uvedených v *tabulce 4.1* se rovná  $D_f$  a  $D_{f'}$ , což ale obecně neplatí.

Kdybychom uměli derivovat jenom speciální případy funkcí uvedené v *tabulce 4.1*, stále by to nestačilo k většině výpočtů, které musíme ve fyzice provádět, jelikož se funkce příliš často nevyskytují pouze v takto jednoduchých tvarech. Naštěstí byla zjištěna pravidla, která nám umožňují derivovat i komplikovanější funkce.

- **Derivace složené funkce**

( $f$  je vnější funkce,  $g$  je vnitřní funkce)

$$(f(g))' = f'(g) \cdot g' \quad (4.15)$$

Pravidlo nejsnáze prohlédneme na příkladě. Pro příklad si vezmeme  $f(x) = \sin x$  a  $g(x) = x^2$  a vypočteme pomocí *tabulky 4.1* a *pravidla 4.15* derivaci složené funkce  $f(g(x))$ .

$$[f(g(x))]' = (\sin x^2)' = \cos x^2 \cdot (x^2)' = \cos x^2 \cdot 2x = 2x \cos x^2 \quad (4.16)$$

Funkce $f(x)$	Derivace $f'(x)$	$D_f = D_{f'}$	Poznámka
$k$	0	$\mathbb{R}$	$k = konst.$
$x^n$	$nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
$x^r$	$rx^{r-1}$	$\mathbb{R}^+$	$r \in \mathbb{R}$
$a^x$	$a^x \ln a$	$\mathbb{R}$	$a > 0$
$e^x$	$e^x$	$\mathbb{R}$	
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$	$\mathbb{R}^+$	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^+$	
$\sin x$	$\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$-\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\pi/2\}$	$k \in \mathbb{Z}$
$\cot x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$k \in \mathbb{Z}$

Tabulka 4.1: Tabulka derivací základních funkcí

Když derivujeme složenou funkci, zderivujeme vnější funkci, jako by závisela jen na  $x$ , ale místo  $x$  píšeme vnitřní funkci, a potom to vynásobíme derivací vnitřní funkce. Pravidlo platí přirozeně i pro více než „jednou“ složenou funkci. Pokud bude např. funkce složená ze tří funkcí, tak  $[f(g(h(x)))]' = f'(g(h(x))) \cdot (g(h(x)))' = f'(g(h(x))) \cdot g'(h(x)) \cdot h(x)'$ .

$$\begin{aligned} [\sin(\ln x^2)]' &= \cos(\ln x^2) \cdot (\ln x^2)' = \cos(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot (x^2)' = \\ &= \cos(\ln x^2) \cdot \frac{1}{x^2} \cdot 2x = \frac{2}{x} \cos(\ln x^2) \end{aligned} \quad (4.17)$$

- **Derivace součtu funkcí**

$$(f + g)' = f' + g' \quad (4.18)$$

Toto pravidlo jde velmi jednoduše dokázat pomocí definice derivace a věty o limitě součtu funkcí, kterou jsme si uvedli v závěru části 3.2. Uvedme si příklad, kde  $f(x) = x^3$  a  $g(x) = 5^x$ .

$$(f(x) + g(x))' = (x^3 + 5^x)' = (x^3)' + (5^x)' = 3x^2 + 5^x \ln 5 \quad (4.19)$$

Pravidlo jde opět přirozeně rozšířit na více funkcí, jelikož součet funkcí je opět funkce, a tedy  $(f + g + h)' = ((f + g) + h)' = (f + g)' + h' = f' + g' + h'$ . Vypočtěme příklad

$$(x^3 + x^2 + x)' = (x^3)' + (x^2)' + (x)' = 3x^2 + 2x + 1, \quad (4.20)$$

kde  $(x)' = (x^1)' = 1x^{1-1} = 1x^0 = 1$ .

- Derivace součinu funkcí

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \quad (4.21)$$

Toto pravidlo již není tak přirozené jako předchozí, ale i tak si ho lze snadno zapamatovat. Pro příklad si vezměme  $f(x) = e^x$  a  $g(x) = \sqrt{x}$ .

$$\begin{aligned} (f(x) \cdot g(x))' &= (e^x \cdot \sqrt{x})' = (e^x \cdot x^{\frac{1}{2}})' = (e^x)' \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^x \cdot (x^{\frac{1}{2}})' = \\ &= e^x \cdot x^{\frac{1}{2}} + e^x \cdot \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \sqrt{x}e^x + \frac{e^x}{2\sqrt{x}} = e^x \left( \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}} \right) \end{aligned} \quad (4.22)$$

Rozšíření pro více funkcí uděláme analogicky, jako jsme to provedli u součtu funkcí. Jelikož součin funkcí je také funkce, dostáváme  $(f \cdot g \cdot h)' = ((f \cdot g) \cdot h)' = (f \cdot g)' \cdot h + (f \cdot g) \cdot h' = (f' \cdot g + f \cdot g') \cdot h + f \cdot g \cdot h' = f' \cdot g \cdot h + f \cdot g' \cdot h + f \cdot g \cdot h'$ . Takže když derivujeme součin funkcí, sečteme postupně součiny, kde vždy jednu funkci zderivujeme a ostatní necháme být.

$$\begin{aligned} (x^3 \cdot \tan x \cdot e^x)' &= (x^3)' \cdot \tan x \cdot e^x + x^3 \cdot (\tan x)' \cdot e^x + x^3 \cdot \tan x \cdot (e^x)' = \\ &= 3x^2 \cdot \tan x \cdot e^x + x^3 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} \cdot e^x + x^3 \cdot \tan x \cdot e^x = \\ &= 3x^2 e^x \tan x + \frac{x^3 e^x}{\cos^2 x} + x^3 e^x \tan x = \\ &= e^x \left( 3x^2 \tan x + \frac{x^3}{\cos^2 x} + x^3 \tan x \right) \end{aligned} \quad (4.23)$$

- Derivace „konstanta krát funkce“

( $k = konst.$ )

$$(k \cdot f)' = k \cdot f' \quad (4.24)$$

Toto pravidlo je speciálním případem pravidla předchozího, ale často se uvádí zvlášť. Z předchozího pravidla také přímo vyplývá, protože konstanta je konstantní funkce, a tedy  $(k \cdot f)' = k' \cdot f + k \cdot f' = k \cdot f'$ , jelikož  $k' = 0$ . Toto pravidlo se využívá při výpočtech téměř neustále a brzy si ho zautomatizujeme. Jako příklad spočteme derivaci funkce  $3x^2$ , tj.

$$(3x^2)' = 3(x^2)' = 3 \cdot 2x = 6x. \quad (4.25)$$

- Derivace podílu funkcí

$$\left( \frac{f}{g} \right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \quad (4.26)$$

Toto pravidlo se často uvádí samostatně, i když je opět speciálním případem již uvedeného pravidla pro derivaci součinu funkcí. Můžeme si ho napsat ve tvaru  $(f \cdot g^{-1})'$  a máme z podílu součin funkcí, z nichž jedna je složená. Když budeme pokračovat, získáme  $(f \cdot g^{-1})' = f' \cdot g^{-1} + f \cdot (g^{-1})' = f' \cdot g^{-1} + f \cdot (-1)g^{-2} \cdot g' = f' \cdot g \cdot g^{-2} - f \cdot g^{-2} \cdot g' = (f'g - fg')/g^2$ , což je uvedené



pravidlo. Pro zajímavost si jako příklad odvodíme vztah pro derivaci funkce tangens, tj.

$$\begin{aligned} (\tan x)' &= \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \\ &= \frac{\cos x \cos x - \sin x (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}, \end{aligned} \quad (4.27)$$

přičemž jsme využili známé identity, že  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ .

Teď když už známe některá pravidla a *tabulku 4.1*, nejsme tolik omezení na jednoduché funkce, ale už jsme schopni zderivovat funkce značně komplikované a roztodivné, stačí se jenom pořádně potrénovat.

V následujících příkladech zkusíme zkombinovat různé funkce a pravidla pro počítání derivací. Budeme postupovat pomalu, aby bylo co nejjasnější, co se v příkladech děje.

### Př. 1

$$\begin{aligned} (6e^{x^2} + 5 \cos 2x)' &= (6e^{x^2})' + (5 \cos 2x)' = 6e^{x^2} (x^2)' + 5(-\sin 2x)(2x)' = \\ &= 6e^{x^2} 2x - 5 \sin 2x \cdot 2 = 12xe^{x^2} - 10 \sin 2x \end{aligned} \quad (4.28)$$

### Př. 2

$$\begin{aligned} (x^7 \log_2 (x^4 + 1))' &= (x^7)' \log_2 (x^4 + 1) + x^7 (\log_2 (x^4 + 1))' = \\ &= 7x^6 \log_2 (x^4 + 1) + x^7 \frac{1}{(x^4 + 1) \ln 2} (x^4 + 1)' = \\ &= 7x^6 \log_2 (x^4 + 1) + x^7 \frac{1}{(x^4 + 1) \ln 2} 4x^3 = 7x^6 \log_2 (x^4 + 1) + \frac{4x^{10}}{(x^4 + 1) \ln 2} = \\ &= x^6 \left( 7 \log_2 (x^4 + 1) + \frac{4x^4}{(x^4 + 1) \ln 2} \right) \end{aligned} \quad (4.29)$$

### Př. 3

$$\begin{aligned} \left( \frac{(4x^3 - x)^4}{\sin \frac{x}{2}} \right)' &= \frac{((4x^3 - x)^4)' \sin \frac{x}{2} - (4x^3 - x)^4 (\sin \frac{x}{2})'}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{4(4x^3 - x)^3 (4x^3 - x)' \sin \frac{x}{2} - (4x^3 - x)^4 \cos \frac{x}{2} \left( \frac{x}{2} \right)'}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{4(4x^3 - x)^3 (12x^2 - 1) \sin \frac{x}{2} - (4x^3 - x)^4 \cos \frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2}}{\sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= \frac{4(4x^3 - x)^3 (12x^2 - 1)}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{(4x^3 - x)^4 \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} = \\ &= (4x^3 - x)^3 \left( \frac{4(12x^2 - 1)}{\sin \frac{x}{2}} - \frac{(4x^3 - x) \cos \frac{x}{2}}{2 \sin^2 \frac{x}{2}} \right) \end{aligned} \quad (4.30)$$

**Př. 4**

$$\begin{aligned}
\left( (\ln x) \frac{1}{x} \tan 2x \right)' &= (\ln x)' \frac{1}{x} \tan 2x + \ln x \left( \frac{1}{x} \right)' \tan 2x + (\ln x) \frac{1}{x} (\tan 2x)' = \\
&= \frac{1}{x} \frac{1}{x} \tan 2x + \ln x \left( \frac{-1}{x^2} \right) \tan 2x + (\ln x) \frac{1}{x} \frac{1}{\cos^2 2x} (2x)' = \\
&= \frac{\tan 2x}{x^2} - \frac{(\ln x) \tan 2x}{x^2} + \frac{2 \ln x}{x \cos^2 2x} \quad (4.31)
\end{aligned}$$

