Elektronická učebnice matematických metod fyziky

Petr Kolář

Obsah

Úvod **2**

1 Integrály funkce jedné proměnné **4**
1.1 Primitivní funkce . . . 7
1.2 Neurčitý integrál . . . 8
1.3 Metody výpočtu integrálů . . . 9
1.3.1 Základní pravidla pro výpočet integrálů . . . 10
1.3.2 Metody pro výpočet integrálů . . . 12
1.3.3 Integrace racionálních funkcí . . . 22
1.4 Určitý integrál . . . 29

2 Integrály funkce více proměnných **35**
2.1 Funkce více proměnných . . . 35
2.2 Integrace podle jedné proměnné . . . 36
2.3 Násobné integrály . . . 38
2.3.1 Dvojný integrál . . . 38
2.3.2 Trojný integrál . . . 45
2.4 Integrály I. druhu . . . 53
2.4.1 Křivkový integrál I. druhu . . . 53
2.4.2 Plošný integrál I. druhu . . . 60

3 Přehled studijních textů k matematickým metodám fyziky **65**

Literatura **69**

Použité označení a zkratky

V matematických a fyzikálních textech se objevuje mnoho způsobů značení, přičemž každý rád používá to, na které je zvyklý. Aby nedocházelo k nedorozuměním, uvedeme hned na začátku textu značení, které bude dále používáno.

$\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ ...\}$	množina přirozených čísel
$\mathbb{N}_0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ ...\}$	$\mathbb{N}$ rozšířená o 0
$\mathbb{Z}$	množina celých čísel
$\mathbb{Q}$	množina racionálních čísel
$\mathbb{R}$	množina reálných čísel
$\mathbb{R}^+$	množina kladných reálných čísel
$\mathbb{R}^-$	množina záporných reálných čísel

a	skalár
$\boldsymbol{b} = (b_1,\ b_2,\ ...)$	vektor o souřadnicích $b_1,\ b_2,\ ...$
$A = [a_1,\ a_2,\ ...]$	bod o souřadnicích $a_1,\ a_2,\ ...$

$\sim$	„je přímo úměrné“
$\doteq$	„je přibližně rovno“, resp. „zaokrouhleno“
$\approx$	„je řádově rovno“
$\equiv$	„je identicky rovno“
$\widehat{=}$	„odpovídá“
$\stackrel{\mathrm{pp}}{=}$	„je po použití metody per partes rovno“
$\stackrel{\mathrm{k}}{=}$	„je v kartézském systému souřadnic rovno“
$\stackrel{\mathrm{p}}{=}$	„je v polárním systému souřadnic rovno“
$\leqq$	„je menší nebo rovno“
$\geqq$	„je větší nebo rovno“
$<$	„je menší“
$>$	„je větší“
$\ll$	„je mnohem menší“
$\gg$	„je mnohem větší“

Úvod

Tato diplomová práce vznikla jako přímé pokračování bakalářské práce s názvem *Elektronická učebnice k předmětu Úvod do matematických metod fyziky*, [1], která byla napsána zejména pro studenty prvního ročníku učitelství fyziky MFF UK. Protože text [1] nezpracovává látku celého sylabu k předmětu *Úvod do matematických metod fyziky*, který je vyučován v zimním semestru prvního ročníku, rozhodli jsme se v práci pokračovat a navázat i tématy z předmětu *Matematické metody ve fyzice*, který je vyučován v letním semestru prvního ročníku a v podstatě navazuje na předmět ze semestru zimního.

U čtenáře, který má zájem studovat z této diplomové práce, se tedy očekává, že je seznámen s matematickým aparátem probraným v [1] a ovládá ho. Nejpodstatnější jsou *derivace* a *systémy souřadnic*. Ve vhodných chvílích se zde na [1] odkazujeme.

Předpokládá se také znalost *parciálních derivací* u *reálných funkcí více reálných proměnných*, jejichž vybudování bohužel není součástí [1], ale čtenáře můžeme odkázat např. na publikaci [2] nebo [3], kde je diferenciální počet funkcí více proměnných vyložen.

Při tvorbě této diplomové práce byly také formou dotazníku zjišťovány názory studentů učitelství fyziky z prvních ročníků, kteří nastoupili v letech 2014 a 2015, na studijní text vniklý v rámci bakalářské práce [1] (zejména jestli jim vyhovuje způsob výkladu, zda jim přijde studijní text užitečný a jestli je něco, co by rádi změnili). Tento průzkum byl však pouze kvalitativního charakteru, protože v prvních ročnících byl v letech 2014 a 2015 příliš malý počet studentů, aby měl výzkum statistickou relevanci. I přes malý počet respondentů jsme se však snažili komentáře dotazovaných studentů reflektovat při tvorbě této diplomové práce a vyjít jim vstříc.

O vyplnění dotazníků byli studenti požádáni i po vzniku studijního textu v rámci této diplomové práce. Šlo hlavně o zjištění, jestli bude mít studijní text stejně pozitivní ohlas jako v [1] a jestli se nějakým způsobem projeví zapracování požadavků vyplývajících z postřehů k [1].

Při tvorbě studijního textu pro tuto diplomovou práci se postupovalo obdobným způsobem jako v [1] – vycházelo se z příprav a textů doktora A. Hladíka, profesora J. Podolského a doktora V. Žáka k přednáškám a cvičením *Úvodu do matematických metod fyziky* a *Matematických metod ve fyzice I*. Zohledňovány byly i poznámky, znalosti a zkušenosti autora této práce. Skutečnosti uváděné ve studijním textu byly ověřovány v odborné literatuře věnované matematické analýze, zejména v [4], [2], [5] a [6].

Protože si v této diplomové práci nečiníme nárok na to být rigorózní učebnicí matematické analýzy (stejně jako ani [1]), často tvrzení zjednodušujeme, pracujeme za speciálních podmínek a vycházíme z geometrických představ. Proto ve vhodných chvílích odkazujeme na odbornou literaturu, v níž se případní zájemci mohou seznámit s preciznějším, ale podle našeho mínění pro začátečníky často méně názorným přístupem k dané problematice.

Stejně jako v [1] byl i v této diplomové práci text sázen v programu LaTeX, obrázky však nebyly tvořeny ve vektorovém editoru *Zoner Callisto 5 Free*, ale vznikly v editoru *Inkscape 0.91*, který je na internetu k dispozici zdarma ke stažení.

Diplomová práce je rozdělena do čtyř kapitol, přičemž první dvě tvoří vlastní studijní text, ve třetí kapitole se věnujeme jiným zdrojům, z nichž lze čerpat poznatky při studiu matematických metod používaných ve fyzice, a poslední kapitola je věnována shrnutí dotazníkového průzkumu ke vzniklým studijním textům v [1] a v této diplomové práci.

Ve studijním textu zde začínáme vykládat látku primitivních funkcí, respektive se učíme hledat neurčité integrály, čímž si chystáme půdu pro následující partie. Na integrování se zde nahlíží jako na „inverzní proces“ k derivování a seznamujeme se se základními tvrzeními o integrálech a s metodami jejich výpočtu. Následuje seznámení s určitým integrálem, u něhož příliš nerozebíráme jeho konkrétní aplikace – jde nám zde hlavně o uplatnění určitého integrálu dále, jelikož se k němu odkazujeme při výpočtech v kapitole o integrálech funkcí více proměnných. Stěžejní část studijního textu této práce tvoří právě integrály funkce více proměnných, kde je vyložen dvojný a trojný integrál v různých systémech souřadnic a potom křivkový a plošný integrál I. druhu. Všechny tyto integrály lze považovat do jisté míry za analogické – všemi se dají počítat obdobné fyzikální veličiny, pouze se liší situace, kdy konkrétní integrál zvolíme. V této části textu je uvedeno nejvíce fyzikálních aplikací probíraného aparátu.

Bude-li mít čtenář všechny předpokládané znalosti, nemělo by být nutné pracovat při studiu tohoto textu s dalšími zdroji. Je však výhodné mít při ruce [1].

Kapitola 1

Integrály funkce jedné proměnné

V této kapitole se budeme zabývat dalším matematickým aparátem, tzv. *integrály*. Nemusíme mít ale obavy, protože jak se brzy ukáže, zase tak úplně nové to pro nás nebude, jelikož už jsme v ledasčem zběhlí, co se matematických metod ve fyzice týče. Navíc budeme nadále pracovat s reálnými funkcemi a ty by nám už měly být také dobře známé. Stručně si je můžeme připomenout v [1], s. 18, nebo podrobnější přehled je k nalezení v [4], s. 48.

Vyjdeme z toho, že už umíme derivovat. Když nás bude chtít někdo vyzkoušet a zeptá se nás, jak velkou rychlostí se pohybovalo těleso, jehož dráha je taková a taková, hravě si s tímto problémem poradíme. Vzpomeneme si na diferenciální počet a řekneme: „To je přece jednoduché, stačí zderivovat dráhu podle času a získáme velikost rychlosti. A můžeme zajít ještě dále a druhou derivací získat velikost zrychlení."

Co když si ale dotyčný usmyslí, že nás dostane do úzkých a zadá nám příklad, na který budeme s našimi metodami krátcí. Po krátkém zamyšlení změní zadání a řekne: „Dobrá, dovedete určit velikost rychlosti (a dokonce i velikost zrychlení) z dráhy. Jak ale určíte velikost rychlosti, když nebudete znát dráhu ale pouze velikost zrychlení?" Dotyčný je na první pohled spokojený sám se sebou a myslí si, jak chytře nás zaskočil. My se ale nedáme, po krátké úvaze problém vyřešíme a navíc ještě dotyčného přesvědčíme, že jeho zadání bylo nejednoznačné.

Volný pád

Uvažujme experiment, kde necháme pohybovat volným pádem hmotný bod v homogenním gravitačním poli. Potom víme, že se pohybuje s konstantním zrychlením[1] $g = konst.$ Můžeme teď určit velikost rychlosti (jako funkci času[2])? Vyjděme z toho, co už víme – tedy jak určit velikost zrychlení pomocí velikosti rychlosti, tj.

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = g. \tag{1.1}$$

Nyní se ptáme, jakou funkci $v(t)$ musíme zderivovat, abychom získali g. Už máme něco za sebou a snadno nahlédneme, že *rovnici 1.1* splňuje funkce $v(t) = gt$. To určitě, ale co třeba funkce $v_c(t) = gt + c$, kde $c = konst.$ (a má rozměr rychlosti), ta *rovnici 1.1* také splňuje, protože derivace součtu je součet derivací a derivace

[1] Zde si můžeme dovolit vynechat slovo velikost, jelikož se jedná o pohyb po přímce a vektor zrychlení leží v této přímce a při volném pádu míří ve směru pohybu.

[2] Jelikož se těleso pohybuje s nenulovým zrychlením, bude se rychlost v čase měnit.

konstanty je nula. Konstanta c může být naprosto libovolná a získali jsme tedy nekonečně mnoho funkcí $v_c(t)$, které splňují *rovnici 1.1.*

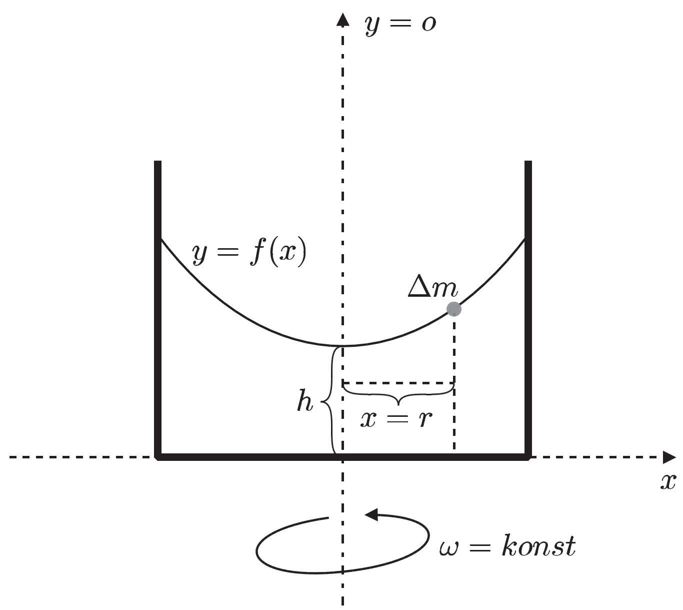
Co s tím? Začneme tím, že si určíme význam této „nepohodlné“ konstanty. Uvažujme, jak náš experiment vypadal v čase $t = 0$ s. Zabýváme se volným pádem, takže náš hmotný bod byl na začátku v klidu, tj. $v_c(0) = 0$. Potom tedy platí $0 = g \cdot 0 + c$, tj. $c = 0$. Pro volný pád tedy získáváme jedno řešení *rovnice 1.1* a to $v(t) = gt$.

Teď si ale rozmysleme situaci, kdybychom nezačali měřit čas v okamžiku, kdy je hmotný bod v klidu, ale až po nějaké chvíli, kdy už nějakou rychlost nabral, tj. $v_c(0) \neq 0$. Této rychlosti v čase $t = 0$ budeme říkat *počáteční rychlost* a označíme si ji v_0. Potom ale platí $v_0 = g \cdot 0 + c$ a vidíme tedy, že konstanta c má význam počáteční rychlosti.

Nyní už opustíme volný pád a můžeme odpovědět na původní otázku: Jak určit velikost rychlosti z velikosti zrychlení? Musíme nalézt takovou funkci, jejíž derivace je rovna zadané velikosti zrychlení. Víme ale, že takových funkcí je nekonečně mnoho[3] a že zadání bude jednoznačné teprve tehdy, když budeme znát počáteční rychlost.

Vědro

Rozeberme si další příklad. Máme vodu ve vědru a roztočíme ho kolem svislé osy o procházející středem jeho dna konstantní úhlovou rychlostí o velikosti ω. Na obrázku 1.1 je tato situace zachycena po ustálení hladiny při pohledu z boku a je zanesena do kartézské soustavy souřadnic. Nás by teď zajímalo, jaká funkce $y = f(x)$ popisuje tvar hladiny vody v rovině obrázku.

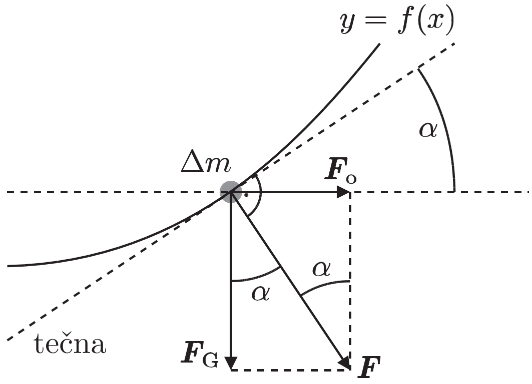


Obrázek 1.1: Vědro s vodou v kartézském systému souřadnic otáčející se kolem osy o splývající s osou y

Podíváme se na situaci z pohledu malé části vody na hladině o hmotnosti Δm. Na tuto malou část vody působí ve svislém směru tíhová síla $\boldsymbol{F}_\mathrm{G}$, a budeme-li situaci popisovat z hlediska neinerciální vztažné soustavy, tak na ni působí

[3]Zatím neřešíme, že taková funkce nemusí existovat. Tomu se budeme věnovat později.

ve vodorovném směru ještě odstředivá síla $\boldsymbol{F}_{\mathrm{o}}$. Protože je hladina již ustálena, část vody Δm se nikam v rámci neinerciální vztažné soustavy nepohybuje. To znamená, že výslednice $\boldsymbol{F}$ tíhové a odstředivé síly je kolmá k hladině (tj. kolmá k tečně křivky $y = f(x)$ v bodě, kde je Δm), viz *obrázek 1.2*.



Obrázek 1.2: Síly působící na část vody Δm na hladině vody v otáčejícím se vědru

Abychom určili funkci $f(x)$, využijeme opět toho, že známe její derivaci. Víme, že derivace funkce v daném bodě je směrnicí tečny, a známe-li úhel α, který svírá tečna s vodorovnou osou, potom je směrnice rovna hodnotě $\tan\alpha$. Na *obrázku 1.2* je vidět, že úhel α můžeme určit pomocí sil působících na Δm a to právě pomocí funkce tangens: $\tan\alpha = F_{\mathrm{o}}/F_{\mathrm{G}}$. Potom tedy pro hledanou funkci $f(x)$ platí

$$f'(x) = \frac{F_{\mathrm{o}}}{F_{\mathrm{G}}}. \tag{1.2}$$

Do *rovnice 1.2* dosadíme za velikosti sil ze známých vztahů, abychom mohli posléze určit $f(x)$. Pro tíhovou sílu použijeme vztah $F_{\mathrm{G}} = \Delta m g$, kde g je velikost tíhového zrychlení, a pro odstředivou sílu si vzpomeneme na vztah $F_{\mathrm{o}} = \Delta m \omega^2 r$, kde výraz $\omega^2 r$ vyjadřuje velikost dostředivého zrychlení pro rovnoměrný pohyb po kružnici o poloměru r. Z *obrázku 1.1* je zřejmé, že poloměr r odpovídá x-ové souřadnici bodu, kde se nachází Δm. Dosadíme-li tedy toto vše do *rovnice 1.2*, získáme

$$f'(x) = \frac{\Delta m \omega^2 x}{\Delta m g} = \frac{\omega^2 x}{g}. \tag{1.3}$$

Z *rovnice 1.3* už funkci $f(x)$ vymyslíme velice snadno, protože ω^2/g je konstanta a derivace si jí tedy nevšímá. A abychom získali x, musíme zderivovat $x^2/2$ (plus nějaká konstanta). Hledaná funkce má tedy tvar

$$f(x) = \frac{\omega^2}{g}\left(\frac{x^2}{2} + c\right) = \frac{\omega^2}{g}\frac{x^2}{2} + C, \tag{1.4}$$

kde c je konstanta a $C = \omega^2 c/g$ je také konstanta. Abychom určili konstantu C, vraťme se k *obrázku 1.1* a k tomu, jak byla zvolena soustava souřadnic. Je vidět, že funkce $f(x)$ popisující tvar hladiny má mít pro $x = 0$ hodnotu h, tj. $f(0) = h$. To je naše tzv. *počáteční podmínka*. Když tuto počáteční podmínku dosadíme do *rovnice 1.4*, snadno nahlédneme, že $f(0) = C = h$. Získali jsme tak již jednoznačné řešení

$$f(x) = \frac{\omega^2}{2g}x^2 + h \tag{1.5}$$

a z toho je zřejmé, že při zvoleném pohledu má hladina tvar paraboly.

1.1 Primitivní funkce

V předchozím jsme se přesvědčili, že naše schopnosti derivovat nám umožňují „uhádnout“ řešení některých nových úloh, které jsou koncipovány „opačně“ než úlohy na derivování. Měli jsme nějakou výchozí funkci (konstantní funkci g nebo lineární $\omega^2 x/g$) a tu jsme nederivovali, ale hledali jsme, co musíme zderivovat, abychom dostali právě výchozí funkci. V matematice se pro to zavádí pojem *primitivní funkce*. Máme-li funkce $f(x)$ a $F(x)$ a platí-li, že pro všechna $x \in D_f$ je $F'(x) = f(x)$, potom $F(x)$ nazýváme primitivní funkcí k $f(x)$. V předchozích příkladech se ukázalo, že k funkci $f(t) = g$ je primitivní $F(t) = gt + c$ a že k funkci $f(x) = \omega^2 x/g$ je primitivní $F(x) = (\omega x)^2/2g + C$.

Z faktu, že nám zde vystupují konstanty, vyplývá jistá nejednoznačnost primitivní funkce. V konkrétních případech jsem se s tímto problémem vypořádali díky počátečním podmínkám, ale obecně je primitivní funkce cokoliv, co po zderivování dává původní funkci. Máme-li tedy nějakou funkci $f(x)$ a $F(x)$, která je k ní primitivní, můžeme k $F(x)$ libovolně přičítat (nebo odčítat) konstanty a stále se bude jednat o primitivní funkci k $f(x)$, protože dotyčné konstanty se zderivují na nulu. Tedy, je-li $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$, pak také $F(x) + c$, kde $c = konst.$, je primitivní funkcí k $f(x)$.

Zatím se tu zabýváme novým pojmem „primitivní funkce“ a přirozeně se nabízí otázka, kdy má smysl zabývat se tímto pojmem, respektive kdy primitivní funkce existuje. Ukázali jsme si dva příklady, kde primitivní funkce existovala a kde bylo i relativně snadné určit její tvar. Bohužel tomu tak není vždy a existují funkce, které primitivní funkci nemají. Další potíž je s funkcemi, které primitivní funkci sice mají, ale není možné ji zapsat pomocí námi používaných elementárních funkcí. Známé příklady takovýchto funkcí jsou

$$f(x) = e^{-x^2} \quad \text{a} \quad g(x) = \tfrac{\sin x}{x}. \tag{1.6}$$

S existencí primitivní funkce nám pomůže matematická věta, která říká, že primitivní funkce existuje ke každé spojité funkci a (dokonce) je také spojitá.

S funkcemi, které mají primitivní funkci, ale neumíme ji zapsat, nám nejlépe pomůže počítač, který pro hledanou primitivní funkci vykreslí její graf, popř. její určité části aproximuje[4] jinými funkcemi.

K pojmu primitivní funkce si ještě uveďme poznámku. Slovo „primitivní“ zde není použito ve smyslu, jako se obvykle užívá v běžné řeči – „jednoduchý“. V tomto případě je odvozeno od slova „primární“ ve smyslu „prvotní“ nebo „původní“. Chápat to můžeme tak, že primitivní funkce k $f(x)$ je ta původní, kterou musíme zderivovat, abychom dostali $f(x)$. O tom, že primitivní zde neznamená jednoduchý, nás brzy přesvědčí příklady na procvičení, kde uvidíme, že primitivní funkce je mnohdy o dost komplikovanější než funkce, ke které ji hledáme.

V literatuře se na zavedení primitivní funkce se vší matematickou parádou můžeme podívat například do [4], s. 136.

[4]Slovo „aproximovat“ znamená „nahradit něčím velmi podobným, co se od původního téměř neliší“.

1.2 Neurčitý integrál

Než se pustíme do výpočtů, podíváme se na zřejmě ještě známější pojem – tzv. *neurčitý integrál* (slovo „neurčitý“ se někdy vynechává). Jde v podstatě o to samé, jako je primitivní funkce. Neurčitý integrál funkce $f(x)$ je označen a definován jako

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x := F(x) + c, \tag{1.7}$$

kde $F(x)$ je (libovolná) primitivní funkce k $f(x)$ a c je libovolná konstanta, kterou nazýváme *integrační konstanta*. V symbolu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ neurčitého integrálu jsou tedy schovány všechny primitivní funkce k $f(x)$ (pokud existují). Lze tak považovat neurčitý integrál za „soubor všech primitivních funkcí“. Díky této obecnosti budeme dále pracovat hlavně s neurčitým integrálem a abychom si ušetřili dech, budeme vynechávat slovo „neurčitý“.

Procesu, kdy budeme hledat integrál nějaké funkce, budeme říkat *integrování*.

Abychom se pocvičili ve výpočtech integrálů, můžeme začít integrováním elementárních funkcí a vytvořit si obdobnou tabulku, jako se uvádí pro derivace elementárních funkcí a kterou můžeme nalézt např. v [1] na s. 36.

Začneme integrálem konstantní funkce[5] $f(x) = k,\ k = konst.$, tj.

$$\int k\,\mathrm{d}x = ? \tag{1.8}$$

Ptáme se, co musíme zderivovat, abychom dostali funkci $f(x) = k$. Konstantu k získáme derivací výrazu $kx + c$, kde $c = konst.$ Potom tedy píšeme

$$\int k\,\mathrm{d}x = kx + c, \tag{1.9}$$

kde $c \in \mathbb{R}$ je integrační konstanta.

Derivací x^n, kde $n \in \mathbb{N}$, je nx^{n-1}. Tímto vztahem si snadno ověříme, že integrál funkce $f(x) = x^n$ je

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} + c, \tag{1.10}$$

protože

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1} + c\right)' = \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' + c' = \frac{1}{n+1}\left(x^{n+1}\right)' + 0 = \frac{n+1}{n+1}x^n = x^n. \tag{1.11}$$

Obdobný problém jsme řešili u otáčejícího se vědra s vodou, kde $n = 1$.

Jako další si můžeme zintegrovat funkci $f(x) = a^x,\ a \in (0,\ \infty) \setminus \{1\}$, přičemž víme, že $(a^x)' = a^x \ln a$. Potom snadno nahlédneme, že

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{a^x}{\ln a} + c. \tag{1.12}$$

Nebudeme zde počítat integrály všech elementárních funkcí, ale uvedeme si je v *tabulce 1.1* a kdo bude mít chuť, může si aspoň některé další vztahy ověřit výpočtem příslušných derivací.

[5] Ano, tento problém jsme již řešili u příkladu s volným pádem, kde naše konstantní funkce byla rovna velikosti tíhového zrychlení.

Funkce $f(x)$	**Integrál** $\int f(x)\,dx$	D_f	**Poznámka**
k	kx	$\mathbb{R}$	$k = konst.$
x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$	$n \in \mathbb{N}$
x^r	$\frac{x^{r+1}}{r+1}$	$\mathbb{R}^+$	$r \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$
a^x	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$	$a \in (0,\ \infty) \setminus \{1\}$
e^x	e^x	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{x \ln a}$	$\log_a \lvert x \rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	$a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
$\frac{1}{x}$	$\ln \lvert x \rvert$	$\mathbb{R} \setminus \{0\}$	
$\sin x$	$-\cos x$	$\mathbb{R}$	
$\cos x$	$\sin x$	$\mathbb{R}$	
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\tan x$	$\mathbb{R} \setminus \{(2k+1)\frac{\pi}{2}\}$	$k \in \mathbb{Z}$
$-\frac{1}{\sin^2 x}$	$\cot x$	$\mathbb{R} \setminus \{k\pi\}$	$k \in \mathbb{Z}$

Tabulka 1.1: Tabulka integrálů elementárních funkcí, kde jsme vynechali integrační konstanty

Už jsme si ukázali dostatek příkladů, abychom si (mezi námi fyziky) mohli říct, že integrování lze považovat za „opačnou operaci k derivování“. Matematicky to tak říci nelze například kvůli integrační konstantě. Pokud nějakou funkci zderivujeme a následně zintegrujeme, nedostaneme nutně původní funkci, ale nekonečně mnoho funkcí lišících se o konstantu, mezi nimiž je naše původní funkce schovaná, viz *rovnice 1.13* a *1.14*. Tato potíž však odpadá, známe-li počáteční podmínky, což ve fyzice většinou známe.

