

**Elektronická učebnice matematických
metod fyziky – křivkový a plošný
integrál II. druhu, diferenciální
operátory**

Pavel Gregor

Obsah

Úvod	4
Použité značení	5
Dostupné zdroje	6
1 Křivkový integrál II. druhu	10
1.1 Vektorová funkce	10
1.2 Křivka	11
1.3 Zavedení křivkového integrálu II. druhu	14
1.4 Vztah pro výpočet křivkového integrálu II. druhu	16
1.5 Řešené úlohy na křivkový integrál II. druhu	18
1.6 Konzervativní vektorové pole	20
1.6.1 Zavedení potenciálu	22
1.6.2 Vztah mezi konzervativním vektorovým polem a potenciálem	23
1.6.3 Poznámka ke konzervativnímu vektorovému poli	25
1.7 Křivkový integrál II. druhu v kontextu dalších integrálů	26
1.8 Využití křivkového integrálu II. druhu ve fyzice	27
1.9 K zapamatování	31
2 Plošný integrál II. druhu	32
2.1 Plocha	32
2.2 Zavedení plošného integrálu II. druhu	35
2.3 Vztahy pro výpočet plošného integrálu II. druhu	38
2.3.1 „Slušně vychovaná plocha“ Σ zadaná parametricky	38
2.3.2 „Slušně vychovaná plocha“ Σ zadaná explicitně	39
2.4 Řešené úlohy na plošný integrál II. druhu	40
2.5 Plošný integrál II. druhu v kontextu dalších integrálů	44
2.6 Využití plošného integrálu II. druhu ve fyzice	44
2.7 K zapamatování	47
3 Diferenciální operátory	48
3.1 Gradient	48
3.1.1 Zavedení gradientu	49
3.1.2 Vlastnosti gradientu	50
3.1.3 Souřadnicový tvar gradientu	52
3.1.4 Řešené úlohy na gradient	58
3.1.5 Odvození vztahu pro výpočet plošného int. II. druhu pro „slušně vychovanou plochu“ Σ zadanou explicitně	61
3.2 Divergence	63
3.2.1 Zavedení divergence	63
3.2.2 Vlastnosti divergence	65
3.2.3 Souřadnicový tvar divergence	66

3.2.4	Gaussova věta (matematická)	71
3.2.5	Řešené úlohy na divergenci	73
3.3	Rotace	76
3.3.1	Zavedení rotace a její vlastnosti	76
3.3.2	Souřadnicový tvar rotace	79
3.4	Laplaceův operátor	79
3.5	Využití diferenciálních operátorů ve fyzice	80
3.6	K zapamatování	81

Seznam použité literatury	82
----------------------------------	-----------

Úvod

V minulých letech vznikly na Katedře didaktiky fyziky Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy¹ práce [1] a [2] sloužící jako učební materiál k předmětu *Matematické metody ve fyzice*, resp. k předmětu *Úvod do matematických metod ve fyzice*, které jsou v současnosti vyučovány na KDF MFF UK. Tyto práce pojednávají o souřadnicových systémech, limitě a derivaci funkce a o integrálech funkce jedné či více proměnných.

Cílem této bakalářské práce je doplnění existujících učebních materiálů o další (dosud nezpracovaná) témata vyučovaná v rámci předmětu *Matematické metody ve fyzice*. Konkrétně se jedná o křivkový integrál II. druhu, plošný integrál II. druhu a diferenciální operátory.

Zpracovaný materiál bude, stejně jako již existující texty, dostupný (od následujícího akademického roku) v elektronické verzi na webových stránkách KDF. Budou jej tak moci využít nejen studenti prezenčního studia učitelství fyziky, ale také studenti *Celoživotního vzdělávání* a další zájemci o zpracovanou problematiku.

Jak již bylo zmíněno, tato práce má sloužit jako učební materiál k předmětu *Matematické metody ve fyzice*. Práce vychází z příprav doktora Hladíka, profesora Podolského a docenta Žáka. Bylo však také čerpáno z dostupných zdrojů, které se danou problematikou zabývají, a v textu je na ně odkazováno. U křivkového a plošného integrálu II. druhu byla využita např. skripta [3], popř. [4]. U diferenciálních operátorů to pak byla např. publikace [5].

Záměrem bakalářské práce je seznámit čtenáře se základy daných témat a jejich aplikacemi, a to nikoliv formou uvádění definic, vět a důkazů, ale spíše pomocí fyzikálně motivovaných příkladů a intuitivních představ – práce tedy není zcela rigorózní, ale na příslušných místech je na to upozorněno. Práce je tvořena převážně souvislým textem, ve kterém je snaha o názorné zavedení příslušných pojmů. Často tato odvození vycházejí z obrázků, které text průběžně doplňují.

Celá bakalářská práce byla napsána v programu \LaTeX , stejně jako všechny texty, na něž bakalářská práce navazuje. Tato skutečnost usnadní případné propojení prací dohromady. Většina obrázků byla vytvářena v programu *Inkscape*. Několik obrázků však bylo vytvořeno v programu *GeoGebra*.

Bakalářská práce začíná rešerší dostupných zdrojů k zpracovávaným tématům. Na rešerší pak navazují kapitoly pojednávající o křivkovém a plošném integrálu II. druhu a diferenciálních operátorech. Jednotlivé kapitoly vždy obsahují uvedení tématu, zavedení nejdůležitějších pojmů, řešené příklady a také propojení daného matematického aparátu s konkrétními fyzikálními partiemi. Na konci každé kapitoly nechybí stručné shrnutí nejdůležitějších poznatků.

Předpokladem pro studování vzniklých učebních textů je znalost středoškolské matematiky a fyziky. Čtenář by tak měl být obeznámen s pojmy, jako např. *skalár*, *vektor*, *skalární součin*, *vektorový součin*, *velikost vektoru*, *graf funkce*, *tečna* nebo *směrnice přímky*. Rovněž je vhodné číst tuto práci v návaznosti na práce [1] a [2], a to z toho důvodu, že se v některých částech tohoto textu odkazujeme na partie, které jsou v [1] a [2] vyloženy.

¹KDF MFF UK

Použité značení

V matematice mnohdy existuje více způsobů zápisu matematických výrazů. Aby nedošlo k případným nedorozuměním, uvádíme níže seznam použitého značení jednotlivých matematických objektů s jejich významem.

$\vec{I} = (I_x, I_y, I_z)$	vektor o souřadnicích I_x, I_y a I_z
(a, b)	zprava uzavřený interval od a do b
(a, b)	otevřený interval od a do b
$\langle a, b \rangle$	zleva uzavřený interval od a do b
$\langle a, b \rangle$	uzavřený interval od a do b
$[c, d]$	bod se souřadnicemi c a d
$\ \vec{u}\ $	velikost (norma) vektoru \vec{u}
$\vec{a} \cdot \vec{b}$	skalární součin vektorů \vec{a} a \vec{b}
$\vec{a} \times \vec{b}$	vektorový součin vektorů \vec{a} a \vec{b}
$\sum_{i=1}^N a_i$	součet hodnot a_i pro $i = 1, 2, \dots, N$
$\int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$	křivkový integrál II. druhu po křivce Γ vektorového pole \vec{P}
$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$	křivkový integrál II. druhu po uzavřené křivce Γ vektorového pole \vec{P}
$\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S}$	plošný integrál II. druhu po ploše Σ vektorového pole \vec{P}
$\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S}$	plošný integrál II. druhu po uzavřené ploše Σ vektorového pole \vec{P}
df	nekonečně malý rozdíl funkčních hodnot skalární funkce f (totální diferenciál)
$\text{grad} f$	gradient skalární funkce f
$\vec{\nabla}$	„vektor“ parciálních derivací $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ (nacházíme-li se v kartézských souřadnicích)
$q_i = (q_1, q_2, q_3)$	křivočaré ortogonální souřadnice
h_i	Laméovy koeficienty
$\frac{\partial f}{\partial x_i}$	parciální derivace skalární funkce f podle proměnné x
$\frac{df}{dx}$	totální derivace skalární funkce f podle proměnné x
$\text{div} \vec{P}$	divergence vektorového pole \vec{P}
$\text{rot} \vec{P}$	rotace vektorového pole \vec{P}

Dostupné zdroje

Bakalářská práce se zabývá několika aparáty matematiky, a to křivkovým integrálem II. druhu, plošným integrálem II. druhu a diferenciálními operátory. Tyto partie matematiky jsou poměrně často využívané nejen ve fyzice, a proto není překvapením, že lze nalézt mnoho literatury zabývající se zmíněnými oblastmi. Nejedná se však pouze o literaturu v tištěné verzi, ale také o zdroje v elektronické podobě, které mohou mít mnoho podob. Nejčastěji jde o pdf dokument (např. [6], [7]) mající roli elektronických skript, prezentaci (např. [8], [9]), popřípadě o internetovou stránku (např. [10]). Lze však nalézt i elektronické zdroje v podobě multimediálního kurzu (např. [11]), které umožňují jak nastudování teorie, procvičení na příkladech s klíčem, tak testy, v nichž si může student vyzkoušet úroveň svých znalostí tématu.

Zdroje ke křivkovému a plošnému integrálu II. druhu

O křivkovém a plošném integrálu II. druhu se lze dočíst v několika knihách. Jednou z nich je [12] s názvem *Integrály* (křivkový integrál II. druhu viz str. 9 a plošný integrál II. druhu viz str. 75), která obsahuje jak výklad teorie, příklady na procvičení s výsledky, tak příklady na aplikaci ve fyzice (u křivkového integrálu).

Další takovou knihou je [5] vydaná pod názvem *Přehled užití matematiky I* (křivkové integrály viz str. 572, plošné integrály viz str. 581), která obsahuje zejména přehled teorie. U této knihy můžeme považovat za nevýhodu souběžný výklad integrálů I. a II. druhu, což však nesouvisí se správností textu.

Skriptum [3] s titulem *Integrační počet funkcí více proměnných s aplikacemi* se zabývá křivkovým (str. 42) a plošným integrálem II. druhu (str. 81) v samostatných kapitolách. Lze v něm nalézt fyzikální motivaci pro daný integrál, přehled teorie, ale také aplikace integrálů.

Skriptum [4] s názvem *Pomocný učební text k průpravnému předmětu učitelského studia fyziky* obsahuje mnoho průpravných příkladů na křivkový integrál II. druhu s výsledky (oddíl C/KI).

Vzhledem k tomu, že se u doposud zmíněné literatury jedná o knihy v tištěné podobě, které jsou zpravidla před tiskem recenzovány, lze předpokládat, že se v nich nevyskytují závažnější chyby. Většina z uvedených děl je také proto doporučenou literaturou pro předmět *Matematické metody ve fyzice*, který je v současné době vyučován na KDF MFF UK.

Na rozdíl od tištěné literatury, k elektronickým zdrojům je nutné přistupovat kriticky. Jistě je mnoho z nich na vysoké úrovni, ale mohou se mezi nimi objevit zdroje, v nichž jsou nepřesnosti.