**Př. 5**

Vrátíme se k úloze, která se nám v době, kdy jsme znali pouze definici derivace, nechtěla řešit.

$$\begin{aligned}
\left( \frac{5e^x(x \sin x - \cos x)}{\tan x + \ln x^5} \right)' &= \frac{[5e^x(x \sin x - \cos x)]' (\tan x + \ln x^5)}{(\tan x + \ln x^5)^2} - \\
&\quad - \frac{5e^x(x \sin x - \cos x) (\tan x + \ln x^5)'}{(\tan x + \ln x^5)^2} = \\
&= \frac{[5e^x(x \sin x - \cos x) + 5e^x(\sin x + x \cos x + \sin x)] (\tan x + \ln x^5)}{(\tan x + \ln x^5)^2} - \\
&\quad - \frac{5e^x(x \sin x - \cos x) \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{1}{x^5} 5x^4 \right)}{(\tan x + \ln x^5)^2} = \\
&= \frac{5e^x(x \sin x - \cos x + 2 \sin x + x \cos x)}{\tan x + \ln x^5} - \\
&\quad - \frac{5e^x(x \sin x - \cos x) \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{5}{x} \right)}{(\tan x + \ln x^5)^2} = \\
&= \frac{5e^x [(2+x) \sin x + (x-1) \cos x]}{\tan x + \ln x^5} - \frac{5e^x(x \sin x - \cos x) \left( \frac{1}{\cos^2 x} + \frac{5}{x} \right)}{(\tan x + \ln x^5)^2} \quad (4.32)
\end{aligned}$$

**Př. 6**

$$(x^x)' = ? \quad (4.33)$$

Poslední příklad spočítáme pomocí vztahu, který se nám může v budoucnu náramně hodit. K derivování této funkce nelze přímo použít nic z *tabulky 4.1* (umíme derivovat jenom  $x^r$ , kde  $r$  je konstanta, nebo  $a^x$ ,  $a \in \mathbb{R}^+$  je konstanta). Můžeme ale využít následujícího vztahu,

$$a^b = e^{\ln a^b} = e^{b \ln a}. \quad (4.34)$$

Tuto identitu nebudeme dokazovat, ale zamyslíme se nad ní. Funkce  $e^x$  a  $\ln x$  jsou vůči sobě inverzní, a když je složíme, „vyruší se“ a dostaneme jen argument funkce. Je dobré si uvědomit, že lze využívat takovouto identitu, jelikož je mnohdy užitečnější počítat s mocninami o základu  $e$  než s jinými. V našem případě nám pomůže zbavit se výrazu  $x^x$  a místo toho počítat s  $x \ln x$ .

$$(x^x)' = (e^{x \ln x})' = e^{x \ln x} (x \ln x)' = e^{x \ln x} \left( \ln x + x \frac{1}{x} \right) = x^x (\ln x + 1) \quad (4.35)$$

### 4.3 Derivace vyšších řádů

Derivace vyššího řádu nějaké funkce znamená, že se funkce derivujeme vícekrát, a to tolikrát, kolik je *řád* derivace. Doteď jsme se zabývali derivacemi prvního řádu – funkce jsme derivovali pouze jednou. Kdybychom měli spočítat derivaci druhého řádu funkce  $f$ , tak  $f$  zderivujeme poprvé, tím získáme funkci  $f'$  a potom zderivujeme  $f'$ , čímž získáme funkci  $(f')' = f''$ , tj. druhou derivaci funkce  $f$ , neboli derivaci druhého řádu funkce  $f$ .

Pro derivace vyšších řádů se zavádí nové značení, jelikož by bylo nepraktické psát třeba deset čárek u funkce, kterou jsme desetkrát zderivovali. Když si vezmeme funkci  $f(x)$  a obecně řád derivace  $n$ , tedy máme funkci  $f$  zderivovat  $n$ -krát, používáme označení

$$f^{(n)} \quad \text{nebo} \quad f^{(n)}(x) \quad \text{nebo} \quad \frac{d^n f(x)}{dx^n}. \quad (4.36)$$

Čárkami se obvykle značí derivace do třetího řádu (včetně), pro vyšší řády se potom používá výše uvedené označení.

Toto nové značení se hodí také v případě, že chceme čárkou označit něco jiného, než je derivace. Například se čárkami běžně rozlišují různé vztažné soustavy a s nimi spojené souřadnice. Můžeme mít soustavu  $S$  se zvoleným kartézským systémem a osami  $x$ ,  $y$ ,  $z$  a soustavu  $S'$ , která se vůči  $S$  pohybuje (osy  $x'$ ,  $y'$ ,  $z'$ ). Zde čárkami neznačíme derivaci, ale příslušnost ke vztažné soustavě  $S'$ .

Pro názornost určíme derivaci čtvrtého řádu funkce  $f(x) = x^3 + 4x^2 - 7x + 1$ , tj.

$$\begin{aligned} f^{(4)}(x) &= (x^3 + 4x^2 - 7x + 1)^{(4)} = (3x^2 + 8x - 7)^{\prime\prime\prime} = \\ &= (6x + 8)^{\prime\prime} = (6)^{\prime} = 0, \end{aligned} \quad (4.37)$$

a derivaci druhého řádu funkce  $f(x) = e^{(x^2)}$  v jiném značení, tj.

$$\begin{aligned} \frac{d^2 f(x)}{dx^2} &= \frac{d^2 \left( e^{(x^2)} \right)}{dx^2} = \frac{d \left( 2xe^{(x^2)} \right)}{dx} = 2e^{(x^2)} + 4x^2 e^{(x^2)} = \\ &= 2e^{(x^2)}(1 + 2x^2). \end{aligned} \quad (4.38)$$

Ve fyzice se setkáme s derivacemi vyšších řádů hned v základním kurzu mechaniky. Již jsme se setkali s velikostí okamžité rychlosti, kterou získáme derivací dráhy podle času. Velikost okamžité rychlosti se ale také s časem obecně mění (kdyby se neměnila a nezajímala by nás směr, nemělo by smysl okamžitou rychlost uvažovat, protože bychom si vystačili s průměrnou rychlostí). Změnu velikosti okamžité rychlosti vyjádříme opět pomocí derivace a nazveme ji velikost tečného zrychlení<sup>3</sup> (zrychlení může být i normálové, ale to se určuje jiným způsobem). Velikost tečného zrychlení (až na případné znaménko) je tedy druhá derivace dráhy.

Derivace vyšších řádů se nám budou hodit v následující části, kde se budeme zabývat aplikacemi derivací (mezi něž spadá i rychlost a zrychlení).

<sup>3</sup>K pojmu rychlost a zrychlení přidáváme slovo „velikost“, protože jsou ve fyzice definovány jako vektory, ale z dráhy (což je skalární funkce) určíme pouze jejich velikosti. Druhou derivací dráhy určíme velikost zrychlení až na případné znaménko. Bude-li velikost okamžité rychlosti klesat, vyjde zrychlení záporné.

## 4.4 Matematické aplikace derivací

Z předchozího je vidět, že si lidé vymysleli derivace, aby mohli určit např. okamžitou rychlost hmotného bodu nebo zrychlení. Jsou nám ale derivace dobré ještě k něčemu jinému? Asi by nebylo příliš smysluplné vynaložit tolik práce „pouze“ kvůli okamžité rychlosti a zrychlení.

Na začátku této kapitoly jsme se zmínili, že diferenciální počet je velmi mocný aparát. Tak si ukažme, co dalšího jsme nyní schopni určit, vypočítat, aproximovat apod. Budeme stručně diskutovat matematické aplikace derivací, aplikace ve fyzice jsou zvláště v *části 4.5*.

### 4.4.1 L'Hospitalovo pravidlo

Derivace nám mohou pomoci s výpočtem limit. L'Hospitalovo<sup>4</sup> pravidlo je matematická věta, která říká, že za určitých předpokladů platí

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (4.39)$$

(viz [1], s. 113). Použití l'Hospitalova pravidla (výpočet pomocí něj) budeme označovat symbolem

$$\underline{\underline{\text{l'H}}}} \quad (4.40)$$

L'Hospitalovo pravidlo se hodí, pokud po dosazení v limitě vychází neurčitý výraz typu „0/0“ nebo „∞/∞“. Ukážeme si to na příkladu  $\lim_{x \rightarrow 0} (\sin x/x)$ , kde po dosazení nuly vychází „0/0“.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(\sin x)'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x}{1} = 1 \quad (4.41)$$

L'Hospitalovo pravidlo jde použít opakovaně, což se nabízí třeba u podílu polynomů. Uvedeme si příklad, který umíme řešit i bez l'Hospitalova pravidla, ale pro ilustraci ho použijeme.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{2x^2 + 4x + 4} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x - 1}{4x + 4} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \quad (4.42)$$

Existují ovšem případy limit, kdy nám l'Hospitalovo pravidlo nepomůže a derivováním získáme jenom další a další neurčitý výrazy, viz následující příklad.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} &\stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2}(x^2 + x - 2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1)}{\frac{1}{2}(x - 1)^{-\frac{1}{2}}} = \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \quad (4.43)$$

Aplikováním pravidla jsme si vůbec nepomohli, dostali jsme znovu neurčitý výraz. V tomto příkladě vede l'Hospitalova cesta do pekel, resp. nevede nikam, což je zřejmé z následujícího:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{(x - 1)^{\frac{1}{2}}(2x + 1)}{(x^2 + x - 2)^{\frac{1}{2}}} \stackrel{\text{l'H}}{=} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\frac{1}{2}(x - 1)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1) + 2(x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x^2 + x - 2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1)} =$$

---

<sup>4</sup>Čteme „lopitalovo“.

$$\begin{aligned}
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{(x^2 + x - 2)^{\frac{1}{2}}}{(x - 1)^{\frac{1}{2}}} + \frac{2(x - 1)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}(x^2 + x - 2)^{-\frac{1}{2}}(2x + 1)} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \left( \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + \frac{4\sqrt{x - 1}\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x + 1} \right) = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{4\sqrt{x - 1}\sqrt{x^2 + x - 2}}{2x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} + \frac{0}{3} = \\
&= \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} \tag{4.44}
\end{aligned}$$

Jak je vidět, aplikováním l'Hospitalova pravidla dvakrát za sebou jsme se dostali opět na začátek. K vyřešení této limity se tedy l'Hospitalovo pravidlo nehodí a je třeba ji řešit jiným způsobem.