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = (F(x) + c)' = f(x) \tag{1.13}$$

$$\int [f(x)]'\,\mathrm{d}x = f(x) + c \tag{1.14}$$

1.3 Metody výpočtu integrálů

Vypočítat takový integrál bývá zpravidla velmi obtížné. Typicky je to obtížnější než derivování. Derivovat umíme téměř vždy (pokud derivace existuje) – máme odvozené derivační vztahy pro různé funkce a užitečná pravidla pro součet funkcí, složené funkce atd. U integrálů ale bohužel neexistuje univerzální postup a soubor pravidel, které vždy vedou k cíli. Pokud hledáme integrál nějaké funkce a víme, že existuje, zdaleka nemáme vyhráno. Řešení bývá často zapeklité a může se stát, že výsledek ani nelze vyjádřit pomocí elementárních funkcí. My se dále budeme zaměřovat hlavně na integrály, které vypočítat lze, a ukážeme si některé metody, které nám s tím pomohou, když je ve správný čas použijeme. Obecně nám výpočty integrálů usnadní, když budeme umět bezchybně derivovat a budeme znát tabulku integrálů základních funkcí, viz *tabulka 1.1*. Také je dobré spočítat větší množství příkladů, abychom získali zkušenosti, s čímž souvisí zažití určitých „triků“, které nám pomohou ze zdánlivě bezvýchodných situací.

Výpočtu integrálů je věnován text v [4], od s. 137.

1.3.1 Základní pravidla pro výpočet integrálů

Pomocí známých pravidel pro derivace si odvodíme základní pravidla i pro integrály. Vyjdeme z faktu, že derivace se chová lineárně (derivace součtu je součet derivací a z derivace lze vytknout konstantu, derivuje-li se výraz typu „konstanta krát funkce“), viz [1], s. 36 a 37.

Integrace součtu funkcí

Mějme funkce $f(x)$ a $g(x)$, přičemž obě mají integrál a víme, že platí vztah pro derivaci součtu funkcí, $(f+g)' = f' + g'$. Potom tedy podle *rovnice 1.13* platí

$$\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' + \left(\int g(x)\,\mathrm{d}x\right)' =$$

$$= f(x) + g(x) \tag{1.15}$$

a zároveň

$$\left(\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x\right)' = f(x) + g(x). \tag{1.16}$$

Ze *vztahů 1.15* a *1.16* vyplývá, že integrál součtu funkcí je součet integrálů jednotlivých funkcí, tj.

$$\int [f(x) + g(x)]\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.17}$$

Levá a pravá strana *rovnice 1.17* se může lišit pouze o integrační konstantu, ale už jsme si říkali, že tohle nám u integrálů nevadí. V našem symbolu integrálu jsou schovány všechny primitivní funkce.

Pro názornost si spočtěme jeden jednoduchý příklad. Zajímá nás integrál funkce $f(x) = e^x + \sin x$. S výpočtem nám pomůže právě odvozené pravidlo ve *vztahu 1.17* a případně *tabulka 1.1*.

$$\int [e^x + \sin x]\,\mathrm{d}x = \int e^x\,\mathrm{d}x + \int \sin x\,\mathrm{d}x = e^x + c_1 + (-\cos x) + c_2 =$$

$$= e^x - \cos x + c, \tag{1.18}$$

kde c_1 a c_2 jsou integrační konstanty z jednotlivých integrálů a $c = c_1 + c_2$ je také konstanta.

Vztah 1.17 jsme si odvodili pouze pro součet dvou funkcí, ale vzhledem k tomu, že součet funkcí je opět funkce, lze *vztah 1.17* zobecnit na libovolný součet konečného počtu funkcí.

Integrace „konstanta krát funkce“

Mějme integrovatelnou funkci $f(x)$ a konstantu k. Jedno z nejzákladnějších pravidel pro derivování je, že pokud derivujeme součin funkce a konstanty, derivace si konstanty nevšímá – jinak řečeno, konstantu lze vytknout před derivaci. Potom podle *rovnice 1.13* platí

$$\left(\int kf(x)\,\mathrm{d}x\right)' = kf(x) = k\left(\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)' = \left(k\int f(x)\,\mathrm{d}x\right)'. \tag{1.19}$$

Ze *vztahu 1.19* vyplývá, že integrál si podobně jako derivace nevšímá konstanty, tj.

$$\int kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.20}$$

U *rovnice 1.20* není problém s integračními konstantami ze stejného důvodu jako u *rovnice 1.17*.

Jako ukázkový příklad si spočítáme integrál z funkce k/x, kde $k = konst.$ K výpočtu užijeme *vztah 1.20* a případně *tabulku 1.1*, tedy

$$\int \frac{k}{x}\,\mathrm{d}x = k\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = k(\ln|x| + c) = k\ln|x| + C, \tag{1.21}$$

kde $C = kc$ je výsledná integrační konstanta.

Vztahům 1.17 a *1.20* je věnována matematická věta v [4], na s. 138.

Integrace absolutní hodnoty

Někdy nastanou případy, kdy je potřeba zintegrovat funkci v absolutní hodnotě, a my si krátce osvětlíme, jak se k takovému problému postavit.

Ideální by bylo vyřešit problém s absolutní hodnotou metodou „kouknu a vidím“, ale takový případ nemusí nastat vždy. Potom je možné postupovat obdobně jako na střední škole při řešení rovnic s absolutní hodnotou. Například rovnice $x^2 + |x| - 1 = 0$ by se rozdělila na dva příklady, kdy pro $x \in (-\infty,\ 0)$ by se řešila rovnice $x^2 - x - 1 = 0$ a pro $x \in \langle 0,\ \infty)$ by se řešilo $x^2 + x - 1 = 0$.

U integrálů je situace obdobná. Máme-li funkci $f(x)$, pro kterou platí

$$\begin{aligned} x \in I:&\ \ f(x) < 0,\\ x \in J:&\ \ f(x) \geqq 0, \end{aligned} \tag{1.22}$$

kde $I,\ J \subset \mathbb{R}$, potom bychom integrál

$$\int |f(x)|\,\mathrm{d}x \tag{1.23}$$

řešili jako dva integrály a to

$$\textstyle\int [-f(x)]\,\mathrm{d}x \quad \text{pro} \quad x \in I \tag{1.24}$$

a

$$\textstyle\int f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{pro} \quad x \in J. \tag{1.25}$$

Pro procvičení určíme integrál

$$\int \frac{5}{|x^3|}\,\mathrm{d}x \tag{1.26}$$

Už víme, že konstantu můžeme vytknout před integrál, a proto se budeme dále starat o funkci $f(x) = 1/|x^3|,\ x \neq 0$. Hned můžeme určit, že $f(x) > 0$ pro $x \in (0,\ \infty)$ a $f(x) < 0$ pro $x \in (-\infty,\ 0)$.

Začneme řešit nejdříve pro kladné hodnoty, tj. $x \in (0,\ \infty)$, kde dostáváme

$$\int \frac{5}{|x^3|}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = 5\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = 5\frac{x^{-2}}{(-2)} + c = -\frac{5}{2x^2} + c. \tag{1.27}$$

Pro záporné hodnoty nám v podstatě přibude jenom jedno mínus, tj. pro $x \in (-\infty,\ 0)$ je

$$\int \frac{5}{|x^3|}\,\mathrm{d}x = 5\int \frac{1}{(-x^3)}\,\mathrm{d}x = -5\int x^{-3}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2x^2} + c. \tag{1.28}$$

1.3.2 Metody pro výpočet integrálů

Ačkoliv se to může zdát zvláštní, metody pro výpočet integrálů máme všehovšudy dvě. Jedná se o tzv. metodu *per partes* a metodu *substituční*. Každá z metod se hodí do různých situací (popř. jsou potřeba obě dvě) a my si některé takové situace ukážeme.

Integrace metodou per partes

Sousloví „per partes“ se dá přeložit jako „po částech“ a následující metoda získala tento název, jelikož při ní v podstatě integrujeme funkci po částech. Tato metoda se bude hodit na funkce, které lze chápat jako součin funkcí, např. funkci $x^2 \cos x$ chápeme jako součin x^2 a $\cos x$.

Abychom odvodili vztah, jak počítat integrály metodou per partes, vyjdeme opět z toho, co známe o derivacích. Mějme derivovatelné funkce $f(x),\ g(x)$ a zderivujme jejich součin, tedy

$$(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x). \tag{1.29}$$

Nyní *rovnici 1.29* upravíme na tvar

$$f'(x)g(x) = (f(x)g(x))' - f(x)g'(x) \tag{1.30}$$

a zintegrujeme, přičemž využijeme *vztahy 1.14*, *1.17* a *1.20*. Získáme tak

$$\begin{aligned}\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int \left[(f(x)g(x))' - f(x)g'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \\ &= \int [f(x)g(x)]'\,\mathrm{d}x + \int \left[-f(x)g'(x)\right]\,\mathrm{d}x = \\ &= f(x)g(x) + c - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x,\end{aligned} \tag{1.31}$$

kde c je integrační konstanta. Protože máme v *rovnici 1.31* ještě jeden integrál, schováme si integrační konstantu c do tohoto integrálu a nebudeme ji psát.

Odvodili jsme tedy vztah, který nám (ač to možná nevypadá) pomůže při řešení integrálů. Napsat ho můžeme ve tvaru

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.32}$$

a budeme pomocí něho řešit integrály funkcí, které lze rozložit na součin funkcí. Hned si to ukážeme na příkladě.

Chceme najít integrál funkce xe^x. Podíváme-li se do tabulky integrálů základních funkcí, zjistíme, že nám žádný v ní uvedený vztah přímo nepomůže. Zachrání nás však, když si všimneme, že se jedná o součin funkcí x a e^x. Aplikujeme *vztah 1.32* a zvolíme si, že $f'(x) = e^x$ a $g(x) = x$ (za chvíli uvidíme, proč je výhodné funkce zvolit takto a ne naopak). Dále musíme určit $f(x)$ a $g'(x)$, ale to jsou pro nás již velmi snadné úkoly a hned vidíme (popřípadě po nahlédnutí do tabulky integrálů a derivací), že $f(x) = e^x$ a $g'(x) = 1$. Dosadíme tedy do *rovnice 1.32*:

$$\int e^x x \, \mathrm{d}x = e^x x - \int e^x \cdot 1 \, \mathrm{d}x = e^x x - \int e^x \, \mathrm{d}x =$$
$$= e^x x - e^x + c. \tag{1.33}$$

Provedeme raději zkoušku a výsledek ze *vztahu 1.33* zderivujeme, abychom viděli, jestli získáme výchozí funkci.

$$(e^x x - e^x + c)' = (e^x x)' + (-e^x)' + c' = (e^x x + e^x) - e^x + 0 = e^x x \tag{1.34}$$

Je vidět, že je vše v pořádku.

Nyní by mělo být vidět, proč jsme si na začátku zvolili $f'(x) = e^x$ a $g(x) = x$. Díky tomu jsme měli funkci $f(x)$ prakticky okamžitě a derivací $g(x)$ jsme si zjednodušili integrál. Proto bychom se měli vždy před použitím metody per partes zamyslet, co by se nám hodilo integrovat a čeho se výhodně zbavit derivací. Zkusme stejný příklad řešit ještě jednou, ale zvolíme si funkce opačně, tj. $f'(x) = x$ a $g(x) = e^x$. Potom $f(x) = x^2/2$, $g'(x) = e^x$ a dosazením do *rovnice 1.32* získáme

$$\int xe^x \, \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} e^x - \int \frac{x^2}{2} e^x \, \mathrm{d}x. \tag{1.35}$$

Na první pohled je zřejmé, že se situace zkomplikovala. Integrál napravo je složitější než ten nalevo.

Jako další ukázkový příklad si vypočítáme integrál funkce $e^x \cos x$ a při výpočtu použijeme nové schéma, které můžeme v budoucnu používat, budeme-li chtít, a které nám zpřehlední zápis příkladu. V tomto příkladě je prakticky jedno, kterou funkci budeme brát jako derivovanou – zvolíme si třeba $f'(x) = e^x$ a $g(x) = \cos x$. Jako zkušení počtáři víme, že $f(x) = e^x$ a $g'(x) = -\sin x$. Toto si zapíšeme do následujícího schématu

$$\left| \begin{array}{ll} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \end{array} \right| \tag{1.36}$$

a to si zaneseme do našeho zápisu výpočtu. Tak to budeme dělat i v dalších příkladech. Další úsporné opatření uděláme tak, že použití metody per partes budeme značit symbolem

$$\stackrel{\text{pp}}{=} \tag{1.37}$$

a nebudeme to už explicitně zmiňovat.

Vypočítáme tedy integrál funkce $e^x \cos x$, tj.

$$\int e^x \cos x \, \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = \cos x & g'(x) = -\sin x \end{array} \right| \stackrel{\text{pp}}{=} e^x \cos x - \int e^x(-\sin x) \, \mathrm{d}x =$$

$$= e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x. \tag{1.38}$$

Může se zdát, že v tomto případě byla metoda per partes slepou uličkou, protože jsme získali integrál stejného typu, jako se kterým jsme začínali. Buďme ale trpěliví a zkusme opakovat stejný postup, tj.

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cos x + \int e^x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = e^x & f(x) = e^x \\ g(x) = \sin x & g'(x) = \cos x \end{array} \right| \overset{\mathrm{pp}}{=}$$

$$\overset{\mathrm{pp}}{=} e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x. \tag{1.39}$$

Když se teď pozorně podíváme na *vztah 1.39*, všimneme si, že na obou stranách vystupuje výraz $\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x$. Převedeme je tedy na jednu stranu rovnice a tím už budeme mít náš příklad prakticky vyřešený.

$$2 \int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = e^x \cos x + e^x \sin x = e^x(\cos x + \sin x) \tag{1.40}$$

Teď stačí celou *rovnici 1.40* vydělit dvěma a máme hledaný integrál (neměli bychom také zapomenout na integrační konstantu), tj.

$$\int e^x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c. \tag{1.41}$$

Proveďme opět zkoušku, ať máme jistotu, že jsme získali správné řešení.

$$\left[\frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + c\right]' = \left(\frac{e^x}{2}\right)'(\cos x + \sin x) + \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x)' + c' =$$

$$= \frac{e^x}{2}(\cos x + \sin x) + \frac{e^x}{2}(-\sin x + \cos x) + 0 = e^x \cos x \tag{1.42}$$

Jako poslední příklad na užití metody per partes si spočítáme integrál, kde bychom možná na první pohled neřekli, že se k tomu bude hodit zrovna tato metoda. Zajímal by nás tentokrát integrál funkce $\ln x$. V tabulce integrálů není nic, co by nám pomohlo, a ani se nezdá, že by se jednalo o součin funkcí, tudíž použití metody per partes zdánlivě odpadá. Také se můžeme rmoutit nad tím, že $\ln x$ umíme derivovat, ale že je nám to teď patrně k ničemu. Nepropadejme panice – my si zde ten součin funkcí vytvoříme a metodu per partes použijeme. Funkce $\ln x$ je totiž součinem funkce $\ln x$ a konstantní funkce 1, tj. $\ln x = 1 \cdot \ln x$. Potom už je ale výpočet jasný:

$$\int \ln x \,\mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = 1 & f(x) = x \\ g(x) = \ln x & g'(x) = \frac{1}{x} \end{array} \right| \overset{\mathrm{pp}}{=} x \ln x - \int x \frac{1}{x} \,\mathrm{d}x =$$

$$= x \ln x - \int 1 \,\mathrm{d}x = x \ln x - x + c. \tag{1.43}$$

Správnost výsledku snadno ověříme derivováním.

Matematickou větu popisující metodu per partes a další příklady můžeme nalézt ve [4], na s. 138.

Integrace metodou substituční

Druhou základní metodou pro výpočet integrálů je *substituce*, což nám napovídá, že budeme něco *nahrazovat*.

Substituci jsme používali již na střední škole, například při řešení rovnic. Pro rychlé připomenutí se podívejme na následující rovnici

$$x^4 + 3x^2 + 2 = 0. \tag{1.44}$$

Na první pohled nepříjemná rovnice se po substituci $w = x^2$ změní na pěknou a snadno řešitelnou rovnici

$$w^2 + 3w + 2 = 0. \tag{1.45}$$

Podobným způsobem si budeme usnadňovat také integrování, pouze půjde o substituci sofistikovanější. Protože si integrování zjednodušeně představujeme jako opak k derivování, vyjdeme z našich znalostí derivací. Mějme funkci $\ln y$, kde $y \in (0,\ \infty)$, a zderivujme ji podle y.

$$\frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y} \tag{1.46}$$

To nebyl žádný problém. Co když je ale proměnná y substitucí (náhradou) za nějakou jinou funkci, vezměme například $y = x^2 - 1,\ x \in (1,\ \infty)$. Potom můžeme *rovnici 1.46* psát jako

$$\frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{y} = \frac{1}{x^2 - 1}. \tag{1.47}$$

Nyní zderivujeme funkci $\ln y$ podle proměnné x, což umíme, protože známe vztah pro derivaci složené funkce (viz [1], s. 35).

$$\frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d} \ln(x^2 - 1)}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2 - 1} \frac{\mathrm{d}\,(x^2 - 1)}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{x^2 - 1} \tag{1.48}$$

Všimněme si, že *vztah 1.48* lze zapsat pomocí zavedené substituce $y = x^2 - 1$ jako

$$\frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d} \ln y}{\mathrm{d}y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x^2 - 1} \frac{\mathrm{d}\,(x^2 - 1)}{\mathrm{d}x} = \frac{2x}{x^2 - 1}. \tag{1.49}$$

Přišel čas obrátit postup a začít integrovat. Začneme *rovnicí 1.46*, což je pro nás pouze opakování již známého, tj.

$$\int \frac{1}{y} \,\mathrm{d}y = \ln y + c. \tag{1.50}$$

Nyní obraťme pozornost ke *vztahu 1.48*, respektive *1.49*, využijme skutečnosti, že „integrování je obrácený postup k derivování“, a zintegrujme ji podle x, tj.

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} \,\mathrm{d}x = \ln(x^2 - 1) + c = \ln y + c, \tag{1.51}$$

respektive

$$\int \frac{2x}{x^2 - 1} \,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2 - 1)'}{x^2 - 1} \,\mathrm{d}x = \ln y + c. \tag{1.52}$$

Je pozoruhodné, že jsme ve všech *rovnicích 1.50*, *1.51*, *1.52* získali stejný výsledek. Toho by se mělo nějak využít, protože zintegrovat funkci $1/y$ podle

y umíme hned bez rozmýšlení, ale kdybychom si předtím nespočítali derivaci $\ln(x^2-1)$, jen těžko bychom zintegrovali funkci $2x/(x^2-1)$.

Pro přehlednost si sepíšeme *rovnice 1.50* a *1.52* pod sebe, budeme je pozorovat a vyvodíme důsledky.

$$\begin{array}{l} y = x^2 - 1,\ x \in (1,\ \infty) \\ \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln y + c \\ \int \frac{2x}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,\mathrm{d}x = \ln y + c \end{array} \tag{1.53}$$

Vzhledem k tomu, že výsledky integrování jsou stejné, můžeme psát, že

$$\int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \int \frac{(x^2-1)'}{x^2-1}\,\mathrm{d}x, \tag{1.54}$$

a protože z definice naší substituce platí, že

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{x^2-1}, \tag{1.55}$$

potom musí platit

$$\mathrm{d}y = (x^2-1)'\,\mathrm{d}x. \tag{1.56}$$

Tímto jsme však oklikou došli k substituční metodě integrování, protože uvedené vztahy platí obecně. Formálně bychom také mohli získat *vztah 1.56* z definice derivace, protože platí $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x = y'(x) = (x^2-1)'$ a po „vynásobení $\mathrm{d}x$"[6] bychom získali *vztah 1.56*.

Uvažujme složenou funkci $f(y(x))$, přičemž v předchozím konkrétním případě $f(y) = \ln y$ a $y(x) = x^2 - 1$. Potom pro derivace platí, že

$$\frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y} = f'(y) \tag{1.57}$$

a

$$\frac{\mathrm{d}f(y(x))}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}f(y)}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y(x)}{\mathrm{d}x} = f'(y)y'(x). \tag{1.58}$$

Na základě obráceného postupu platí (viz *vztah 1.14*)

$$\int f'(y)\,\mathrm{d}y = f(y) + c \tag{1.59}$$

a

$$\int f'(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = f(y(x)) + c. \tag{1.60}$$

Je patrné, že získané výsledky jsou opět stejné a že platí

$$y'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y. \tag{1.61}$$

Abychom se posunuli od derivací více k integrálům, zapíšeme si nabyté poznatky pomocí primitivních funkcí. Budeme integrovat funkci $g(y(x))$ a jako $G(y(x))$ označíme její primitivní funkci. Potom platí, že

$$\int g(y)\,\mathrm{d}y = G(y) + c \tag{1.62}$$

[6] Upozorněme, že symbol $\mathrm{d}y/\mathrm{d}x$ není zlomek a „násobení" $\mathrm{d}x$ je zde jenom pomůckou pro představu.

a

$$\int g(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = G(y(x)) + c. \tag{1.63}$$

Z *rovnic 1.62* a *1.63* tedy vyplývá, že pokud chceme zintegrovat funkci ve tvaru $g(y(x))y'(x)$ podle proměnné x, stačí integrovat pouze funkci $g(y)$ podle proměnné y, přičemž platí $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$.

Rovnost $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ dává hlubší smysl. Symbol $\mathrm{d}y$ si můžeme představit jako nekonečně malou změnu proměnné y a pokud je y závislá na proměnné x, potom můžeme $\mathrm{d}y$ určit jako součin nekonečně malé změny x, tj. $\mathrm{d}x$, a funkce popisující, jak se y mění s x, což je derivace y podle x. K představě $\mathrm{d}y$ a $\mathrm{d}x$ jako nekonečně malých změn se ještě vrátíme, až se budeme zabývat určitými integrály.

Zapsáno takto obecně to může působit dost nepřehledně, ale na konkrétních příkladech se vše vyjasní. Vratíme se k příkladu, ze kterého jsme vyšli, a jako funkci $g(y(x))y'(x)$ vezmeme $2x/(x^2-1)$. Pro ověření si rozmyslíme, co jednotlivé členy znamenají. Člen $1/(x^2-1)$ je $g(y(x))$, jelikož $g(y(x)) = 1/y(x)$ a $y(x) = x^2-1$. Člen $2x$ tedy musí být $y'(x)$, což je, takže je všechno v pořádku. Tuto funkci chceme zintegrovat, tedy hledáme integrál

$$\int g(y(x))y'(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{x^2-1}2x\,\mathrm{d}x. \tag{1.64}$$

Vztahy 1.62 a *1.63* říkají, že v *rovnici 1.64* dosáhneme stejného výsledku, když provedeme substituci a $y(x)$ nahradíme, tj. položíme $x^2-1 = y$, přičemž $\mathrm{d}y$ určíme jako $y'(x)\,\mathrm{d}x$, tj. $(x^2-1)'\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$. Řešení je potom už jasné,

$$\int \frac{1}{x^2-1}2x\,\mathrm{d}x = \int \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y = \ln y + c = \ln(x^2-1) + c. \tag{1.65}$$

Doteď to bylo trochu náročné kvůli použitému značení – funkci $y(x)$ jsme nahrazovali pouze proměnnou y a doufejme, že tak nevznikal zmatek. Proto se v následujícím ukázkovém příkladě oprostíme od obecnosti a jednoduše mechanicky spočteme příklad připravený k substituci. Určíme

$$\int 3x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x. \tag{1.66}$$

Čistě ze zájmu bychom teď mohli zkusit nasadit metodu per partes a chvíli se trénovat v derivování a integrování, ale prozradíme si hned, že by to nikam nevedlo. Máme však štěstí, protože integrujeme mimo jiné složenou funkci e^{x^3} a derivací její vnitřní funkce získáme: $(x^3)' = 3x^2$, což se „náhodou“ vyskytuje také v našem integrálu. Provedeme tedy substituci $x^3 = t$ a nalezneme $\mathrm{d}t$, přičemž víme, že $\mathrm{d}t = (x^3)'\,\mathrm{d}x = 3x^2\,\mathrm{d}x$. Pro přehlednost si můžeme substituci zapisovat do obdobného schématu, kterým jsme si pomáhali u integrování metodou per partes, tj.

$$\left|\begin{array}{l} t = x^3 \\ \mathrm{d}t = (x^3)'\,\mathrm{d}x = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right|. \tag{1.67}$$

Zavedenou substitucí se tedy pokusíme vyřešit zadaný integrál,

$$\int 3x^2 e^{x^3}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{l} t = x^3 \\ \mathrm{d}t = 3x^2\,\mathrm{d}x \end{array}\right| = \int e^t\,\mathrm{d}t = e^t + c = e^{x^3} + c. \tag{1.68}$$

Jednoduchou derivací výsledku podle x si můžeme ověřit, že jsme integrál vyřešili správně.

Substituční metoda integrování spoléhá tedy hlavně na naši všímavost – je potřeba nalézt, za co substituovat, a zjistit, jestli se v integrálu nachází příslušná derivace. Musíme být také pozorní, protože integrál nemusí být vždy připraven na substituci a bude např. potřeba „rozšiřovat vhodnou jedničkou“. Ukážeme si to na následujícím jednoduchém příkladu.

Zajímal by nás

$$\int x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x. \tag{1.69}$$

Může nás napadnout, že uděláme substituci za argument funkce sinus, ale má to háček. Provedeme-li derivaci, $(3x^4)' = 12x^3$, zjistíme, že se v integrálu nevyskytuje tato derivace kompletní, nýbrž chybí konstanta 12. Nepropadneme však panice, protože jsme již zkušení a víme, že integrál si konstant „nevšímá“, a tudíž si můžeme vhodnou jedničkou připravit integrál pro substituci takto:

$$\int x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x = \int \frac{12}{12} x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int 12x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x. \tag{1.70}$$

Nyní je pro substituci vše připraveno a můžeme provést výpočet, tj.

$$\int x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{12}\int 12x^3 \sin(3x^4)\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} z = 3x^4 \\ \mathrm{d}z = 12x^3\,\mathrm{d}x \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{12}\int \sin z\,\mathrm{d}z = \frac{1}{12}(-\cos z) + c = -\frac{\cos(3x^4)}{12} + c. \tag{1.71}$$

Někdy nastává i jiná situace, kdy je integrál připraven na substituci, ale my si toho hned nevšimneme. Příkladem může být integrál z funkce kotangens,

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x. \tag{1.72}$$

Když se podíváme do *tabulky 1.1*, nikde tam nenajdeme, jak integrovat kotangens. Potom můžeme buď zvednout telefon a volat o pomoc matematikům, nebo se pokusit ještě něco sami vymyslet. Zkusme do zadaného integrálu dosadit z definice funkce kotangens, $\cot x = \cos x / \sin x$, a třeba se tím situace vylepší.