Jedním z takových zdrojů je internetová stránka [10] známá jako *OnlineSchool.cz*, která se zaměřuje mimo jiné na křivkový integrál II. druhu. Kromě textu objasňující danou problematiku obsahuje internetová stránka i videa, v nichž jsou vzorově řešené příklady. Upozorňujeme ale, že autor není konzistentní při zápisu matematických výrazů. Narozdíl od rovnic, v textu autor nedodrжуje zvyklosti

značení, např. při psaní součinu, kdy místo $x \cdot y$ píše „ $x \times y$ “ (viz podkapitola „Vektorová funkce“), což může evokovat vektorový součin. Dalším příkladem problému ve značení je psaní „ F “ označující vektor síly namísto \vec{F} . Text dále obsahuje nevhodné výrazy, které by se v odborném, seriózním naučném či populárně naučném textu neměly vyskytovat (např. „WTF?“, viz podkapitola „Křivkový integrál z vektorové funkce“, 2. odstavec). V neposlední řadě se autor dopouští nevhodného zjednodušení, např. když tvrdí, že výraz dy v integrálu říká „zderivuj ypsilon“ (viz podkapitola „Derivace vyjádření křivky“), přičemž tento výraz chápeme spíše jako nekonečně malý přírůstek proměnné y . Pokud však tuto internetovou stránku budeme chápat jako snahu o neformální přiblížení problematiky křivkového integrálu II. druhu, lze do jisté míry pochopit zmíněné nedostatky.

Dalším ne úplně vhodným elektronickým zdrojem pro studium křivkového, resp. plošného integrálu II. druhu je [11] (*Multimediální kurz z aplikované vyšší matematiky*). Nevhodnost vidíme zejména v tom, že kurz obsahuje k dané oblasti pouze stručný přehled teorie bez odvození, popř. obrázků znázorňujících problematiku. V multimediálním kurzu chybí příklady a testy pro křivkový a plošný integrál, které u jiných témat dostupné jsou. Jako nedostatek lze považovat také psaní veličin bez použití kurzívy.

Elektronický zdroj [9] s názvem *Matematická analýza* lze zobrazit ve verzi pdf i prezentace. Jedná se o kurz, který má zřejmě pomocí kreslených postav s neformálními komentáři provést nejrůznějšími partiemi matematiky, a to i křivkovým a plošným integrálem II. druhu. Výhodou tohoto zdroje je podrobný, ale přehledný text obsahující navíc příklady k procvičení dané partie. Naproti tomu, u křivkového integrálu II. druhu chybí odvození vztahu pro výpočet tohoto integrálu a také to, že je křivkový integrál zaveden pro rovinnou křivku. Stejně tak materiál neobsahuje důkaz věty týkající se vztahu pro výpočet plošného integrálu II. druhu pro explicitně zadanou plochu. Jelikož měl ale autor zřejmě snahu vytvořit přehledný materiál, nelze absenci odvození, resp. důkazů považovat jednoznačně za nedostatek. V neposlední řadě chybí v textu obrázky ilustrující danou problematiku.

Prezentace [8] s názvem *Aplikovaná matematika* obsahuje mnoho kapitol, křivkovým integrálem II. druhu se však zabývá stručně. Lze v ní nalézt stručný přehled teorie. Za výhodu lze považovat propojení výkladu s fyzikou (vysvětlení na příkladu výpočtu práce). Nevýhodou je zmíněný malý rozsah textu.

Za vhodný elektronický zdroj můžeme považovat internetovou stránku [13] s názvem *Křivkový integrál*. Text nabízí propojení s fyzikou, přehledný výklad. Je zde kladen důraz na aplikace křivkového integrálu. Internetová stránka je doplněna o obrázky a schémata. Na stránce můžeme také nalézt odkazy na různé zdroje objasňující použité pojmy, popř. animaci. Za nevýhodu tohoto zdroje lze považovat absenci odvození alespoň některých tvrzení. V textu lze také narazit na označení $\Delta \vec{r}$, u něhož není explicitně napsáno, co znamená (viz podkapitola „Křivkový integrál druhého druhu“). Z kontextu je to ale poměrně zřejmé.

Elektronické skriptum [6] (*Křivkový a plošný integrál*) nabízí motivaci k danému tématu, přehled teorie i řešené příklady. Hlavní výhodou tohoto textu je matematická přesnost a dodržování zavedeného značení. I z tohoto důvodu lze skriptum doporučit pro studování křivkového i plošného integrálu.

Na elektronickém zdroji [7] s názvem *Plošný integrál* můžeme ocenit, že výchozí textu jsou na úrovni střední školy (skalární součin, obecná rovnice roviny,

velikost vektoru, atd.), což napomáhá srozumitelnosti. Další předností materiálu je to, že autor vysvětluje plošný integrál II. druhu na výpočtu toku vektorového pole, tedy přímo na jeho aplikaci. Text také obsahuje řešené příklady. Nedostatkem jsou chybějící obrázky, resp. schémata.

Zdroje k diferenciálním operátorům

O diferenciálních operátorech se můžeme dočíst, stejně jako u křivkového a plošného integrálu II. druhu, v knihách [5] s názvem *Přehled užití matematiky I.* (str. 226–228) a [4] s titulem *Pomocný učební text k průpravnému předmětu učitelského studia fyziky* (oddíl C/VAn), o kterých jsme se již zmínili.

Kromě těchto knih se lze dočíst o diferenciálních operátorech v knize [14] s názvem *Matematický aparát fyziky* (gradient str. 139, divergence str. 145 a rotace str. 146), která obsahuje přehled teorie ke gradientu, rotaci, divergenci a také obsahuje např. Gaussovu a Stokesovu větu. Dále můžeme v knize nalézt řešené úlohy. Stejně jako tomu bylo u již zmíněných knih, i u této knihy lze předpokládat, že neobsahuje závažnější chyby.

Co se týče elektronických zdrojů, o diferenciálních operátorech pojednávají i některé z již zmíněných zdrojů. Jedná se o zdroj [9] (*Matematická analýza*), [8] (*Aplikovaná matematika*) a [11] (*Multimediální kurz z aplikované vyšší matematiky*). Zatímco první dva zdroje by se daly zhodnotit podobně jako u integrálů II. druhu, třetí ze zmíněných elektronických zdrojů obsahuje kromě přehledu teorie (ve stejném formátu jako u integrálů) i mnoho příkladů k procvičení s řešením, což u integrálů II. druhu chybělo.

Další elektronický zdroj zabývající se operátory je pdf dokument [15] s názvem *Diferenciální operátory vektorové analýzy*, který má podobu učebního textu, jehož nejvýraznější předností je přehlednost (včetně dodržování běžného matematického značení) a srozumitelnost výkladu. Text mimo jiné obsahuje přehled teorie, shrnutí zásadních informací z dané kapitoly, otázky pro čtenáře, řešené příklady, ale i úlohy pro samostatné řešení. Za nedostatek lze považovat to, že jsou operátory zavedeny pomocí jejich souřadnicového tvaru v kartézské soustavě souřadnic. Jsme totiž ochuzeni o obecné vyjádření souřadnicového tvaru diferenciálních operátorů, z kterého pak jednoduše vyplývá i vyjádření pro kartézskou soustavu souřadnic. Dále se také autor při výkladu divergence, resp. rotace odkazuje na Gaussovu, resp. Stokesovu větu, o kterých však text samostatně nepojednává a ani výslovně neodkazuje na literaturu, kde bychom si mohli danou problematiku nastudovat.

Prezentace [17] s názvem *Základy vektorové analýzy* se rovněž zabývá diferenciálními operátory. Obsahuje přehledný soupis teorie, věty (některé i s důkazy), příklady a obrázky ilustrující danou problematiku. Přínosné je také občasné použití konkrétního příkladu (např. u divergence se na vektorové pole pohlíží jako na tekutinu). Nedostatkem prezentace je nejednotnost při značení vektorů. Autor pracuje pouze v kartézské soustavě souřadnic.

Elektronický zdroj [18] (*Počtení praktikum - Diferenciální operátory*) je internetová stránka obsahující základní přehled operátorů s příklady (s klíčem). Hlavní výhodou tohoto zdroje je to, že obsahuje vyjádření operátorů nejen v kartézských, ale i cylindrických a sférických souřadnicích. Nevýhodou textu je zavedení operátorů pouze pomocí symboliky s „vektorem“ $\vec{\nabla}$, tj. chybí představa jak operátory

„vznikly“. Tento zdroj tak zřejmě nepostačí pro studium diferenciálních operátorů, ale je velice dobrým přehledem důležitých informací týkajících se tohoto tématu.

Metody vyhledávání elektronických zdrojů

Elektronické zdroje, jak pro křivkový a plošný integrál II. druhu, tak pro diferenciální operátory, byly vyhledávány v rozmezí tří dnů (od 31. 7. 2020 do 2. 8. 2020). Používal jsem zejména vyhledávače *Google* a *Seznam*. Do těchto vyhledávačů jsem zadával klíčová slova jako *křivkový integrál druhého druhu*, *plošný integrál*, *operátory gradient*, *operátory divergence*, *operátory rotace* nebo *diferenciální operátory*. Pro každý ze zadaných výrazů bylo projito přibližně prvních dvacet odkazů.

1. Křivkový integrál II. druhu

Křivkový integrál II. druhu je cenný aparát matematiky, který nalezne hojně využití zejména ve fyzice. Poprvé se s tímto integrálem člověk pravděpodobně potká už v rámci mechaniky v souvislosti s prací. Není to však pouze mechanika, která křivkový integrál II. druhu používá. Tento druh integrálu nalezne uplatnění např. i v elektřině a magnetismu, a to třeba při výpočtu elektrostatického potenciálu z elektrické intenzity nebo v souvislosti s Ampérovým zákonem celkového proudu.

Díky tomuto integrálu jsme schopni integrovat vektorové veličiny (resp. vektorová pole) po prostorové křivce splňující určité podmínky. Narozdíl od některých jiných druhů integrálů tak nemusíme integrovat pouze po úsečce či přímce a navíc se v integrálu objeví veličina, která nemá pouze velikost, ale i směr. Třeba u výpočtu práce tak nebude potřeba uvažovat pouze přímočarý pohyb hmotného bodu, na nějž působí konstantní síla, ale budeme již schopni pracovat se zakřivenou trajektorií a silou, která bude závislá na poloze, tj. budeme uvažovat velice obecný případ.

V této kapitole si postupně vysvětlíme, proč se tento integrál nazývá zrovna křivkový II. druhu, zaměříme se na jeho definici, grafické znázornění a zejména si ukážeme jak integrál vypočítat.

To, že se integrál nazývá křivkový, není překvapením, protože již víme, že budeme integrovat po prostorové křivce. Sousední „II. druhu“ říká, že budeme integrovat vektorovou funkci (narozdíl od integrálů I. druhu, kde integrujeme skalární funkci). Nabízejí se tak otázky:

- Co je to vektorová funkce?
- Co přesně budeme považovat za křivku a jaké podmínky musí splňovat?