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x^2 + x - 2}}{\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{(x - 1)(x + 2)}}{\sqrt{x - 1}} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x + 2} = \sqrt{3} \tag{4.45}$$

Není tedy dobré hned bezmyšlenkovitě nasazovat l'Hospitalovo pravidlo, kdykoliv se objeví neurčitý výraz. Je dobré se nejprve zamyslet, zda by nepomohly nějaké algebraické úpravy.

#### 4.4.2 Průběh funkce

Když nám někdo zadá nějakou funkci a bude po nás chtít, abychom nakreslili její graf, pravděpodobně zapátráme v paměti, jak vypadá graf požadované funkce a jak je posunutý nebo zdeformovaný díky různým parametrům. Dále určíme průsečíky s osami a podle toho graf nakreslíme (popřípadě necháme graf vykreslit pomocí nějakého programu<sup>5</sup>).

My ale umíme pracovat s derivacemi funkcí, tedy umíme určit směrnici tečny ke grafu funkce, což nám jistě v naší analýze pomůže. Popišme si tedy postup zkoumání (nebo trochu medicínsky „vyšetřování“) *průběhu funkce* a rovnou si to ukažme u funkce  $f(x) = e^{-x^2}$ .

1. Začneme vždy určováním *definičního oboru*.

U naší funkce  $f$  nemáme žádná omezení a její *maximální definiční obor* je tedy  $D_f = \mathbb{R}$ .

2. Určíme si *průsečík* s osou  $y$ , který nám později pomůže s nakreslením grafu. Průsečík s osou  $y$ , který označíme  $P_y$ , je bod, jehož souřadnice  $x$  je nulová, tj. za  $x$  dosadíme 0 do předpisu funkce a tím získáme souřadnici  $y$ , tj.  $P_y = [0, f(0)]$ . Mimochodem u funkce může existovat pouze jeden průsečík s osou  $y$ , viz *obrázek 3.6*.

Pro naši funkci  $f$  je  $P_y = [0, e^0] = [0, 1]$ .

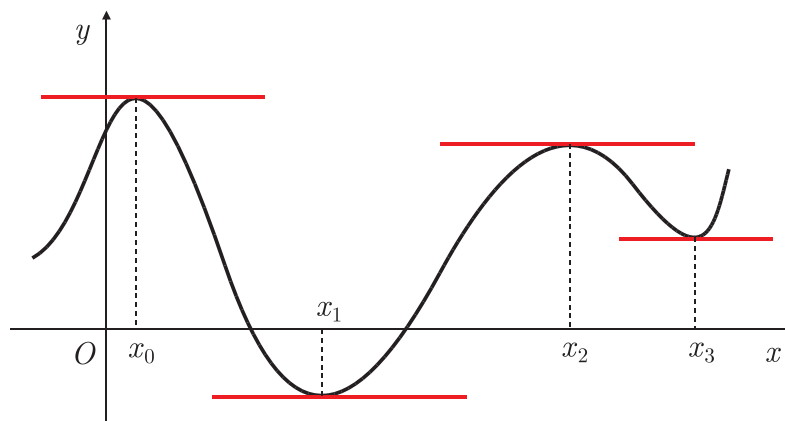
3. Podobně nalezneme *průsečíky* s osou  $x$ . Tentokrát ale chceme nulovou souřadnici  $y$ , tj.  $P_x = [x, 0]$ . Musíme tedy vyřešit rovnici  $f(x) = 0$ , tedy nalézt kořeny a v získaných hodnotách  $x$  jsou průsečíky funkce s osou  $x$ . Narozdíl

<sup>5</sup>To lze například na internetové stránce [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com), která je volně k dispozici.

od  $P_y$  může být průsečíků s osou  $x$  více, např. funkce  $\sin x$  jich má nekonečně mnoho a to  $x = k\pi$ , kde  $k \in \mathbb{Z}$ .

Když chceme nalézt kořeny naší funkce  $f$ , tj.  $0 = e^{-x^2}$ , zjistíme, že ať umocňujeme  $e$ , jak umocňujeme, tak nikdy nulu nezískáme. Graf funkce  $f$  tedy průsečíky s osou  $x$  nemá.

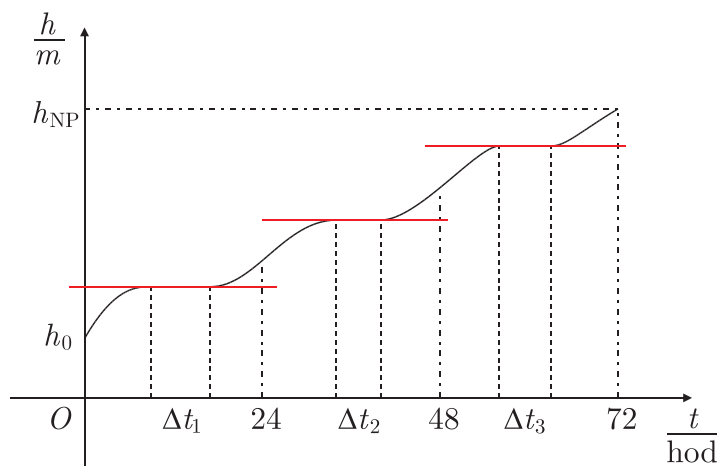
4. Nyní konečně přicházejí ke slovu derivace, pomocí nichž se hledají tzv. *body podezřelé z lokálního extrému*, jinak řečeno body, kde se může nacházet *lokální maximum* nebo *minimum*. Grafy funkcí bývají „zvlněné“, podobně jako je to na *obrázku 4.5*. Body, které mají vzhledem ke svému nejbližšímu



Obrázek 4.5: Funkce, která má v bodech  $x_0$  a  $x_2$  lokální maximum a v bodech  $x_1$  a  $x_3$  lokální minimum

okolí nejvyšší hodnotu souřadnice  $y$ , se nazývají *lokální maxima* (v bodech  $x_0$  a  $x_2$  na *obrázku 4.5*). Pokud mají body vzhledem ke svému nejbližšímu okolí nejnižší hodnotu souřadnice  $y$ , nazývají se *lokální minima* (v bodech  $x_1$  a  $x_3$  na *obrázku 4.5*). Souhrně se těmto bodům říká lokální extrémy. Je zřejmé, že v lokálních extrémech je tedy směrnice tečny nulová, pokud je v nich definována derivace. Abychom našli lokální extrémy, musíme funkci zderivovat a zjistit, pro která  $x$  je derivace rovna nule – tak získáme *body podezřelé z lokálního extrému* (musíme však dát pozor na  $D_f$ , lokální extrémy mohou být totiž také na hrotech grafu funkce a tam derivace neexistují).

Body jsou pouze podezřelé, protože nulová derivace ještě nezaručuje maximum nebo minimum, ale pouze rovnoběžnost tečny s osou  $x$ . Můžeme mít funkci, která je například rostoucí, potom se v několika bodech (nebo stačí i v jednom bodě) „zvodorovní“, tedy má v těchto bodech tečnu rovnoběžnou s osou  $x$  (jinak řečeno nulovou derivaci), a pak je zase rostoucí. Potom v bodech, kde je nulová derivace, není extrém, jenom si v nich rostoucí funkce na chvíli „odpočinula“ před dalším stoupáním. Takováto funkce může popisovat třeba závislost dosažené nadmořské výšky na čase při horolezeckém výstupu. Na *obrázku 4.6* je naznačen horolezecký výstup, řekněme na Nanga Parbat, trvající tři dny. Při výstupu musí horolezci odpočívat, čemuž odpovídají intervaly  $\Delta t_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ . V době odpočinku narůstá čas, ale nadmořská výška zůstává konstantní, a derivace je tedy na intervalu  $\Delta t_i$  rovna 0. Jak je ale vidět na *obrázku*, místa odpočinku rozhodně nejsou lokální maxima ani minima.



Obrázek 4.6: Horolezecký výstup na Nanga Parbat popsáný dosaženou nadmořskou výškou, která je funkcí času

Naše funkce  $f(x) = e^{-x^2}$  je po zderivování  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$  a  $f'(x) = 0$  nastává pro  $x = 0$ , máme tedy jeden bod podezřelý z lokálního extrému (jelikož je derivace definována pro všechna  $x$  z definičního oboru, nemáme další bod, kde by mohl být lokální extrém).

- Dále je třeba rozhodnout, ve kterých bodech skutečně je lokální extrém, a při tom se vyšetří *monotonnost* funkce. Je-li funkce na nějakém intervalu rostoucí, nebo klesající, říkáme, že je na tomto intervalu *ryze monotonní* (říkáme, že je funkce na určitém intervalu *monotonní*, pokud je na daném intervalu nerostoucí, nebo neklesající).

Pokud je funkce rostoucí na nějakém intervalu, je směrnice tečny kladná pro všechny body z daného intervalu, tj. na daném intervalu je derivace kladná. Pokud je funkce klesající, je směrnice tečny a derivace záporná. Podle derivace jsme tedy schopni rozhodnout, kde je funkce rostoucí a kde je klesající (popřípadě kde je konstantní – to je na intervalech, kde je derivace nulová).

Když známe monotonnost funkce, můžeme rozhodnout o bodech podezřelých z lokálních extrémů. Vezměme si bod  $x_0$  podezřelý z lokálního extrému a jeho okolí  $U = \{x; x \neq x_0, |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$ ; je-li funkce na levém okolí  $U^- = \{x; x < x_0, |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$  rostoucí a na pravém okolí  $U^+ = \{x; x > x_0, |x - x_0| < \varepsilon, \varepsilon > 0\}$  klesající, potom je v  $x_0$  *ostré lokální maximum*; je-li funkce na okolí  $U^-$  klesající a na okolí  $U^+$  rostoucí, potom je v  $x_0$  *ostré lokální minimum*.