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x \tag{1.73}$$

A hele, vyplatilo se! Funkce kosinus je totiž derivací funkce sinus, a tudíž můžeme sinus nahradit, tj.

$$\int \cot x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} w = \sin x \\ \mathrm{d}w = \cos x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{\mathrm{d}w}{w} =$$

$$= \ln|w| + c = \ln|\sin x| + c. \tag{1.74}$$

Než se posuneme v probíraných metodách dále, vyřešme ještě dva příklady.

První není obtížný, pouze aplikujeme substituci. Chceme spočítat integrál

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}\,\mathrm{d}x, \tag{1.75}$$

kde $a = konst.$ Můžeme postupovat takto:

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} y = a^2 + x^2 \\ \mathrm{d}y = (a^2+x^2)'\,\mathrm{d}x = 2x\,\mathrm{d}x \\ \frac{dy}{2} = x\,\mathrm{d}x \end{array} \right| = \int \frac{1}{\sqrt{y}}\frac{\mathrm{d}y}{2} =$$

$$= \frac{1}{2}\int y^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\frac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + c = \sqrt{y} + c = \sqrt{a^2+x^2} + c. \tag{1.76}$$

Rychlou kontrolu můžeme opět provést derivováním,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\sqrt{a^2+x^2}+c\right) = \left[\left(a^2+x^2\right)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}\left(a^2+x^2\right)^{-\frac{1}{2}}\left(a^2+x^2\right)' =$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{a^2+x^2}}2x = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}}. \tag{1.77}$$

Teď trochu změníme zadání předchozího příkladu a uvidíme, jestli se s tím dokážeme popasovat. Hledáme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}. \tag{1.78}$$

Pro začátek ještě uvažujme $a > 0$, k obecnější variantě se vrátíme později.

Na první pohled se jedná o bezvýchodnou situaci, substituce se zdá být v tomto případě k ničemu. Vraťme se však ke *vztahům 1.62* a *1.63*. Vyvodili jsme z nich, že pokud máme integrovat funkci ve tvaru $g(y(x))y'(x)$, můžeme místo ní integrovat funkci $g(y)$ a nesmíme zapomenout, že $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$. Když nám to ale takto hezky funguje, potom to můžeme zkusit i opačným směrem. Tedy máme-li integrovat funkci ve tvaru $g(y)$, můžeme proměnnou y nahradit nějakou funkcí jiné proměnné, např. $y(x)$, a $\mathrm{d}y$ se potom nahradí výrazem $y'(x)\,\mathrm{d}x$. Jedná se v podstatě o zpětný chod od jednodušší funkce ke složitější, ale jsou případy, kdy nám to může pomoct.

Řešíme tedy integrál funkce proměnné x, označme si ji $f(x) = 1/\sqrt{a^2-x^2}$, a chceme nyní nahradit x funkcí jiné proměnné, kterou označíme například t. Jakou funkci vybrat, nám napoví součtové vzorce goniometrických funkcí, konkrétně zřejmě ten nejznámější z nich: $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$. Vynásobíme-li celou rovnici konstantou a^2 a převedeme-li sinus na pravou stranu, získáme

$$a^2\cos^2 t = a^2 - a^2\sin^2 t. \tag{1.79}$$

To by nám mohlo napovědět, že bychom mohli proměnnou x nahradit funkcí $x(t) = a\sin t$. Potom musíme v integrálu $\mathrm{d}x$ nahradit výrazem $(a\sin t)'\,\mathrm{d}t = a\cos t\,\mathrm{d}t$. Zapišme to tedy a řešme dále.

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}} = \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2\cos^2 t}} = \int \frac{a\cos t\,\mathrm{d}t}{|a\cos t|} = \frac{a}{|a|}\int \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{|\cos t|} \tag{1.80}$$

Než budeme bezhlavě řešit integrál s absolutní hodnotou, rozmyslíme si, jak je to s definičními obory. V zadání máme výraz $1/\sqrt{a^2-x^2}$, který má smysl pouze pro $x \in (-a,\ a)$. Dále jsme provedli substituci $x = a \sin t$ a jelikož $x \in (-a,\ a)$, musí potom platit, že $\sin t \in (-1,\ 1)$ a to je splněno pro $t \in (-\pi/2 + 2\pi k,\ \pi/2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$. Máme tedy nekonečně mnoho periodicky posunutých intervalů, ale kvůli jednoznačnosti si vybereme pouze jeden, je jedno který, výsledek dávají všechny stejný. Vezmeme tedy $t \in (-\pi/2,\ \pi/2)$ a máme v podstatě vyhráno, protože pro tato t nabývá $\cos t$ pouze kladných hodnot a nemusíme se tedy trápit absolutní hodnotou v integrálu. Tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{a}{|a|} \int \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{|\cos t|} = \frac{a}{a} \int \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{\cos t} =$$

$$= \int \mathrm{d}t = t + c = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \end{array} \right| = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c, \tag{1.81}$$

kde arcsin je funkce *arkus sinus*, která je na vhodném intervalu inverzní k funkci sinus.

Ještě než opustíme právě vyřešený příklad, vraťme se k volbě definičního oboru proměnné t. Potřebovali jsme ho zvolit tak, aby $\sin t$ nabýval hodnot od -1 do 1. Někdo by mohl namítnout, že to je splněno i pro $t \in (\pi/2 + 2\pi k,\ 3\pi/2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$. Proč jsme tedy nezvolili třeba $t \in (\pi/2,\ 3\pi/2)$? Potom by byl $\cos t$ na celém definičním oboru záporný a výsledek integrálu by byl s mínusem. Tajemství naší volby intervalu pro t tkví v tom, že musíme v substituci ctít monotónnost. V substituci jsme použili rovnici $x = a \sin t$, jejíž levá strana je rostoucí funkce, a tudíž musí být rostoucí i její pravá strana. A $\sin t$ je rostoucí právě pro $t \in (-\pi/2 + 2\pi k,\ \pi/2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$.

Jak jsme si slíbili na začátku tohoto příkladu, ještě se podíváme na obecnější variantu, kdy nebudeme považovat konstantu a za kladnou, ale budeme uvažovat $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, tedy i záporné a. Řešení příkladu by probíhalo prakticky stejně, pouze při rozmýšlení definičních oborů v substituci bychom museli být opatrní, právě z důvodu ctění monotónnosti, jak jsme řešili v předchozím odstavci. Řešení takového integrálu bychom převedli na předchozí případ, pokud bychom zvolili substituci tímto způsobem: $x = |a| \sin t$.

Pokud bychom z nějakého důvodu lpěli na substituci $x = a \sin t$, museli bychom zde rozdělit řešení na dva případy, jedno pro $a > 0$ a $x \in (-a,\ a)$ a druhé pro $a < 0$ a $x \in (a,\ -a)$. A aby byla zachována monotónnost na obou stranách rovnice, pro $a < 0$ by muselo být $t \in (\pi/2 + 2\pi k,\ 3\pi/2 + 2\pi k),\ k \in \mathbb{Z}$, konečný výsledek integrování by byl však pořád stejný, viz *vztah 1.82.*

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}}\bigg|_{a<0} = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ t \in \left(\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right) \\ \mathrm{d}x = a \cos t \,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int \frac{a \cos t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 t}} =$$

$$= \int \frac{a \cos t \,\mathrm{d}t}{\sqrt{a^2 \cos^2 t}} = \int \frac{a \cos t \,\mathrm{d}t}{|a \cos t|} = \frac{a}{|a|} \int \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{|\cos t|} = -\int \frac{\cos t \,\mathrm{d}t}{-\cos t} =$$

$$= \int \mathrm{d}t = t + c = \left| \begin{array}{l} x = a \sin t \\ t = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) \end{array} \right| = \arcsin\left(\frac{x}{a}\right) + c \tag{1.82}$$

Spočtěme si pro procvičení nabytých znalostí příklad, k němuž se později odkážeme. Nalezněme integrál

$$\int \frac{\alpha}{x - k} \,\mathrm{d}x, \tag{1.83}$$

kde α a k jsou nenulové konstanty. Konstanty α si integrál nevšímá, a proto ji můžeme vytknout před integrál

$$\int \frac{\alpha}{x-k}\,\mathrm{d}x = \alpha \int \frac{1}{x-k}\,\mathrm{d}x. \tag{1.84}$$

Podle tabulky základních integrálů (viz *tabulka 1.1*) umíme řešit integrál funkce $1/x$. Zkusme tedy využít substituce a získat funkci, kterou umíme integrovat.

$$\alpha \int \frac{1}{x-k}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} t = x-k \\ \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = (x-k)' = 1 \\ \mathrm{d}t = 1\mathrm{d}x \end{array} \right| = \alpha \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \alpha \ln|t| + c \tag{1.85}$$

Nyní dosadíme zpět za substituci a máme výsledek hledaného integrálu, tj.

$$\int \frac{\alpha}{x-k}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x-k| + c. \tag{1.86}$$

Existuje mnoho odvozených substitucí pro komplikované funkce, které by nás při počítání zřejmě vůbec nenapadly. Pokud si nebudeme pamatovat, kdy zvolit jakou substituci, je dobré aspoň vědět, kde je hledat. Více informací k matematické větě o substituci lze nalézt v [4], na s. 140 a 141 a některé významné substituce , které jsme si zde neuváděli, jsou uvedeny v [4] od s. 146 dále a nebo v .

Integrace pomocí rekurentních vztahů

Mohou nastat případy, kdy je třeba integrovat funkci, kde se vyskytuje n-tá mocnina. Takový integrál by se zpravidla počítal metodou per partes, která by se musela n-krát zopakovat. Potom by bylo výhodné pro takový integrál odvodit nějaký *rekurentní vztah*[7], kterým bychom se k výsledku dopočítali rychleji, než kdybychom počítali integrál přímo.

Jak je to myšleno, objasníme na ukázkovém příkladě. Určíme integrál funkce $x^n e^x$. To je typická funkce pro opakování metody per partes, kde bychom při přímém vypočtu pořád derivovali x^n, dokud bychom se ho nezbavili, a e^x stále dokola integrovali. My však provedeme per partes pouze jednou a uvidíme, že už nemusíme integrovat dále.

Výchozí integrál si označíme jako I_n, kde n odpovídá řádu mocniny proměnné x v integrálu, a aplikujeme metodu per partes, tj.

$$I_n = \int x^n e^x\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f' = e^x & f = e^x \\ g = x^n & g' = nx^{n-1} \end{array} \right| \overset{\mathrm{pp}}{=} x^n e^x - \int nx^{n-1}e^x\mathrm{d}x =$$

$$= x^n e^x - n\int x^{n-1}e^x\mathrm{d}x. \tag{1.87}$$

V našem značení však platí, že

$$\int x^{n-1}e^x\mathrm{d}x = I_{n-1}, \tag{1.88}$$

a proto můžeme psát, že

$$I_n = x^n e^x - nI_{n-1}. \tag{1.89}$$

[7]S rekurentními vztahy se můžeme setkat zpravidla u posloupností – rekurentní vztah určuje člen posloupnosti pomocí jednoho nebo více předchozích členů.

Tím jsme získali rekurentní vztah a pokud budeme znát I_0, rekurzí se dostaneme až k hledanému I_n. V tomto případě je I_0 velmi jednoduchý integrál,

$$I_0 = \int x^0 e^x \,\mathrm{d}x = \int e^x \,\mathrm{d}x = e^x + c. \tag{1.90}$$

Pro zajímavost spočítáme pár prvních členů posloupnosti integrálů I_n, aby bylo vidět, že je to jednoduché. Budeme dosazovat do *vztahu 1.89*, přičemž $I_0 = e^x + c$, tj.

$$I_1 = x^1 e^x - 1 \cdot I_0 = xe^x - e^x - c = e^x(x-1) + c_1, \tag{1.91}$$

$$\begin{aligned} I_2 = x^2 e^x - 2I_1 = x^2 e^x - 2[e^x(x-1) + c_1] = \\ = x^2 e^x - e^x(2x-2) - 2c_1 = e^x(x^2 - 2x + 2) + c_2, \end{aligned} \tag{1.92}$$

$$\begin{aligned} I_3 = x^3 e^x - 3I_2 = x^3 e^x - 3[e^x(x^2 - 2x + 2) + c_2] = \\ = x^3 e^x - e^x(3x^2 - 6x + 6) - 3c_2 = e^x(x^3 - 3x^2 + 6x - 6) + c_3 \end{aligned} \tag{1.93}$$

a dále by se pokračovalo obdobně.

1.3.3 Integrace racionálních funkcí

Jednou z obtížnějších úloh, se kterými se můžeme při řešení integrálů setkat, je integrál racionální funkce. Racionální funkcí $f(x)$ je myšlena funkce ve tvaru

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + ... + a_2 x^2 + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1}x^{m-1} + ... + b_2 x^2 + b_1 x + b_0}, \tag{1.94}$$

kde a_i a b_i pro $i = 0,\ 1,\ 2,\ ...$ jsou libovolné reálné konstanty s podmínkou, že $a_n \neq 0$ a $b_m \neq 0$. Jedná se tedy o podíl dvou polynomů. Otázkou k vyřešení tedy je, co si počít s integrálem typu

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \,\mathrm{d}x? \tag{1.95}$$

Dále si ukážeme postup, jak řešit integrály racionálních funkcí. Ne všechny naše kroky budeme zdůvodňovat, proč děláme zrovna je, když však budeme trpěliví, uvidíme, že se dopracujeme k řešení. To není proto, že bychom chtěli něco záměrně tajit, ale spíše kvůli složitosti integrálů racionálních funkcí. Kdybychom se chtěli těmto integrálům věnovat podrobně, mohlo by to vystačit na celou knihu. Obecnější postup, než si uvedeme my, je v [4], od s. 141.

Odrazíme se od konkrétního příkladu, budeme řešit integrál

$$\int \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^2 + 8} \,\mathrm{d}x. \tag{1.96}$$

Podle předchozího obecného značení ve *vztahu 1.94* platí, že $n = 3$, $m = 2$ a $b_m = b_2 = 2$.

1. krok: Nejdříve zajistíme, aby koeficient u x^m byl roven jedné. Toho dosáhneme vytknutím b_m. Konkrétně:

$$\int \frac{3x^3 + 2x + 1}{2x^2 + 8} \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \frac{3x^3 + 2x + 1}{x^2 + 4} \,\mathrm{d}x. \tag{1.97}$$

2. krok: Pokud je $m \leqq n$, vydělíme polynom $P(x)$ polynomem $Q(x)$, abychom ve jmenovateli racionální funkce získali ostře větší *řád polynomu*[8], než je v čitateli. V našem příkladě to také provedeme, protože máme $m < n$.

$$(3x^3 + 2x + 1) : (x^2 + 4) = 3x + \frac{1 - 10x}{x^2 + 4} \tag{1.98}$$

$$\frac{1}{2} \int \frac{3x^3 + 2x + 1}{x^2 + 4} \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int \left(3x + \frac{1 - 10x}{x^2 + 4} \right) \mathrm{d}x \tag{1.99}$$

Získali jsme integrál, který částečně umíme vyřešit.

$$\frac{1}{2} \int \left(3x + \frac{1 - 10x}{x^2 + 4} \right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \int 3x \, \mathrm{d}x + \frac{1}{2} \int \frac{1 - 10x}{x^2 + 4} \, \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{3}{4} x^2 + \frac{1}{2} \int \frac{1 - 10x}{x^2 + 4} \, \mathrm{d}x \tag{1.100}$$

Integrační konstantu z prvního integrálu jsme schovali do druhého. Zbyl nám tedy integrál racionální funkce, která splňuje naše požadavky – koeficient u x^m je roven jedné a řád polynomu ve jmenovateli (dvě) je ostře větší než řád polynomu v čitateli (jedna).

3. krok: V dalším kroku se pokusíme rozložit polynom ve jmenovateli integrované racionální funkce. Budeme se zabývat speciálním případem, kdy budeme rozkládat polynom řádu dvě (tj. kvadratický případ). Pro vyšší řády je to komplikovanější a nebudeme se zde jimi zabývat. Ve speciálních případech lze odvodit a využít rekurentní vztah, viz [4], s. 143.

Mějme tedy již předchozími kroky připravený integrál racionální funkce

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + a} \, \mathrm{d}x, \tag{1.101}$$

kde $A,\ B,\ a,\ b$ jsou libovolné reálné konstanty, přičemž alespoň jedna z A nebo B je nenulová.

Pokud chceme rozložit polynom $x^2 + bx + a$, mohou v zásadě nastat tři případy:

3a) Polynom $x^2 + bx + a$ má dva různé reálné kořeny $x_1,\ x_2$ a lze ho tedy napsat jako

$$x^2 + bx + a = (x - x_1)(x - x_2). \tag{1.102}$$

V tomto případě bychom rádi rozložili racionální funkci na tzv. *parciální zlomky*:

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + a} = \frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2}, \tag{1.103}$$

kde α a β jsou vhodné konstanty. Abychom je určili, vynásobíme celou *rovnici 1.103* výrazem $(x - x_1)(x - x_2)$, tj.

$$\frac{Ax + B}{x^2 + bx + a}(x - x_1)(x - x_2) = \left(\frac{\alpha}{x - x_1} + \frac{\beta}{x - x_2} \right)(x - x_1)(x - x_2). \tag{1.104}$$

[8] Řádem polynomu myslíme nejvyšší mocninu proměnné, která se v polynomu vyskytuje, např. $x^3 + 2x^2 - 1$ je polynomem třetího řádu.

Na levé straně se součin $(x-x_1)(x-x_2)$ zkrátí s x^2+bx+a a pravá strana se také snadno upraví. Získáme

$$Ax + B = \alpha(x - x_2) + \beta(x - x_1), \tag{1.105}$$

z čehož odvodíme vztahy pro α a β.

Dosadíme-li do *vztahu 1.105* $x = x_1$, získáme

$$Ax_1 + B = \alpha(x_1 - x_2) + \beta(x_1 - x_1) = \alpha(x_1 - x_2), \tag{1.106}$$

a protože $x_1 \neq x_2$, lze napsat, že

$$\frac{Ax_1 + B}{x_1 - x_2} = \alpha. \tag{1.107}$$

Analogicky bychom získali dosazením $x = x_2$ vztah pro β,

$$\frac{Ax_2 + B}{x_2 - x_1} = \beta. \tag{1.108}$$

Tímto jsou α a β jednoznačně určeny, protože A, B, x_1 a x_2 jsou známé konstanty.

Když umíme podle *vztahu 1.103* rozložit racionální funkci na parciální zlomky, můžeme rozložit i její integrál.

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\alpha}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x - x_2}\,\mathrm{d}x \tag{1.109}$$

Na pravé straně *rovnice 1.109* potom vystupují integrály, které umíme řešit (viz *vztah 1.86*), a platí

$$\int \frac{\alpha}{x - x_1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\beta}{x - x_2}\,\mathrm{d}x = \alpha \ln|x - x_1| + \beta \ln|x - x_2| + c. \tag{1.110}$$

Předešlý postup si vyjasníme na příkladě. Pokusme se vyřešit integrál

$$\int \frac{3x + 2}{2x^2 + x - 3}\,\mathrm{d}x. \tag{1.111}$$

Polynom ve jmenovateli integrované racionální funkce má vyšší řád než polynom v čitateli, takže stačí pouze vytknout 2 ze jmenovatele, abychom mohli polynom ve jmenovateli rozložit.

$$\int \frac{3x + 2}{2x^2 + x - 3}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{3x + 2}{x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{3x + 2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)(x - 1)}\,\mathrm{d}x \tag{1.112}$$

Racionální funkci v posledním integrálu rozdělíme na parciální zlomky a dopočítáme příslušné koeficienty α, β.

$$\begin{gathered}
\tfrac{3x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)} = \tfrac{\alpha}{x+\frac{3}{2}} + \tfrac{\beta}{x-1} \quad \Big/ \cdot \left(x + \tfrac{3}{2}\right)(x - 1) \\
3x + 2 = \alpha(x - 1) + \beta\left(x + \tfrac{3}{2}\right) \\
x = -\tfrac{3}{2} \quad \Rightarrow \quad 3\left(-\tfrac{3}{2}\right) + 2 = \alpha\left(-\tfrac{3}{2} - 1\right) \quad \Rightarrow \quad \alpha = 1 \\
x = 1 \quad \Rightarrow \quad 3 \cdot 1 + 2 = \beta\left(1 + \tfrac{3}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \beta = 2
\end{gathered} \tag{1.113}$$

Nyní vše dosadíme do hledaného integrálu a využijeme opět *vztahu 1.86.*

$$\frac{1}{2}\int \frac{3x+2}{\left(x+\frac{3}{2}\right)(x-1)}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{x+\frac{3}{2}} + \frac{2}{x-1}\right)\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1}{x+\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int \frac{2}{x-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\ln\left|x+\frac{3}{2}\right| + \ln|x-1| + c \tag{1.114}$$

3b) V druhém případě může nastat situace, kdy bude mít polynom ve jmenovateli integrované racionální funkce jeden dvojnásobný reálný kořen x_0, tj.

$$x^2 + bx + a = (x - x_0)^2. \tag{1.115}$$

V tomto případě nám parciální zlomky nepomohou, což bude vidět na následujícím příkladě. Budeme hledat integrál

$$\int \frac{2x}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{1.116}$$

Pokusíme se rozdělit racionální funkci na parciální zlomky.

$$\tfrac{2x}{(x-3)^2} = \tfrac{\alpha}{x-3} + \tfrac{\beta}{x-3} \quad \Big/ \cdot (x-3)^2$$

$$2x = \alpha(x-3) + \beta(x-3) \tag{1.117}$$

$$2x = (\alpha+\beta)x - 3(\alpha+\beta)$$

Aby platila poslední zapsaná rovnost, musí být na obou stranách rovnice stejné koeficienty u x a stejné absolutní členy – získáme tak soustavu dvou lineárních rovnic pro α a β:

$$\begin{aligned} 2 &= \alpha + \beta \\ 0 &= -3(\alpha+\beta) \end{aligned} \tag{1.118}$$

Když nyní dosadíme součet $\alpha + \beta$ z první rovnice do druhé, dojdeme k nepravdivému tvrzení

$$0 = -3 \cdot 2, \tag{1.119}$$

ze kterého je patrné, že parciální zlomky v tomto případě nepomohou.

Ač by to mohlo být nečekané, pomůže nám zde obyčejná substituce.

$$\int \frac{2x}{(x-3)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x-3=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = t+3 \end{array}\right| = \int \frac{2(t+3)}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{2t}{t^2} + \frac{6}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + 6\int t^{-2}\,\mathrm{d}t = 2\ln|t| - \frac{6}{t} + c =$$

$$= 2\ln|x-3| - \frac{6}{x-3} + c \tag{1.120}$$

Abychom se neomezovali pouze na právě vyřešený konkrétní případ, napíšeme si řešení i obecně. Předpokládáme, že platí *rovnice 1.115*, potom

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{Ax+B}{(x-x_0)^2}\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{c} x-x_0=t \\ \mathrm{d}x = \mathrm{d}t \\ x = t+x_0 \end{array}\right| =$$

$$= \int \frac{A(t + x_0) + B}{t^2}\,\mathrm{d}t = \int \left(\frac{At}{t^2} + \frac{Ax_0 + B}{t^2}\right)\mathrm{d}t =$$
$$= A\int \frac{1}{t}\,\mathrm{d}t + (Ax_0 + B)\int \frac{1}{t^2}\,\mathrm{d}t = A\ln|t| - \frac{Ax_0 + B}{t} + c =$$
$$= A\ln|x - x_0| - \frac{Ax_0 + B}{x - x_0} + c. \tag{1.121}$$

3c) Ještě jsme se nezabývali případem, kdy má polynom ve jmenovateli integrované racionální funkce dva kořeny, které nejsou reálné, tj. $x_1,\ x_2 \notin \mathbb{R}$. Další postup si opět ukážeme nejdříve na konkrétním příkladě a rozdělíme ho do čtyř bodů. Najděme integrál

$$\int \frac{5x - 2}{x^2 + 3x + 6}\,\mathrm{d}x, \tag{1.122}$$

kde x^2+3x+6 nemá reálné kořeny (pro kontrolu si můžeme spočítat diskriminant, který vyjde záporný).

3c-I: Polynom ve jmenovateli *doplníme na čtverec*[9], tj.

$$x^2 + 3x + 6 = x^2 + 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} + 6 = \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + 6 - \frac{9}{4} =$$
$$= \left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}, \tag{1.123}$$

a potom můžeme upravit hledaný integrál na tvar

$$\int \frac{5x - 2}{x^2 + 3x + 6}\,\mathrm{d}x = \int \frac{5x - 2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.124}$$

3c-II: Další úpravou chceme získat v čitateli racionální funkce derivaci jmenovatele, což je

$$\left[\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}\right]' = 2\left(x + \frac{3}{2}\right) = 2x + 3. \tag{1.125}$$

Pohrajme si tedy trochu s čitatelem,

$$5x - 2 = \frac{5}{2}\cdot 2x + \frac{5}{2}\cdot 3 - \frac{19}{2} = \frac{5}{2}(2x + 3) - \frac{19}{2}, \tag{1.126}$$

a všimněme si, že všechna x jsou schovaná v dotyčné derivaci. To je velmi důležité, protože kdybychom si čitatel rozdělili jinak, např. jako $5x-2 = (2x+3)+3x-5$, vůbec bychom si nepomohli, což bude patrné z dalších kroků postupu.

Dosaďme do *vztahu 1.124*,

$$\int \frac{5x - 2}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{5}{2}(2x + 3) - \frac{19}{2}}{\left(x + \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.127}$$

[9]Obdobným způsobem se na SŠ hledá například vrchol paraboly a vychází se ze vztahu $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$.