1.1 Vektorová funkce

Na úvod zmíníme, že pojmy *vektorová funkce*, *vektorové pole* a *vektorová veličina* vyjadřují v podstatě totéž. Jak je známo, rozdíl mezi vektorovou a skalární veličinou je v tom, že skalární veličina je charakterizovaná pouze velikostí, kdežto vektorová veličina má velikost i směr. V tabulce 1.1 je pro ilustraci uvedeno několik příkladů skalárních a vektorových veličin.

skalární veličiny	vektorové veličiny
tlak	síla
práce	magnetická indukce
teplota	rychlost
hmotnost	zrychlení
dráha	elektrická intenzita
	gravitační zrychlení

Tabulka 1.1: Příklady skalárních a vektorových veličin

Označme *vektorové pole (funkci, veličinu)* \vec{P} . Pak pro toto vektorové pole můžeme v rovině s kartézskou soustavou souřadnic napsat $\vec{P} = (P_x, P_y)$, kde P_x je x -ová složka pole \vec{P} a P_y je jeho y -ová složka. V prostoru pak obdobně $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$, kde P_z je z -ová složka tohoto pole.

Kromě toho budeme uvažovat vektorové pole měnící se s polohovým vektorem \vec{r} , tj. $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$. Jinými slovy, v každém místě křivky, po které budeme integrovat, může mít pole \vec{P} jinou velikost, ale i směr. Obecně tak každá ze složek P_x , P_y a P_z závisí na souřadnicích x , y a z .

Uveďme příklady vektorových polí:

- V případě homogenního gravitačního pole můžeme považovat za vektorové pole gravitační zrychlení $\vec{g} = (0, 0, -g)$, kde g je velikost tohoto zrychlení. Přičemž uvažujeme, že gravitační zrychlení \vec{g} má směr záporné poloosy z .
- V případě elektrického pole v okolí bodového náboje Q (ve vakuu) můžeme za vektorové pole považovat vektor elektrické intenzity \vec{E} , pro nějž platí vztah (odvození viz podkapitola 2.6):

$$\begin{aligned} \vec{E} = (E_x, E_y, E_z) &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^3} \cdot \vec{r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \cdot (x, y, z) = \\ &= \left(\frac{Q \cdot x}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Q \cdot y}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, \frac{Q \cdot z}{4\pi\epsilon_0 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right), \end{aligned}$$

kde \vec{r} je polohový vektor, r je jeho velikost rovnající se vzdálenosti daného bodu od bodového náboje (uvažujeme bodový náboj umístěný v počátku soustavy souřadnic) a ϵ_0 je permitivita vakua.

1.2 Křivka

Pod pojmem *křivka* si jistě každý intuitivně představí čáru, která může být různě zahnutá, přičemž tato čára se obecně může nacházet v prostoru, nikoliv pouze v rovině. V našem textu budeme křivku značit Γ (čteme: gama) a obvykle budeme pracovat s jejím parametrickým vyjádřením. Budeme-li chtít zavést křivkový integrál II. druhu, budeme uvažovat pouze křivky splňující určité podmínky. Vzpomeneme-li si na zavedení křivkového integrálu I. druhu, tak tam jsme tyto křivky nazvali „slušně vychované“.² Pojďme si nyní zopakovat, o co jde.

Co přesně tedy budeme považovat za „slušně vychovanou křivku“?

²Viz [2], str. 54.

Uvedme nejprve několik příkladů „slušně vychovaných křivek“ vyjádřených parametricky:

- Kružnice (o poloměru r , se středem v počátku)

$$\begin{aligned}x &= r \cdot \cos \phi \\y &= r \cdot \sin \phi, \quad \text{kde } \phi \in \langle 0, 2\pi \rangle\end{aligned}\tag{1.1}$$

- Čtvrt elipsy (s hlavní poloosou a , vedlejší poloosou b a se středem v počátku)

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \cos \phi \\y &= b \cdot \sin \phi, \quad \text{kde } \phi \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle\end{aligned}\tag{1.2}$$

- Šroubovice s poloměrem a

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \cos t \\y &= a \cdot \sin t \\z &= b \cdot t, \quad \text{kde } t \in (-\infty, +\infty), b = \text{konst.}\end{aligned}\tag{1.3}$$

Nyní uvedme příklady čar, které za „slušně vychované křivky“ považovat nedeme:

- Graf funkce $y = |x|$

$$\begin{aligned}x &= t \\y &= |t|, \quad \text{kde } t \in (-\infty, +\infty)\end{aligned}\tag{1.4}$$

- Graf funkce $y = |\sin x|$

$$\begin{aligned}x &= t \\y &= |\sin t|, \quad \text{kde } t \in (-\infty, +\infty)\end{aligned}\tag{1.5}$$

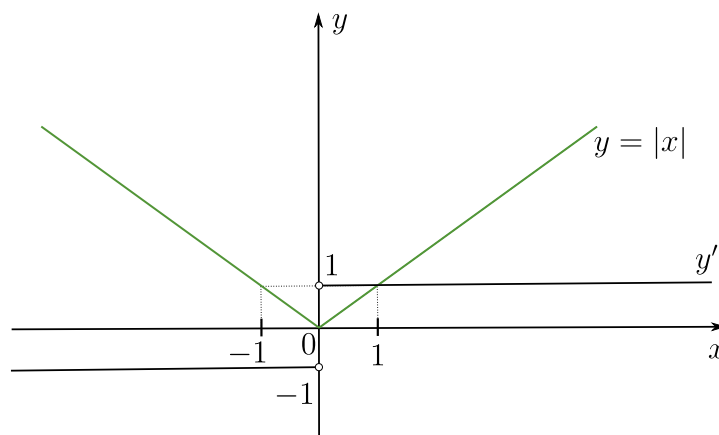
Podíváme-li se na příklady „slušně vychovaných křivek“, zjistíme, že se jedná o *spojité*³ čáry. Tuto podmínku však splňují i grafy 1.4 a 1.5, o kterých tvrdíme, že „slušně vychovanými křivkami“ nejsou. Musí tak existovat další podmínky, které má „slušně vychovaná křivka“ splňovat.

Jednou z takových podmínek je *hladkost*⁴, neboli *spojitá diferencovatelnost*. To, že je křivka hladká, nejjednodušeji poznáme z obrázku. Zjednodušeně řečeno, pokud se v obrázku nevyskytují žádná místa, kde by vznikala „špička“ nebo „hrot“, tak je křivka hladká. Právě tuto podmínku nespĺňují uvedené příklady čar, které „slušně vychovanými křivkami“ nejsou. U grafu funkce $y = |x|$ je problémovým místem bod $[0,0]$. Na intervalu $(0, +\infty)$ je totiž derivace funkce $y = |x|$ rovna číslu 1, ale na intervalu $(-\infty, 0)$ je derivace rovna číslu -1 . Pro $x = 0$ tak derivace není definována.⁵

³Pojem spojitost známe z matematické analýzy, kde se hovoří mimo jiné o spojitosti funkce $f(x)$ v bodě a , pokud $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$. Je-li pak funkce $f(x)$ spojitá ve všech bodech definičního oboru, řekneme o ní, že je spojitá. Více se lze o spojitosti funkcí dočíst např. v [5], str. 355.

⁴V některých knihách (jako např. v [3], str. 34) se lze dočíst, že hladkost souvisí se spojitě se měnící tečnou ke křivce.

⁵Viz obrázek č. 1.1.



Obrázek 1.1: Graf funkce $y = |x|$ a její derivace y'

U grafu funkce $y = |\sin x|$ je pak problémových míst nekonečně mnoho. Jedná se o body $[k \cdot \pi, 0]$, kde k je celé číslo. Zmíněné body u obou grafů jsou problémové, protože v nich neexistují derivace, a tedy nemůžeme mluvit o spojitě diferencovatelnosti.

Třetí vlastností „slušně vychovaných křivek“ je to, že se neprotínají. Mějme křivku zadanou parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t),\end{aligned}$$

kde t je parametr z určitého definičního oboru (ozn. J). Pokud by se křivka protínala, tak $\exists t_1, t_2 \in J; t_1 \neq t_2$, pro něž platí, že:

$$\begin{aligned}x(t_1) &= x(t_2) \\y(t_1) &= y(t_2) \\z(t_1) &= z(t_2).\end{aligned}$$

Jediný bod průniku, který budeme tolerovat, je totožnost počátečního a koncového bodu křivky. Tato vlastnost nám zaručí, že uzavřené křivky, jako je např. kružnice, budeme moci považovat za „slušně vychované křivky“. Jedním z příkladů čar, která nebude „slušně vychovanou křivkou“ kvůli požadavku neprotínání se, by byla čára ve tvaru čísla osm.

V neposlední řadě je vhodné vyloučit další výjimečnosti, tj. například křivku, která by byla tvořena jedním bodem nebo křivku singulární,⁶ neboli křivku, která by se „zastavila“ a poté „šla zpět“, tj. vytvořila by velice ostrý hrot.

Prostorovou (popřípadě rovinnou) „slušně vychovanou křivkou“ tak budeme rozumět takovou množinu bodů prostoru (popřípadě roviny), že pro ni platí podmínka spojitosti, hladkosti, nedochází k protnutí (kromě případu, kdy je jediným bodem průniku počátek a konec uzavřené křivky) a také se nejedná o tzv. výjimečnosti.

Je dobré si rovněž uvědomit, že každou rovinnou křivku můžeme chápat jako křivku prostorovou (třetí souřadnici, většinou z , můžeme zvolit jako konstantu), ale ne každá prostorová křivka je křivkou rovinnou (např. šroubovice).

⁶Singulární křivkou nazveme takovou křivku, která obsahuje alespoň jeden singulární bod, přičemž bod je singulární, pokud jím lze vést více než jednu tečnu k dané křivce (viz [16]).