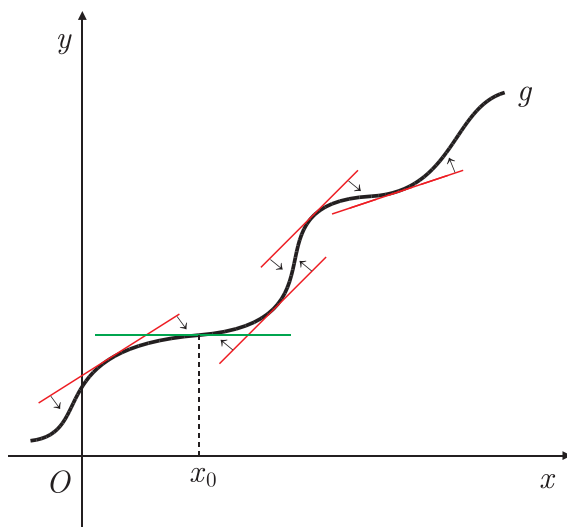
Názornější to bude na našem příkladu. Funkci  $f(x) = e^{-x^2}$  jsme již zderivovali a našli kořen  $f'(x) = -2xe^{-x^2}$  v  $x = 0$ , tj. bod podezřelý z lokálního extrému. Vyšetření (ryzí) monotonnosti lze zaznamenat do následujícího schématu v *tabulce 4.2*. Body podezřelé z lokálních extrémů rozdělí  $D_{f'}$  na intervaly, na kterých může být  $f'(x)$  kladná (+ ve schématu) nebo záporná (– ve schématu), jiná možnost není. Asi nejjednodušší je potom dosadit do  $f'(x)$  nějaké číslo z každého intervalu a zjistit tak, jestli je tam derivace kladná, nebo záporná. Pomoci si lze již zmíněným schématem. Když si  $f'(x)$

$f'(x)$	$(-\infty, 0)$	$(0, \infty)$
$-2x$	+	-
$e^{-x^2}$	+	+
$-2xe^{-x^2}$	+	-
$f(x)$	rostoucí	klesající

Tabulka 4.2: Monotonnost funkce  $f(x) = e^{-x^2}$

rozdělíme na součin, a pak zjistíme, jaké znaménko mají jednotliví činitele na zkoumaných intervalech, a potom dáme činitele dohromady a určíme výsledné znaménko  $f'(x)$ , můžeme si trochu usnadnit práci. Naše funkce  $f$  je tedy na intervalu  $(-\infty, 0)$  rostoucí a na intervalu  $(0, \infty)$  klesající, protože v tabulce 4.2 je na intervalu  $(-\infty, 0)$  výsledné znaménko  $+$  a naopak na intervalu  $(0, \infty)$  je výsledné znaménko  $-$ . To znamená, že v bodě  $x = 0$  je lokální maximum, označme si ho jako  $M = [0, f(0)] = [0, 1]$ . Zde tedy dokonce  $M = P_y$ .

6. Už začínáme mít o funkci celkem dost informací, ale abychom byli schopni nakreslit graf ještě přesněji, budeme pokračovat dále. Zatím nevíme nic o tom, co se děje s funkcí například na intervalu, kde je rostoucí – funkce se zde může různě vlnit (chvíli růst rychle a chvíli pomalu). Proto se vyšetřuje tzv. *konvexnost* a *konkávnost* funkce a s tím související *inflexní body*. Na obrázku 4.7 je funkce, která je všude rostoucí a ve vybraných bodech je vyznačena tečna.



Obrázek 4.7: Rostoucí funkce  $g$  s naznačenou konvexností a konkávností

Jak si můžeme všimnout, v některých bodech je graf funkce nad tečnou a v jiných zase pod tečnou. Právě podle toho se rozlišuje konvexnost a konkávnost. Na intervalu, kde je graf funkce nad tečnou, je funkce *konvexní* a naopak na intervalu, kde je graf funkce pod tečnou, je funkce *konkávni*. Body, kde přechází konvexnost na konkávnost a naopak, se nazývají *inflexní body*, např. bod  $x_0$  na obrázku 4.7. Jak ale zjistit, že je funkce konvexní nebo konkávni, když ještě nemáme její graf?



Všimněme si, že když je funkce  $g$  na nějakém intervalu konvexní, tak jestliže na tomto intervalu zvětšujeme proměnnou  $x$ , zvětšuje se i směrnice tečny – to ale znamená, že na tomto intervalu musí být  $g'$  rostoucí funkce. S konkávností je to přesně naopak,  $g'$  musí být klesající (pokud derivace existují). Musíme tedy vyšetřit monotonnost funkce  $g'$ , což už umíme. Tam, kde je  $g''(x) > 0$ , je funkce konvexní, kde je  $g''(x) < 0$ , je funkce konkávní. V kořenech  $g''(x)$ , tj. pro všechna  $x$ , pro která je  $g''(x) = 0$ , mohou být inflexní body, což je logické. Předtím jsme si řekli, že v inflexních bodech mezi sebou přechází konvexnost a konkávnost, tj.  $g''(x) > 0$  přechází na  $g''(x) < 0$ , což je možné pouze v bodech, kde je  $g''(x) = 0$ .

Vyšetřování konvexnosti a konkávnosti je obecně složitější. My jsme si zde ukázal stručný náznak a více podrobností můžeme nalézt v [1], s. 177.

Vyšetřeme konvexnost a konkávnost naší funkce  $f$ .

$$\begin{aligned} f''(x) &= (-2xe^{-x^2})' = -2e^{-x^2} + 4x^2e^{-x^2} = (4x^2 - 2)e^{-x^2} = \\ &= 2(2x^2 - 1)e^{-x^2} = 2(x\sqrt{2} - 1)(x\sqrt{2} + 1)e^{-x^2} \end{aligned} \quad (4.46)$$

Inflexní body jsou tedy  $x_1 = -1/\sqrt{2}$  a  $x_2 = 1/\sqrt{2}$  a pro účely vykreslení grafu si je označíme  $I_1 = [-1/\sqrt{2}, f(-1/\sqrt{2})] = [-1/\sqrt{2}, e^{-1/2}]$  a  $I_2 = [1/\sqrt{2}, f(1/\sqrt{2})] = [1/\sqrt{2}, e^{-1/2}]$ . K určení konvexnosti a konkávnosti použijeme obdobné schéma jako k určení monotonnosti, viz *tabulku 4.3*.

$f''(x)$	$(-\infty, -1/\sqrt{2})$	$(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$	$(1/\sqrt{2}, \infty)$
$(\sqrt{2}x - 1)$	–	–	+
$(\sqrt{2}x + 1)$	–	+	+
$e^{-x^2}$	+	+	+
$2(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)e^{-x^2}$	+	–	+
$f(x)$	konvexní	konkávní	konvexní

Tabulka 4.3: Konvexnost a konkávnost funkce  $f(x) = e^{-x^2}$

Funkce  $f$  je tedy na  $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$  konvexní a konkávní je na  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ .

7. Druhou derivací si také můžeme ověřit, že jsme správně určili lokální extrémy, jelikož funkce musí být v lokálním minimu konvexní a v lokálním maximu konkávní, což můžeme vidět na *obrázku 4.5*. Máme-li tedy bod podezřelý z lokálního extrému, stačí ho dosadit do druhé derivace, a pokud je hodnota kladná, jedná se o lokální minimum, pokud je hodnota záporná, máme lokální maximum.

U funkce  $f$  je  $f''(x) = 2(\sqrt{2}x - 1)(\sqrt{2}x + 1)e^{-x^2}$  a bod podezřelý z lokálního extrému je v  $x = 0$ ,  $f''(0) = -2$ , tj. v  $x = 0$  je lokální maximum.

8. S grafem nám také pomůže znalost limit funkce v „krajních“ bodech definičního oboru, abychom věděli, kam graf funkce „na krajích nasměrovat“. Funkce  $f$  má  $D_f = (-\infty, \infty)$ , musíme tedy spočítat dvě limity.

$$L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x^2} = 0 \quad (4.47)$$

$$L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x^2} = 0 \quad (4.48)$$

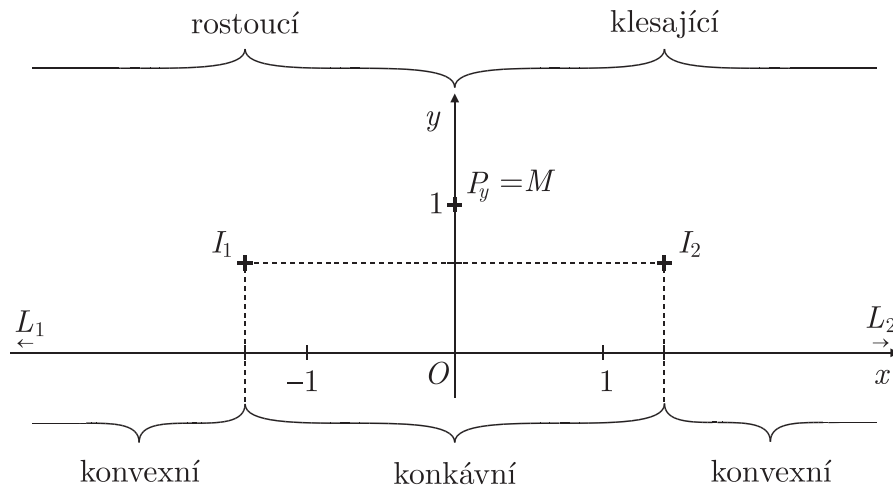
Vidíme tedy, že se máme pro  $x$  „hodně vzdálená od počátku“ (pro kladné i záporné hodnoty) blížit s hodnotami  $f(x)$  k nule, tj. k ose  $x$  (nesmíme ji ale protnout, protože neexistuje průsečík s osou  $x$ ).

9. Pomocí informací<sup>6</sup> zjištěných v bodech 1 až 8 nakreslíme graf vyšetřované funkce.

Shrneme, co jsme zjistili o funkci  $f(x) = e^{-x^2}$ :

- $D_f = \mathbb{R}$
- $P_y = [0, 1]$
- $P_x$  neexistuje
- $f$  je rostoucí na  $(-\infty, 0)$ , klesající na  $(0, \infty)$
- $f$  má lokální maximum v bodě  $M = [0, 1] = P_y$
- $f$  má inflexní body  $I_1 = [-1/\sqrt{2}, e^{-1/2}]$ ,  $I_2 = [1/\sqrt{2}, e^{-1/2}]$
- $f$  je konvexní na  $(-\infty, -1/\sqrt{2}) \cup (1/\sqrt{2}, \infty)$  a na  $(-1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$  je konkávní
- $L_1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ ,  $L_2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$

Získané informace zaneseme do kartézského systému, viz *obrázek 4.8*. Na

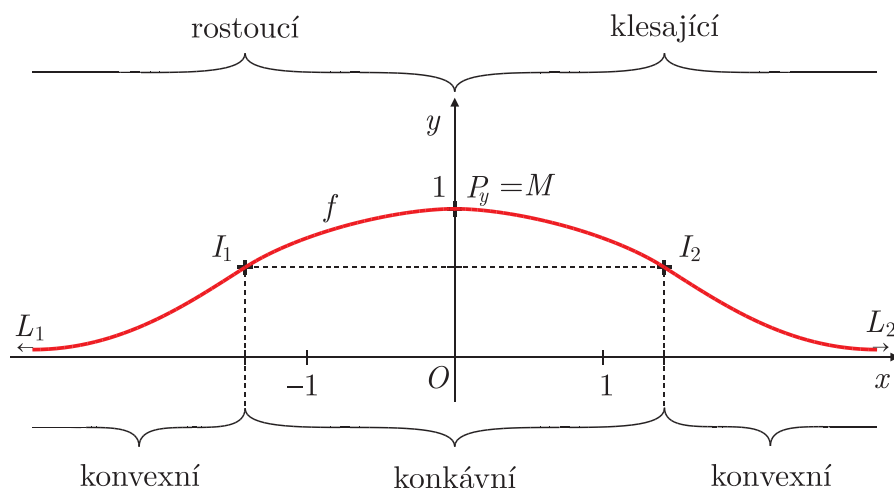


Obrázek 4.8: Informace zjištěné o funkci  $f(x) = e^{-x^2}$

obrázku jsou schématicky naznačeny i limity  $L_1$  a  $L_2$ . Když se zamyslíme a spojíme zakreslené body, uvidíme, jak by měl graf funkce  $f$  vypadat, viz *obrázek 4.9*.