3c-III: V následujícím kroku rozdělíme integrovanou racionální funkci na dva lomené výrazy tak, aby v čitateli jednoho byla pouze derivace jmenovatele (případně vynásobená nějakou konstantou) a v čitateli druhého zbytek.

$$\frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} = \frac{\frac{5}{2}(2x+3)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} + \frac{\left(-\frac{19}{2}\right)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} \tag{1.128}$$

Potom můžeme hledaný integrál také rozdělit na dva, přičemž jeden máme připravený na řešení substitucí, tj.

$$\int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)-\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \left[\frac{\frac{5}{2}(2x+3)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}} - \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\right]\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}(2x+3)}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x - \int \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4} = w \\ (2x+3)\mathrm{d}x = \mathrm{d}w \end{array} \right| =$$

$$= \int \frac{\frac{5}{2}\mathrm{d}w}{w} - \int \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln|w| - \int \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{5}{2}\ln\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right] - \int \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x. \tag{1.129}$$

Integrační konstantu z vyřešeného integrálu jsme schovali do toho zbývajícího, se kterým se popasujeme v dalším kroku.

3c-IV: Poslední zbývající integrál převedeme pomocí vytýkání a substituce na známý integrál

$$\int \frac{1}{y^2+1} = \arctan y + c, \tag{1.130}$$

který je dobré si uložit do paměti. Symbol arctan budeme používat pro funkci arkus tangens, která je inverzní k funkci tangens (na vhodném intervalu).

Vhodným vytýkáním v posledním integrálu ze *vztahu 1.129* dostaneme jedničky na místa, kde je potřebujeme, a připravíme si integrál na substituci.

$$\int \frac{\frac{19}{2}}{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{19}{2}}{\frac{15}{4}} \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{3}{2}\right)^2}{\frac{15}{4}}+1}\,\mathrm{d}x = \frac{38}{15}\int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{3}{2}}{\frac{\sqrt{15}}{2}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{38}{15}\int \frac{1}{\left(\frac{2x+3}{\sqrt{15}}\right)^2+1}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{c} \frac{2x+3}{\sqrt{15}} = y \\ \frac{2}{\sqrt{15}}\mathrm{d}x = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{15}}{2}\mathrm{d}y \end{array} \right| = \frac{38}{15}\int \frac{\frac{\sqrt{15}}{2}}{y^2+1}\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{38}{15}\frac{\sqrt{15}}{2}\int \frac{1}{y^2+1}\,\mathrm{d}y = \frac{19\sqrt{15}}{15}\arctan y + c = \frac{19\sqrt{15}}{15}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{15}} + c \tag{1.131}$$

Abychom si udělali představu, napišme si kompletní výsledek celého příkladu, tj.

$$\int \frac{5x-2}{x^2+3x+6}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\ln\left[\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{15}{4}\right] - \frac{19\sqrt{15}}{15}\arctan\frac{2x+3}{\sqrt{15}} + c, \tag{1.132}$$

kde c je výsledná integrační konstanta celého integrálu.

Předešlý postup funguje obecně, a proto ho rychle projdeme znovu, abychom si to ukázali. Řešme integrál

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+a}\,\mathrm{d}x \tag{1.133}$$

a předpokládejme, že polynom x^2+bx+a nemá reálné kořeny.

3c-I: Doplnění jmenovatele na úplný čtverec:

$$x^2+bx+a = x^2+bx+\frac{b^2}{4}+a-\frac{b^2}{4} = \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}. \tag{1.134}$$

3c-II: Najdeme v čitateli racionální funkce derivaci jmenovatele, což je

$$\left[\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}\right]' = 2\left(x+\frac{b}{2}\right) = 2x+b. \tag{1.135}$$

Potom čitatele upravíme tímto způsobem:

$$Ax+B = \frac{A}{2}(2x+b)+B-\frac{A}{2}b. \tag{1.136}$$

3c-III: Nyní rozdělíme integrovanou racionální funkci na dvě, resp. rozdělíme integrál na dva.

$$\int \frac{Ax+B}{x^2+bx+a}\,\mathrm{d}x = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+b)+B-\frac{A}{2}b}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int \frac{\frac{A}{2}(2x+b)}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}x + \int \frac{B-\frac{A}{2}b}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}x \tag{1.137}$$

První z integrálů ve *vztahu 1.137* vyřešíme substitucí.

$$\int \frac{\frac{A}{2}(2x+b)}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4} = w \\ (2x+b)\mathrm{d}x = \mathrm{d}w \end{array} \right| = \frac{A}{2}\int \frac{\mathrm{d}w}{w} =$$

$$= \frac{A}{2}\ln|w|+c = \frac{A}{2}\ln\left|\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}\right|+c \tag{1.138}$$

3c-IV: Druhý integrál převedeme na integrál typu

$$\int \frac{1}{y^2+1} = \arctan y + c. \tag{1.139}$$

Vhodně vytkneme a substitucí dopočítáme.

$$\int \frac{B-\frac{A}{2}b}{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2+a-\frac{b^2}{4}}\,\mathrm{d}x = \frac{B-\frac{A}{2}b}{a-\frac{b^2}{4}}\int \frac{1}{\frac{\left(x+\frac{b}{2}\right)^2}{a-\frac{b^2}{4}}+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \frac{B - \frac{A}{2}b}{a - \frac{b^2}{4}} \int \frac{1}{\left(\frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}}}\right)^2 + 1} \mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} \frac{x+\frac{b}{2}}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}}} = y \\ \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a-\frac{b^2}{4}}} = \mathrm{d}y \\ \mathrm{d}x = \sqrt{a - \frac{b^2}{4}}\mathrm{d}y \end{array} \right| =$$

$$= \frac{B - \frac{A}{2}b}{a - \frac{b^2}{4}} \int \frac{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}}{y^2 + 1} \mathrm{d}y = \frac{B - \frac{A}{2}b}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} \int \frac{1}{y^2 + 1} \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{B - \frac{A}{2}b}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} \operatorname{arctan} y + c = \frac{B - \frac{A}{2}b}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} \operatorname{arctan} \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} + c \tag{1.140}$$

A tímto je hotovo – napíšeme si celý výsledek:

$$\int \frac{Ax + B}{x^2 + bx + a} \mathrm{d}x =$$

$$= \frac{A}{2} \ln \left| \left(x + \frac{b}{2}\right)^2 + a - \frac{b^2}{4} \right| + \frac{B - \frac{A}{2}b}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} \operatorname{arctan} \frac{x + \frac{b}{2}}{\sqrt{a - \frac{b^2}{4}}} + c. \tag{1.141}$$

1.4 Určitý integrál

V předchozích integrálech nám vystupovala integrační konstanta, která nám způsobovala neurčitost – v integrálu bylo schováno nekonečně mnoho primitivních funkcí a bez počátečních nevíme, kterou primitivní funkci si vybrat. U určitého integrálu nám tento problém odpadá.

Určitý integrál je motivován snahou najít obsah S pod grafem nezáporné spojité funkce $y = f(x)$, která je definována na intervalu $\langle a,\ b\rangle \subset \mathbb{R}$. Hledáme tedy obsah plochy vymezené grafem funkce, osou x a přímkami $x = a,\ x = b$. Takový obsah může být jen jeden, a proto nebude integrál neurčitý.

Nejdříve si hledaný obsah určíme přibližně a pro lepší představu se můžeme dívat na *obrázek 1.3*. Interval $\langle a,\ b\rangle$ rozdělíme $n - 1$ body na n stejně velkých částí Δx_i, a protože umíme velice snadno počítat obsah obdélníka, vymezíme si obsah pod grafem funkce pomocí obsahů obdélníků.

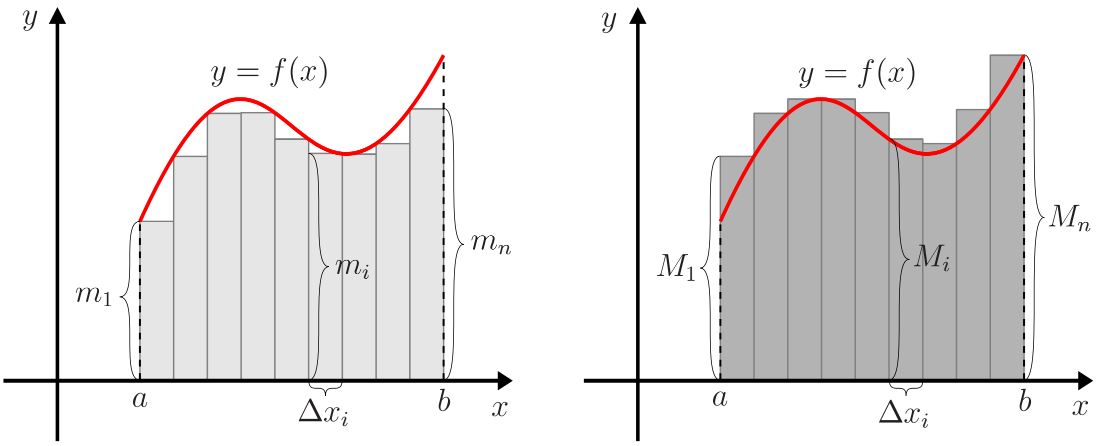
Funkce $f(x)$ na každém intervalu Δx_i nabývá svého minima a maxima a my si je označíme jako

$$\begin{aligned} m_i &= \min_{x \in \Delta x_i} f(x), \\ M_i &= \max_{x \in \Delta x_i} f(x). \end{aligned} \tag{1.142}$$

Potom je ale jasné, že když sečteme obsahy všech obdélníků o stranách Δx_i a m_i, získáme obsah, který je menší nebo roven[10] hledanému obsahu S. Tento součet označíme $s(f,\ D)$ a budeme mu říkat *dolní součet*. Symbol D zde reprezentuje konkrétní dělení, jakým jsme rozdělili interval $\langle a,\ b\rangle$, a f nám říká, že se daný dolní součet vztahuje k funkci $f(x)$. Platí tedy, že

$$S \geq s(f,\ D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i. \tag{1.143}$$

[10]Rovnost nastane pro konstantní funkci.



Obrázek 1.3: Obsah pod grafem funkce $f(x)$: vlevo je naznačen dolní součet $s(f,\ D)$ a vpravo horní součet $S(f,\ D)$

Když naopak provedeme součet obsahů obdélníků o stranách Δx_i a M_i, označíme ho jako *horní součet* $S(f,\ D)$ a získáme obsah větší nebo roven S, tj.

$$S \leq S(f,\ D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.144}$$

Získali jsme soustavu nerovnic, kterou můžeme zapsat jako

$$s(f,\ D) \leq S \leq S(f,\ D). \tag{1.145}$$

Přesnějšího vymezení obsahu S bychom dosáhli, kdybychom vzali jemnější dělení $\tilde{D}$, než je D, tj. zmenšili bychom intervaly Δx_i. Tedy

$$s(f,\ D) \leq s(f,\ \tilde{D}) \leq S \leq S(f,\ \tilde{D}) \leq S(f,\ D). \tag{1.146}$$

Takto bychom mohli stále zjemňovat dělení intervalu $\langle a,\ b\rangle$, až bychom limitně dosáhli nekonečně malého Δx_i. Pro spojitou funkci $f(x)$ bychom tím získali rovnost dolního a horního součtu a tato společná hodnota by byl hledaný obsah S, což budeme označovat jako *určitý integrál funkce* $f(x)$ na $\langle a,\ b\rangle$.

Explicitněji to zapíšeme pomocí limit. Víme, že pro všechna $x \in \Delta x_i$ platí

$$m_i \leq f(x) \leq M_i \tag{1.147}$$

a nerovnosti se neporuší ani po vynásobení Δx_i, tj.

$$m_i \Delta x_i \leq f(x) \Delta x_i \leq M_i \Delta x_i. \tag{1.148}$$

Sečteme-li obsahy ve *vztahu 1.148* pro všechna i, získáme nerovnosti s dolním a horním součtem

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} f(x) \Delta x_i \leq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i \tag{1.149}$$

a limitou dosáhneme nekonečně malého Δx_i a tím pádem i rovnosti dolního a horního součtu, tj.

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x) \Delta x_i = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i. \tag{1.150}$$

Tímto získáváme pro určitý integrál (resp. obsah pod grafem) S definiční vztah

$$S = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i. \tag{1.151}$$

Určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\ b\rangle$ si označíme pomocí již zavedeného symbolu pro integrál:

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x)\Delta x_i, \tag{1.152}$$

kde a je *dolní mez* a b je *horní mez* pro integrování a na dx můžeme nahlížet jako na nekonečně malé Δx_i.

Upozorněme na fakt, že výsledek určitého integrálu je číslo (s případnou jednotkou), kdežto výsledek neurčitého integrálu je funkce. V literatuře se můžeme na zavedení určitého integrálu podívat do [4], od s. 151, kde se zavádí tzv. *Riemannův integrál*.

Dále si uvedeme některé vlastnosti určitého integrálu, které se mohou hodit při výpočtech.

Když budeme potřebovat, můžeme interval, přes který integrujeme, podle potřeby dělit, protože pro $c \in \langle a,\ b\rangle$ platí, že

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_c^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.153}$$

Potom je zřejmě na první pohled vidět, že

$$\int\limits_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0. \tag{1.154}$$

Někdy je výhodné prohodit meze integrování a to je doprovázeno změnou znaménka, tj.

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int\limits_b^a f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.155}$$

K výrazu „konstanta krát funkce“ a k součtu funkcí se určitý integrál chová stejně jako neurčitý. Tedy pro $k = konst.$ je

$$\int\limits_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x = k\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.156}$$

a pro funkce $f(x),\ g(x)$ definované na $\langle a,\ b\rangle$ platí, že

$$\int\limits_a^b \left[f(x) + g(x)\right]\,\mathrm{d}x = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.157}$$

Zároveň, jestliže je $f(x) \geq g(x)$, potom je

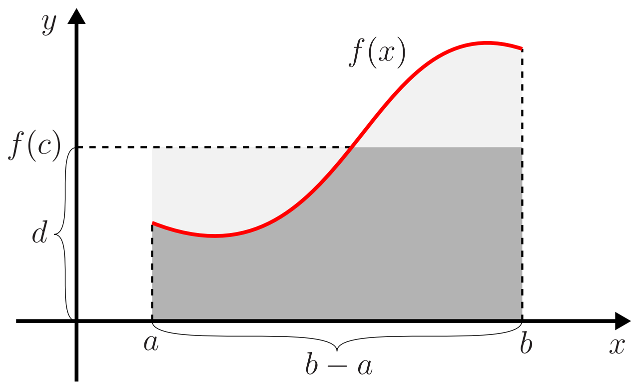
$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq \int\limits_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.158}$$

Určitým integrálem se dá také hledat tzv. *střední hodnota* funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\ b\rangle$, kterou si označíme d a pro niž platí, že

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = d(b-a). \tag{1.159}$$

Představit si ji můžeme jako jednu stranu obdélníka, který má stejný obsah, jako plocha pod grafem funkce $f(x)$, a jeho druhá strana má velikost $b-a$. Pro spojité funkce existuje $c \in \langle a,\ b\rangle$, pro které platí, že $f(c) = d$ (viz *obrázek 1.4*). *Vztah 1.159* pak můžeme přepsat do tvaru

$$d = f(c) = \frac{\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x}{b-a}. \tag{1.160}$$



Obrázek 1.4: Střední hodnota funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\ b\rangle$

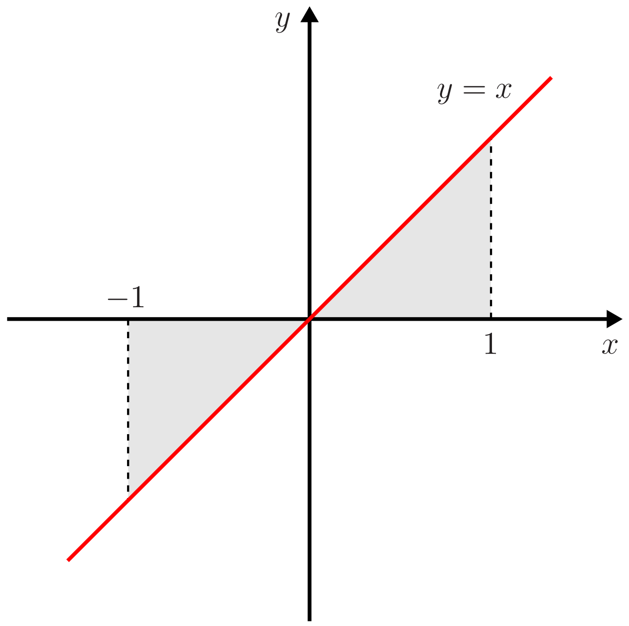
Před výpočty si ještě doplňme, že určitý integrál lze počítat nejenom z nezáporné funkce, kterou jsme použili při odvozování, ale můžeme pracovat i s funkcemi zápornými. Když bychom však integrovali zápornou funkci, získali bychom i „záporný obsah“ plochy vymezené grafem funkce, osou x a okraji intervalu, na němž se integruje. To z toho důvodu, že by byly záporné hodnoty $f(x)$ pro $x \in \Delta x_i$ ve *vztahu 1.152*. Proto nám také může určitý integrál vyjít nulový a to pro funkce symetrické podle počátku, kde se integruje na intervalu, který je také symetrický podle počátku. Například

$$\int\limits_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = 0, \tag{1.161}$$

zde se odečte od obsahu nad intervalem $\langle 0,\ 1\rangle$ obsah pod intervalem $\langle -1,\ 0\rangle$, viz *obrázek 1.5*.

Výpočet určitého integrálu

Určitě se shodneme na tom, že počítat určitý integrál z definice, tj. *vztahem 1.152* by bylo až na ty nejjednodušší příklady zřejmě obtížné. Naštěstí se naši kolegové Newton a Leibnitz postarali o formuli, která nám výpočet zásadním způsobem usnadní.



Obrázek 1.5: K určitému integrálu funkce $y = x$ na intervalu $\langle -1,\ 1\rangle$

Hledáme-li určitý integrál funkce $f(x)$ na intervalu $\langle a,\ b\rangle$, platí, že

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a), \tag{1.162}$$

kde $F(b),\ F(a)$ jsou funkční hodnoty $F(x)$, což je primitivní funkce k $f(x)$, v bodech $a,\ b$. Je zvykem rozdíl $F(b) - F(a)$ značit jako

$$F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b\,. \tag{1.163}$$

Rovnice 1.162 se nazývá *Newtonova-Leibnitzova formule* (její důkaz je k vidění v [4], na s. 165) a umožňuje nám k výpočtu určitého integrálu použít vše, co jsme se naučili u počítání integrálů neurčitých. Například víme, že primitivní funkce k x^5 je $x^6/6$, a potom snadno spočítáme, že určitý integrál funkce x^5 na intervalu $\langle 1,\ 2\rangle$ je

$$\int_1^2 x^5\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^6}{6}\right]_1^2 = \frac{2^6}{6} - \frac{1^6}{6} = \frac{64-1}{6} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}. \tag{1.164}$$

V případě potřeby můžeme použít i metodu per partes, viz *vztah 1.32*, ale nesmíme zapomenout, že člen bez integrálu (máme na mysli $f(x)g(x)$ ve *vztahu 1.32*) je ve skutečnosti po integraci a tudíž do něj musíme dosadit meze integrování. *Vztah 1.32* lze tedy pro určitý integrál přepsat do tvaru

$$\int_a^b f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x)\,\mathrm{d}x \tag{1.165}$$

a důkaz nalezneme v [4], str. 166.

Pro ilustraci určeme integrál funkce $x^2 \cos x$ na intervalu $\langle 0,\ 2\pi\rangle$, tj.

$$\int_0^{2\pi} x^2 \cos x\,\mathrm{d}x = \left|\begin{array}{ll} f'(x) = \cos x & f(x) = \sin x \\ g(x) = x^2 & g'(x) = 2x \end{array}\right| \overset{\mathrm{pp}}{=} \left[x^2 \sin x\right]_0^{2\pi} - \int_0^{2\pi} 2x \sin x\,\mathrm{d}x =$$

$$= [0-0] - \int\limits_0^{2\pi} 2x \sin x \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{ll} f'(x) = \sin x & f(x) = -\cos x \\ g(x) = 2x & g'(x) = 2 \end{array} \right| \overset{\text{pp}}{=}$$

$$\overset{\text{pp}}{=} - \left([-2x\cos x]_0^{2\pi} - \int\limits_0^{2\pi} (-2\cos x) \,\mathrm{d}x \right) = -[-4\pi - 0] - 2\int\limits_0^{2\pi} \cos x \,\mathrm{d}x =$$

$$= 4\pi - 2[\sin x]_0^{2\pi} = 4\pi - 2[0-0] = 4\pi. \tag{1.166}$$

Také substituční metoda se dá u určitého integrálu použít (viz [4], s. 167), pouze přináší jedno nové specifikum – po provedení substituce je výhodné přepočítat meze pro novou proměnnou a tím si ušetřit zpětné dosazování nahrazených funkcí. Substituční metodu si můžeme připomenout ve *vztazích 1.62* a *1.63* a aplikujeme ji v určitém integrálu funkce $x/(x^2+1)^{3/2}$ na intervalu $\langle 1,\ 2 \rangle$, tj.

$$\int\limits_1^2 \frac{x}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} \,\mathrm{d}x = \left| \begin{array}{l} x^2+1 = t \\ x = 1:\ 1^2+1 = 2 \\ x = 2:\ 2^2+1 = 5 \\ \Rightarrow t \in \langle 2,\ 5 \rangle \\ 2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t \end{array} \right| = \int\limits_2^5 \frac{1}{t^{\frac{3}{2}}} \frac{\mathrm{d}t}{2} = \frac{1}{2} \int\limits_2^5 t^{-\frac{3}{2}} \mathrm{d}t =$$

$$\frac{1}{2} \left[\frac{t^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} \right]_2^5 = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} \left[5^{-\frac{1}{2}} - 2^{-\frac{1}{2}} \right] = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{5}}{5}. \tag{1.167}$$

Dále se budeme zabývat dalšími druhy integrálů, ale v podstatě všude budeme využívat právě integrálů určitých.

Kapitola 2

Integrály funkce více proměnných

Už zvládáme integrovat funkce jedné reálné proměnné, což nám umožňuje řešit některé základní fyzikální problémy. Pokud se však naučíme pracovat s funkcemi více proměnných a jejich integrály, otevře se nám cesta k řešení komplikovanějších a obecnějších problémů.

Integrálům, kterými se tu budeme společně zabývat, je věnována celá jedna publikace [6]. Před tím, než se společně vrhneme na integrály funkce více proměnných, je výhodné zopakovat si, co víme o základních systémech souřadnic v rovině a prostoru - viz [1], od s. 7 dále.

2.1 Funkce více proměnných

Reálnou funkci jedné reálné proměnné, $f:\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, jsme doposud chápali jako předpis, který reálnému číslu přiřazuje právě jedno reálné číslo. *Reálnou funkcí dvou reálných proměnných* budeme chápat předpis, který *uspořádané dvojici* reálných čísel přiřazuje právě jedno reálné číslo, $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Ač se to po prvním přečtení může zdát komplikované, není to nic složitého. Za uspořádanou dvojici reálných čísel budeme zpravidla považovat souřadnice bodu v rovině se zvoleným souřadnicovým systémem, např. dvojici x a y, a funkční hodnotou takovéto uspořádané dvojice bude třetí souřadnice, např. z, čímž se dostaneme z roviny do prostoru. Je to analogické k funkci jedné proměnné, kde jsme se z přímky x, jejíž součástí byl definiční obor funkce, dostali do roviny xy.

Vše bude názornější na příkladu. Uvažujme funkci $f:\ \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, která uspořádané dvojici $[x,\ y]$ přiřazuje číslo $f(x,\ y) = -x^2 + y^2 + 1$, což se zapisuje také jako

$$[x,\ y] \mapsto -x^2 + y^2 + 1, \tag{2.1}$$

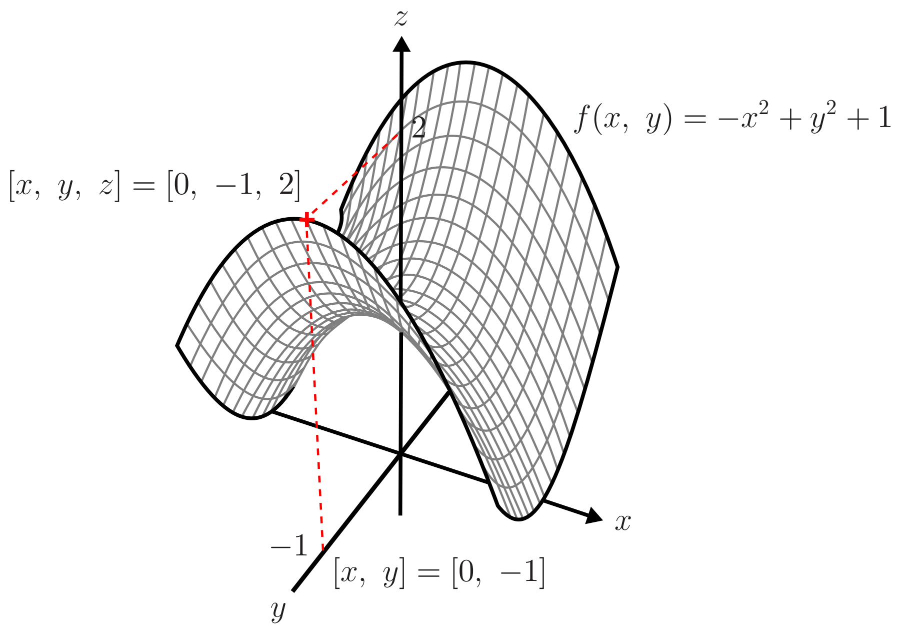
nebo, při použití souřadnice z, jako

$$f:\ z = -x^2 + y^2 + 1. \tag{2.2}$$

Případně můžeme vynechat symbol f. Definičním oborem takto zvolené funkce může být celá rovina xy, resp. všechny uspořádané dvojice $[x,\ y]$, kde $x \in \mathbb{R}$ a $y \in \mathbb{R}$.

Grafem reálné funkce dvou reálných proměnných je obecně nějaká plocha[1] v prostoru xyz. Část grafu námi zvolené funkce je naznačena na *obrázku 2.1*, kde je červeně vyznačena funkční hodnota přiřazená uspořádané dvojici $[x,\ y] = [0,\ -1]$.

[1] Plocha neznamená nutně rovina!



Obrázek 2.1: Část grafu funkce $f:\ z = -x^2 + y^2 + 1$

Obecněji vypadá graf reálné funkce dvou reálných proměnných jako na *obrázku 2.2*, kde je definičním oborem oblast o roviny xy.