1.3 Zavedení křivkového integrálu II. druhu

Jak již bylo v úvodu kapitoly 1 zmíněno, pravděpodobně první případ, kde se ve fyzice s *křivkovým integrálem II. druhu* setkáme, je při výpočtu práce. Na základní škole se běžně setkáme se vzorcem pro výpočet práce W ve tvaru:

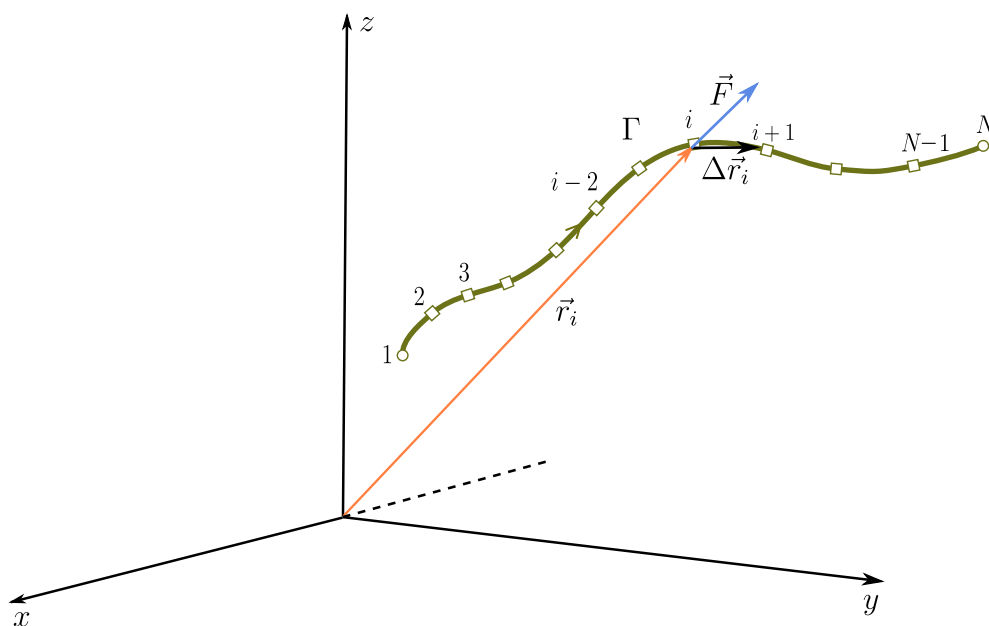
$$W = F \cdot s, \quad (1.6)$$

kde F je velikost síly působící na těleso a s je dráha, po které se těleso posunulo při působení síly \vec{F} . Na střední škole se pak setkáváme se vztahem:

$$W = F \cdot s \cdot \cos \alpha, \quad (1.7)$$

kde α je úhel, který svírá vektor síly \vec{F} se směrem pohybu. V obou vztazích 1.6 i 1.7 je však nutný předpoklad, že síla \vec{F} je konstantní. Kdyby však tato síla konstantní nebyla nebo by byla trajektorie zakřivená, zmíněné vzorce bychom pro výpočet práce použít nemohli. Tento problém lze však jednoduše vyřešit, pokud známe křivkový integrál II. druhu.

Mějme hmotný bod, který se pohybuje po „slušně vychované křivce“ Γ a působí na něj síla \vec{F} tak, jak je naznačeno na obrázku 1.2. Naším cílem bude určit



Obrázek 1.2: Působení síly na hmotný bod pohybující se po křivce

práci W vykonanou při pohybu hmotného bodu po této křivce při působení síly \vec{F} , která se mění s polohou, tj. $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$.

Pokud by nám nevadila jistá nepřesnost při určení práce W , mohlo by nás napadnout rozdělit křivku Γ na malé kousky (viz obrázek 1.2), na kterých by byla síla \vec{F} přibližně konstantní a zmíněné kousky bychom mohli považovat přibližně za úsečky. Bodům vymezujícím jednotlivé kousky křivky bychom přiřadili čísla $1, 2, \dots, N$, kde N je jejich počet. Každému kousku bychom dále přiřadili vektor $\Delta\vec{r}_i = \vec{r}_{i+1} - \vec{r}_i$, kde \vec{r}_i a \vec{r}_{i+1} jsou polohové vektory bodů i a $i+1$, které vymezují daný kousek křivky.

Když bychom chtěli přibližně vypočítat práci W_i při pohybu hmotného bodu po kousku, kterému odpovídá vektor $\Delta\vec{r}_i$, při působení síly $\vec{F}(\vec{r}_i)$, v podstatě bychom využili středoškolský vzorec 1.7 pro výpočet práce. V našem případě by roli dráhy s hrála velikost $\|\Delta\vec{r}_i\|$, a tedy bychom dostali:

$$W_i \doteq F(\vec{r}_i) \cdot \|\Delta\vec{r}_i\| \cdot \cos \alpha. \quad (1.8)$$

Výraz $F(\vec{r}_i) \cdot \|\Delta\vec{r}_i\| \cdot \cos \alpha$ však nevyjadřuje nic jiného než skalární součin $\vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$, a tedy můžeme napsat:

$$W_i \doteq \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \quad (1.9)$$

Pro výpočet přibližné hodnoty celkové práce W vypočteme dílčí práce na všech kouscích křivky Γ a tyto hodnoty sečteme:

$$W \doteq \sum_{i=1}^{N-1} W_i, \quad (1.10)$$

přičemž sčítáme přes $N - 1$ kousků křivky Γ . Ze vztahů 1.9 a 1.10 pak plyne:

$$W \doteq \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \quad (1.11)$$

Jak jsme však několikrát zmínili, náš postup zahrnoval nepřesnosti (při dělení křivky Γ na kousky), a tedy výsledek 1.11 je pouze přibližný. Jistě bychom se však shodli, že pokud bychom kousky, na něž dělíme křivku Γ , zmenšovali, tj. počet kousků $N - 1$ (a tedy i počet dělicích bodů N) by se zvětšoval, přesnost našeho výsledku by se také zvětšovala. Právě z této úvahy plyne přesný vztah pro práci:

$$W = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \quad (1.12)$$

Je zvykem, že výraz $\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$ nazýváme *křivkovým integrálem II. druhu* síly $\vec{F}(\vec{r})$ po křivce Γ a formálně jej značíme jako

$$\int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}.$$

Platí tedy:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{F}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i. \quad (1.13)$$

Celou problematiku křivkového integrálu II. druhu jsme si tak vysvětlili na příkladu práce, kdy jsme dospěli k integrálu síly $\vec{F}(\vec{r})$. Uvědomme si však, že místo síly můžeme v křivkovém integrálu II. druhu pracovat s téměř libovolnou (definovanou) vektorovou veličinou (resp. polem) $\vec{P}(\vec{r})$,⁷ a tedy, že lze obecně napsat:

$$\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i, \quad (1.14)$$

⁷Takovým vektorovým polem může být např. vektor elektrické intenzity \vec{E} při výpočtu elektrického napětí nebo vektor magnetické indukce \vec{B} při formulaci Ampérova zákona celkového proudu.

což je vztah, který budeme považovat za definici křivkového integrálu II. druhu.⁸

Výhoda definice 1.14 spočívá v tom, že z ní jednoduše vyčteme, jak integrál „vznikl“. Výraz s limitou však není vhodný pro praktické počítání křivkového integrálu II. druhu v konkrétních úlohách, a tak budeme muset odvodit vztah pro výpočet tohoto integrálu. Hledaný vztah však poměrně jednoduše vyplyne v podkapitole 1.4.

1.4 Vztah pro výpočet křivkového integrálu II. druhu

Pro výpočet křivkového integrálu II. druhu bude výhodné pracovat s parametricky zadanými křivkami, tj. x -ová, y -ová i z -ová souřadnice budou závislé na nějakém parametru⁹ z daného intervalu. S příklady takto zadaných křivek jsme již pracovali v podkapitole 1.2.

Uvažujme křivku Γ zadanou rovnicemi:

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t), \quad \text{kde } t \in J,\end{aligned}\tag{1.15}$$

přičemž t je parametr a J je definičním oborem pro tento parametr (typicky $J = \langle c, d \rangle$).

Vyjďeme z definice 1.14 křivkového integrálu II. druhu a zaměřme se na skalární součin z pravé strany definičního vztahu. Pro něj můžeme napsat:¹⁰

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i &= (P_x(\vec{r}_i), P_y(\vec{r}_i), P_z(\vec{r}_i)) \cdot (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i) = \\&= P_x(\vec{r}_i) \cdot \Delta x_i + P_y(\vec{r}_i) \cdot \Delta y_i + P_z(\vec{r}_i) \cdot \Delta z_i.\end{aligned}\tag{1.16}$$

Při práci s parametricky zadanými křivkami bude výhodné dostat do vztahu 1.16 parametr t , přesněji jeho změnu Δt . Proto vynásobme vztah 1.16 výrazem $\frac{\Delta t}{\Delta t}$, tj. číslem jedna ve speciálním tvaru:

$$\begin{aligned}\vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i &= (P_x(\vec{r}_i) \cdot \Delta x_i + P_y(\vec{r}_i) \cdot \Delta y_i + P_z(\vec{r}_i) \cdot \Delta z_i) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta t} = \\&= \left(P_x(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + P_y(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta y_i}{\Delta t} + P_z(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t.\end{aligned}\tag{1.17}$$

⁸Poznamenejme, že v některé literatuře (např. [3], str. 43) lze nalézt definici křivkového integrálu II. druhu na základě souvislosti tohoto typu integrálu s křivkovým integrálem I. druhu. Touto souvislostí se budeme zabývat v podkapitole 1.7. Další možností, jak křivkový integrál II. druhu definovat, je pomocí vztahu pro výpočet tohoto integrálu (jako např. v [11], část 11.3), o kterém pojednává podkapitola 1.4.

⁹Často bývá ve fyzice parametrem čas, což je také důvod, proč obvykle v textu používáme pro jeho označení písmeno t . Parametrem však mohou být i jiné veličiny, např. úhel α .

¹⁰Vycházíme ze středoškolské definice skalárního součinu dvou vektorů \vec{u} a \vec{v} ve tvaru $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, kde $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$.

Dosadme tento vztah do definičního výrazu pro křivkový integrál II. druhu (viz vztah 1.14):

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{r}_i = \\ & = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \left(P_x(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + P_y(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta y_i}{\Delta t} + P_z(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t. \end{aligned} \quad (1.18)$$

Nyní provedme limitní přechod. Budeme-li zvětšovat počet dělicích bodů na křivce Γ , budou se zmenšovat jednotlivé úseky odpovídající vektorům $\Delta \vec{r}_i$ (tedy Δx_i , Δy_i i Δz_i se budou zmenšovat), a tak intuitivně cítíme, že se i Δt musí zmenšovat (půjde k nule). Můžeme tak napsat:

$$\begin{aligned} & \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \left(P_x(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta x_i}{\Delta t} + P_y(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta y_i}{\Delta t} + P_z(\vec{r}_i) \cdot \frac{\Delta z_i}{\Delta t} \right) \cdot \Delta t = \\ & = \int_{t=c}^d \left(P_x(\vec{r}) \cdot \frac{dx}{dt} + P_y(\vec{r}) \cdot \frac{dy}{dt} + P_z(\vec{r}) \cdot \frac{dz}{dt} \right) dt, \end{aligned} \quad (1.19)$$

přičemž c a d jsou krajní hodnoty intervalu J (viz vztah 1.15), tj. definičního oboru pro parametr t . Podíváme-li se na rovnost 1.19, zjistíme, že se ze sumy stal integrál, z Δt se stalo dt a z podílů $\frac{\Delta x_i}{\Delta t}$, $\frac{\Delta y_i}{\Delta t}$, $\frac{\Delta z_i}{\Delta t}$ se staly derivace $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$.