Vytvořený graf lze ověřit např. pomocí již dříve zmíněného softwaru na [www.wolframalpha.com](http://www.wolframalpha.com), kde si můžeme nechat graf funkce  $f$  vykreslit.

<sup>6</sup>Obvykle se určují také tzv. *asymptoty* grafu funkce, jestli je funkce *sudá* nebo *lichá* (popř. ani jedno z toho), jedná-li se o *prostou* funkci atd. V tomto stručném přehledu to neuvádíme, jelikož to není nutné k demonstrování užitečnosti derivací pro průběh funkce.



Obrázek 4.9: Graf funkce  $f(x) = e^{-x^2}$

Zjištění průběhu funkce nám tedy umožňuje udělat si celkem jasnou představu, jak graf funkce vypadá, což se velmi hodí, pokud nemáme přístup k počítači, který by graf funkce vykreslil za nás.

Postup, jak vyšetřit průběh funkce, jsme zde uvedli zjednodušeně. Podrobněji je popsán například v [1], s. 103 – 121.

### 4.4.3 Taylorův rozvoj

*Taylorův rozvoj* nám umožňuje přiblížit průběh funkce v okolí určitého bodu pomocí polynomu. To může být velice výhodné v případech, kdy nám nejde o absolutně přesný výsledek (což je ve fyzice typické), a nevadí nám tudíž drobná odchylka. Výhodné je to z toho důvodu, že polynomy se velmi dobře derivují a i jinak se s nimi dobře počítá.

Ukažme si, kde se Taylorův rozvoj vezme. Máme funkci  $f(x)$  a chtěli bychom si ji v okolí nuly vyjádřit jako polynom, tj. položíme rovno

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k. \quad (4.49)$$

Vztah 4.49 se nazývá *Taylorova řada*, a když vezmeme konečný počet jejích sčítanců, získáme polynom.

Máme tedy polynom a potřebujeme zjistit jeho koeficienty  $a_k$ . Řekli jsme si, že chceme funkci nahradit v okolí nuly, a proto by se měl polynom v tomto okolí chovat stejně jako nahrazovaná funkce. Zkusme tedy dosadit 0 do rovnice 4.49, tj.

$$f(0) = a_0 + a_1 \cdot 0 + a_2 \cdot 0^2 + \dots + a_n \cdot 0^n + \dots = a_0. \quad (4.50)$$

A rázem známe koeficient  $a_0$  – rovná se  $f(0)$ . Jak ale zjistit ostatní koeficienty? Již jsme se zmínili, že se polynomy dobře derivují, a také proto jím chceme funkci  $f(x)$  nahradit. Zkusme této vlastnosti polynomů využít a rovnici 4.49 zderivovat. Získáme tak

$$\begin{aligned} f'(x) &= (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots)' = \\ &= a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots, \end{aligned} \quad (4.51)$$

čímž jsme se zbavili koeficientu  $a_0$ . Chceme, aby se první derivace funkce a polynomu v okolí nuly rovnaly, takže opět dosadíme nulu, tj.

$$f'(0) = a_1 + 2a_2 \cdot 0 + 3a_3 \cdot 0^2 + \dots + na_n \cdot 0^{n-1} + \dots = a_1 \quad (4.52)$$

a získali jsme koeficient  $a_1$ . Obdobným způsobem získáme další koeficienty. Ukážeme si ještě výpočet koeficientu  $a_2$ , tj.

$$\begin{aligned} f''(0) &= \left( a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots + na_nx^{n-1} + \dots \right)' \Big|_{x=0} = \\ &= \left( 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \right) \Big|_{x=0} = 2a_2 \\ &\Rightarrow a_2 = \frac{f''(0)}{2}, \end{aligned} \quad (4.53)$$

a určení koeficientu  $a_3$ , tj.

$$\begin{aligned} f'''(0) &= \left( 2a_2 + 6a_3x + \dots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \dots \right)' \Big|_{x=0} = \\ &= \left( 6a_3 + \dots + n(n-1)(n-2)a_nx^{n-3} + \dots \right) \Big|_{x=0} = 6a_3 \\ &\Rightarrow a_3 = \frac{f'''(0)}{2 \cdot 3}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Takto bychom mohli pokračovat postupně dále. Ještě odvodíme vztah pro  $n$ -tý koeficient  $a_n$ . Předchozí koeficienty jsme získali tak, že jsme vždy derivovali, dokud jsme se nezbavili proměnné  $x$  u hledaného koeficientu, a potom jsme dosadili 0, čímž jsme se zbavili členů s vyšší mocninou  $x$ . U koeficientu  $a_n$  je  $x^n$ , proto musíme funkci  $f(x)$   $n$ -krát zderivovat, aby u  $a_n$  zbylo  $x^0$ , tj.

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \left( a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots \right)^{(n)} = \\ &= n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot a_nx^0 + \dots = n! a_n + \dots, \end{aligned} \quad (4.55)$$

kde

$$n(n-1)(n-2) \cdot \dots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!. \quad (4.56)$$

Opět dosadíme 0 a vyjádříme hledaný koeficient

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}. \quad (4.57)$$

Když si dodefinujeme, že  $0! = 1$ , platí vztah 4.57 pro všechna  $n = 0, 1, 2, \dots$

Když dosadíme do definičního vztahu 4.49 za koeficient  $a_k$  z rovnice 4.57, můžeme Taylorův rozvoj funkce  $f(x)$  v okolí nuly zapsat jako

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n. \quad (4.58)$$

Obecně v bodě  $x_0$  má Taylorův rozvoj tvar

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} (x - x_0)^n. \quad (4.59)$$

Zatím to asi vypadá, že jsme se úplně zbláznili – chceme nahradit funkci  $f$  polynomem, protože se s ním dobře počítá a hezky se derivuje, ale abychom takový polynom vytvořili, pořád derivujeme původní funkci  $f$  a ještě se zdá, že ji budeme muset derivovat donekonečna? Naštěstí tomu tak dost často není, jelikož nyní přijde řada na zanedbávání.

Rozepišme si pár prvních členů Taylorova rozvoje funkce  $f(x)$  v bodě nula.

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + \frac{1}{6}f'''(0)x^3 + \frac{1}{24}f^{(4)}(0)x^4 + \dots \quad (4.60)$$

Když teď vezmeme hodně malé  $x$  ( $|x| \ll 1$ , např.  $x = 0,01$ ), protože počítáme Taylorův rozvoj v okolí nuly, bude po umocnění přirozeným číslem (kromě jedničky) ještě menší. Potom můžeme ale členy s vysokou mocninou  $x$  zanedbat, protože ovlivňují výsledek jen nepatrně.

Čím více členů z Taylorova rozvoje funkce  $f(x)$  vezmeme v úvahu, tím přesnější získáme aproximaci funkce  $f(x)$ .

Podrobnou diskuzi, jak se v Taylorově rozvoji provádějí zanedbání, je možno nalézt v [1], s. 127, nebo v [3], s. 164. My se budeme spoléhat, že funkce, na které budeme chtít použít Taylorův rozvoj, budou splňovat všechny potřebné předpoklady a že  $x$  bude dostatečně malé.

Ukažme si tedy, kdy a jak lze Taylorův rozvoj použít. Ve speciální teorii relativity se k transformaci souřadnic mezi různými vztažnými systémy, které se vůči sobě pohybují rychlostí o velikosti  $v$ , nepoužívá Galileiho transformace, která je běžná v klasické mechanice, ale tzv. *Lorentzova transformace*, kde vystupuje člen  $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ , přičemž  $c$  je rychlost světla ve vakuu. Když bude mít rychlost  $v$  velikost, na kterou jsme zvyklí na Zemi, potom je výraz  $v^2/c^2$  mnohem menší než 1, tj.  $v^2/c^2 \ll 1$ , a mohli bychom použít Taylorův rozvoj a zbavit se tak odmocniny. Obecněji vezmeme funkci  $f(x) = \sqrt{1 - x}$ . Protože je  $0 < x \ll 1$ , budeme hledat Taylorův rozvoj v okolí nuly.

Nejdříve si spočítejme několik prvních koeficientů  $a_n$  rozvoje pomocí odvozeného vztahu 4.57. Dostáváme

$$a_0 = \frac{f^{(0)}(0)}{0!} = f(0) = \sqrt{1 - 0} = 1, \quad (4.61)$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{f'(0)}{1!} = (\sqrt{1 - x})' \Big|_{x=0} = \left( (1 - x)^{\frac{1}{2}} \right)' \Big|_{x=0} = \frac{1}{2}(1 - x)^{-\frac{1}{2}}(1 - x)' \Big|_{x=0} = \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{1 - x}} \Big|_{x=0} = -\frac{1}{2}, \end{aligned} \quad (4.62)$$

$$a_2 = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{\left( -\frac{1}{2}(1 - x)^{-\frac{1}{2}} \right)' \Big|_{x=0}}{2} = \frac{-\frac{1}{4}(1 - x)^{-\frac{3}{2}} \Big|_{x=0}}{2} = -\frac{1}{8}. \quad (4.63)$$

Získané koeficienty dosadíme do vztahu 4.49, tj.

$$f(x) = \sqrt{1 - x} = 1 + \left( -\frac{1}{2} \right) x + \left( -\frac{1}{8} \right) x^2 + \dots \quad (4.64)$$

a rozmyslíme si, co můžeme zanedbat. První, co nás může napadnout, je rovnou zanedbání  $x$ , když je tak malé. Tím pádem by nám zmizeli všechny členy s  $x$  (v jakékoliv mocnině) a zbyla pouze jednička, tj.  $f(x) = \sqrt{1 - x} \doteq 1$ . Pro takovéto

zanedbání by ale bylo celé předešlé odvozování a počítání bezcenné. Toto zanedbání je příliš hrubé. Lepší výsledek získáme, zanedbáme-li  $x^2$  a vyšší mocniny  $x$ . Získáme tak

$$f(x) = \sqrt{1-x} \doteq 1 - \frac{x}{2}, \quad (4.65)$$

což už nám dá pro malá  $x$  velmi dobrý výsledek a celý předchozí postup dostane smysl.