U *reálné funkce tří reálných proměnných*, $f:\ \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se posuneme zase o dimenzi výše. Definičním oborem takovéto funkce je obecně část prostoru xyz, tj. nějaký objem, a funkčními hodnotami se dostaneme do čtvrtého rozměru, což už si nelze jednoduše představit. Analogicky můžeme uvažovat *reálnou funkci n reálných proměnných*, $f:\ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, kde $n \in \mathbb{N}$. Souhrnně takovýmto funkcím, kde $n \geq 2$, říkáme *reálné funkce více reálných proměnných*. Dále v textu budeme vynechávat slovo „reálné“ a budeme hovořit pouze o funkcích více proměnných.

Podrobnější zavedení a vlastnosti funkcí více proměnných jsou k nalezení v [2], od s. 52.

2.2 Integrace podle jedné proměnné

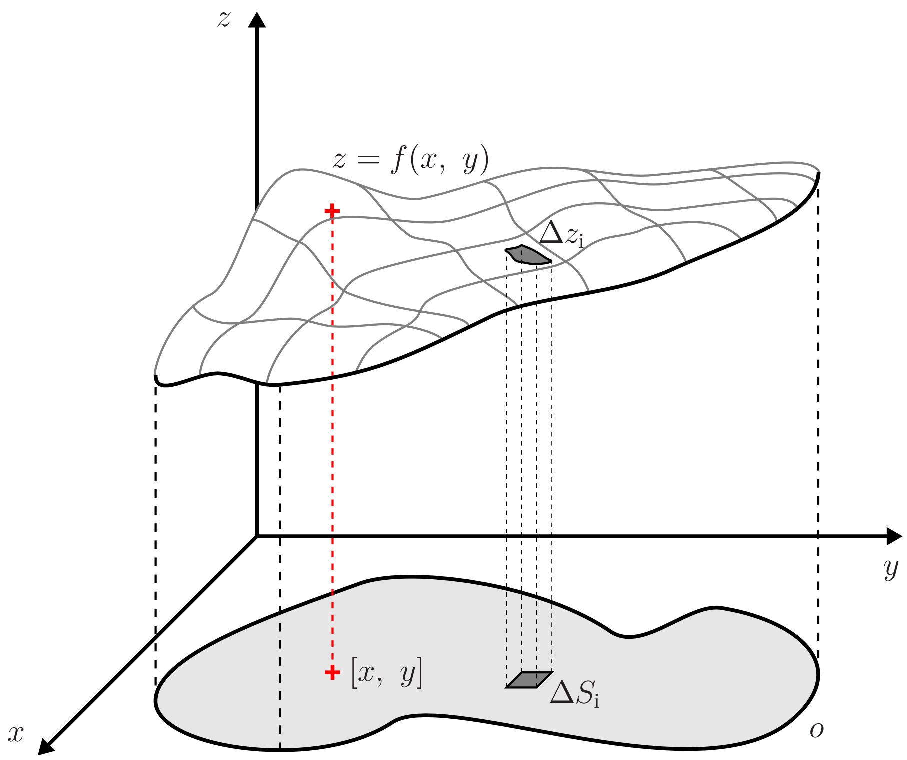
Bude-li nutné nalézt integrál funkce více proměnných, budeme se opírat o znalost integrace podle jedné proměnné. Je zde analogie s parciálními derivacemi, obdobně jako je mezi integrály funkce jedné proměnné a obyčejnými derivacemi. Integrování funkce více proměnných podle jedné proměnné je hledáním funkce, jejíž parciální derivací podle příslušné proměnné získáme původní funkci. Ostatní proměnné (podle kterých se neintegruje) se považují za konstanty.

Najděme integrál

$$\int \left(-x^2 + y^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x. \tag{2.3}$$

Funkci integrujeme podle proměnné x, a proto proměnnou y považujeme za konstantu. Potom ale máme před sebou velmi snadný integrál, který rozdělíme na součet integrálů a dopočítáme.

$$\int \left(-x^2 + y^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x = \int \left(-x^2\right)\,\mathrm{d}x + \int \left(y^2 + 1\right)\,\mathrm{d}x =$$



Obrázek 2.2: Graf reálné funkce f dvou reálných proměnných s definičním oborem o, kde je vyznačena malá ploška ΔS_{i} a k ní příslušná část grafu Δz_{i}

$$= -\frac{x^3}{3} + \left(y^2+1\right)x + c(y) \tag{2.4}$$

Stejně, jako jsme byli dříve u integrálů zvyklí, nesmíme zapomínat na integrační konstantu. V tomto případě je však integrační „konstanta“ $c(y)$ obecný výraz závislý na proměnné, podle níž se neintegrovalo, tj. y. U funkcí více proměnných je tento výraz („konstanta vzhledem k integrační proměnné“) obecně závislá na všech proměnných, podle nichž se neintegrovalo.

Správnost výsledku ověříme parciální derivací podle proměnné x, tj.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-\frac{x^3}{3} + \left(y^2+1\right)x + c(y)\right] = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^3}{3}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(y^2+1\right)x\right] + \frac{\partial}{\partial x}c(y) =$$

$$= -\frac{3x^2}{3} + \left(y^2+1\right) + 0 = -x^2 + y^2 + 1. \tag{2.5}$$

Předešlý postup si procvičíme ještě na funkci tří proměnných, protože s těmi se dále také setkáme. Určeme integrál

$$\int \left(x\sin z + e^{yz}\right)\mathrm{d}z = \int x\sin z\,\mathrm{d}z + \int e^{yz}\,\mathrm{d}z = x\int \sin z\,\mathrm{d}z + \int e^{yz}\,\mathrm{d}z =$$

$$= \left|\begin{array}{l} t = yz \\ \mathrm{d}t = y\,\mathrm{d}z \end{array}\right| = x(-\cos z) + \int e^t\,\frac{\mathrm{d}t}{y} = -x\cos z + \frac{e^t}{y} + c(x,\ y) =$$

$$= -x\cos z + \frac{e^{yz}}{y} + c(x,\ y). \tag{2.6}$$

Kontrolu bychom provedli opět parciální derivací, tentokrát podle proměnné z.

2.3 Násobné integrály

Umíme již integrovat funkce více proměnných podle jedné proměnné, takže je na čase trochu si zkomplikovat život a začít hledat integrály, kde se bude integrovat podle více proměnných. Budeme se zabývat *dvojnými* a *trojnými* integrály, které se budeme snažit převést na *dvojnásobné* a *trojnásobné*, jak již napovídá název oddílu. Co to přesně znamená, zjistíme dále.

Podrobnější rozbor je ukrytý v kapitole Lebesgueův integrál začínající na s. 38 v [5], a nebo v Kapitole 2 v [6], od s. 23.

2.3.1 Dvojný integrál

Dvojný integrál funkce dvou proměnných je obdobou určitého integrálu funkce jedné proměnné. Mějme kladnou funkci $f: \ z = f(x,\ y)$, která je definována na oblasti o v rovině xy (resp. $z = 0$). Oblast o potom určuje „interval“, přes který se funkce f integruje. K definici dvojného integrálu se pokusíme dojít analogicky, jako u určitého integrálu funkce jedné proměnné – budeme hledat objem pod grafem funkce f (a nad oblastí o).

Oblast o „rozsekáme“ na velmi malé plošky ΔS_i a ke každé této plošce přiřazuje z podle předpisu $z = f(x,\ y)$, tj. pro $[x,\ y] \in \Delta S_\mathrm{i}$, malou část plochy Δz_i, která je součástí grafu funkce f. Naznačeno je to na *obrázku 2.2.* Pokud budou plošky ΔS_i dostatečně malé, můžeme s velkou přesností považovat ΔS_i a Δz_i za rovnoběžné. Tvoří tedy podstavy velmi tenkého kvádru, který je částí celkového objemu pod grafem funkce f a nad oblastí o. Objem kvádru vymezeného ploškami ΔS_i a Δz_i spočítáme jako „obsah podstavy krát výška“, přičemž výškou je $z = f(x,\ y)$ pro libovolnou $[x,\ y] \in \Delta S_\mathrm{i}$ (jelikož ΔS_i a Δz_i považujeme za rovnoběžné), tj. $f(x,\ y)\Delta S_\mathrm{i}$.

Je-li celá oblast o rozdělena na n malých plošek ΔS_i, celkový objem pod grafem funkce f a nad oblastí o přibližně spočítáme jako součet všech objemů $f(x,\ y)\Delta S_\mathrm{i}$. Přesnou hodnotu potom získáme, když pošleme n limitně do nekonečna. To bude v podstatě naše definice dvojného integrálu funkce f dvou proměnných na oblasti o:

$$\iint\limits_{o} f(x,\ y)\,\mathrm{d}S = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} f(x,\ y)\Delta S_\mathrm{i}, \tag{2.7}$$

kde $\mathrm{d}S$ má význam nekonečně malé (tzv. *infinitezimální*) plošky z oblasti o.

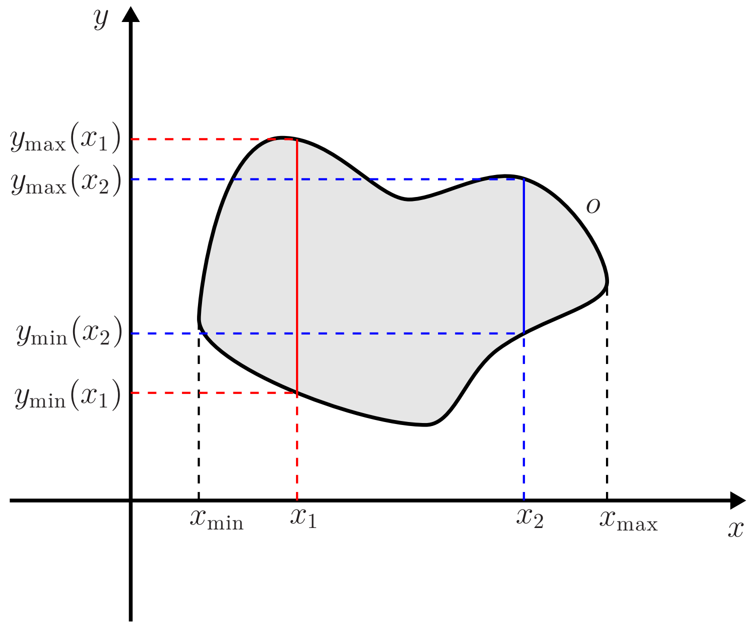
Dvojné integrály samozřejmě můžeme počítat i z funkcí, které nejsou kladné, ale mají i záporné nebo nulové funkční hodnoty. Potom ale musíme myslet na to, že pro záporné funkční hodnoty nám bude vycházet „záporný objem“ a bude se odečítat od objemu daného kladnými funkčními hodnotami.

Když si to shrneme, dvojný integrál představuje objem pod grafem funkce dvou proměnných. Nenechme se ale zmást – fyzikální veličina, kterou spočítáme dvojným integrálem, nemusí být nutně objem. Záleží předně na fyzikálním významu funkce, kterou integrujeme. Později si uvedeme několik příkladů.

Dále si ukážeme, jak v různých souřadnicových systémech dvojný integrál vypočítat. Využijeme k tomu tzv. *Fubiniovu větu*, kterou ale nebudeme dokazovat, a rovnou budeme předpokládat, že jsou splněny všechny předpoklady pro její použití (z dalšího postupu vyplyne, které to jsou). Fubinova věta nám převede dvojný integrál na dvojnásobný, který bychom mohli umět spočítat – pokud to půjde, budeme je řešit v podstatě dvakrát provedenou integrací vždy podle jedné proměnné.

Kartézský systém souřadnic

Zjednodušeně by šlo říci, že funkci f ve dvojném integrálu nejdříve zintegrujeme podle jedné proměnné a potom podle druhé, přičemž meze integrování nám vytyčuje oblast o. Představme si, že zafixujeme proměnnou x (tak, abychom s ním byli v oblasti o) a pro toto určité x zintegrujeme f přes všechna y taková, aby $[x,\ y] \in o$. Poté se posuneme o nekonečně malou vzdálenost ve směru osy x (o $\mathrm{d}x$), opět ho zafixujeme a zintegrujeme f přes všechna možná y. Takto se postupuje oblastí o od minimálního x (označené x_{min}) k maximálnímu (x_{max}) a vždy pro fixní x se integruje od minimálního y (které je obecně závislé na x, tj. $y_{\mathrm{min}}(x)$) do maximálního ($y_{\mathrm{max}}(x)$). S představou by nám mohl pomoct *obrázek 2.3*.



Obrázek 2.3: Oblast o v kartézských souřadnicích určuje meze pro dvojný integrál. Jsou zde vyznačeny pro fixní $x_1 \neq x_2$ hodnoty $y_{\mathrm{min}}(x_1)$, $y_{\mathrm{max}}(x_1)$ a $y_{\mathrm{min}}(x_2)$, $y_{\mathrm{max}}(x_2)$

Stěžejní tedy pro nás bude, abychom byli schopni určit meze oblasti o pomocí x_{min}, x_{max} a $y_{\mathrm{min}}(x)$, $y_{\mathrm{max}}(x)$. Potom podle Fubiniovy věty platí, že

$$\iint\limits_o f(x,\ y)\,\mathrm{d}S = \int\limits_{x_{\mathrm{min}}}^{x_{\mathrm{max}}} \left[\ \int\limits_{y_{\mathrm{min}}(x)}^{y_{\mathrm{max}}(x)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}y\right] \mathrm{d}x. \tag{2.8}$$

Nejdříve se tedy funkce $f(x,\ y)$ zintegruje podle y, přičemž x se bere jako konstanta, a následně po dosazení mezí $y_{\mathrm{min}}(x)$ a $y_{\mathrm{max}}(x)$ se provede integrace podle x.

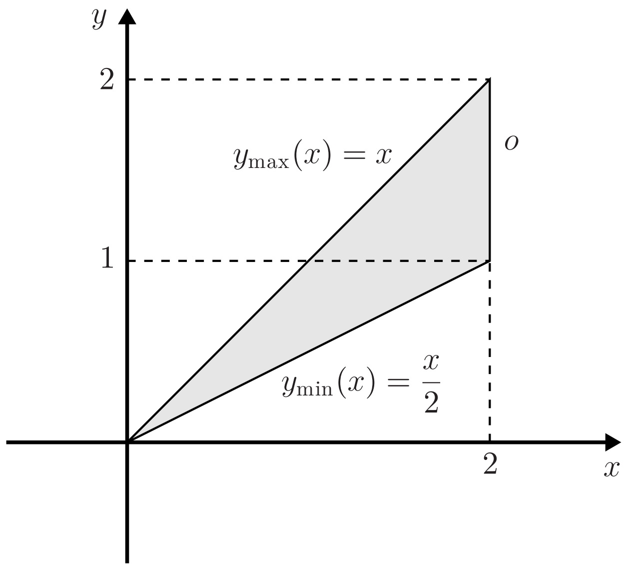
Někdy je výhodné vyjádřit si meze o pomocí x jako funkce y a potom má dvojnásobný integrál tvar

$$\int\limits_{y_{\mathrm{min}}}^{y_{\mathrm{max}}} \left[\ \int\limits_{x_{\mathrm{min}}(y)}^{x_{\mathrm{max}}(y)} f(x,\ y)\,\mathrm{d}x\right] \mathrm{d}y. \tag{2.9}$$

Podstatné je, že se vždy integruje nejdříve podle proměnné, jejíž meze jsou závislé na druhé proměnné, a teprve potom podle nezávislé proměnné. Může nastat případ, že budou meze souřadnic oblasti o navzájem nezávislé, a potom nezáleží na pořadí integrování.

Pro dvojnásobný integrál je též důležité, že jsme moli nahradit infinitezimální plošku $\mathrm{d}S$ součinem nekonečně malých vzdáleností $\mathrm{d}x$ a $\mathrm{d}y$, tj. $\mathrm{d}S = \mathrm{d}x\mathrm{d}y$. Činitele v tomto součinu jsme potom rozdělili do jednotlivých integrálů. V kartézských souřadnicích je to zřejmé, ale u jiných systémů souřadnic budeme muset být opatrní.

Nyní je vhodný čas na příklad, kde si osvětlíme předešlý postup. Najděme dvojný integrál funkce $f(x,\ y) = x^3 + y^3$, přičemž budeme integrovat přes oblast o, která je znázorněna na *obrázku 2.4*, tj. $x_{\min} = 0$, $x_{\max} = 2$ a $y_{\min}(x) = x/2$, $y_{\max}(x) = x$.



Obrázek 2.4: Oblast o určená kartézskými souřadnicemi $x \in \langle 0,\ 2\rangle$ a $y(x) \in \langle x/2,\ x\rangle$

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_o f(x,\ y)\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_o \left(x^3 + y^3\right)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int\limits_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \left(x^3 + y^3\right)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_0^2 \left[\int\limits_{\frac{x}{2}}^{x} \left(x^3 + y^3\right)\,\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left[x^3 y + \frac{y^4}{4}\right]_{\frac{x}{2}}^{x}\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_0^2 \left(x^3 x + \frac{x^4}{4} - x^3\frac{x}{2} - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{4}\right)\mathrm{d}x = \int\limits_0^2 \left(\frac{5x^4}{4} - \frac{33x^4}{64}\right)\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_0^2 \frac{47x^4}{64}\,\mathrm{d}x = \frac{47}{64}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^2 = \frac{47}{64}\frac{32}{5} = \frac{47}{10}
\end{aligned}
\tag{2.10}
$$

Z příkladu by mělo být vidět, že se v podstatě jedná o dva určité integrály v sobě.

Jedna z prvních aplikací dvojného integrálu, kterou si uvedeme, je výpočet *obsahu* S_o oblasti o, přes kterou integrujeme. Vezmeme-li do integrálu konstantní funkci $f: \ z = 1$, bude číselná hodnota objemu pod grafem této funkce stejná, jako je hodnota obsahu oblasti o. Nejsnáze si to asi lze představit na kvádru, jehož objem se spočte jako obsah podstavy krát výška. Jestliže bude výška rovna 1 (neuvažujeme nyní jednotky), potom musí být číselná hodnota objemu tohoto kvádru stejná jako číselná hodnota obsahu jeho podstavy.

Pro $f(x,\ y) = 1$ platí tedy vztah

$$\iint\limits_o f(x,\ y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_o \mathrm{d}S = S_o. \tag{2.11}$$

Ověřme *vztah 2.11* odvozením vzorce pro obsah elipsy. Rovnice elipsy v kartézských souřadnicích se středem v počátku a osami, které splývají s osou x a y, má tvar

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \tag{2.12}$$

kde a a b jsou její poloosy. Jedná se o uzavřenou křivku v rovině xy, která nám vymezuje oblast, přes kterou budeme integrovat – označme si ji e. Pokusme se vyjádřit hranice této oblasti pomocí y jako funkce x, přičemž $x \in \langle -a,\ a\rangle$. To provedeme vyjádřením y z *rovnice 2.12*:

$$y^2 = \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2, \tag{2.13}$$

$$y = \pm\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) b^2} = \pm b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}. \tag{2.14}$$

Vztah 2.14 v sobě ukrývá dvě funkce y proměnné x. Výraz se znaménkem „+“ reprezentuje část elipsy nad osou x a naopak výraz se znaménkem „−“ reprezentuje část elipsy pod osou x. To budou naše meze pro y, tj.

$$\begin{aligned} y_{\max}(x) &= b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}, \\ y_{\min}(x) &= -b\sqrt{1 - \tfrac{x^2}{a^2}}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Obsah elipsy je potom

$$S_e = \iint\limits_e \mathrm{d}S = \int\limits_{-a}^{a} \left[\int\limits_{-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}}^{b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}} \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x, \tag{2.16}$$

což je dosti neprakticky zapsáno. Abychom si zápis trochu zjednodušili, přeuspořádáme symboly v integrálu, přičemž pro nás bude mít ale pořád stejný význam jako doposud. A abychom v mezích nemuseli psát podobně složité výrazy jako ve *vztahu 2.16*, budeme tam jednoduše uvádět $y_{\min}(x)$ a $y_{\max}(x)$ a ve vhodný čas dosadíme *vztahy 2.15*. Máme tedy

$$S_e = \iint\limits_e \mathrm{d}S = \int\limits_{-a}^{a} \mathrm{d}x \int\limits_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \mathrm{d}y = \int\limits_{-a}^{a} \mathrm{d}x\ [y]_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} =$$

$$= \int\limits_{-a}^{a} \mathrm{d}x \left[b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} - \left(-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}} \right) \right] = \int\limits_{-a}^{a} 2b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x =$$

$$= \left| \begin{array}{l} x = a\sin t \\ t \in \langle -\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2} \rangle \\ \mathrm{d}x = a\cos t\,\mathrm{d}t \end{array} \right| = \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2b\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2 t}{a^2}}\, a\cos t\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t}\cos t\,\mathrm{d}t = 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |\cos t|\cos t\,\mathrm{d}t =$$

pro $t \in \langle -\pi/2,\ \pi/2 \rangle$ je $\cos t \geq 0$, a proto nemusíme uvažovat absolutní hodnotu, tj.

$$= 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t\,\mathrm{d}t = 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\left(\frac{2t}{2}\right)\mathrm{d}t = 2ab \int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= ab\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = ab\left[\frac{\pi}{2} + \frac{\sin\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} + \frac{\sin(-\pi)}{2}\right)\right] = ab\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) =$$
$$= \pi ab. \tag{2.17}$$

Nakonec jsme se úspěšně dostali ke vztahu $S_e = \pi ab$.

Polární systém souřadnic

Druhý základní systém souřadnic v rovině je polární, a proto si nyní rozmyslíme výpočet dvojného integrálu v tomto systému. Souřadnice bodu v rovině jsou zde určeny jeho vzdáleností od počátku R a úhlem Φ, který svírá spojnice daného bodu a počátku se zvolenou polopřímkou (zpravidla kartézskou kladnou poloosou x). Abychom mohli i zde převést dvojný integrál na dvojnásobný, je nutné vyjádřit infinitezimální plošku $\mathrm{d}S$ pomocí polárních souřadnic R a Φ, obdobně jako jsme učinili v kartézských souřadnicích.

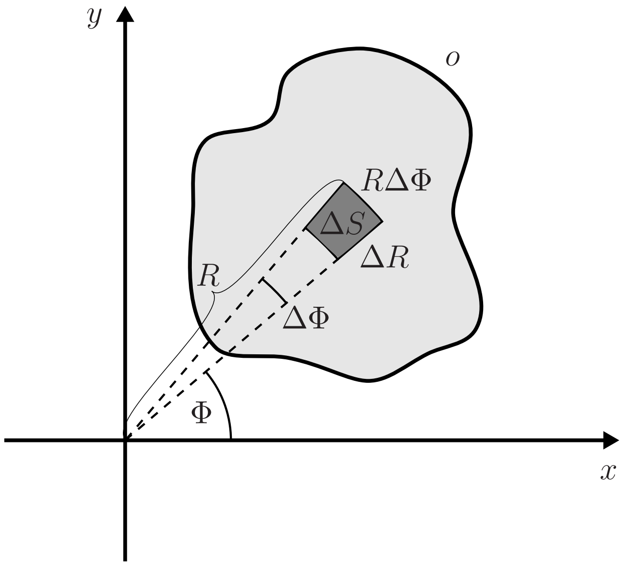
Začneme opět rozdělením oblasti o na velmi malé plošky ΔS, naznačeno je to na *obrázku 2.5*. Jestliže bude ΔS dostatečně malé, nedopustíme se přílišné nepřesnosti, když budeme považovat ΔS za obdélník. Potom je ale jeho obsah určen součinem velikostí jeho stran, což je v tomto případě ΔR a $R\Delta\Phi$. Zmenšením ΔS na nekonečně malou velikost získáme

$$\mathrm{d}S = R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R. \tag{2.18}$$

Převedení dvojného integrálu na dvojnásobný je nyní obdobné jako v kartézském systému souřadnic – pokud je to nutné, musíme meze jedné polární souřadnice vyjádřit jako funkce druhé a následně dvakrát zintegrujeme. Nesmíme také zapomenout, že integrovanou funkci dosazujeme jako funkci polárních souřadnic. Formálně to zapíšeme např. jako

$$\iint\limits_{o} f(x,\ y)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{o} f(R,\ \Phi)\,R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R = \int\limits_{R} R\,\mathrm{d}R \int\limits_{\Phi} \mathrm{d}\Phi\, f(R,\ \Phi). \tag{2.19}$$

Známe-li tvar funkce, kterou chceme integrovat, v kartézských souřadnicích, jednoduchými převodními vztahy získáme tvar v polárních souřadnicích. Platí,



Obrázek 2.5: Malá ploška ΔS z oblasti o vymezená pomocí polárních souřadnic

že

$$
\begin{aligned}
x &= R\cos\Phi, \\
y &= R\sin\Phi.
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

A naopak také

$$
\begin{aligned}
R &= \sqrt{x^2+y^2}, \\
\tan\Phi &= \tfrac{y}{x}
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Výpočet dvojnásobného integrálu v polárních souřadnicích si vyzkoušíme na tzv. *Eulerově-Poissonově-Laplaceově integrálu*

$$
\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.22}
$$

Jak je vidět, ukrývá se v něm funkce $\exp(-x^2)$, s níž se setkáváme např. u hustoty pravděpodobnosti v *normálním rozdělení*. To nám napovídá, že s integrály podobného typu se setkáme ve fyzikálních disciplínách, kde nám půjde o pravděpodobnost (jako je například kvantová fyzika).