Poslední zmíněná „přeměna“ souvisí s tím, že např. derivace $\frac{dx}{dt}$ v bodě a je definována jako:¹¹

$$\frac{dx(a)}{dt} = \lim_{t \rightarrow a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a}. \quad (1.20)$$

Stačí si uvědomit, že x je funkcí parametru t . Označme $x(t) - x(a)$ jako Δx a $t - a$ jako Δt . Bude-li pak t velmi blízko a , můžeme napsat:

$$\frac{dx(a)}{dt} \doteq \frac{\Delta x}{\Delta t}. \quad (1.21)$$

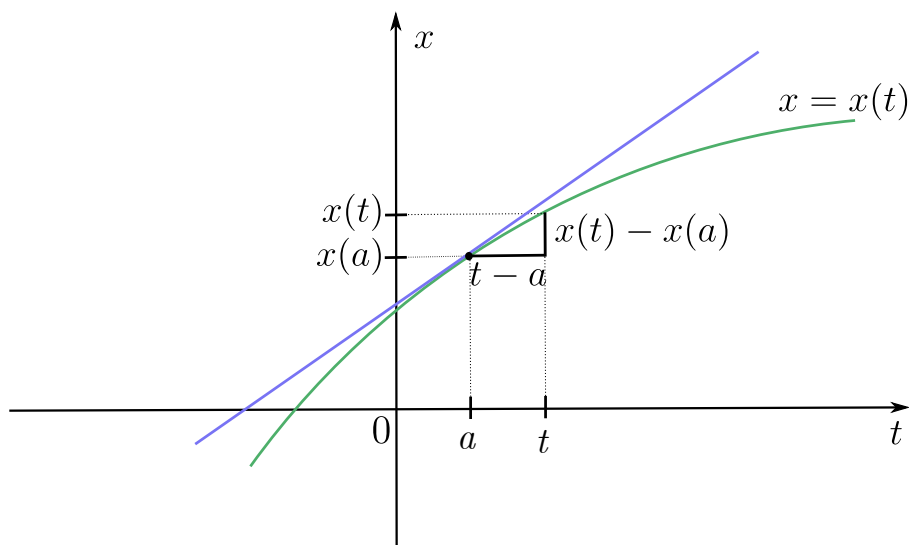
Tuto přibližnou rovnost můžeme také odvodit z obrázku 1.3, na němž je znázorněna závislost x na t . Derivace v bodě a má význam směrnice tečny grafu funkce $x = x(t)$ v tomto bodě. Směrnice je ale také rovna tangente směrového úhlu, která je přibližně rovna poměru $\frac{x(t) - x(a)}{t - a} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$.

Označme $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$ a $\frac{dz}{dt} = z'$, pak lze přepsat vztah 1.19 na tvar:

$$\boxed{\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t=c}^d (P_x(\vec{r}) \cdot x' + P_y(\vec{r}) \cdot y' + P_z(\vec{r}) \cdot z') dt}. \quad (1.22)$$

Právě vztah 1.22 bude velice užitečný pro výpočet křivkového integrálu II. druhu v úlohách.

¹¹Viz [1], str. 32.



Obrázek 1.3: Odvození směrnice tečny

1.5 Řešené úlohy na křivkový integrál II. druhu

Úloha č. 1:

Vypočtete křivkový integrál II. druhu vektorového pole $\vec{P} = (x + y, y^2, xz)$ po elipse ležící v rovině $z = 2$ s hlavní poloosou délky 5 a vedlejší poloosou délky 3. Hlavní osa elipsy je rovnoběžná s osou x , vedlejší osa elipsy je rovnoběžná s osou y a střed elipsy leží na ose z . Elipsu budeme „probíhat“ proti směru hodinových ručiček.

Řešení:

Nejprve napíšeme parametrické rovnice zadané elipsy:

$$\begin{aligned}x &= 5 \cos \phi \\y &= 3 \sin \phi \\z &= 2,\end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$. Při výpočtu budeme vycházet ze vztahu 1.22. Vypočteme nejdříve potřebné derivace:

$$x' = \frac{dx}{d\phi} = -5 \sin \phi, \quad y' = \frac{dy}{d\phi} = 3 \cos \phi, \quad z' = \frac{dz}{d\phi} = 0.$$

Nyní se zaměříme na vektorové pole:

$$\vec{P} = (x + y, y^2, xz) = (5 \cos \phi + 3 \sin \phi, (3 \sin \phi)^2, 5 \cos \phi \cdot 2).$$

Známe tedy vše potřebné, a tak dosadíme do vztahu 1.22:

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_{\phi=0}^{2\pi} (P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z') d\phi = \\&= \int_{\phi=0}^{2\pi} [(5 \cos \phi + 3 \sin \phi) \cdot (-5 \sin \phi) + (3 \sin \phi)^2 \cdot 3 \cos \phi + 5 \cos \phi \cdot 2 \cdot 0] d\phi =\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{\phi=0}^{2\pi} (-25 \cos \phi \sin \phi - 15 \sin^2 \phi + 27 \sin^2 \phi \cos \phi) d\phi = \\
&= -25 \int_{\phi=0}^{2\pi} \cos \phi \sin \phi d\phi - 15 \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2 \phi d\phi + 27 \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin^2 \phi \cos \phi d\phi = \\
&= -\frac{25}{2} \int_{\phi=0}^{2\pi} \sin 2\phi d\phi - 15 \int_{\phi=0}^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\phi}{2} d\phi + 27 \int_{s=\sin 0}^{\sin 2\pi} s^2 ds = \\
&= \frac{25}{4} (\cos(4\pi) - \cos 0) - 15\pi + \frac{15}{4} (\sin(4\pi) - \sin 0) + 0 = -15\pi.
\end{aligned}$$

V předposledním řádku byla použita u třetího sčítance substituce $s = \sin \phi$. Křivkový integrál II. druhu ze zadaného vektorového pole \vec{P} po zadané elipse je roven -15π .

Úloha č. 2:

Vypočtěte křivkový integrál II. druhu vektorového pole $\vec{P} = (z, y^3, x)$ po úsečce AB , kde $A = [2, 2, 1]$ a $B = [8, 5, 2]$.

Řešení:

Pro výpočet budeme potřebovat znát parametrické vyjádření úsečky AB . Nejdříve tedy vypočteme směrový vektor úsečky: $\vec{u} = B - A$:

$$\vec{u} = [8, 5, 2] - [2, 2, 1] = (6, 3, 1).$$

Nyní napíšeme parametrické rovnice úsečky AB :¹²

$$\begin{aligned}
x &= 2 + 6t \\
y &= 2 + 3t \\
z &= 1 + t, \quad \text{kde } t \in \langle 0, 1 \rangle.
\end{aligned}$$

Při výpočtu integrálu budeme opět vycházet ze vztahu 1.22. Spočteme potřebné derivace:

$$x' = \frac{dx}{dt} = 6, y' = \frac{dy}{dt} = 3, z' = \frac{dz}{dt} = 1.$$

V neposlední řadě potřebujeme vyjádřit vektorové pole \vec{P} pomocí parametru t :

$$\vec{P} = (z, y^3, x) = (1 + t, (2 + 3t)^3, 2 + 6t).$$

Známe tedy vše potřebné, a tak můžeme dosadit do vztahu 1.22:

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} &= \int_{t=0}^1 (P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z') dt = \\
&= \int_{t=0}^1 [(1 + t) \cdot 6 + (2 + 3t)^3 \cdot 3 + (2 + 6t) \cdot 1] dt = \int_{t=0}^1 (32 + 120t + 162t^2 + 81t^3) dt =
\end{aligned}$$

¹²Více se lze o parametrickém vyjádření přímky, resp. úsečky dočíst v [19], str. 66.

$$\begin{aligned}
&= 32 \int_{t=0}^1 dt + 120 \int_{t=0}^1 t dt + 162 \int_{t=0}^1 t^2 dt + 81 \int_{t=0}^1 t^3 dt = \\
&= 32 \cdot (1 - 0) + 120 \cdot \left(\frac{1}{2} - 0\right) + 162 \cdot \left(\frac{1}{3} - 0\right) + 81 \cdot \left(\frac{1}{4} - 0\right) = \frac{665}{4} = 166,25.
\end{aligned}$$

Křivkový integrál II. druhu ze zadaného vektorového pole \vec{P} po zadané úsečce AB je roven 166,25.

Mnoho obdobných úloh k procvičení lze nalézt např. ve skriptu [4] v sekci C/KI–2–5 nebo v [6], str. 26, kde jsou k nalezení řešené úlohy.

1.6 Konzervativní vektorové pole

S konzervativním vektorovým polem se poměrně často setkáváme ve fyzikálních přednáškách. Můžeme o něm slyšet při zavedení potenciální energie (nebo obecně při zavádění skalárních potenciálů), ale například i v souvislosti s elektrostatickým polem. Co to ale znamená, že je vektorové pole konzervativní?

O vektorovém poli budeme říkat, že je konzervativní, jestliže křivkový integrál II. druhu pro toto pole nebude záviset na tvaru křivky, po které integrujeme, ale pouze na jejím počátečním a koncovém bodě.

Z podkapitoly 1.3 již víme, že práci W vykonanou při přemístování objektu po křivce Γ při působení síly \vec{F} vypočteme jako:

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (1.23)$$

Uvažujme pohyb v homogenním tíhovém poli, pak síla působící na každé těleso je síla tíhová, která má při obvykle voleném systému souřadnic tvar:

$$\vec{F}_G = (0, 0, -mg),$$

kde m je hmotnost tělesa a g je velikost tíhového zrychlení. Práci tak v tomto případě vypočteme jako:¹³

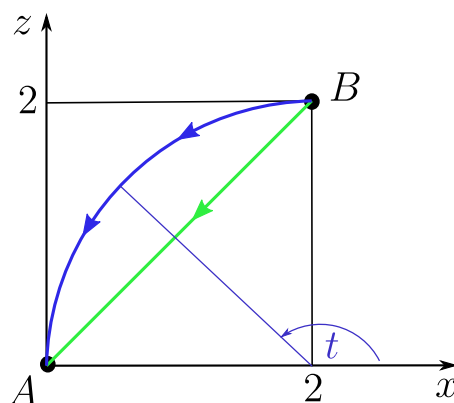
$$W = \int_{\Gamma} \vec{F}_G \cdot d\vec{r}. \quad (1.24)$$

Nejprve zkusíme vypočítat práci W vykonanou tíhovou silou \vec{F}_G působící na hmotný bod pohybující se po dvou různých křivkách Γ (úsečce a čtvrtkružnici, viz obrázek 1.4) spojující body $A = [0,0,0]$ a $B = [2,0,2]$.

Jako první provedeme výpočet práce pro pohyb po úsečce (z bodu B do bodu A). Směrový vektor úsečky určíme jako $\vec{u} = \vec{BA} = A - B = (-2, 0, -2)$. Známe-li směrový vektor, můžeme již napsat parametrické rovnice úsečky BA :

$$\begin{aligned}
x &= 2 - 2t \\
y &= 0 \\
z &= 2 - 2t \quad , \text{ kde } t \in \langle 0, 1 \rangle.
\end{aligned}$$

¹³Budeme počítat práci, kterou vykoná tíhová síla působící na těleso.