Aby byl výpočet kompletní, převedeme si výsledek do původní proměnné  $v$ , tj.  $\sqrt{1-v^2/c^2} \doteq 1 - v^2/2c^2$ .

V rámci tréninku si vyřešíme ještě jednu úlohu, ve které odvodíme velmi užitečný vztah. Nyní si vezmeme  $f(x) = (1+x)^k$ , kde  $k \in \mathbb{R}$  a  $x \ll 1$ . Abychom zbytečně nepočítali, rovnou se domluvíme, že v Taylorově rozvoji zanedbáme  $x^n$ , kde  $n \geq 2$ . Stačí nám tedy spočítat pouze  $a_0$  a  $a_1$ .

$$a_0 = f(0) = 1 \quad (4.66)$$

$$a_1 = \frac{f'(0)}{1!} = k(1+x)^{k-1} \Big|_{x=0} = k \quad (4.67)$$

Po dosazení a zanedbání získáváme tedy výsledek

$$f(x) = (1+x)^k \doteq 1 + kx. \quad (4.68)$$

Užitečnost odvozeného vztahu spočívá v jeho obecnosti. Například jsme teď schopní pouze dosazením do *vztahu 4.68* okamžitě napsat přibližný vztah třeba pro funkci  $\sqrt{1+x}$ , tj.

$$\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}} \doteq 1 + \frac{x}{2}. \quad (4.69)$$

## 4.5 Fyzikální aplikace derivací

### 4.5.1 Využití derivací k definování fyzikálních veličin

Jak už bylo zmíněno, diferenciální počet je pro fyziku nepostradatelný. Derivace, která vyjadřuje změnu nějaké funkce, se objevuje všude, kde se něco mění, respektive může měnit.

Již jsme si ukázali, jak spočítat velikost okamžité rychlosti. Je to jednoduše derivace dráhy podle času,  $v = ds/dt$ . Na střední škole je velikost okamžité rychlosti definována jako podíl  $\Delta s/\Delta t$ , kde  $\Delta t$  je hodně malé. To je z důvodu neznalosti limitního počtu a bohužel tento vztah není přesný. Přesnosti se dosáhne až derivacemi. Velikost okamžité rychlosti ale není jediná fyzikální veličina, která se na střední škole definuje jako podíl „ $\Delta \dots / \Delta \dots$ “.

Příkladem může být třeba elektrický proud  $I$ . Elektrický proud tvoří uspořádaně se pohybující částice s nábojem (v klasických obvodech jsou to hlavně elektrony), které jsou rozpožbovány elektrickým polem (zjednodušeně např. máme-li nabitý kondenzátor, náboje v něm se navzájem odpuzují, a když nic nevykompenzuje odpudivou sílu, náboje z kondenzátoru unikají). Uvažujme v prostoru nějakou plochu o obsahu  $S$  (např. průřez vodiče) a částice s nábojem, které proudí ve zvoleném směru skrze uvažovanou plochu. Když skrze plochu o obsahu  $S$  projde za časový interval  $\Delta t$  náboj  $\Delta Q$ , potom je průměrný elektrický proud  $I$  definován jako  $\Delta Q/\Delta t$ .

Máme tedy definici průměrného elektrického proudu  $I = \Delta Q / \Delta t$ , a když provedeme podobné úvahy jako v případě  $v = \Delta s / \Delta t$ , získáme analogický výsledek a můžeme napsat definici okamžitého elektrického proudu jako

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (4.70)$$

Obdobně můžeme přepsat vztahy pro okamžité hodnoty veličin, které se objevují na střední škole, a tím je zpřesnit.

Okamžitý výkon je nepřesně  $P = \Delta W / \Delta t$ , kde  $\Delta W$  je práce a  $\Delta t$  je čas. Nyní víme, že přesný vztah je

$$P = \frac{dW}{dt}. \quad (4.71)$$

$P = \Delta W / \Delta t$  je přesný vztah pro průměrný výkon.

Dalším příkladem může být indukované napětí z Faradayova zákona elektromagnetické indukce  $U_i = -\Delta \Phi / \Delta t$ , kde  $\Phi$  je magnetický indukční tok plochou, která je ohraničena uzavřenou křivkou (tu může představovat např. závit). My tento vztah přepíšeme jako

$$U_i = -\frac{d\Phi}{dt}. \quad (4.72)$$

Měnit se mohou také fyzikální veličiny, které již charakterizují změnu nějaké jiné veličiny. Vraťme se zpět k okamžité rychlosti, pro jejíž velikost máme vztah  $v = ds/dt$ . Velikost okamžité rychlosti se obecně s časem mění, což už bylo zmíněno výše při odvozování derivací (kdyby se neměnila, rovnala by se průměrné rychlosti a nemělo by smysl se jí dále zabývat). Když nás zajímá, jak se mění s časem, stačí ji zderivovat a získáme velikost okamžitého *zrychlení*  $a$  (až na případné znaménko), tj.

$$a = \frac{dv}{dt}, \quad (4.73)$$

přičemž na střední škole bylo  $a = \Delta v / \Delta t$ .

Tímto se také dostáváme k fyzikálním aplikacím derivací vyšších řádů, protože  $v = ds/dt$ , a tedy

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left( \frac{ds}{dt} \right) = \frac{d^2s}{dt^2}. \quad (4.74)$$

## 4.5.2 Derivace vektorů

Uvedme si druhý Newtonův pohybový zákon. Zřejmě nejčastěji se můžeme setkat s klasickým vztahem

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a}, \quad (4.75)$$

kde  $\mathbf{F}$  je vektor síly,  $m$  je hmotnost a  $\mathbf{a}$  je vektor zrychlení. My zatím umíme počítat derivace skalárních funkcí (nemají směr), např. jsme schopni určit velikost tečného zrychlení. Mnoho veličin je ale ve fyzice definováno jako vektor (vektorová funkce). Příkladem může být gravitační zrychlení pole Země, které je vektorovou funkcí polohy – jeho velikost závisí na vzdálenosti zkoumaného místa od středu Země a míří vždy v radiálním směru do středu Země.

Líbilo by se nám, kdybychom dokázali nějak charakterizovat i změnu vektoru, když už to dokážeme u skalárů. Proto byly definovány také derivace vektorů.

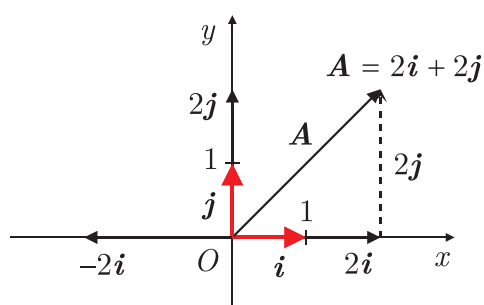
Derivace vektorové funkce  $\mathbf{A}(x)$  v bodě  $x_0$  je

$$\frac{d\mathbf{A}(x_0)}{dx} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\mathbf{A}(x) - \mathbf{A}(x_0)}{x - x_0} = \mathbf{B}(x_0). \quad (4.76)$$

Derivací vektorové funkce  $\mathbf{A}(x)$  získáme obecně „novou“ vektorovou funkci  $\mathbf{B}(x)$ .

Stejně jako u skalárních funkcí by bylo nepraktické počítat jen na základě definice. Nemusíme mít obavy, i s vektory to půjde jednodušeji. Pouze si musíme nejdříve prozradit něco více o vektorech a vrátit se k systémům souřadnic.

Vektory v systémech souřadnic znázorňujeme orientovanými úsečkami, které tvoříme tak, že kombinujeme tzv. *vektory báze*. Vektory báze jsou základní vektory, které určují systém souřadnic, kde pracujeme. Ukažme si to na obrázku, aby bylo vidět, co je tím myšleno. Na *obrázku 4.10* je kartézský systém v rovině



Obrázek 4.10: Kartézský systém v rovině s bází  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$

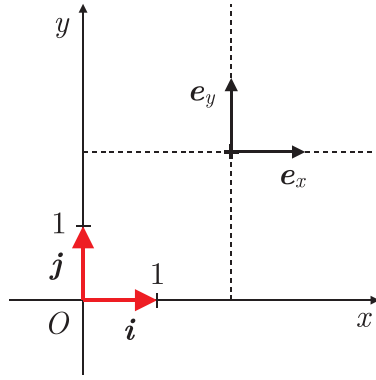
a osy  $x$ ,  $y$  jsou určeny pomocí vektorů báze  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$ . Tyto vektory mají jednotkovou velikost (velikost orientované úsečky, která je reprezentuje, je 1). Když budeme vektory báze násobit reálnými čísly, vygenerují nám všechny vektory ve směru osy  $x$  a  $y$ . Když chceme získat vektor v obecném směru, musí být kombinací obou vektorů báze. Např. vektor  $\mathbf{A}$  získáme jako součet vektorů  $2\mathbf{i}$  a  $2\mathbf{j}$ , tj.  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ , a říkáme, že  $\mathbf{A}$  je *lineární kombinací*  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{j}$ .

Teď umíme vygenerovat všechny vektory, které vycházejí z počátku. My ale chceme umět vyjádřit i vektory, které jsou umístěny mimo počátek. To uděláme pomocí tzv. *lokální báze*. Lokální báze v daném bodě je určena souřadnicovými čarami (souřadnicové čáry v rovině jsou množiny bodů, kde se jedna souřadnice mění a druhá je konstantní, a můžeme si je připomenout na *obrázku 2.7*). Lokální báze v rovině je opět tvořena dvěma jednotkovými vektory,  $\mathbf{e}_x$  a  $\mathbf{e}_y$ , a v kartézském systému se jedná v podstatě o posunutou bázi (v počátku je báze a lokální báze shodná), viz *obrázek 4.11*. Lokální bázi zkonstruujeme tak, že každá souřadnicová čára určuje právě jeden vektor. Vektor vychází z daného bodu ve směru čáry a je orientován ve směru růstu hodnot souřadnice a velikost tohoto vektoru je 1.

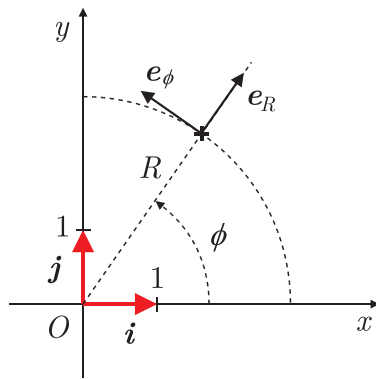
Zatím se tváří lokální báze triviálně, protože jsme si ji ukázali pouze v kartézském systému. Na *obrázku 4.12* je vyznačena lokální báze polárního systému a tu lze získat z kartézské báze posunutím, ale navíc ještě pootočením o úhel  $\phi$ .