Pro účely výpočtu si označíme hledaný integrál symbolem I. Výsledek není závislý na označení proměnné, a proto platí, že

$$
I = \int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y. \tag{2.23}
$$

K výpočtu hledaného integrálu I nám pomůže na první pohled ne zcela zřejmý trik – budeme na místo I počítat I^2 a ve vhodnou chvíli přejdeme od kartézských souřadnic k polárním, tj.

$$
I^2 = I\cdot I = \left(\int\limits_0^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int\limits_0^\infty e^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) = \int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty e^{-\left(x^2+y^2\right)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y =
$$

Nyní nahradíme kartézské souřadnice polárními a tím pádem musíme příslušným způsobem změnit i meze integrování: pro $x \in \langle 0,\ \infty)$ a $y \in \langle 0,\ \infty)$ se pohybujeme v prvním kvadrantu kartézské roviny, a proto musí být $R \in \langle 0,\ \infty)$ a $\Phi \in \langle 0,\ \pi/2\rangle$,

$$= \left| \begin{array}{l} R^2 = x^2 + y^2 \\ \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R \end{array} \right| = \int\limits_0^{\infty} \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-R^2} R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\Phi \int\limits_0^{\infty} Re^{-R^2}\,\mathrm{d}R =$$

$$= [\Phi]_0^{\frac{\pi}{2}} \left[-\frac{e^{-R^2}}{2} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{e^{-\infty^2}}{2} + \frac{e^{-0^2}}{2} \right) = \frac{\pi}{2} \left(0 + \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{4}. \tag{2.24}$$

Tímto jsme získali hodnotu I^2, které ale odpovídají dvě řešení I – kladné a záporné. Vzhledem k tomu, že funkce $\exp(-x^2)$ je všude nezáporná a že určitý integrál má význam obsahu plochy pod grafem funkce, je adekvátní pouze kladné řešení. Tedy

$$I = \sqrt{\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{2.25}$$

Aplikace dvojného integrálu

V předchozím textu jsme si již některé aplikace naznačili, ale nyní podáme o něco bohatší přehled. Abychom nemuseli stále opakovat zápis dvojného integrálu, označíme si ho symbolem I,

$$I = \iint\limits_o f(x,\ y)\,\mathrm{d}S. \tag{2.26}$$

Uvažujme nyní nad významem I pro různé funkce f.

Už jsme obeznámeni s tím, že pro $f(x,\ y) = 1$ je I *obsah* oblasti o, přes kterou se integruje. Stejně tak víme, že pro $f(x,\ y) = z$, vyjadřující výšku nad rovinou xy, je I *objem* pod grafem f a nad oblastí o.

Jestliže bude mít integrovaná funkce význam plošné hustoty, $f = \sigma(x,\ y)$, potom je I v podstatě součet výrazů typu $\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S$, což má význam celkové hmotnosti oblasti o. Výhodou integrálu je, že lze tímto způsobem spočítat hmotnost nehomogenního tělesa. Plošná hustota σ se může se souřadnicemi měnit a potom pouze záleží na tom, jestli dokážeme funkci $\sigma(x,\ y)$ zintegrovat. Pro elektřinu a magnetismus je také významná plošná hustota náboje $\sigma_Q(x,\ y)$. Dvojný integrál funkce σ_Q má potom význam celkového náboje Q oblasti, přes kterou se integruje:

$$Q_o = \int\limits_o \sigma_Q(x,\ y)\,\mathrm{d}S \tag{2.27}$$

U plošné hustoty ještě zůstaneme v souvislosti s *hmotným středem.* Máme-li n hmotných bodů o hmotnostech m_i a souřadnicích $[x_\mathrm{i},\ y_\mathrm{i}]$, $\mathrm{i} = 1,\ 2,\ ...,\ n$, souřadnice x_T jejich hmotného středu se spočítá jako

$$x_\mathrm{T} = \frac{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i} m_\mathrm{i}}{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{n} m_\mathrm{i}} = \frac{\sum\limits_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i} m_\mathrm{i}}{m}, \tag{2.28}$$

kde m je celková hmotnost všech hmotných bodů. Pro souvislou část roviny o se však musíme posunout od sum k integrálům a pro x-ovou souřadnici hmotného středu potom platí

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{\int\limits_o x\,\mathrm{d}m}{\int\limits_o \mathrm{d}m} = \frac{\int\limits_o x\,\mathrm{d}m}{m_o}. \tag{2.29}$$

Zbývající integrál ve *vztahu 2.29* můžeme převést na nám známý dvojný integrál, protože $\mathrm{d}m = \sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S$, tj.

$$\int\limits_o x\,\mathrm{d}m = \iint\limits_o x\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S. \tag{2.30}$$

Vezmeme-li tedy výraz $x\sigma(x,\ y)$ jako funkci f do dvojného integrálu, podle *vztahů 2.29* a 2.30 platí, že

$$x_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m_o}\int\limits_o x\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S. \tag{2.31}$$

Podobně, jako se souřadnicemi hmotného středu, se to má s momentem setrvačnosti oblasti o. Uvažujme opět n hmotných bodů. Pro jejich moment setrvačnosti J platí, že

$$J = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} r_{\mathrm{i}}^2(x_{\mathrm{i}},\ y_{\mathrm{i}})m_{\mathrm{i}}, \tag{2.32}$$

kde $r_{\mathrm{i}}(x_{\mathrm{i}},\ y_{\mathrm{i}})$ je vzdálenost i-tého hmotného bodu od zvolené osy. Obdobnými úvahami jako u souřadnic hmotného středu bychom dospěli ke vztahu pro moment setrvačnosti oblasti o:

$$J = \iint\limits_o r^2(x,\ y)\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S. \tag{2.33}$$

Na základě *rovnice 2.33* je moment setrvačnosti oblasti o vůči kartézské ose x dán vztahem

$$J_x = \iint\limits_o y^2\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S, \tag{2.34}$$

protože souřadnice y má význam vzdálenosti elementu $\mathrm{d}m$ od osy x. Obdobně můžeme nahlédnout, že moment setrvačnosti oblasti o vůči kartézské ose z je

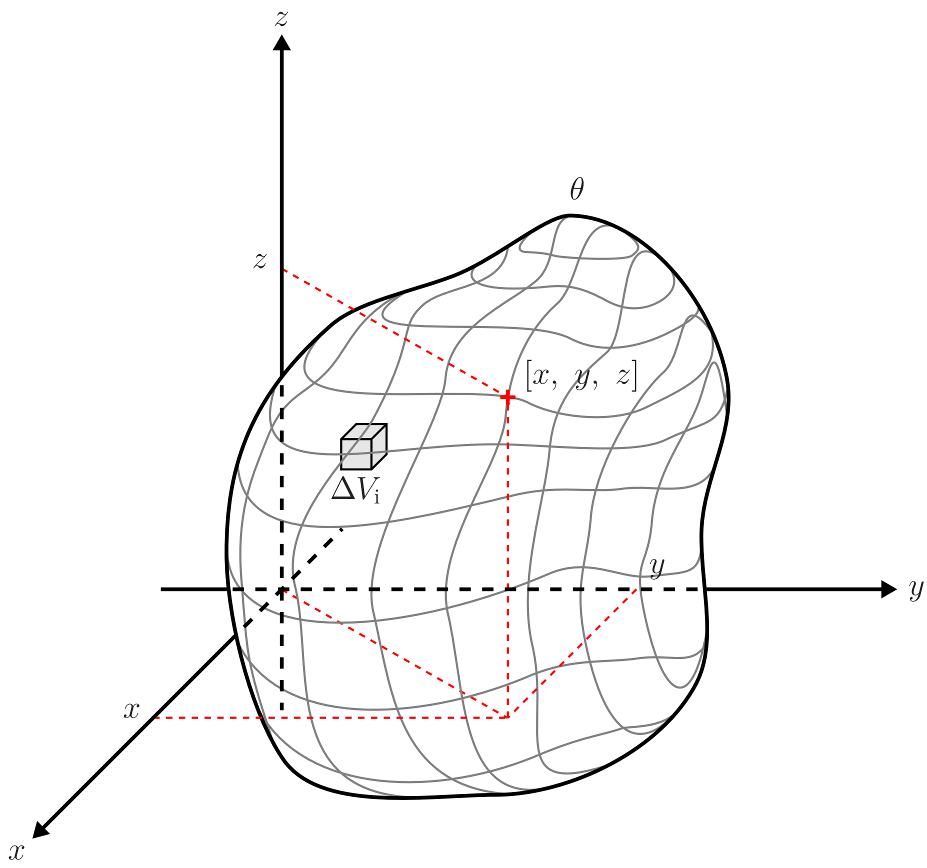
$$J_z = \iint\limits_o \left(x^2 + y^2\right)\sigma(x,\ y)\,\mathrm{d}S. \tag{2.35}$$

Aplikace dvojného integrálu jsme zdaleka nevyčerpali, ale doufejme, že princip je jasný.

2.3.2 Trojný integrál

Trojný integrál bude velmi analogická záležitost k dvojnému integrálu. Budeme jím integrovat funkce tří proměnných, $\omega = \omega(x,\ y,\ z)$, jejichž definičním oborem je prostorová oblast θ, tj. v kartézském systému množina uspořádaných trojic $[x,\ y,\ z]$ (viz *obrázek 2.6*).

Pro trojný integrál rozdělíme prostorovou oblast θ na velmi malé objemy ΔV_{i}, $i = 1,\ 2,\ ...,\ n$, a budeme je násobit příslušnými funkčními hodnotami $\omega(x,\ y,\ z)$,



Obrázek 2.6: Prostorová oblast θ v kartézském systému souřadnic; vyznačen je i malý objem ΔV_{i}, který je součástí θ

kde $[x,\ y,\ z] \in \Delta V_{\mathrm{i}}$. Násobky potom sečteme dohromady, přičemž pro $n \to \infty$ získáme definici trojného integrálu. Tj.

$$\iiint\limits_{\theta} \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}V = \lim_{n\to\infty} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \omega(x,\ y,\ z)\Delta V_{\mathrm{i}}, \tag{2.36}$$

kde $\mathrm{d}V$ je infinitezimální objem a v kartézském systému souřadnic platí, že $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Výpočet trojného integrálu pro nás nebude problém, protože je to analogické k integrálu dvojnému, pouze místo dvojnásobné integrace budeme muset integrovat třikrát.

Kartézský systém souřadnic

V kartézském systému souřadnic nahradíme nekonečně malý objem $\mathrm{d}V$ součinem $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$ a dále budeme pracovat se souřadnicemi $x,\ y,\ z$. Abychom mohli využít Fubiniovu větu, musíme vyjádřit meze oblasti θ pomocí kartézských souřadnic, přičemž jednu z nich necháme nezávislou, další meze vyjádříme jako funkce zvolené nezávislé a meze pro poslední souřadnici vyjádříme jako funkce dvou předchozích. Jedna z variant je následující:

$$\iiint\limits_{\theta} \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x_{\min}}^{x_{\max}} \left[\int\limits_{y_{\min}(x)}^{y_{\max}(x)} \left[\int\limits_{z_{\min}(x,\ y)}^{z_{\max}(x,\ y)} \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}z \right] \mathrm{d}y \right] \mathrm{d}x. \tag{2.37}$$

Nadále však budeme používat náš zjednodušený zápis

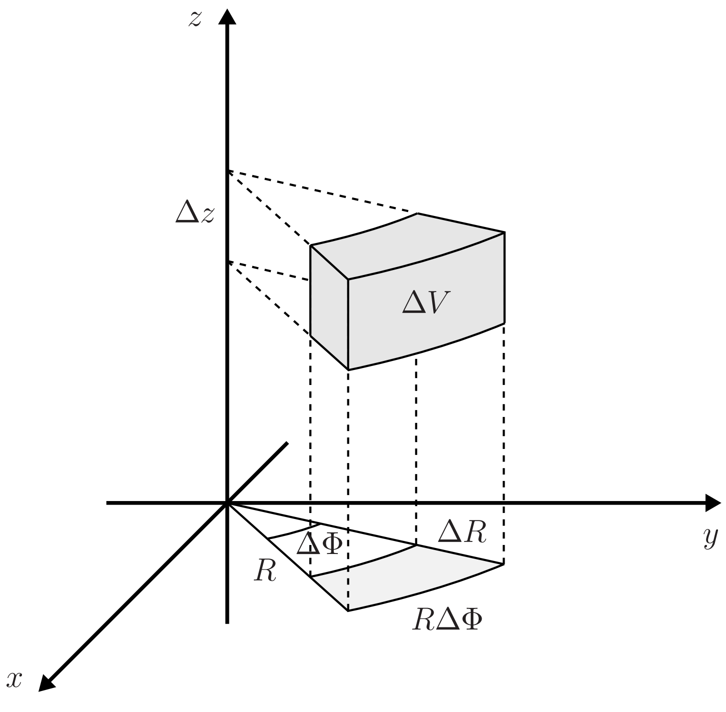
$$\iiint\limits_{\theta} \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{x} \mathrm{d}x \int\limits_{y} \mathrm{d}y \int\limits_{z} \mathrm{d}z\, \omega(x,\ y,\ z). \tag{2.38}$$

Jak brzy uvidíme, často nebude nutné vyjadřovat meze integrování jedné proměnné pomocí druhých. Buď budou všechny meze nezávislé, anebo je uděláme nezávislými vhodnou volbou soustavy souřadnic.

Cylindrický (válcový) systém souřadnic

Začneme vyjádřením infinitezimálního objemu dV pomocí cylindrických souřadnic, s čímž nám může pomoci *obrázek 2.7*. Pokud bude objem ΔV dostatečně malý, nedopustíme se velké nepřesnosti, když budeme ΔV považovat za kvádr, který má strany ΔR, $R\Delta\Phi$ a Δz. Potom je tedy ΔV přibližně rovno součinu $R\,\Delta\Phi\,\Delta R\,\Delta z$ a přesnost získáme opět zmenšováním k nule – zmenšíme ΔV na nekonečně malý objem dV, tj.

$$\mathrm{d}V = R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z. \tag{2.39}$$



Obrázek 2.7: Malý objem ΔV vyjádřený pomocí cylindrických souřadnic

Trojný integrál funkce $\omega(x,\ y,\ z)$ přes prostorovou oblast θ má v cylindrickém systému souřadnic tvar

$$\iiint\limits_{\theta} \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_{\theta} \omega(R,\ \Phi,\ z) R\,\mathrm{d}\Phi\,\mathrm{d}R\,\mathrm{d}z =$$

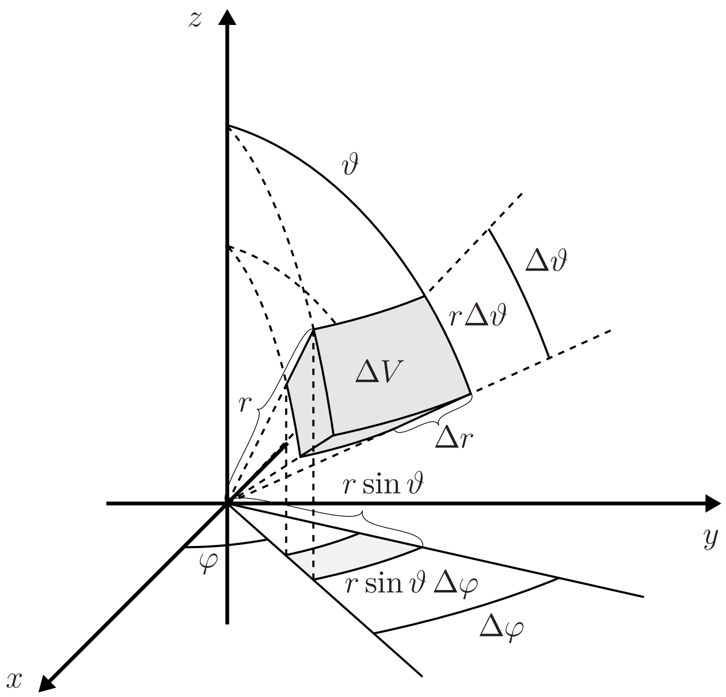
$$= \int\limits_{R} R\,\mathrm{d}R \int\limits_{\Phi} \mathrm{d}\Phi \int\limits_{z} \mathrm{d}z\, \omega(R,\ \Phi,\ z). \tag{2.40}$$

Jak je ve *vztahu 2.40* vidět, nesmíme zapomenout, že integrovaná funkce ω musí být vyjádřena pomocí souřadnic, podle nichž se integruje. Pro jistotu si připomeňme, že převodní vztahy mezi cylindrickými a kartézskými souřadnicemi jsou stejné jako *vztahy 2.20* a *2.21*, a jen doplníme, že cylindrická souřadnice z je stejná jako kartézská.

Sférický (kulový) systém souřadnic

Ve sférickém systému souřadnic si odvodíme tvar trojného integrálu stejným způsobem jako u systému cylindrického. Malý objem ΔV vymezený sférickými souřadnicemi je znázorněn na *obrázku 2.8* a myšlenka je stejná – bude-li objem ΔV dostatečně malý, můžeme ho s dostatečnou přesností považovat za kvádr, jehož hrany mají velikosti $r \sin\vartheta\, \Delta\varphi$, $r\Delta\vartheta$ a Δr. Pro $\Delta V \to 0$ již budeme přesní a můžeme psát:

$$\mathrm{d}V = r \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, r\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r = r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r. \tag{2.41}$$



Obrázek 2.8: Malý objem ΔV vyjádřený pomocí sférických souřadnic

Trojný integrál funkce $\omega(x,\ y,\ z)$ přes prostorovou oblast θ má ve sférickém systému souřadnic tvar

$$\iiint\limits_{\theta} \omega(x,\ y,\ z)\, \mathrm{d}V = \iiint\limits_{\theta} \omega(r,\ \varphi,\ \vartheta) r^2 \sin\vartheta\, \mathrm{d}\varphi\, \mathrm{d}\vartheta\, \mathrm{d}r =$$

$$= \int\limits_{r} r^2\, \mathrm{d}r \int\limits_{\varphi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_{\vartheta} \sin\vartheta\, \mathrm{d}\vartheta\, \omega(r,\ \varphi,\ \vartheta). \tag{2.42}$$

Pro úplnost připomeňme převodní vztahy mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi:

$$
\begin{aligned}
x &= r\sin\vartheta\cos\varphi,\\
y &= r\sin\vartheta\sin\varphi,\\
z &= r\cos\vartheta
\end{aligned}
\tag{2.43}
$$

a

$$
\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2},\\
\tan\varphi &= \tfrac{y}{x},\\
\tan\vartheta &= \tfrac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}.
\end{aligned}
\tag{2.44}
$$

Obecný systém souřadnic

Dále si ukážeme obecnější postup, než které jsme uváděli doposud a který lze aplikovat na libovolný z předchozích systémů souřadnic.

Mějme v prostoru kartézské souřadnice $x,\ y,\ z$ a obecný systém souřadnic $u,\ v,\ w$. V kartézských souřadnicích již známe vyjádření infinitezimálního objemu, $\mathrm{d}V = \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, a při přechodu od kartézských souřadnic k obecným je nutné vyjádřit $\mathrm{d}V$ pomocí obecných souřadnic, s čímž nám pomůže následující vztah:

$$
\mathrm{d}V = |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w,
\tag{2.45}
$$

kde $|J|$ je absolutní hodnota tzv. *jakobiánu* – jedná se o determinant Jakobiho matice, která je definována jako:

$$
\mathbb{J} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial\phi_1(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_1(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_2} & \frac{\partial\phi_1(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_3} & ...\\
\frac{\partial\phi_2(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_2(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_2} & \frac{\partial\phi_2(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_3} & ...\\
\frac{\partial\phi_3(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_1} & \frac{\partial\phi_3(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_2} & \frac{\partial\phi_3(q_1,\ q_2,\ ...)}{\partial q_3} & ...\\
... & ... & ... & ...
\end{pmatrix},
\tag{2.46}
$$

nebo zkráceně $\mathbb{J} = (\phi_i(q_1,\ q_2,\ ...)/q_j)$. Funkce $\phi_i(q_1,\ q_2,\ ...)$ mají ve *vztahu 2.46* význam převodních vztahů od souřadnic $\phi_1,\ \phi_2,$ ... k souřadnicím $q_1,\ q_2,\ ....$

Obecně zapsaná Jakobiho matice může vzbuzovat hrůzu, avšak na příkladu se ukáže, že se nejedná o nic příliš komplikovaného. V našem trojrozměrném prostoru s kartézskými a obecnými souřadnicemi se stane z $\mathbb{J}$ matice tři krát tři a získá následující tvar:

$$
\mathbb{J} = \begin{pmatrix}
\frac{\partial x(u,\ v,\ w)}{\partial u} & \frac{\partial x(u,\ v,\ w)}{\partial v} & \frac{\partial x(u,\ v,\ w)}{\partial w}\\
\frac{\partial y(u,\ v,\ w)}{\partial u} & \frac{\partial y(u,\ v,\ w)}{\partial v} & \frac{\partial y(u,\ v,\ w)}{\partial w}\\
\frac{\partial z(u,\ v,\ w)}{\partial u} & \frac{\partial z(u,\ v,\ w)}{\partial v} & \frac{\partial z(u,\ v,\ w)}{\partial w}
\end{pmatrix},
\tag{2.47}
$$

kde $x(u,\ v,\ w),\ y(u,\ v,\ w),\ z(u,\ v,\ w)$ je vyjádření kartézských souřadnic pomocí obecných.

Aby to bylo úplně jasné, určíme Jakobiho matici a spočítáme jakobián pro konkrétní případ. Ověřme si, že jsme správně určili $\mathrm{d}V$ ve sférických souřadnicích. Za obecné souřadnice $u,\ v,\ w$ tedy dosadíme sférické $r,\ \varphi,\ \vartheta$ (tj. $u \equiv r,\ v \equiv$

$\varphi,\ w \equiv \vartheta$) a za funkce $x(u,\ v,\ w)$, $y(u,\ v,\ w)$, $z(u,\ v,\ w)$ dosadíme převodní *vztahy 2.43*. Potom získáme Jakobiho matici

$$\mathbb{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial r} & \frac{\partial x(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial x(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial y(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial r} & \frac{\partial y(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial y(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial z(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial r} & \frac{\partial z(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \varphi} & \frac{\partial z(r,\ \varphi,\ \vartheta)}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial\ r\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\ r\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial\ r\sin\vartheta\cos\varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial\ r\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial r} & \frac{\partial\ r\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial \varphi} & \frac{\partial\ r\sin\vartheta\sin\varphi}{\partial \vartheta} \\ \frac{\partial\ r\cos\vartheta}{\partial r} & \frac{\partial\ r\cos\vartheta}{\partial \varphi} & \frac{\partial\ r\cos\vartheta}{\partial \vartheta} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi & -r\sin\vartheta\sin\varphi & r\cos\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi & r\sin\vartheta\cos\varphi & r\cos\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta & 0 & -r\sin\vartheta \end{pmatrix}. \tag{2.48}$$

A nyní určíme determinant matice $\mathbb{J}$ ze *vztahu 2.48*, tj. jakobián.

$$\begin{aligned} J = -r^2\sin^3\vartheta\cos^2\varphi - r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta\sin^2\varphi - \\ -\left(r^2\sin\vartheta\cos^2\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin^3\vartheta\sin^2\varphi\right) = \\ = -\left(r^2\sin\vartheta\cos^2\varphi + r^2\sin\vartheta\sin^2\varphi\right)\left(\sin^2\vartheta + \cos^2\vartheta\right) = \\ = -r^2\sin\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) = -r^2\sin\vartheta \end{aligned} \tag{2.49}$$

Absolutní hodnota jakobiánu je potom ($\vartheta \in \langle 0,\ \pi\rangle$)

$$|J| = r^2\sin\vartheta \tag{2.50}$$

a podle *vztahu 2.45* získáváme pro infinitezimální objem ve sférických souřadnicích

$$\mathrm{d}V = |J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = r^2\sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta, \tag{2.51}$$

což se shoduje se *vztahem 2.41*.

Když vše shrneme, trojný integrál funkce $\omega(x,\ y,\ z)$ přes prostorovou oblast θ má v obecném systému souřadnic tvar

$$\begin{aligned} \iiint\limits_\theta \omega(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}V = \iiint\limits_\theta \omega(u,\ v,\ w)|J|\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w = \\ = \int\limits_u \mathrm{d}u \int\limits_v \mathrm{d}v \int\limits_w \mathrm{d}w\,|J|\omega(u,\ v,\ w). \end{aligned} \tag{2.52}$$

Aplikace trojného integrálu

Jelikož je trojný integrál velmi analogický k integrálu dvojnému, budou i jeho aplikace obdobné.

Dvojným integrálem umíme spočítat objem pod grafem funkce dvou proměnných. Trojným integrálem umíme určit objem prostorové oblasti θ zintegrováním funkce $\omega(u,\ v,\ w) = 1$, tj.

$$V_\theta = \iiint\limits_\theta \mathrm{d}V. \tag{2.53}$$

Jako příklad určíme, jaký je vztah pro objem koule k o poloměru ϱ. V tomto případě je nejvýhodnější použít k výpočtu trojný integrál ve sférickém systému souřadnic, protože tam budou integrační meze proměnných vzájemně nezávislé. Systém souřadnic zvolíme tak, aby počátek splynul se středem koule, a potom jsou meze pro integrování: $r \in \langle 0,\ \varrho\rangle$, $\varphi \in \langle 0,\ 2\pi\,)$, $\vartheta \in \langle 0,\ \pi\rangle$. Pak

$$V_k = \iiint\limits_k \mathrm{d}V = \iiint\limits_k r^2 \sin\vartheta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\,\mathrm{d}\vartheta = \int\limits_0^{\varrho} r^2\,\mathrm{d}r \int\limits_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int\limits_0^{\pi} \sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta =$$

$$= \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{\varrho} [\varphi]_0^{2\pi} \left[-\cos\vartheta\right]_0^{\pi} = \frac{\varrho^3}{3} 2\pi(1+1) = \frac{4}{3}\pi\varrho^3. \tag{2.54}$$

Vztah 2.54 se shoduje se vztahem pro objem koule, který můžeme znát z dřívějška.

Jak je důležitá volba vhodných souřadnic uvidíme, když se pokusíme odvodit vztah pro objem koule v kartézském systému souřadnic, kde opět ztotožníme střed koule k s počátkem. Zde už nebudou meze pro integrování pro jednotlivé souřadnice nezávislé a musíme vymyslet, jak je správně vyjádřit. Abychom si však situaci ulehčili, využijeme toho, že je koule symetrická, a spočítáme pouze osminu jejího objemu, což nám umožní pohybovat se pouze v prvním oktantu[2], tj. $x \in \langle 0,\ \infty)$, $y \in \langle 0,\ \infty)$ a $z \in \langle 0,\ \infty)$.