Obrázek 1.4: Body A a B propojené úsečkou a čtvrtkružnicí

VypočtĚme nyní práci W s využitím vztahu 1.24:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{t=0}^1 (F_{Gx} \cdot x' + F_{Gy} \cdot y' + F_{Gz} \cdot z') dt = \\ &= \int_{t=0}^1 [0 \cdot (-2) + 0 \cdot 0 + (-mg) \cdot (-2)] dt = \int_{t=0}^1 2mg dt = 2mg. \end{aligned}$$

Jako druhý provedeme výpočet práce pro pohyb po čtvrtkružnici ležící v rovině xz (z bodu B do bodu A). Z obrázku 1.4 je vidĚt, že střed příslušné kružnice je v bodĚ $[2,0,0]$ a její polomĚr je 2. Můžeme tak zapsat parametrické rovnice pro tuto křivku:¹⁴

$$\begin{aligned} x &= 2 \cos t + 2 \\ y &= 0 \\ z &= 2 \sin t \quad , \text{ kde } t \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle. \end{aligned}$$

Krajní hodnoty intervalu pro parametr t vyplývají z obrázku 1.4.

SpočtĚme pro tuto křivku práci W dle vztahu 1.24:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\Gamma} \vec{F}_G \cdot d\vec{r} = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (F_{Gx} \cdot x' + F_{Gy} \cdot y' + F_{Gz} \cdot z') dt = \\ &= \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} [0 \cdot (-2 \sin t) + 0 \cdot 0 + (-mg) \cdot 2 \cos t] dt = \int_{t=\frac{\pi}{2}}^{\pi} (-2mg \cos t) dt = \\ &= -2mg \sin \pi + 2mg \sin \frac{\pi}{2} = 2mg. \end{aligned}$$

Z uvedených výpočtů práce je tak vidĚt, že výsledek vyšel pro obĚ „křivky“ (úsečku i čtvrtkružnici) stejnĚ. Tedy nezáleželo na tom, po které křivce integrujeme. Vypadá to, že křivkový integrál II. druhu skutečně závisí v tomto pĚpadĚ

¹⁴O správnosti parametrického vyjádĚení naší čtvrtkružnice se můžeme převĚdit tak, že u x -ové souřadnice převedeme číslo 2 na levou stranu rovnice, poté umocníme první a tĚtí parametrickou rovnici nadruhou a sečteme je. Dostaneme tak středovou rovnici kružnice o poloměru 2 a středu v bodĚ $[2,0,0]$.

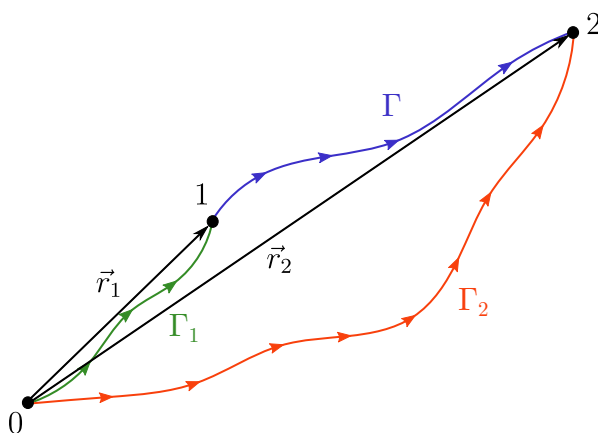
pouze na počátečním a koncovém bodě křivky. V případě homogenního tíhového pole by to takto dopadlo pro libovolnou křivku z B do A . Toto pole je tedy skutečně konzervativní.

Ekvivalentně lze tvrdit, že křivkový integrál II. druhu vypočtený pro konzervativní vektorové pole po uzavřené křivce je nulový.

V souvislosti s konzervativním polem se často mluví o již zmíněném homogenním tíhovém poli (kde vektorové pole tvoří tíhová síla, resp. tíhové zrychlení) nebo také o homogenním elektrostatickém poli (kde vektorové pole tvoří elektrická intenzita).

1.6.1 Zavedení potenciálu

Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku 1.5. Označme křivkový integrál



Obrázek 1.5: Schéma k vysvětlení vlastností konzervativního vektorového pole

II. druhu konzervativního vektorového pole \vec{P} vypočtený pro křivku Γ_1 vedoucí z polohy 0 do polohy 1 jako I_1 . Tedy:

$$I_1 = \int_{\Gamma_1} \vec{P} \cdot d\vec{r}, \quad (1.25)$$

po křivce Γ vedoucí z polohy 1 do polohy 2 jako I , tj.

$$I = \int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} \quad (1.26)$$

a po křivce Γ_2 vedoucí z polohy 0 do polohy 2 jako I_2 , tj.

$$I_2 = \int_{\Gamma_2} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (1.27)$$

Položme si nyní otázku, jak bychom mohli přemístit nějaké pomyslné těleso z polohy 0 do polohy 2 s využitím křivek Γ , Γ_1 a Γ_2 . Existují právě dvě možnosti. Buď budeme těleso rovnou přesouvat po křivce Γ_2 , anebo nejprve přesuneme těleso z polohy 0 do polohy 1 po křivce Γ_1 a poté z polohy 1 do polohy 2 po křivce Γ . Jelikož uvažujeme konzervativní vektorové pole, kde výsledek křivkového

integrálu II. druhu nemá záviset na „cestě“ mezi polohami 0 a 2, můžeme napsat:

$$\int_{\Gamma_1} \vec{P} \cdot d\vec{r} + \int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (1.28)$$

S využitím vztahů 1.25 a 1.27 můžeme vztah 1.28 přepsat do tvaru:

$$\int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma_2} \vec{P} \cdot d\vec{r} - \int_{\Gamma_1} \vec{P} \cdot d\vec{r} = I_2 - I_1. \quad (1.29)$$

Z uvedeného plyne, že křivkový integrál II. druhu z vektorového pole \vec{P} po křivce Γ závisí pouze na hodnotách I_1 a I_2 , což jsou skaláry. Díky této vlastnosti konzervativního pole můžeme definovat skalární veličinu φ , kterou budeme nazývat *potenciál*. Potenciál $\varphi(\vec{r}_i)$ v bodě, jemuž přísluší polohový vektor \vec{r}_i , definujeme jako:

$$\varphi(\vec{r}_i) = - \int_{\Gamma_i} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (1.30)$$

Pak můžeme přepsat rovnost 1.29 do podoby:

$$\int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2), \quad (1.31)$$

kde $\varphi(\vec{r}_1)$ je potenciál v počátečním bodě \vec{r}_1 křivky Γ a $\varphi(\vec{r}_2)$ je potenciál v koncovém bodě \vec{r}_2 křivky Γ .¹⁵

Příkladem potenciálu φ může být například *potenciální energie* (tíhového pole), kterou obvykle značíme V ,¹⁶ nebo *potenciál elektrostatického pole*, který (stejně jako „obecný“ potenciál) značíme φ .¹⁷

1.6.2 Vztah mezi konzervativním vektorovým polem a potenciálem

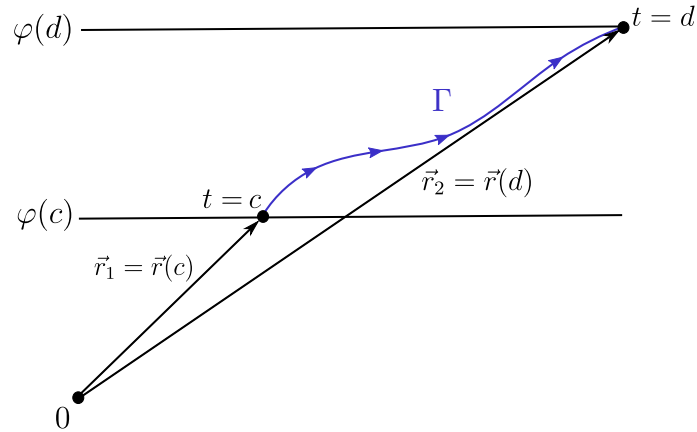
Při odvození vztahu vyjdeme ze vztahu 1.31. Nejprve si však musíme uvědomit, že když máme křivku Γ parametrizovanou pomocí parametru $t \in \langle c, d \rangle$, tak $\vec{r}_1 = \vec{r}(c)$ a $\vec{r}_2 = \vec{r}(d)$, přičemž c je hodnota parametru t odpovídající počátečnímu bodu křivky Γ a d je hodnota parametru t odpovídající koncovému bodu křivky Γ .¹⁸ Můžeme tak provést přeznačení: $\varphi(\vec{r}_1) = \varphi(c)$, $\varphi(\vec{r}_2) = \varphi(d)$. Popsaná situace je rovněž vidět na obrázku 1.6.

¹⁵Z uvedeného vyplývá, že $\varphi(\vec{r}_1) = -I_1$ a $\varphi(\vec{r}_2) = -I_2$.

¹⁶Potenciální energie v bodě s polohovým vektorem \vec{r} je definovaná (viz [20], kapitola Dynamika hmotného bodu II, str. 14) jako $V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{R}) \cdot d\vec{R}$, kde \vec{F} je konzervativní síla a V_0 je hladina potenciální energie v místě, jemuž přísluší vektor \vec{r}_0 .

¹⁷Potenciál elektrostatického pole v bodě s polohovým vektorem \vec{r} je definován (v souladu se vztahem 1.56 v [21]) jako $\varphi(\vec{r}) = \varphi_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{R}$, kde \vec{E} je vektor elektrické intenzity a φ_0 je potenciál v bodě, jemuž přísluší vektor \vec{r}_0 .

¹⁸To plyne z toho, že pro polohový vektor \vec{r} probíhající křivku Γ obecně platí: $\vec{r} = (x, y, z) = (x(t), y(t), z(t)) = \vec{r}(t)$. Např. pro $t = c$ tak dostaneme $\vec{r}(t) = \vec{r}(c) = (x(c), y(c), z(c))$, což je poloha počátečního bodu křivky Γ , jemuž jsme dosud přiřazovali polohový vektor \vec{r}_1 .