Jak už jsme se zmínili, vektory děláme obecně jako lineární kombinaci vektorů báze, popř. lokální báze, a s tím souvisí také souřadnice vektorů. Na *obrázku 4.10* je vektor  $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ; koeficient u vektoru  $\mathbf{i}$  je tzv.  $x$ -ová souřadnice vektoru  $\mathbf{A}$  a koeficient u vektoru  $\mathbf{j}$  je tzv.  $y$ -ová souřadnice vektoru  $\mathbf{A}$ . To lze zapsat jako  $\mathbf{A} = (2, 2)$ , což je značení již známé ze střední školy. Obecně budeme považovat





Obrázek 4.11: Kartézský systém v rovině s bází  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  a lokální bází  $\mathbf{e}_x$ ,  $\mathbf{e}_y$



Obrázek 4.12: Lokální báze polárního systému  $\mathbf{e}_R$ ,  $\mathbf{e}_\phi$

za souřadnice vektoru koeficienty u vektorů lokální báze, tj.

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{e}_1 + A_2 \mathbf{e}_2 + A_3 \mathbf{e}_3 = (A_1, A_2, A_3), \quad (4.77)$$

kde  $\mathbf{e}_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , jsou vektory lokální báze nějakého systému souřadnic (pokud chceme pracovat v rovině, bude jeden z  $\mathbf{e}_i$  roven nulovému vektoru).

Protože  $\mathbf{i}$  a  $\mathbf{e}_x$  mají stejný směr a velikost a v matematice se nerozlišují vektory podle místa, odkud vychází, lze psát  $\mathbf{i} = \mathbf{e}_x$  a analogicky  $\mathbf{j} = \mathbf{e}_y$  (jsou to pouze posunuté vektory). Kdybychom si ale chtěli vyjádřit  $\mathbf{e}_R$  a  $\mathbf{e}_\phi$  pomocí  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$ , tak to bude složitější;  $\mathbf{e}_R$  a  $\mathbf{e}_\phi$  jsou totiž vůči  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  pootočené, viz *obrázek 4.13*.

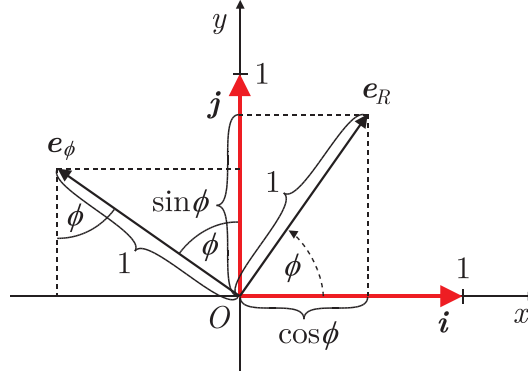
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_R &= \cos \phi \cdot \mathbf{i} + \sin \phi \cdot \mathbf{j} = (\cos \phi, \sin \phi) \\ \mathbf{e}_\phi &= -\sin \phi \cdot \mathbf{i} + \cos \phi \cdot \mathbf{j} = (-\sin \phi, \cos \phi) \end{aligned} \quad (4.78)$$

V prostoru se lokální báze konstruuje analogicky.

Nyní jsme připraveni vektory derivovat. Vezměme si vektorovou funkci  $\mathbf{A}(t)$  a zderivujme ji podle parametru  $t$  ( $t$  neznamená obecně čas, ale může to být např. souřadnice, velikost rychlosti atd.), tj.

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [A_1(t)\mathbf{e}_1(t) + A_2(t)\mathbf{e}_2(t) + A_3(t)\mathbf{e}_3(t)], \quad (4.79)$$

kde  $(t)$  znamená, že  $A_i$ ,  $\mathbf{e}_i$  jsou obecně funkcí proměnné  $t$ . Výraz v hranaté závorce je součet tří různých součinů funkcí, takže použijeme *pravidla 4.18 a 4.21*, která



Obrázek 4.13: Lokální báze polárního systému  $e_R$ ,  $e_\phi$  a báze  $i$ ,  $j$

již známe.

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = & \frac{dA_1(t)}{dt} \mathbf{e}_1(t) + A_1(t) \frac{d\mathbf{e}_1(t)}{dt} + \frac{dA_2(t)}{dt} \mathbf{e}_2(t) + A_2(t) \frac{d\mathbf{e}_2(t)}{dt} + \\ & + \frac{dA_3(t)}{dt} \mathbf{e}_3(t) + A_3(t) \frac{d\mathbf{e}_3(t)}{dt} \end{aligned} \quad (4.80)$$

Abychom nemuseli psát takový dlouhý výraz, můžeme ho zapsat jako

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \left( \frac{dA_i(t)}{dt} \mathbf{e}_i(t) + A_i(t) \frac{d\mathbf{e}_i(t)}{dt} \right). \quad (4.81)$$

V kartézském systému, jsou pro všechna  $i$   $d\mathbf{e}_i(t)/dt = \mathbf{0}$ , kde ( $\mathbf{0} = (0, 0, \dots)$  je nulový vektor), protože velikost a směr  $\mathbf{e}_i$  se nemění. Proto je derivování vektorů v kartézském systému velmi jednoduché – po dosazení  $\mathbf{0}$  za  $d\mathbf{e}_i(t)/dt$  do vztahu 4.82 vyjde

$$\frac{d\mathbf{A}(t)}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{dA_i(t)}{dt} \mathbf{e}_i(t) = \left( \frac{dA_1(t)}{dt}, \frac{dA_2(t)}{dt}, \frac{dA_3(t)}{dt} \right). \quad (4.82)$$

Opatrní musíme být v jiných systémech souřadnic, protože tam v různých bodech mají vektory lokální báze odlišné směry, což se projeví v derivaci.

Když už umíme derivovat vektory, můžeme pokročit i k definicím některých fyzikálních veličin. Doteď jsme uměli určovat velikost okamžité rychlosti  $v$  jako derivaci dráhy podle času. Okamžitá rychlost hmotného bodu je však vektor a je definována jako derivace polohového vektoru  $\mathbf{r}$  podle času  $t$ , tj.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}. \quad (4.83)$$

Vektor okamžitého zrychlení  $\mathbf{a}$  je potom

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}(t)}{dt^2} \quad (4.84)$$

a síla  $\mathbf{F}$  z druhého Newtonova pohybového zákona je

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2}. \quad (4.85)$$

Pomocí okamžité rychlosti se také definuje další významná vektorová veličina a to hybnost  $\mathbf{p}$  daná vztahem

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}. \quad (4.86)$$

Hybnost můžeme zderivovat podle času a budeme-li předpokládat, že hmotnost je konstantní (uvažujeme-li např. pohyb hmotného bodu běžnou rychlostí), pak

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{v}) = m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a} = \mathbf{F}. \quad (4.87)$$

Derivací hybnosti jsme získali sílu, čímž jsme se dostali k původnímu zápisu vztahu pro sílu z druhého Newtonova pohybového zákona, tj.

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt}. \quad (4.88)$$

Vztah 4.88 má oproti častěji uváděnému  $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$  tu výhodu, že neplatí pouze v klasické fyzice, když uvažujeme konstantní hmotnost a rychlosti běžné na Zemi (mnohem menší, než rychlost světla ve vakuu), ale je zároveň i relativistický, tedy platí, i když bereme hmotnost jako funkci rychlosti.

Když si to shrneme, základní využití derivací ve fyzice je v tom, že umožňují definování veličin, které charakterizují změnu jiných veličin.

### 4.5.3 Aproximace pomocí Taylorova rozvoje

Další veledůležité využití derivací bylo již zmíněno u Taylorova rozvoje, který se používá k aproximacím (přibližnému určení). Mnohdy nemá smysl snažit se vyjádřit či vypočítat výsledek zcela přesně. Již jsme se zmiňovali o Lorentzově transformaci (viz odvozování vztahu 4.65), která se využívá ve speciální teorii relativity, a ukázali jsme si, jak se zbavit odmocniny pro malé rychlosti  $v$ . Když si to ukážeme přímo ve zmíněné transformaci ze soustavy  $S$  do  $S'$  (příčemž osy  $y$ ,  $y'$  a  $z$ ,  $z'$  jsou rovnoběžné, osy  $x$ ,  $x'$  splývají a  $S'$  se pohybuje konstantní rychlostí  $v$  vzhledem k  $S$  ve směru růstu  $x$ ), pro souřadnici  $x$  a  $x'$  (čárka neznamena derivaci, ale příslušnost ke vztažené soustavě  $S'$ ), získáme

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \doteq \frac{x - vt}{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}}. \quad (4.89)$$

Tím ale nemusíme s aproximacemi skončit a můžeme použít Taylorův rozvoj ještě jednou a zbavit se lomeného výrazu. Odvodíme si první členy Taylorova rozvoje pro  $1/(1-x)$ , kde  $|x| \ll 1$ , tj.

$$\frac{1}{1-x} \Big|_{x=0} = 1, \quad (4.90)$$

$$\left( \frac{1}{1-x} \right)' \Big|_{x=0} = -\frac{1}{(1-x)^2}(-1) \Big|_{x=0} = 1, \quad (4.91)$$

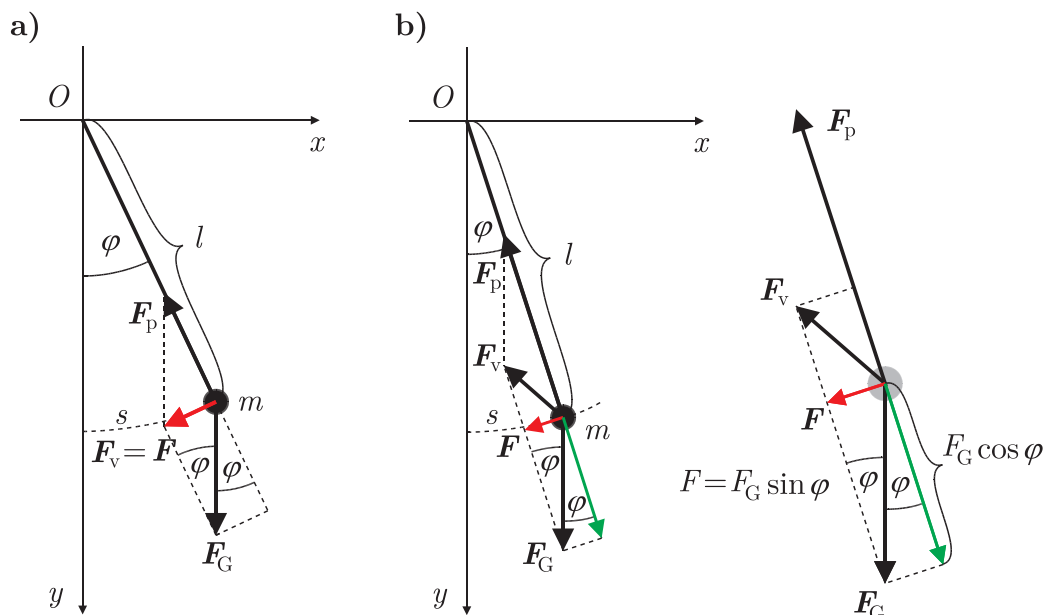
$$\frac{1}{1-x} \doteq 1 + x. \quad (4.92)$$

Aplikací odvozeného vztahu na transformační vztah pro  $x'$  získáme

$$x' \doteq \frac{x - vt}{1 - \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}} \doteq (x - vt) \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2} \right). \quad (4.93)$$

Taylorův rozvoj nám tedy umožňuje zbavit se některých „nepříjemných“ výrazů.