Jako nezávisle proměnnou si zvolíme x a jeho meze pro integrování jsou

$$x \in \langle 0,\ \varrho\rangle. \tag{2.55}$$

V rovině $z = 0$ musíme projít čtvrtinu kruhu a podle toho určíme meze pro y. Vyjdeme ze známe rovnice kružnice v kartézských souřadnicích se středem v počátku a poloměrem ϱ:

$$x^2 + y^2 = \varrho^2 \tag{2.56}$$

a vyjádříme z ní y pomocí x, tj.

$$y = \pm\sqrt{\varrho^2 - x^2}. \tag{2.57}$$

Jelikož se pohybujeme v prvním oktantu, což v rovině $z = 0$ znamená první kvadrant, určíme meze pro y jako

$$y \in \left\langle 0,\ \sqrt{\varrho^2 - x^2}\right\rangle. \tag{2.58}$$

Zbývají meze pro z, kde využijeme rovnici sféry v kartézských souřadnicích se středem v počátku a poloměrem ϱ:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2, \tag{2.59}$$

z níž z vyjádříme pomocí x a y, tj.

$$z = \pm\sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}. \tag{2.60}$$

[2]Oktant je prostorová analogie rovinného kvadrantu; prostor je třemi kartézskými osami pomyslně rozdělen na osm částí.

V prvním oktantu budeme, když vezmeme kladnou část ze *vztahu 2.60*. Meze pro proměnnou z jsou potom

$$z \in \left\langle 0,\ \sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2} \right\rangle. \tag{2.61}$$

Nyní můžeme sestavit a spočítat hledaný trojný integrál, přičemž integrujeme opět funkci $\omega(x,\ y,\ z) = 1$,

$$\frac{1}{8}V_k = \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} \mathrm{d}y \int\limits_0^{\sqrt{\varrho^2-x^2-y^2}} \mathrm{d}z =$$

$$= \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} \mathrm{d}y\, [z]_0^{\sqrt{\varrho^2-x^2-y^2}} = \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\sqrt{\varrho^2-x^2}} \sqrt{\varrho^2 - x^2 - y^2}\, \mathrm{d}y =$$

$$= \left| \begin{array}{l} y = \sqrt{\varrho^2 - x^2} \sin t \\ t \in \left\langle 0,\ \frac{\pi}{2} \right\rangle \\ \mathrm{d}y = \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cos t \, \mathrm{d}t \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varrho^2 - x^2 - \left(\sqrt{\varrho^2 - x^2} \sin t\right)^2} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cos t \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \sqrt{1 - \sin^2 t} \sqrt{\varrho^2 - x^2} \cos t \, \mathrm{d}t = \int\limits_0^{\varrho} \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\varrho^2 - x^2\right) \cos^2 t \, \mathrm{d}t =$$

$$= \int\limits_0^{\varrho} \left(\varrho^2 - x^2\right) \mathrm{d}x \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, \mathrm{d}t =$$

$$= \left[\varrho^2 x - \frac{x^3}{3}\right]_0^{\varrho} \frac{1}{2} \left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \left[\varrho^3 - \frac{\varrho^3}{3}\right] \frac{\pi}{4} = \frac{2}{3}\varrho^3 \frac{\pi}{4} =$$

$$= \frac{\pi}{6}\varrho^3. \tag{2.62}$$

Nyní už stačí pouze výsledek ze *vztahu 2.62* vynásobit osmi a získáme hledaný vztah pro objem koule, tj.

$$V_k = 8\frac{\pi}{6}\varrho^3 = \frac{4}{3}\pi\varrho^3, \tag{2.63}$$

který se shoduje s dříve odvozeným *vztahem 2.54*. Asi se ale všichni shodneme, že výpočet za pomoci sférických souřadnic byl mnohem jednodušší.

Pomocí trojného integrálu můžeme také spočítat *hmotnost* nehomogenního tělesa, tvořícího prostorovou oblast θ, když budeme znát jeho hustotu ρ jako funkci souřadnic. Potom stačí tuto funkci ρ dosadit za funkci ω ve *vztahu 2.38*. Takto získáme

$$m_\theta = \iiint\limits_{\theta} \rho(x,\ y,\ z) \, \mathrm{d}V. \tag{2.64}$$

Lze také využít trojného integrálu k hledání *hmotném středu.* Postup je stejný jako u integrálu dvojného, jen je obohacený o další souřadnici. Například pro z_{T} oblasti θ platí

$$z_{\mathrm{T}} = \frac{1}{m_\theta} \iiint\limits_{\theta} z \,\mathrm{d}m = \frac{1}{m_\theta} \iiint\limits_{\theta} z\rho(x,\ y,\ z) \,\mathrm{d}V. \tag{2.65}$$

Dále můžeme použít trojný integrál (opět analogicky k integrálu dvojnému) k výpočtu *momentu setrvačnosti.* Moment setrvačnosti tělesa θ vzhledem k ose o určíme jako

$$J_o = \iiint\limits_{\theta} r^2(x,\ y,\ z) \,\mathrm{d}m = \iiint\limits_{\theta} r^2(x,\ y,\ z)\rho(x,\ y,\ z) \,\mathrm{d}V, \tag{2.66}$$

kde $r(x,\ y,\ z)$ je vzdálenost bodu $[x,\ y,\ z] \in \theta$ od osy o.

Tímto jsme si naznačili, jak lze trojný integrál využít, a dále už je na nás, jestli dokážeme odhalit další aplikace, když bude třeba.

2.4 Integrály I. druhu

U *integrálů I. druhu* rozlišujeme dva typy – *křivkové* a *plošné* – a jak jednotlivé názvy naznačují, budeme je používat k integrování funkcí po křivkách nebo plochách. *První druh* zde znamená, že v integrálu vystupuje *skalární funkce* (pro vektorové existují integrály II. druhu). Jedná se o určitou analogii k dříve probíraným integrálům a jejich aplikace budou též analogické – budeme umět nalézt hmotný střed křivek a ploch, jejich momenty setrvačnosti, jejich délky a obsahy, celkový náboj atd. Nově však začneme využívat parametrické zadání křivky a plochy.

Kapitola, věnovaná mimo jiné křivkovým integrálům I. druhu, je v [6] pojmenovaná jako „Integrály po cestě. Křivkový integrál“, případně se můžeme podívat do [5], od s. 134 dále. Plošné integrály I. druhu lze dohledat v [6], od s. 61, nebo v [5], od s. 152.

2.4.1 Křivkový integrál I. druhu

Začneme pojmem *křivka. Parametricky zadanou křivku* budeme chápat jako množinu bodů, které mají v prostoru souřadnice $x,\ y,\ z$, jež jsou dány rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t), \end{aligned} \tag{2.67}$$

kde t je parametr z intervalu $\langle a,\ b\rangle \subset \mathbb{R}$. Takto obecně to může působit neprůhledně, ale ve skutečnosti nejde o nic komplikovaného. Pro příklad si vezměme nám již známou kružnici v rovině $z = 0$ se středem v počátku a s poloměrem ϱ. Rovnice takové kružnice je zapsána ve *vztahu 2.56.* Alternativně ji však můžeme zapsat parametricky pomocí rovnic

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos t, \\ y &= \varrho \sin t, \\ z &= 0, \\ \\ t &\in \langle 0,\ 2\pi \rangle. \end{aligned} \tag{2.68}$$

Kdybychom dosadili *rovnice 2.68* do *vztahu 2.56*, zjistili bychom, že se jedná o ekvivalentní zápisy.

Když porovnáme parametrické vyjádření kružnice se *vztahy 2.20*, kterými převádíme kartézské souřadnice na polární, zjistíme, že se v podstatě jedná o tytéž rovnice, přičemž zde musíme zafixovat polární souřadnici R jako $R = \varrho$.

Jedna z výhod parametrického vyjádření spočívá ve variabilitě intervalu, z nějž bereme parametr. Kdybychom například uvažovali hmotný bod obíhající stále dokola po kružnici, mohli bychom parametr t považovat za čas a křivkovým integrálem spočítat dráhu uvažovaného bodu pro různé časové intervaly. To ale trochu předbíháme.

Křivky mohou v prostoru nabývat mnoha rozličných tvarů, ale my nebudeme umět integrovat po všech. Pro křivkový integrál I. druhu budeme vyžadovat, aby byla křivka „slušně vychovaná“. Tím máme na mysli, že jsou všechny funkce $x(t)$, $y(t)$ a $z(t)$ pro $t \in \langle a,\ b \rangle$ *spojité* a mají na tomto intervalu *spojité derivace*. Z toho lze vyvodit, že slušně vychovaná křivka je všude hladká (ve zlomech a hrotech neexistuje derivace). Dále požadujeme, aby se slušně vychovaná křivka nikde neprotínala kromě počátečního a koncového bodu, které mohou splývat. A nesmíme zapomenout, že slušně vychovaná křivka nesmí být *singulární*. Tuto vlastnost popíšeme pomocí polohového vektoru $\boldsymbol{r}$. Jelikož je křivka množina bodů o souřadnicích $[x,\ y,\ z]$, což jsou souřadnice polohového vektoru $\boldsymbol{r}(x,\ y,\ z)$, můžeme křivku popisovat polohovým vektorem, který je funkcí parametru t, tj. $\boldsymbol{r}(x(t),\ y(t),\ z(t)) = \boldsymbol{r}(t)$. Křivka není singulární, pokud

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} \neq \boldsymbol{o}, \tag{2.69}$$

kde $\boldsymbol{o}$ je nulový vektor. Zjednodušeně se dá říct, že se nesingulární křivka nemůže „zastavit a jít nazpět“. V podstatě by se tak utvořil velmi ostrý hrot.

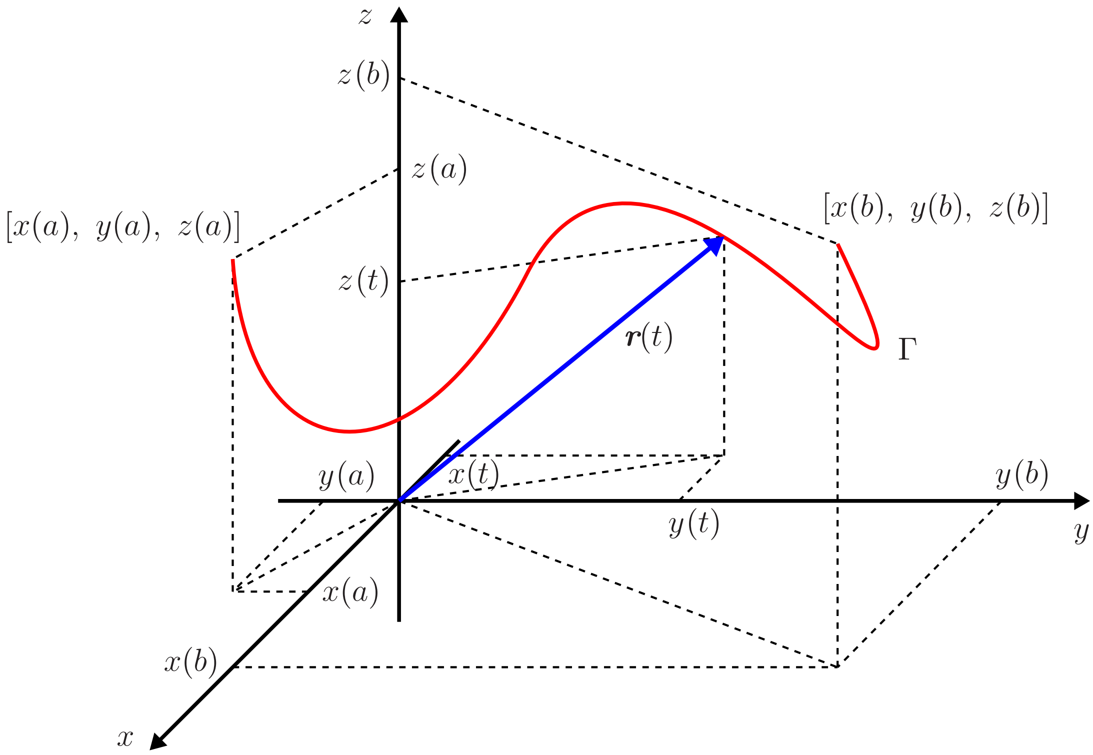
Křivky budeme značit řeckým písmenem Γ a jednu takovou obecnou křivku si můžeme prohlédnout na *obrázku 2.9*

Setkat se můžeme i s *rovinnou křivkou* (všechny její body leží v jedné rovině), a tudíž je pro všechna $t \in \langle a,\ b \rangle$ splněna rovnost

$$\boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{r}(t) = 0, \tag{2.70}$$

kde $\boldsymbol{n}$ je normálový vektor roviny, ve které křivka leží (musí být však splněna ještě podmínka, že daná rovina prochází počátkem, čehož se dá dosáhnout vhodnou volbou systému souřadnic).

Uveďme si několik příkladů parametricky zadaných křivek. Již jsme se s některými setkali, např s elipsou nebo speciálním případem kružnice (*rovnicemi 2.68*). Obecněji nemusíme kružnici uvažovat v rovině $z = 0$, ale v libovolné výšce h nad



Obrázek 2.9: Křivka Γ určená parametrickými rovnicemi $x = x(t)$, $y = y(t)$ a $z = z(t)$, kde $t \in \langle a,\ b\rangle$

ní (popř. pod ní). Získáme tak parametrické rovnice

$$\begin{aligned} x &= \varrho \cos t, \\ y &= \varrho \sin t, \\ z &= h, \end{aligned} \tag{2.71}$$

$$\varrho,\ h = konst.,\ \ \varrho \in \mathbb{R}^+,\ \ h \in \mathbb{R},\ \ t \in \langle 0,\ 2\pi\rangle.$$

Takového parametrického vyjádření *kružnice* se dá dosáhnout vždy, když si náležitě zvolíme systém souřadnic.

Rovnici *elipsy* jsme si uvedli ve *vztahu 2.12* a parametricky ji lze zadat následujícími rovnicemi:

$$\begin{aligned} x &= a \cos t, \\ y &= b \sin t, \\ z &= h, \end{aligned} \tag{2.72}$$

$$a,\ b,\ h = konst.,\ \ a,\ b \in \mathbb{R}^+,\ \ h \in \mathbb{R},\ \ t \in \langle 0,\ 2\pi\rangle.$$

Kružnice i elipsa jsou příklady *rovinných křivek*. Ani pro *prostorovou křivku* však nemusíme chodit daleko, když lehce modifikujeme parametrické rovnice kružnice. Uvažujme hmotný bod stále obíhající po kružnici kolem kartézské osy z. Kdybychom tento bod donutili rovnoměrně se pohybovat navíc ve směru osy z rychlostí v, jeho trajektorií by byla tzv. *šroubovice*, jejíž parametrické rovnice potom jsou

$$
\begin{aligned}
x &= \varrho \cos t, \\
y &= \varrho \sin t, \\
z &= vt,
\end{aligned}
\tag{2.73}
$$

$$\varrho,\ v = konst.,\ \varrho,\ v \in \mathbb{R}^+,\ t \in \mathbb{R}.$$

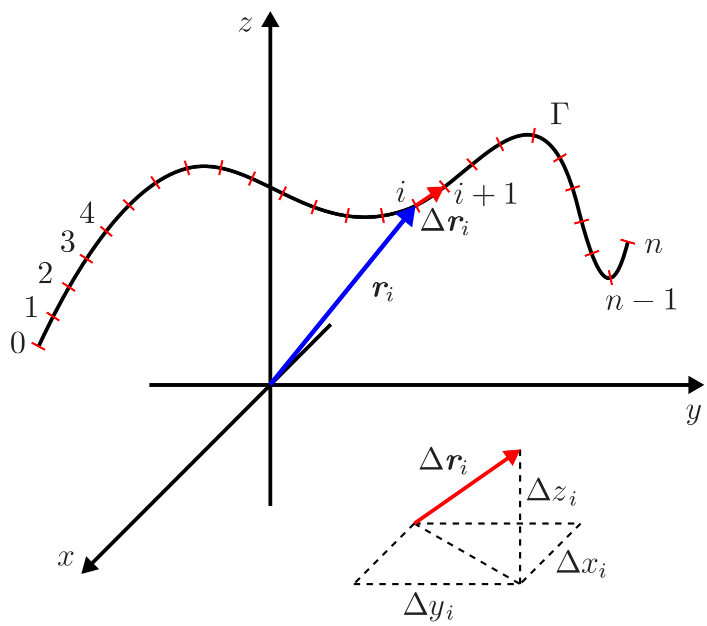
Nyní se naučíme pomocí integrálu počítat *délku křivky*, což se nám bude později hodit v samotném křivkovém integrálu I. druhu. Jak už máme zvykem, nejdříve si řekneme, jak bychom to zvládli přibližně, a potom výpočet zpřesníme.

Mějme nějakou obecnou křivku Γ a rozsekejme ji na velké množství malých částí – tak malých, že je lze považovat za úsečky – viz *obrázek 2.10.* Každému dělícímu bodu i, $i \in \{0, 1, 2, ..., n-1, n\}$, náleží polohový vektor $\boldsymbol{r}_i = (x_i,\ y_i,\ z_i)$ a symbolem $\Delta \boldsymbol{r}_i$ označíme vektor, který je rozdílem dvou sousedních polohových vektorů $\boldsymbol{r}_i$ a $\boldsymbol{r}_{i+1}$, tj.

$$
\begin{aligned}
\Delta \boldsymbol{r}_i = \boldsymbol{r}_{i+1} - \boldsymbol{r}_i = (x_{i+1} - x_i,\ y_{i+1} - y_i,\ z_{i+1} - z_i) = \\
= (\Delta x_i,\ \Delta y_i,\ \Delta z_i).
\end{aligned}
\tag{2.74}
$$

Velikost takto definovaného vektoru $\Delta \boldsymbol{r}_i$ se rovná velikosti úsečky mezi dělícími body i a $i+1$, a označíme $\Delta s_i = |\Delta \boldsymbol{r}_i|$. Máme-li tedy křivku Γ rozdělenu na n částí, její přibližnou délku určíme, když sečteme všechna Δs_i, tj.

$$s_\Gamma \doteq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i. \tag{2.75}$$



Obrázek 2.10: Křivka Γ rozdělená na mnoho velmi malých částí, které lze považovat za úsečky

Pro přesnou délku křivky Γ musíme zmenšit Δs_i na nekonečně malou velikost, resp. musíme rozdělit křivku Γ na nekonečně mnoho částí. Toho dosáhneme, když ve *vztahu 2.75* pošleme n do nekonečna, tj.

$$s_\Gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \Delta s_i. \tag{2.76}$$

Tento limitní součet můžeme přepsat do integrálního tvaru

$$s_\Gamma = \int_\Gamma \mathrm{d}s. \tag{2.77}$$

Křivku Γ zadáváme pomocí parametrických rovnic, a proto si vyjádříme Δs_i pomocí souřadnic x, y a z, k čemuž nám poslouží Pythagorova věta,

$$\Delta s_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}, \tag{2.78}$$

přičemž $(\Delta x_i)^2$, $(\Delta y_i)^2$ a $(\Delta z_i)^2$ jsou závislé na parametru t, a proto má smysl *rovnici 2.78* ještě dále upravit:

$$\begin{aligned} \Delta s_i &= \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (\Delta y_i)^2 + (\Delta z_i)^2}\frac{\Delta t}{\Delta t} = \\ &= \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t. \end{aligned} \tag{2.79}$$

Když dosadíme Δs_i ze *vztahu 2.79* do *rovnice 2.76*, postupně získáme pro délku křivky Γ integrál, kde se integruje podle parametru $t \in \langle a,\ b\rangle$, tj.

$$\begin{aligned} s_\Gamma &= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1} \sqrt{\left(\frac{\Delta x_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y_i}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta z_i}{\Delta t}\right)^2}\,\Delta t = \\ &= \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{2.80}$$

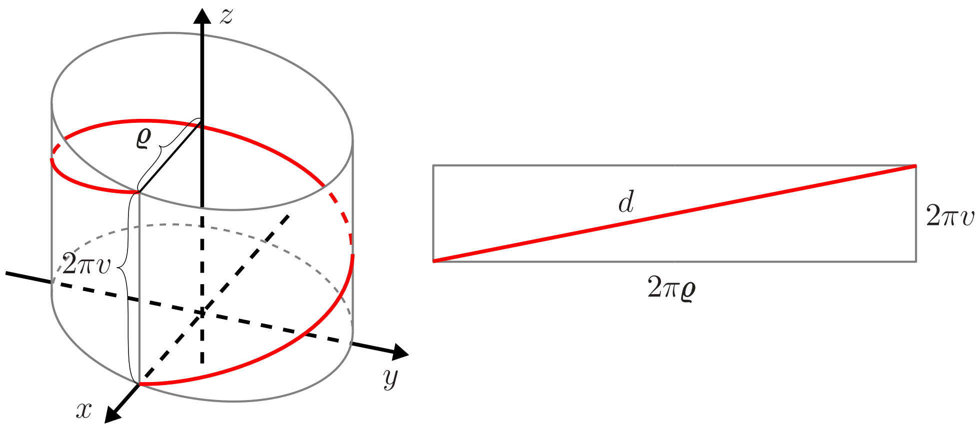
Vztah 2.80 můžeme ověřit při řešení následujícího příkladu. Spočítáme délku d jedné otáčky šroubovice. Dosadíme parametrické *rovnice 2.73* do *vztahu 2.80*, přičemž $t \in \langle 0,\ 2\pi\rangle$. Tedy

$$\begin{aligned} d &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,\varrho\cos t}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,\varrho\sin t}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,vt}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-\varrho\sin t)^2 + (\varrho\cos t)^2 + v^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2\sin^2 t + \varrho^2\cos^2 t + v^2}\,\mathrm{d}t = \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\varrho^2 + v^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\varrho^2 + v^2}\,[t]_0^{2\pi} = 2\pi\sqrt{\varrho^2 + v^2}. \end{aligned} \tag{2.81}$$

Správnost výsledku můžeme ověřit bez integrálu. Šroubovice leží na válcové ploše a uvažujeme-li pouze jednu otáčku, bude její výška $z(t)|_{t=2\pi} = vt|_{t=2\pi} = 2\pi v$. Takovou válcovou plochu můžeme rozdělit řezem spojujícím počáteční a koncový bod šroubovice a posléze ji rozvinout do roviny, čímž získáme obdélník – *viz* *obrázek 2.11*. Šroubovice v tomto obdélníku tvoří úhlopříčku a její délku d určíme Pythagorovou větou. Jedna strana obdélníku je již zmíněná výška $2\pi v$ a druhá strana má velikost jako obvod kružnice o poloměru ϱ, tj. $2\pi\varrho$. Pro hledanou délku potom platí, že velikost

$$d = \sqrt{(2\pi\varrho)^2 + (2\pi v)^2} = 2\pi\sqrt{\varrho^2 + v^2}, \tag{2.82}$$

což se shoduje se *vztahem 2.81*.



Obrázek 2.11: Jedna otáčka šroubovice vyznačená na válcové ploše a rozvinutá do roviny (ve zmenšeném měřítku)

Uvedeme si ještě jeden speciální tvar *vztahu 2.80* pro případ, kdy je křivka Γ grafem funkce $y = f(x)$. Takovou křivku lze parametrizovat jako

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y(x) &= f(x), \\ z(x) &= 0, \end{aligned} \tag{2.83}$$

přičemž parametrem je přímo proměnná x a meze pro integrování určuje definiční obor $D_f = \langle a,\ b\rangle$. Po dosazení do *vztahu 2.80* získáme

$$s_f = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,x}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{\mathrm{d}\,f(x)}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \tag{2.84}$$

Přistoupíme k samotnému křivkovému integrálu I. druhu funkce $f(x,\ y,\ z)$. Mějme křivku Γ a opět ji rozdělme na mnoho malých elementů, kde i-tý element má velikost Δs_i. Potom je *křivkový integrál I. druhu funkce $f(x,\ y,\ z)$ po křivce* Γ definován jako

$$\int_\Gamma f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x,\ y,\ z)\Delta s_i, \tag{2.85}$$

kde $f(x,\ y,\ z)$ je funkční hodnota v libovolném bodě $[x,\ y,\ z]$ z příslušného elementu o velikosti Δs_i.

Díky předchozím úvahám o výpočtu délky křivky umíme hned napsat, jak křivkový integrál I. druhu řešit integrací přes parametr z parametrického vyjádření křivky (viz *vztahy 2.76* až *2.80*):

$$\int_\Gamma f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_a^b f(x(t),\ y(t),\ z(t)) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t. \tag{2.86}$$

Aplikace křivkového integrálu I. druhu

První aplikace je zřejmá: máme-li funkci $f(x,\ y,\ z) = 1$, získáme *délku křivky*, přes kterou integrujeme. Spočítali jsme i příklad na délku jedné otáčky šroubovice – viz *vztah 2.81*.

Další aplikaci motivujeme příkladem z elektřiny a magnetismu a spočítáme *celkový náboj* vlákna Γ ve tvaru čtvrtiny elipsy z prvního kvadrantu, která má poloosy a a b. Systém souřadnic zvolíme tak, aby elipsa ležela v rovině $z = 0$ a její střed splynul s počátkem. Předpokládejme, že délkovou hustotu náboje[3] popisuje funkce $\tau(x,\ y,\ z) = xy$. Potom má naše část elipsy parametrické vyjádření:

$$\begin{aligned} x &= a\cos t, \\ y &= b\sin t, \\ z &= 0, \\ \\ t &\in \langle 0.\ \tfrac{\pi}{2}\rangle \end{aligned} \tag{2.87}$$

Celkový náboj vlákna Γ je

$$Q_\Gamma = \int_\Gamma \tau(x(t),\ y(t),\ z(t))\,\mathrm{d}s =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} x(t)y(t) \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z(t)}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos t\, b\sin t \sqrt{\left(\frac{\mathrm{d}\,a\cos t}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,b\sin t}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}\,0}{\mathrm{d}t}\right)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t\ \sin t \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2(1 - \sin^2 t)}\cos t\ \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= ab \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2}\cos t\ \sin t\,\mathrm{d}t =$$

$$= \left| \begin{array}{l} (a^2 - b^2)\sin^2 t + b^2 = u \\ u \in \langle b^2,\ a^2\rangle \\ (a^2 - b^2)2\sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}u \\ \sin t\cos t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2(a^2-b^2)}\,\mathrm{d}u \end{array} \right| = \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \int_{b^2}^{a^2} \sqrt{u}\,\mathrm{d}u =$$

[3] $\tau = \mathrm{d}Q/\mathrm{d}s$

$$= \frac{ab}{2(a^2 - b^2)} \left[\frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_{b^2}^{a^2} = \frac{ab}{3(a^2 - b^2)} \left(a^3 - b^3 \right) =$$
$$= \frac{ab(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{3(a-b)(a+b)} = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a+b)}. \tag{2.88}$$

Obdobným způsobem získáme hmotnost křivky Γ, kde $\tau(x,\ y,\ z)$ je délková hustota (hmotnosti), tj.

$$m_\Gamma = \int_\Gamma \mathrm{d}m = \int_\Gamma \tau(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s. \tag{2.89}$$

Obdobně, jako jsme to dělali dříve, můžeme hledat souřadnice hmotného středu křivky Γ, např.

$$y_T = \frac{1}{m_\Gamma} \int_\Gamma y\tau(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s, \tag{2.90}$$

nebo momenty setrvačnosti, např.

$$J_z = \int_\Gamma (x^2 + y^2)\tau(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}s, \tag{2.91}$$

kde $(x^2 + y^2)$ je podle Pythagorovy věty vzdálenost od osy z.