Obrázek 1.6: Znázornění situace pro odvození vztahu mezi konzervativním vektorovým polem a potenciálem

Pro určitý integrál platí tzv. Newtonův-Leibnitzův vzorec ([3], str. 49):

$$\int_{t=c}^d f(t) dt = F(d) - F(c), \quad (1.32)$$

kde F je primitivní funkce k funkci f . Platí-li tento vztah, tak musí jistě platit i rovnost:

$$\int_{t=c}^d \frac{d}{dt} F(t) dt = F(d) - F(c). \quad (1.33)$$

Podíváme-li se na pravou stranu vztahu pro výpočet křivkového integrálu II. druhu (1.22), zjistíme, že se jedná o integrál, ve kterém se integruje podle proměnné t . Když bychom integrand $(P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z')$ označili jako $f(t)$, dostali bychom integrál z levé strany vztahu 1.32. Můžeme tak napsat:

$$\int_{t=c}^d f(t) dt = \int_{t=c}^d (P_x(\vec{r}) \cdot x' + P_y(\vec{r}) \cdot y' + P_z(\vec{r}) \cdot z') dt. \quad (1.34)$$

Víme, že integrál z pravé strany tohoto vztahu je roven integrálu $\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$, který je dle vztahu 1.31 roven rozdílu $\varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2)$. Můžeme tak napsat:

$$\int_{t=c}^d f(t) dt = \int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2).$$

Porovnáme-li tento vztah s obecným vztahem 1.32, zjistíme, že $\varphi(\vec{r}_1) = \varphi(c) = -F(c)$ a $\varphi(\vec{r}_2) = \varphi(d) = -F(d)$. Z této skutečnosti a vztahu 1.33 pak rovnou plyne:

$$-\int_{t=c}^d \frac{d}{dt} \varphi(t) dt = \int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2). \quad (1.35)$$

Přepíšeme-li integrál $\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ podle vztahu 1.22, dostaneme rovnost:

$$-\int_{t=c}^d \frac{d}{dt} \varphi(t) dt = \int_{t=c}^d (P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z') dt. \quad (1.36)$$

Všimněme si, že v obou integrálech integrujeme podle téže proměnné a meze obou integrálů jsou také shodné. Má-li tak platit rovnost mezi těmito integrály, musí se rovnat jejich integrandy:

$$-\frac{d\varphi(t)}{dt} = P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z' = P_x \cdot \frac{dx}{dt} + P_y \cdot \frac{dy}{dt} + P_z \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (1.37)$$

Nyní si musíme uvědomit, že $\varphi(t) = \varphi(x(t), y(t), z(t))$, z čehož plyne tvar derivace:

$$\frac{d\varphi(t)}{dt} = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (1.38)$$

Propojením vztahů 1.37 a 1.38 dostáváme:

$$-\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt} \right) = P_x \cdot \frac{dx}{dt} + P_y \cdot \frac{dy}{dt} + P_z \cdot \frac{dz}{dt}$$

a po úpravě:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} + P_x \right) \cdot \frac{dx}{dt} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} + P_y \right) \cdot \frac{dy}{dt} + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} + P_z \right) \cdot \frac{dz}{dt} = 0. \quad (1.39)$$

Jelikož chceme, aby rovnost 1.39 platila pro každou křivku Γ , tj. nelze obecně zaručit nulovost všech derivací $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$, $\frac{dz}{dt}$, musí být tudíž nulové výrazy ve všech závorkách, z čehož plyne:

$$P_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \quad \text{a} \quad P_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y} \quad \text{a} \quad P_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z} \quad (1.40)$$

nebo také:

$$\vec{P} = (P_x, P_y, P_z) = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right). \quad (1.41)$$

Poznamenejme, že výraz $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)$ lze rovněž zapsat jako grad φ nebo $\vec{\nabla} \varphi$. Pak lze ještě přepsat vztah 1.41 do finální podoby:¹⁹

$$\vec{P} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.42)$$

1.6.3 Poznámka ke konzervativnímu vektorovému poli

Poznamenejme, že platí ekvivalence ([3], str. 49):

$$\text{Vektorové pole } \vec{P} \text{ je konzervativní} \Leftrightarrow \text{rot } \vec{P} = \vec{0}, \quad (1.43)$$

kde $\text{rot } \vec{P}$ je rotace vektorového pole \vec{P} , o níž pojednává podkapitola 3.3. Právě vlastnost 1.43 je velmi užitečným kritériem při rozhodování o konzervativnosti vektorového pole.

¹⁹Označení grad φ čteme gradient potenciálu φ . Gradientu se budeme potrobněji věnovat v podkapitole 3.1.

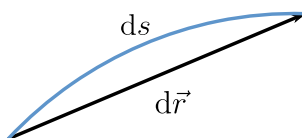
1.7 Křivkový integrál II. druhu v kontextu dalších integrálů

V této podkapitole se budeme zabývat souvislostmi křivkového integrálu II. druhu s ostatními typy integrálů. První, co nás asi napadne, je souvislost s křivkovým integrálem I. druhu. Jistě je zde souvislost v tom, že integrujeme po orientované křivce. Ale mohli bychom například nějak jednoduše přejít od křivkového integrálu II. druhu ke křivkovému integrálu I. druhu?

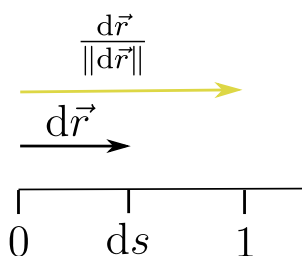
Nejprve si musíme uvědomit platnost rovnosti:

$$d\vec{r} = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \cdot \|d\vec{r}\| = \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \cdot ds, \quad (1.44)$$

přičemž ds je délka nekonečně malého obloučku a $\|d\vec{r}\|$ je velikost (délka) vektoru $d\vec{r}$ přiřazeného tomu samému obloučku (viz obrázek 1.7). Jelikož se bavíme o nekonečně malých velikostech, je jasné, že se tyto hodnoty budou rovnat, tj. $ds = \|d\vec{r}\|$. Vzájemné souvislosti jednotlivých výrazů ze vztahu 1.44 jsou schematicky znázorněny na obrázku 1.8.



Obrázek 1.7: Vektor $d\vec{r}$ přiřazený obloučku délky ds



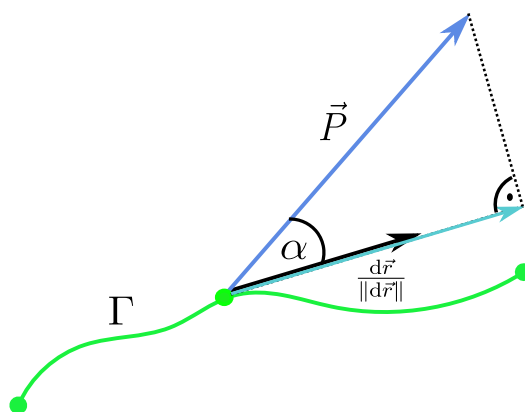
Obrázek 1.8: Znázornění vztahu 1.44

Se znalostí vztahu 1.44 pak již můžeme jednoduše napsat vztah mezi křivkovým integrálem II. druhu a I. druhu:

$$\int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} \vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|} \cdot ds = \int_{\Gamma} P_t ds. \quad (1.45)$$

Jelikož je vektor $\frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|}$ jednotkovým tečným vektorem ke křivce Γ v daném místě, tak skalární součin $\vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|}$ má význam průmětu vektoru \vec{P} do směru tečny (viz obrázek 1.9). Součin $\vec{P} \cdot \frac{d\vec{r}}{\|d\vec{r}\|}$ obvykle značíme P_t .

Křivkový integrál II. druhu souvisí také s plošným integrálem II. druhu. V obou případech integrujeme vektorovou funkci. Rozdíl je však v tom, že u křivkového integrálu II. druhu integrujeme po křivce Γ , kdežto u plošného integrálu II. druhu integrujeme po ploše Σ .



Obrázek 1.9: Průmět vektoru \vec{P} do směru tečny ke křivce Γ

1.8 Využití křivkového integrálu II. druhu ve fyzice

Práce

O souvislosti práce W a křivkového integrálu II. druhu bylo již mnoho napsáno v podkapitole 1.3. Zkusme nyní odvodit ze vztahu 1.13 vztah 1.6, který známe ze základní školy. Omezíme se tedy na jednorozměrný případ, např. budeme uvažovat pohyb ve směru kladné poloosy x , a to od počátku do vzdálenosti s . Na hmotný bod bude působit síla $\vec{F} = (F, 0, 0)$, kde F je konstanta (jak je naznačeno na obrázku 1.10). Pak můžeme napsat:



Obrázek 1.10: Působení konstantní síly na hmotný bod pohybující se po úsečce

$$W = \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \int_{\Gamma} (F, 0, 0) \cdot (dx, dy, dz) = \int_0^s F dx = F \int_0^s dx = F \cdot s. \quad (1.46)$$

Vidíme tedy, že „základoškolský“ vztah pro výpočet práce (1.6) skutečně vyplývá z obecného vztahu pro výpočet práce (1.13), pokud se omezíme na situaci popsanou výše. Z obecného vztahu 1.13 rovněž vyplývá „středoškolský“ vztah 1.7, který uvažuje konstantní sílu \vec{F} v obecně odlišném směru. Díky definici skalárního součinu víme, že stačí vynásobit výraz $F \cdot s$ prvkem $\cos \alpha$, kde α je úhel, který svírá síla \vec{F} se směrem pohybu.

Vztah mezi silou a potenciální energií

V oddílu 1.6.2 jsme odvodili vztah mezi konzervativním vektorovým polem \vec{P} a tzv. potenciálem tohoto vektorového pole φ , viz vztah 1.42.

Pokud bude vektorovým polem konzervativní síla \vec{F} , pak ze vztahu 1.23 a 1.30 plyne, že potenciál bude souviset s prací. Zvedáme-li například těleso v homogenním tíhovém poli z hladiny nulové potenciální energie na hladinu potenciální energie o hodnotě V , tak práce W , kterou jsme vykonali, bude stejná jako hodnota potenciální energie V .²⁰ Potenciálem vektorového pole tak bude potenciální energie, a můžeme tedy vztah 1.42 přepsat do podoby:

$$\vec{F} = -\text{grad } V. \quad (1.47)$$

Pro homogenní tíhové pole je síla \vec{F} rovna součinu $m \cdot \vec{g}$, kde m je hmotnost tělesa, na které síla \vec{F} působí, a \vec{g} je intenzita homogenního tíhového pole, které obvykle říkáme tíhové zrychlení. Když bychom tento součin dosadili za \vec{F} do vztahu 1.47 a následně ho vydělili hmotností m , dostali bychom:

$$\vec{g} = -\text{grad } \frac{V}{m}, \quad (1.48)$$

tedy vztah, který dává do souvislosti intenzitu \vec{g} s potenciální energií V .²¹

Vztah mezi elektrickou intenzitou a elektrostatickým potenciálem

Z mechaniky známe vztah 1.47, který vyjadřuje vztah mezi silou a potenciální energií. Připomeňme vztah pro elektrostatickou sílu:

$$\vec{F} = Q \cdot \vec{E},$$

kde Q je elektrický náboj částice, na kterou působí síla \vec{F} , a \vec{E} je vektor elektrické intenzity. Dále připomeňme vztah

$$V = Q \cdot \varphi,$$

kde V je potenciální energie (jejíž velikost je rovna velikosti práce W konané od místa, kde je potenciální energie nulová, do místa, jemuž přísluší potenciální energie V) a φ je elektrostatický potenciál. Pak můžeme napsat:

$$Q \cdot \vec{E} = \vec{F} = -\text{grad } V = -\text{grad } (Q \cdot \varphi). \quad (1.49)$$

V analogii se vztahem 1.41, resp. 1.42 lze přepsat označení $\text{grad}(Q \cdot \varphi)$ na tvar $\left(\frac{\partial(Q \cdot \varphi)}{\partial x}, \frac{\partial(Q \cdot \varphi)}{\partial y}, \frac{\partial(Q \cdot \varphi)}{\partial z}\right)$. V tomto vztahu se vyskytují parciální derivace. Jelikož náboj Q nezávisí na poloze, tj. na x , y , z , lze Q vytknout z každé parciální derivace, a tedy i před gradient.²² Dostáváme tak rovnost:

$$Q \cdot \vec{E} = -Q \cdot \text{grad } \varphi, \quad (1.50)$$

kterou lze ještě zjednodušit na tvar:

$$\vec{E} = -\text{grad } \varphi. \quad (1.51)$$

²⁰Jak práce, tak energie mají jednotku joule.