Jeden z velmi významných fyzikálních modelů pro klasickou mechaniku je harmonický oscilátor, respektive kyvadlo<sup>7</sup>. Pomocí obrázku 4.14 a jednoduchých úvah získáme rovnici popisující výchylku  $\varphi$  kyvadla.



Obrázek 4.14: **a)** Kyvadlo v krajní poloze; **b)** Kyvadlo v obecné poloze

Mějme kyvadlo tvořené závažím o hmotnosti  $m$  a provázkem délky  $l$ . Zanedbáme hmotnost provázku a odporovou sílu prostředí působící na závaží a provázek. Na závaží  $m$  působí tíhová síla  $\mathbf{F}_G$  a síla provázku  $\mathbf{F}_p$  a jejich výslednice je síla  $\mathbf{F}_v$ , která rozpohybovává závaží, tj.  $\mathbf{F}_v = \mathbf{F}_G + \mathbf{F}_p$ . Jak je vidět na obrázku, síla  $\mathbf{F}_v$  závisí na úhlu  $\varphi$ . Jeli kyvadlo v krajní poloze (obrázek 4.14 a)), je okamžitá rychlost závaží nulová a síla  $\mathbf{F}_v$  působí v tečném směru k trajektorii závaží, přičemž sílu v tečném směru si označíme jako  $\mathbf{F}$ . V jiných polohách než krajních síla  $\mathbf{F}_v$  v tečném směru nepůsobí (viz obrázek 4.14 b), kde jsou barevně vyznačeny složky síly  $\mathbf{F}_G$ ), ale my se budeme dále zabývat pouze její tečnou složkou  $\mathbf{F}$ . Pro tečnou složku (velikost až na znaménko) síly  $\mathbf{F}$  platí, že  $F = -F_G \sin \varphi = -mg \sin \varphi$ , kde znaménko mínus vyjadřuje skutečnost, že síla  $\mathbf{F}$  se vždy snaží zmenšit absolutní hodnotu výchylky  $\varphi$ . Vztah pro sílu dosadíme do Newtonovy pohybové rovnice  $F = ma$ , tj.

$$-mg \sin \varphi = ma \quad \Rightarrow \quad a = -g \sin \varphi, \quad (4.94)$$

kde  $a$  je velikost (až na znaménko) tečné složky zrychlení, které působí na závaží.

Nyní si ještě vyjádříme zrychlení  $a$  pomocí  $\varphi$ . Zrychlení  $a$  působí v tečném směru k trajektorii závaží  $m$ , to znamená, že ho můžeme získat jako druhou derivaci dráhy  $s$  podle času, přičemž  $s = l\varphi$  (viz vztah 2.3). Použijeme také nové značení, se kterým se můžeme ve fyzice běžně setkat, a to, že derivace podle času

<sup>7</sup>Kyvadlo může být v podstatě cokoliv, co se kýve – potom mluvíme o tzv. *fyzickém kyvadle*. Zde budeme kyvadlem speciálně rozumět závaží na závěsu konstantní délky.

se značí tečkou nad derivovanou veličinou, popřípadě dvěma tečkama pro druhou derivaci podle času.

$$a = \frac{d^2 s}{dt^2} = \ddot{s} = \frac{d^2}{dt^2}(l\varphi) = l\ddot{\varphi} \quad (4.95)$$

Máme tedy dva vztahy pro zrychlení a dáme-li je do rovnosti, získáme *diferenciální rovnici druhého řádu*<sup>8</sup> pro  $\varphi$ :

$$l\ddot{\varphi} = -g \sin \varphi \quad \Rightarrow \quad \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0 \quad (4.96)$$

Diferenciální rovnice zatím neumíme řešit, ale mohli bychom se pokusit uhodnout řešení, tedy uhodnout tvar funkce  $\varphi = \varphi(t)$ . U rovnice, kterou jsme získali, nám to ale půjde těžko, protože se  $\varphi$  vyskytuje nejen samostatně v druhé derivaci, ale i v argumentu funkce sinus. Proto bychom se mohli pokusit zbavit funkce sinus pomocí Taylorova rozvoje. Kyvadlo kýve kolem rovnovážné polohy, kde je  $\varphi = 0$ , a proto budeme dělat rozvoj v okolí nuly.

$$\sin \varphi|_{\varphi=0} = 0 \quad (4.97)$$

$$(\sin \varphi)'|_{\varphi=0} = \cos \varphi|_{\varphi=0} = 1 \quad (4.98)$$

$$(\sin \varphi)''|_{\varphi=0} = -\sin \varphi|_{\varphi=0} = 0 \quad (4.99)$$

$$(\sin \varphi)'''|_{\varphi=0} = -\cos \varphi|_{\varphi=0} = -1 \quad (4.100)$$

$$\sin \varphi = 0 + \frac{1}{1!}x + \frac{0}{2!}x^2 - \frac{1}{3!}x^3 + \dots = x - \frac{x^3}{6} + \dots \quad (4.101)$$

Aby nám rozvoj k něčemu byl, musíme udělat nějaké zanedbání. Proto se omezíme na velmi malé úhly (výchyly)  $\varphi$  kolem rovnovážné polohy, tj.  $|\varphi| \ll 1$ , a zanedbáme druhé a vyšší mocniny  $\varphi$ , tj.

$$\sin \varphi \approx \varphi. \quad (4.102)$$

Tím pádem se z naší rovnice popisující pohyb kyvadla při zvoleném omezení na malé výchyly stane jednodušší rovnice

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = 0. \quad (4.103)$$

Teď stačí jenom vymyslet, jak by mohla vypadat funkce  $\varphi(t)$ . Když si nebudeme chvíli všimnout konstanty  $g/l$ , zjistíme, že potřebujeme funkci, která dvakrát zderivovaná dá původní funkci s opačným znaménkem (to proto, aby se navzájem odečetly). Takovou funkcí je například kosinus. Zvolíme tedy  $\varphi(t) = A \cos \omega t$ , kde  $\omega$  je úhlová frekvence a  $A$  konstanta, která nemá vliv na derivování, tzv. *amplituda* (maximální výchylka). Po dosazení dostáváme:

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\varphi = \frac{d^2(A \cos \omega t)}{dt^2} + \frac{g}{l}A \cos \omega t = -A\omega^2 \cos \omega t + A\frac{g}{l} \cos \omega t = 0 \quad (4.104)$$

Z poslední rovnosti vidíme, že bude splněna pro

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.105)$$

<sup>8</sup>Diferenciální rovnice je rovnice, kde se vyskytuje derivace hledané funkce. Je-li diferenciální rovnice druhého řádu, vyskytuje se v rovnici alespoň jedna derivace druhého řádu, ale ne vyšší.

Získali jsme tedy řešení

$$\varphi(t) = A \cos(\omega t), \text{ kde } \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}. \quad (4.106)$$

Obdobné řešení bychom získali pro výchylku netlumeného harmonického oscilátoru tvořeného pružinou a závažím. Ze získané rovnice je vidět, proč se oscilátor nazývá harmonický – jeho výchylka je popsána harmonickou funkcí, v našem případě funkcí kosinus.

Model kyvadla, jehož pohyb jsme vyřešili se zvoleným zanedbáním  $|\varphi| \ll 1$ , se nazývá *matematické kyvadlo* (což je známé ze střední školy).

#### 4.5.4 Další aplikace derivací ve fyzice

U průběhu funkce (viz *část 4.4.2*) jsme se naučili hledat lokální extrémy funkce. Máme-li nějaký vztah popisující například sílu jako funkci času, rychlosti, polohy atd., můžeme pomocí derivací zjistit, kdy je síla maximální a kdy minimální, popřípadě vyšetřit celý její průběh.

Dalším příkladem na hledání extrémů je tzv. *úloha o brachistochroně*. V této úloze jde o to, že máme v prostoru body  $A$  a  $B$  s různými nadmořskými výškami v homogenním tíhovém poli a zajímá nás, jaký tvar musí mít sluzavka mezi nimi, aby se hmotný bod pohybující se bez tření po skluzavce dostal z vyššího bodu do nižšího za co nejkratší čas. Na vyřešení této úlohy zatím nemáme potřebný matematický aparát, ale hledali bychom minimum času, který by byl funkcí určitých parametrů. Úlohu o brachistochroně si vyřešíme, až budeme umět integrovat po křivkách.

V předchozím jsme si ukázali některé důležité fyzikální aplikace derivací. Jelikož se náš svět stále nějak pohybuje, vyvíjí a mění, v následujícím studiu se už derivací nezbavíme.

# Literatura

- [1] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, Matfyzpress, Praha 2004.
- [2] J. Kopáček a kolektiv: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky (I)*, Matfyzpress, Praha 2005.
- [3] J. Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha 2004.
- [4] G. Arfken, H. Weber, F. Harris: *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, Academic Press, Oxford 2012.
- [5] K. Rektorys a spol.: *Přehled užití matematiky I*, Prometheus, Praha 2000.
- [6] K. Rektorys a spol.: *Přehled užití matematiky II*, Prometheus, Praha 2000.
- [7] R. Böhm, M. Klimo: *Matematické metody vo fyzike*, 2014.  
(<http://www.ddp.fmph.uniba.sk/~bohm/metody/skriptaA4.pdf>)
- [8] J. Končel: *Využití internetu ve výuce analytické geometrie na střední škole*, 2014.  
([http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan\\_koncel/](http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/))
- [9] M. Jarešová, I. Volf: *Souřadnice ve fyzice*, 2014.  
(<http://fyzikalniolympiada.cz/texty/matematika/sourad.pdf>)
- [10] autor neznámý: *Matematika polopate*, 2014.  
(<http://www.matematika.cz/matematika-polopate>)
- [11] autor neznámý: *Matika krokem*, 2014.  
([http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/matika\\_krokem.php](http://www.mojeskola.cz/Vyuka/Php/Learning/matika_krokem.php))
- [12] M. Valášek: *Mathematicator*, 2014.  
(<http://www.mathematicator.com/>)
- [13] Z. Koupilová a KDF MFF UK: *Sbírka řešených úloh z fyziky*, 2014.  
(<http://fyzikalniulohy.cz/>)