2.4.2 Plošný integrál I. druhu

Potom, co jsme zvládli křivkový integrál I. druhu, pochopíme jeho obdobu, plošný integrál, velice rychle. Zabývat se budeme opět pouze „slušně vychovanými“ plochami, tj. plochami hladkými, spojitými, nesingulárními atd., a značit je budeme řeckým písmenem Σ. Pro výpočet plošného integrálu budeme potřebovat znát parametrické vyjádření plochy, ve kterém vystupují dva parametry:

$$\begin{aligned} x &= x(u,\ v), \\ y &= y(u,\ v), \\ z &= z(u,\ v), \end{aligned} \tag{2.92}$$

kde parametry $u,\ v$ bereme jako uspořádané dvojce $[u,\ v]$ z definiční oblasti o.

Například sféru o poloměru ϱ můžeme parametricky zadat jako

$$\begin{aligned} x(u,\ v) &= \varrho \sin u \cos v, \\ y(u,\ v) &= \varrho \sin u \sin v, \\ z(u,\ v) &= \varrho \cos u, \end{aligned} \tag{2.93}$$

$$u \in \langle 0,\ \pi \rangle,\ v \in \langle 0,\ 2\pi \rangle,\ \text{tj. } [u,\ v] \in \langle 0,\ \pi \rangle \times \langle 0,\ 2\pi \rangle.$$

Když se na *rovnice 2.93* pozorně podíváme a porovnáme je s převodními vztahy mezi kartézskými a sférickými souřadnicemi, viz *vztahy 2.43*, zjistíme, že jsou formálně obdobné, přičemž sférickou souřadnici r jsme položili rovnou konstantě ϱ, $\vartheta \equiv u$ a $\varphi \equiv v$. Tím nám vznikne sféra (kulová plocha) o poloměru ϱ. Další ověření můžeme provést tak, že parametrické *rovnice 2.93* dosadíme do rovnice sféry $x^2 + y^2 + z^2 = \varrho^2$, kterou musí splňovat.

Dalším příkladem může být *paraboloid*, který vznikne rotací paraboly kolem její osy symetrie:

$$\begin{aligned} x(u,\ v) &= u\cos v, \\ y(u,\ v) &= u\sin v, \\ z(u,\ v) &= u^2, \\ \\ [u,\ v] &\in \mathbb{R}\times\langle 0,\ 2\pi\rangle. \end{aligned} \tag{2.94}$$

Parametrické *rovnice 2.94* zadávají nekonečný paraboloid, který vznikne rotací paraboly $z = x^2$ kolem osy z, a jinak ho můžeme zapsat jako $z = x^2 + y^2$.

Plochu Σ, přes kterou chceme integrovat, rozdělíme na mnoho malých plošek o obsazích ΔS_i obdobně, jako jsme dělili křivku u křivkového integrálu I. druhu. *Plošný integrál I. druhu funkce* $f(x,\ y,\ z)$ je potom

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=0}^{n-1} f(x,\ y,\ z)\Delta S_i, \tag{2.95}$$

kde $f(x,\ y,\ z)$ je funkční hodnota libovolné $[x,\ y,\ z] \in \Delta S_i$.

Můžeme říct, že dvojný integrál je vlastně speciální případ plošného integrálu I. druhu, kde Σ je část roviny, tj. rovinná oblast o.

V následujícím si ukážeme, jak plošný integrál I. druhu počítat, ale nebudeme si vysvětlovat, proč to tak děláme. Mějme funkci $f(x,\ y,\ z)$ a budeme ji integrovat přes obecnou plochu Σ, která je parametrizována *rovnicemi 2.92*. Potom

$$\iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{o} f(x(u,\ v),\ y(u,\ v),\ z(u,\ v))\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v, \tag{2.96}$$

kde

$$\begin{aligned} E &= \left(\tfrac{\partial x(u,\ v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y(u,\ v)}{\partial u}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial z(u,\ v)}{\partial u}\right)^2, \\ G &= \left(\tfrac{\partial x(u,\ v)}{\partial v}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial y(u,\ v)}{\partial v}\right)^2 + \left(\tfrac{\partial z(u,\ v)}{\partial v}\right)^2, \\ F &= \tfrac{\partial x(u,\ v)}{\partial u}\tfrac{\partial x(u,\ v)}{\partial v} + \tfrac{\partial y(u,\ v)}{\partial u}\tfrac{\partial y(u,\ v)}{\partial v} + \tfrac{\partial z(u,\ v)}{\partial u}\tfrac{\partial z(u,\ v)}{\partial v}. \end{aligned} \tag{2.97}$$

Uvedený postup si vyzkoušíme na příkladě, kde budeme integrovat funkci $f(x,\ y,\ z) = x^2 z$ přes polosféru Σ se středem v počátku soustavy souřadnic a jednotkovým poloměrem. Tu je možné parametrizovat rovnicemi

$$\begin{aligned} x(\vartheta,\ \varphi) &= \sin\vartheta\cos\varphi, \\ y(\vartheta,\ \varphi) &= \sin\vartheta\sin\varphi, \\ z(\vartheta,\ \varphi) &= \cos\vartheta, \\ \\ [\vartheta,\ \varphi] &\in \langle 0,\ \tfrac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,\ 2\pi\rangle. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Provedeme výpočty $E,\ G$ a F dosazením z *rovnic 2.98* do *vztahů 2.97*:

$$E = \left(\frac{\partial\ \sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ \sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\vartheta}\right)^2 + \left(\frac{\partial\ \cos\vartheta}{\partial\vartheta}\right)^2 =$$

$$= \cos^2\vartheta\cos^2\varphi + \cos^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta =$$

$$= \cos^2\vartheta\left(\cos^2\varphi + \sin^2\varphi\right) + \sin^2\vartheta = 1, \tag{2.99}$$

$$\begin{aligned} G &= \left(\frac{\partial \sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial\varphi}\right)^2 = \\ &= \sin^2\vartheta\sin^2\varphi + \sin^2\vartheta\cos^2\varphi + 0 = \\ &= \sin^2\vartheta\left(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi\right) = \sin^2\vartheta, \end{aligned} \tag{2.100}$$

$$\begin{aligned} F &= \frac{\partial \sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta\cos\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\vartheta}\frac{\partial \sin\vartheta\sin\varphi}{\partial\varphi} + \frac{\partial \cos\vartheta}{\partial\vartheta}\frac{\partial \cos\vartheta}{\partial\varphi} = \\ &= -\cos\vartheta\cos\varphi\sin\vartheta\sin\varphi + \cos\vartheta\sin\varphi\sin\vartheta\cos\varphi + 0 = 0, \end{aligned} \tag{2.101}$$

$$\sqrt{EG - F^2} = \sqrt{1\cdot\sin^2\vartheta - 0} = \sqrt{\sin^2\vartheta} = \left|\vartheta \in \left\langle 0,\ \frac{\pi}{2}\right\rangle\right| = \sin\vartheta. \tag{2.102}$$

Dostáváme tedy

$$\begin{aligned} \iint\limits_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S &= \iint\limits_{\Sigma} x^2 z\,\mathrm{d}S = \iint\limits_{o} (\sin\vartheta\cos\varphi)^2\cos\vartheta\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \\ &= \iint\limits_{o} (\sin\vartheta\cos\varphi)^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi. \end{aligned} \tag{2.103}$$

Ve *vztahu 2.103* jsme získali dvojný integrál přes oblast $o = \langle 0,\ \frac{\pi}{2}\rangle \times \langle 0,\ 2\pi\rangle$, který už umíme řešit, a tedy

$$\begin{aligned} \iint\limits_{o} (\sin\vartheta\cos\varphi)^2\cos\vartheta\sin\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi &= \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\vartheta\cos\vartheta\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\vartheta\mathrm{d}\varphi = \\ = \int\limits_0^{2\pi}\cos^2\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta &= \left|\begin{array}{l} \sin\vartheta = w \\ w\in\langle 0,\ 1\rangle \\ \cos\vartheta\,\mathrm{d}\vartheta = \mathrm{d}w \end{array}\right| = \\ = \int\limits_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\varphi}{2}\,\mathrm{d}\varphi\int\limits_0^1 w^3\,\mathrm{d}w &= \frac{1}{2}\left[\varphi + \frac{\sin 2\varphi}{2}\right]_0^{2\pi}\left[\frac{w^4}{4}\right]_0^1 = \\ &= \frac{1}{2}2\pi\frac{1}{4} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned} \tag{2.104}$$

Když to shrneme, plošný integrál I. druhu funkce $f(x,\ y,\ z) = x^2 z$ přes jednotkovou polosféru Σ je roven $\pi/4$.

Ještě si odvodíme speciální tvar plošného integrálu I. druhu pro případ, kdy budeme mít plochu Σ zadánu *explicitně*. Tím je myšleno, že je plocha Σ popsána jako funkce dvou proměnných x a y, tj. $z = z(x,\ y)$. Potom je výhodné vzít jako parametry právě proměnné x a y. Tím získáme parametrické vyjádření plochy Σ jako

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= y, \\ z &= z(x,\ y), \end{aligned} \tag{2.105}$$

$$[x,\ y] \in o$$

a tím pádem podle *vztahů 2.97* platí, že

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right)^2, \tag{2.106}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right)^2 = 1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right)^2, \tag{2.107}$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial y} + \frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y} = \frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}. \tag{2.108}$$

Potom

$$\begin{aligned} EG - F^2 &= \\ = \left[1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right)^2\right]\left[1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right)^2\right] &- \left[\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right]^2 = \\ = 1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right)^2 &+ \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right)^2. \end{aligned} \tag{2.109}$$

Pro plošný intergrál I. druhu funkce $f(x,\ y,\ z)$ po explicitně zadané ploše Σ získáme podle *vztahu 2.96*

$$\begin{aligned} &\iint_{\Sigma} f(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S = \\ = &\iint_{o} f(x,\ y,\ z(x,\ y))\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,\ y)}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \end{aligned} \tag{2.110}$$

Například jednotková sféra je ve vhodně zvoleném kartézském systému souřadnic určena rovnicí $x^2+y^2+z^2 = 1$ a potom můžeme jednotkovou polosféru v poloprostoru $z \geq 0$ z předchozího příkladu explicitně vyjádřit jako $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$. Parametrické vyjádření takovéto polosféry, alternativní k vyjádření v předešlém příkladu, je pak

$$\begin{aligned} x &= x, \\ y &= y, \\ z &= \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \\ [x,\ y] &\in \{[x,\ y] \mid x^2 + y^2 \leq 1;\ x,\ y \in \mathbb{R}\}. \end{aligned} \tag{2.111}$$

Aplikace plošného integrálu I. druhu

Potom, co jsme prošli všemi předešlými druhy integrálů, aplikace plošného integrálu I. druhu už snadno vymyslíme.

Zajímá-li nás *obsah plochy* Σ, budeme integrovat funkci $f(x,\ y,\ z) = 1$ po ploše Σ, tj.

$$S_\Sigma = \iint_{\Sigma} \mathrm{d}S. \tag{2.112}$$

Pro *hmotnost* musíme integrovat plošnou hustotu (hmotnosti) $\sigma(x,\ y,\ z)$, tj.

$$m_\Sigma = \int\limits_\Sigma \mathrm{d}m = \iint\limits_\Sigma \sigma(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S, \tag{2.113}$$

a například pro y-ovou souřadnici *hmotného středu* plochy Σ platí:

$$y_\mathrm{T} = \frac{1}{m_\Sigma} \iint\limits_\Sigma y\sigma(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S. \tag{2.114}$$

Hledáme-li *moment setrvačnosti* plochy Σ, např. vzhledem k ose x, řešíme integrál

$$J_x = \iint\limits_\Sigma \left(y^2 + z^2\right) \sigma(x,\ y,\ z)\,\mathrm{d}S. \tag{2.115}$$

Těmito pár příklady jsme aplikace samozřejmě nevyčerpali, existuje jich mnohem více a můžeme se s nimi potkávat v odborných knihách věnujících se nejenom matematice a fyzice.

Kapitola 3

Přehled studijních textů k matematickým metodám fyziky

Jelikož se v této práci zabýváme téměř výhradně integrály a matematickým aparátem s nimi spojeným, zaměříme se i v přehledu zdrojů, z nichž lze čerpat, na literaturu a jiné prameny, které se zabývají právě integrály.

Předně můžeme doporučit sérii knih profesora J. Kopáčka *Matematická analýza nejen pro fyziky*, která je doporučována studentům studijního programu Fyzika na MFF UK v rámci povinných přednášek z matematické analýzy. Velkou výhodou této série je také fakt, že ke každému dílu učebnice vyšla i sbírka úloh s mnoha příklady, z nichž některé jsou i ukázkově vyřešeny.

O primitivní funkci, respektive neurčitém integrálu, a určitém integrálu se můžeme dočíst v *Matematické analýze nejen pro fyziky (I)*, [4]. Integrály jsou zde vybudovány od základu a většina tvrzení je i dokázána (pokud ne, jsou uvedeny odkazy, kde lze příslušný důkaz nalézt). Důležité matematické věty, které se týkají výpočtu integrálů, jsou doprovázeny i řešenými příklady, v nichž se osvětlí způsob užití příslušných vět.

Určitý integrál je v [4] vybudován do jisté míry obdobným způsobem jako v této diplomové práci, postup je však obecnější a podstatně podrobnější (při odvozování jsme se např. úplně vyhnuli pojmu *norma dělení* atd.)

V závěru [4] je oddíl věnovaný aplikacím určitého integrálu, jako je délka křivky, obsah rovinných útvarů a objem rotačních těles. Dozvědět se můžeme i něco o metodách přibližného výpočtu integrálů, což může být užitečné vzhledem k tomu, že umíme analyticky počítat jen relativně málo různých typů integrálů.

Příklady z matematiky nejen pro fyziky [I], [7], je sbírka příkladů doplňující [4]. V každém oddíle jsou kromě příkladů též uvedeny důležité matematické věty (bez důkazů), se kterými se pracuje při řešení úloh, což rozhodně přispívá k přehlednosti a srozumitelnosti. V případě neurčitého integrálu jsou to např. věty o integraci metodou per partes, metodou substituční atd. Ukázkově řešené příklady se zde vyskytují v relativně hojném počtu (konkrétně u neurčitého integrálu jich je zde 13).

U aplikací určitého integrálu se v [7] objevují i příklady motivované fyzikálně – počítá se například moment setrvačnosti nebo se hledají souřadnice těžiště. Příkladům s fyzikální tématikou je však věnován vlastní oddíl, kde se kromě příkladů z mechaniky počítají i příklady např. z oblasti elektřiny a magnetismu.

V *Matematické analýze nejen pro fyziky (III)*, [5] se vyskytuje rozsáhlá kapitola věnována *Lebesgueovu integrálu*. Takovýto integrál vychází z tzv. *teorie míry* a umožňuje nám pracovat s vícerozměrnými intervaly, což představovaly naše oblasti o v rovině (viz např. *obrázek 2.3*), a nebo prostorové oblasti θ (viz *obrázek 2.6*). Můžeme tedy v [5] nalézt cenný zdroj informací o dvojném a trojném integrálu. Látka je v [5] vykládána obdobným způsobem jako v [4].

Křivkový a plošný integrál I. druhu nalezneme také v [5], kde se ale kromě I. druhu rozebírá i druh II., který je spojen s vektorovými funkcemi, a tudíž je určitě na místě seznámení s touto partií matematické analýzy. Mnoho veličin ve fyzice popisujeme pomocí vektorových funkcí – v mechanice je to například gravitační síla (má obecně v různých místech prostoru, tj. pro různé $[x,\ y,\ z]$, různý směr a velikost), za elektřinu a magnetismus můžeme připomenout intenzitu elektrického pole nebo magnetickou indukci atd.

K [5] vyšla sbírka *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [III]*, [8], která je psaná ve stejném duchu jako [7]. Vyzdvihněme, že jsou zde opět k nalezení aplikace probíraných integrálů a pro nás jsou hlavně zajímavé aplikace s fyzikální tématikou.

Profesor Kopáček napsal také knihu *Integrály*, [6], která se, jak název napovídá, zaobírá výhradně tímto aparátem a tudíž je pro nás zajímavá. Kniha je podle autorových slov určena pro posluchače učitelského studia na MFF UK a především pro tyto studenty vznikla i tato diplomová práce. Ostatní studenti však [6] jistě také ocení, a to kvůli přístupu kladoucímu důraz spíše na kvalitní pochopení látky než na její množství. Ve zkratce zde mimo jiné můžeme nalézt dvojný, trojný a popř. i vícerozměrný integrál, křivkový a plošný integrál obou druhů a nakonec i některé integrální věty, které pracující s *diferenciálními operátory*[1], se kterými se zajisté při studiu fyziky na vysoké škole potkáme nejenom v hodinách matematické analýzy.

V [6] je probíráno učivo, které lze nalézt i v [5], ale výklad je pojat odlišným způsobem. Pro nás zřejmě nejvýznamnější rozdíl spočívá ve výkladu fyzikálních aplikací. Zatímco [5] je v podstatě „čistá matematika" a v [8] jsou uvedeny i některé fyzikální aplikace, naopak v [6] jsou příklady využití ve fyzice přímo součástí teoretického výkladu v místech, kde se to hodí a nenarušovalo by to logickou linku výkladu.

Při čtení [6] se předpokládá znalost alespoň pojmů primitivní funkce, určitý integrál a také zkušenost s jejich výpočty včetně základních vět. Je tedy dobré seznámit se před otevřením *Integrálů* s příslušnými kapitolami ve [4].

Kdo se zabývá aplikacemi matematiky, jistě neudělá chybu, bude-li mít v knihovně k nahlédnutí *Přehled užité matematiky I* (případně i *II*), [9], profesora K. Rektoryse. Kniha je určena všem, kdo se zabývají obory s aplikovanou matematikou, tedy technikům, inženýrům, fyzikům atd. Jde hlavně o podání výsledků aplikované matematiky než o její teoretické pozadí – neuvádějí se tedy důkazy ani odvození.

Integrálům je v [9] věnováno 135 stránek a to se jedná pouze o aplikace. Z toho je patrné, že má člověk velkou šanci nalézt zde způsob řešení svého problému s výpočtem, popř. odhadem hledaného integrálu. Kniha postihuje všechnu látku, která je probírána i v této diplomové práci a čtenář zde může nalézt jiný, stručnější, pohled na danou problematiku.

Za vyzdvihnutí stojí, že v [9] jsou k nalezení rozsáhlé tabulky integrálů, z nichž

[1] Těmi se míní zejména gradient, divergence a rotace.

mnohé potkáváme při studiu fyziky. Můžeme si tedy ušetřit spoustu práce a počítání (pokud bychom vůbec měli schopnosti daný integrál vyřešit).

Pro svoji stručnost ovšem není [9] vhodná pro úplné začátečníky a je dobré mít už před nahlédnutím povědomí a alespoň základní představu o hledaných pojmech. Výklad je zde veden v rychlém tempu – začíná se základními definicemi, pokračuje důležitými matematickými větami, za kterými okamžitě následují ukázkové příklady s aplikací příslušné věty. Kapitoly věnující se integrálům jsou vždy zakončeny přehledem nejdůležitějších vzorců z předchozího textu.

Za anglicky psanou obdobu *Přehledu užité matematiky* profesora Rektoryse by se dala považovat kniha *Mathematical Methods for Physicists*, [10], jejímiž autory jsou G. B. Arfken a H. J. Weber. Autoři sami v předmluvě zmiňují, že matematici by zřejmě nenahlíželi na jejich dílo jako na rigorózní, ale uvádějí, že jim nejde o obecnost, nýbrž se omezují na aplikace vyžadované ve fyzice. Kniha je zaměřena na schopnosti řešit problémy spojené s aplikací matematiky.

Autoři [10] také doporučují, jakým způsobem s knihou pracovat, a pro začátečníky je vhodné začít poctivě první kapitolou, kde se budují nutné základy. Avšak bez předchozí znalosti diferenciálního počtu a integrálů by se s [10] pracovalo jen velice těžko. Derivace, primitivní funkce či integrál se zde nedefinují a rovnou se „bez varování“ používají (a to i vícerozměrné integrály). Proto nemůžeme doporučit [10] jako alternativu k této diplomové práci, ale spíše jako možnost seznámit se s dalšími, „vyššími“ aplikacemi integrálů. Tuto diplomovou práci v kombinaci s [1] bychom mohli považovat za přípravu pro práci s [10], přičemž by bylo nutné seznámit se ještě s parciálními derivacemi, které nejsou součástí [1].

V [10] nenalezneme ucelený přehled integrálů; ty jsou roztroušeny po jednotlivých kapitolách, kde se ukazuje, jak souvisí se zrovna probíranou problematikou. Např. v oddílu s vektory je ukázán způsob integrování vektorů a práce s diferenciálními operátory, které působí na vektory (popř. skaláry) vystupujícími v integrálech. Fyzikální aplikace jsou v [10] velmi silně zastoupeny – příklady jsou velmi často fyzikálně motivovány.

Podobným způsobem jako v [10], jsou integrály pojaty v *Matematickém aparátu fyziky*, [11], profesora J. Kvasnici. Ve výkladu se předpokládá, že je s nimi čtenář obeznámen, avšak v dodatcích na konci knihy je integrálům věnován větší prostor a jsou zde zopakovány základy integrálního počtu (primitivní funkce, tabulka základních integrálů, per partes, substituce atd.), které se v [11] využívají.

Publikace [11] je psána „fyzikem pro fyziky“, a proto je při odvozování využívána fyzikální motivace, kdykoliv je to možné, a často se ukazuje i geometrická interpretace. Důkazy tvrzení, pokud jsou uváděny, se často omezují na speciální podmínky, které mohou mít fyzikální interpretaci – kniha si neklade za cíl podat zcela obecný přehled probírané problematiky.

S integrály se v [11] pracuje od kapitoly *Vektorová a tenzorová analýza* dále. Jde o jejich aplikace u diferenciálních operátorů, Fourierových řad, pravděpodobnosti atd.

Největší přehled o integrálech se vší matematickou obecností a rigorózností můžeme získat v knihách profesora V. Jarníka *Integrální počet (I)* a *(II)*, [12] a [13].

Kniha [12] je psána jako samostatný pramen, k jehož studiu by nemělo být potřeba dohledávat informace v jiných zdrojích. Poté, co jsou zopakovány nejdůležitější poznatky z *Diferenciálního počtu (I)*, [14], rovněž od profesora Jarníka, jsou zde vybudována integrály od úplných základů a to včetně důkazů. Na rozdíl od [4] se zde však začíná určitým (Riemannovým) integrálem a teprve později se probírá integrál neurčitý (před neurčitým integrálem se probírá „určitý“ integrál s proměnnou horní mezí).

V [12] nenajdeme rozbor fyzikálních aplikací probíraných integrálů, ale kde je to možné, je umístěn obrázek s geometrickou interpretací dané problematiky. V textu se také vyskytuje nezanedbatelné množství příkladů, z nichž některé jsou i ukázkově vyřešeny. Nejedná se však o sbírku, jako je [7] nebo [8].

Když porovnáme obsah této diplomové práce s [12], můžeme v [12] nalézt neurčitý a určitý integrál, obsah pod grafem funkce a délku rovinné křivky.

Publikace [13] navazuje na [12] a je psána ve stejném duchu, ale pracuje se zde již s integrálem Lebesgueovým. Najdeme zde mimo jiné vícerozměrné integrály (mezi něž patří dvojný a trojný), Fubiniovu větu a vztah mezi Lebesgueovým a Riemannovým integrálem.

Pro zájemce o další, podrobně řešené úlohy s fyzikálními aplikacemi integrálů již několik let vzniká na katedře didaktiky fyziky MFF UK *Sbírka řešených úloh*, [15], která je volně dostupná na internetu. Kromě toho, že je zde velké množství vysokoškolských příkladů z fyziky, kde je integrálů využíváno, se v sekci *Fyzika* nachází podsekce *Matematické metody*.

Příklady ve [15] nezbývá než doporučit zvláště proto, že v této diplomové práci se omezujeme pouze na základní, relativně jednoduché úlohy, zatímco úlohy řešené v [15] jsou na vyšší úrovni obtížnosti. Nastal-li by během řešení nějaký problém, lze využít propracovaného systému nápověd, který čtenáře řešením provede.

Literatura

[1] P. Kolář: *Elektronická učebnice k předmětu Úvod do matematických metod fyziky*, Praha 2014.
(1. 5. 2016 dostupné na adrese http://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/)

[2] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky (II)*, Matfyzpress, Praha 2007.

[3] V. Jarník: *Diferenciální počet (II)*, Academia, Praha 1976.

[4] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky (I)*, Matfyzpress, Praha 2004.

[5] J. Kopáček: *Matematická analýza nejen pro fyziky (III)*, Matfyzpress, Praha 2007.

[6] J. Kopáček: *Integrály*, Matfyzpress, Praha 2008.

[7] J. Kopáček a kolektiv: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [I]*, Matfyzpress, Praha 2005.

[8] J. Kopáček a kolektiv: *Příklady z matematiky nejen pro fyziky [III]*, Matfyzpress, Praha 2005.

[9] K. Rektorys a spolupracovníci: *Přehled užité matematiky I*, Prometheus, Praha 2003.

[10] G. B. Arfken, H. J. Weber: *Mathematical Methods for Physicists*, Elsevier, USA 2005.

[11] J. Kvasnica: *Matematický aparát fyziky*, Academia, Praha 2004.

[12] V. Jarník: *Integrální počet (I)*, Academia, Praha 1974.

[13] V. Jarník: *Integrální počet (II)*, Academia, Praha 1976.

[14] V. Jarník: *Diferenciální počet (I)*, Academia, Praha 1974.

[15] Z. Koupilová a KDF MFF UK: *Sbírka řešených úloh*, 2016.
(1. 5. 2016 dostupné na adrese http://reseneulohy.cz/cs)