²¹Jelikož je gradient složen z parciálních derivací a hmotnost m je konstantou, můžeme ji „vtáhnout“ do gradientu.

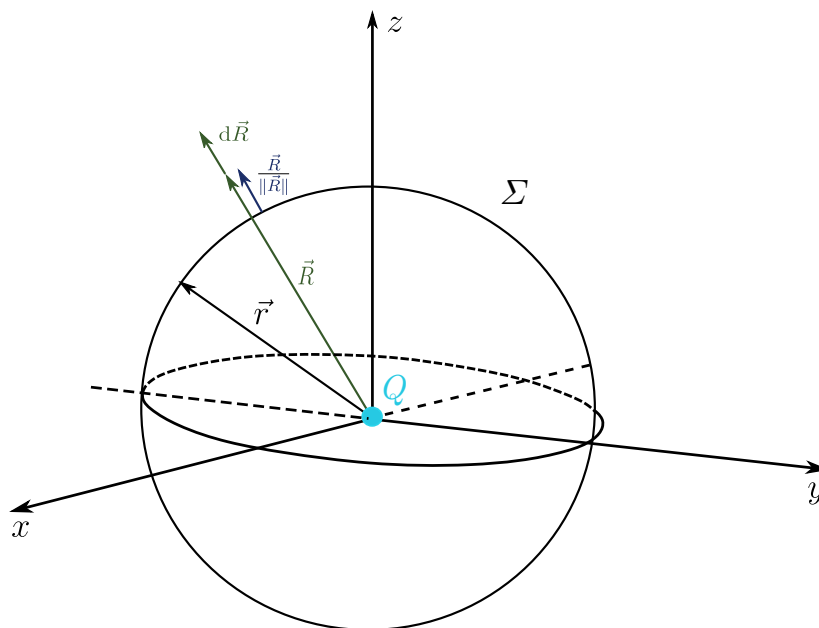
²²Gradientem a jeho vlastnostmi se budeme podrobně zabývat v podkapitole 3.1. Alternativně bychom mohli k tomuto problému přistupovat tak, že vztah $Q \cdot \vec{E} = -\text{grad } (Q \cdot \varphi)$ odpovídá výrazu (viz 1.30) $Q \cdot \varphi = -\int_{\Gamma} Q \cdot \vec{E} \cdot d\vec{r}$, z něhož Q můžeme vytknout a zkrátit s Q na levé straně rovnosti.

Úloha týkající se potenciálu

Vypočtete potenciál pro pole bodového náboje Q ve vakuu, víme-li, že pro velikost elektrické intenzity platí vztah (odvození viz podkapitola 2.6):

$$E = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}, \quad (1.52)$$

kde r je vzdálenost od bodového náboje Q .



Obrázek 1.11: Schéma k úloze týkající se potenciálu

Řešení:

Vyjdeme ze znalosti velikosti elektrické intenzity v závislosti na vzdálenosti (vztah 1.52). Jelikož víme, že vektor elektrické intenzity \vec{E} má radiální směr (tj. směr kolmý k pomyslné kulové ploše Σ kolem náboje Q ; viz obrázek 1.11), tak můžeme napsat:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}, \quad (1.53)$$

kde $\frac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor ve směru polohového vektoru \vec{r} . Vztah mezi vektorem elektrické intenzity \vec{E} a potenciálem φ vyjadřuje kromě vztahu 1.49 také vztah:²³

$$\varphi = - \int_{\vec{a}}^{\vec{b}} \vec{E} \cdot d\vec{r}, \quad (1.54)$$

kde \vec{a} je polohový vektor bodu s nulovým potenciálem a \vec{b} je polohový vektor bodu, ve kterém chceme určit potenciál. Dosadíme výraz 1.53 do vztahu 1.54 a dostaneme :

$$\varphi = - \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} d\vec{R} = - \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{R^2} \cdot \frac{\vec{R}}{R} d\vec{R}.$$

²³Vztah plyne ze vztahů 1.55 a 1.56 v [21].

Přičemž elektrostatický potenciál chceme určit v místě, jemuž náleží polohový vektor \vec{r} , a elektrostatický potenciál je nulový v nekonečnu. Odtud plynou meze integrálu. Kvůli tomu, že polohový vektor \vec{r} je jednou z mezí tohoto integrálu, integrujeme přes polohový vektor \vec{R} (aby nedošlo ke zmatení). Museli jsme tak přeznačit v integrandu všechna \vec{r} , resp. r na \vec{R} , resp. R .

Platí, že $\frac{\vec{R}}{R} \cdot d\vec{R} = \|\frac{\vec{R}}{R}\| \cdot \|d\vec{R}\| \cdot \cos \beta$, kde β je úhel, který svírají vektory $\frac{\vec{R}}{R}$ a $d\vec{R}$. Jelikož je úhel β nulový (na obrázku 1.11 je vidět, že jsou vektory $\frac{\vec{R}}{R}$, $d\vec{R}$ rovnoběžné) a vektor $\frac{\vec{R}}{R}$ je jednotkový, můžeme s využitím vztahu 1.45 napsat:

$$\varphi = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{1}{R^2} ds, \quad (1.55)$$

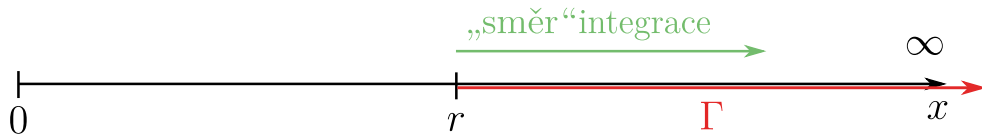
kde $ds = \|d\vec{R}\|$. Převodli jsme tak křivkový integrál II. druhu na křivkový integrál I. druhu.

Vyřešíme křivkový integrál I. druhu $\int_r^{\infty} \frac{1}{R^2} ds$:²⁴

Jelikož je kulová plocha Σ ekvipotenciální plochou,²⁵ tak stačí určit potenciál pouze v jednom místě této plochy. Pro jednoduchost výpočtu si vybereme místo na ose x . Budeme tedy integrovat po křivce Γ splývající s osou x , a to od r do ∞ . Neboli křivku Γ můžeme parametricky vyjádřit jako:

$$\begin{aligned} x &= R \\ y &= 0 \\ z &= 0, \end{aligned}$$

kde R , resp. $x \in \langle r, \infty \rangle$ (viz obrázek 1.12). Z uvedeného plyne, že můžeme na intervalu $\langle r, \infty \rangle$ zaměnit proměnné R a x .



Obrázek 1.12: Křivka Γ splývající s osou x

Dále:

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + 0 + 0} = 1,$$

a tedy:

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{R^2} ds = \int_r^{\infty} \frac{1}{x^2} dx = \left(0 + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r}. \quad (1.56)$$

Dosadíme-li výsledek 1.56 do vztahu 1.55, dostáváme výsledný vztah pro elektrostatický potenciál:

$$\varphi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r} + c, \quad (1.57)$$

kde c je konstanta.

²⁴Zaměnili jsme integrační meze r a ∞ , čímž jsme se „zbavili“ znaménka minus před integrálem.

²⁵Tato skutečnost plyne například ze vztahu 1.53 pro elektrickou intenzitu, ze kterého je vidět, že závisí pouze na vzdálenosti od náboje Q . Jedná se tak o sféricky symetrickou situaci.

Úloha na Ampérův zákon celkového proudu

Úloha je vyřešena ve Sbírce řešených úloh (viz [22]) pod názvem Magnetické pole přímého vodiče (úloha číslo 2133).

1.9 K zapamatování

- Křivkový integrál II. druhu – integrujeme vektorové pole po křivce.
- Označení a definice: $\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{r}_i$.
- Vztah pro výpočet: $\int_{\Gamma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = \int_{t=c}^d (P_x \cdot x' + P_y \cdot y' + P_z \cdot z') dt$.
- Vektorové pole je konzervativní, pokud křivkový integrál II. druhu tohoto pole nezávisí na tvaru křivky, po které integrujeme, ale jen na jejím počátečním a koncovém bodě.
- Vztah mezi konzervativním vektorovým polem a potenciálem: $\vec{P} = -\text{grad } \varphi$.
- Využití ve fyzice: výpočet práce, Ampérův zákon celkového proudu, výpočet elektrostatického potenciálu, ...

2. Plošný integrál II. druhu

Plošný integrál II. druhu má, stejně jako křivkový integrál II. druhu, hojně využití. Ve fyzice se s ním můžeme setkat již v mechanice, a to např. když formulujeme zákon zachování hmotnosti pro proudící kapalinu. Velice významný je tento typ integrálu v elektrostatiice, kde hraje stěžejní roli Gaussův zákon elektrostatiiky.

Sousloví „II. druhu“ naznačuje, že zde bude spojitost s křivkovým integrálem II. druhu, o kterém pojednává kapitola 1. Jak již víme, zmíněné sousloví nám říká, že budeme integrovat vektorové funkce (resp. vektorová pole). Co bude u plošného integrálu II. druhu jiné, bude oblast, po které budeme integrovat.

Jak již název napovídá, budeme integrovat po ploše (budeme rozlišovat plochu, která je obecně „zvlněná“, a rovinu) a vektorové pole, které budeme integrovat, bude, stejně jako u křivkového integrálu II. druhu, funkcí polohového vektoru, resp. proměnných x, y, z .

V této kapitole se tak nejdříve budeme zabývat tím, co přesněji je plocha, zavedeme si plošný integrál II. druhu, uvedeme vztahy pro jeho výpočet a vše doplníme o úlohy jak matematického, tak fyzikálního charakteru.

2.1 Plocha

Stejně jako u křivkového integrálu II. druhu byla základním pojmem křivka,²⁶ zde u plošného integrálu II. druhu bude důležité porozumět tomu, co je to plocha. O ploše jsme se mohli dozvědět již u plošného integrálu I. druhu,²⁷ a tak je možné následujících několik odstavců chápat jako opakování.

Na úvod je nutno zmínit, že plochou obecně nemíníme rovinu, nýbrž trojrozměrný útvar, který připomíná „zdeformovanou rovinu“. Tento útvar budeme dále označovat řeckým písmenem Σ (čteme: sigma). U křivky bylo výhodné pracovat s jejím parametrickým vyjádřením. To bude v některých případech výhodné i u ploch, ale kromě toho budeme pracovat i s jejím explicitním vyjádřením. U parametrického vyjádření křivky jsme pracovali s jedním parametrem, u plochy budou zapotřebí parametry dva.

V analogii se zavedením pojmu „slušně vychovaná křivka“, zavedeme pojem „slušně vychovaná plocha“, která bude muset splňovat jisté podmínky, abychom ji mohli takto nazývat. Nejprve si ale ukážeme několik příkladů ploch.

Příklady parametrických vyjádření „slušně vychovaných ploch“:

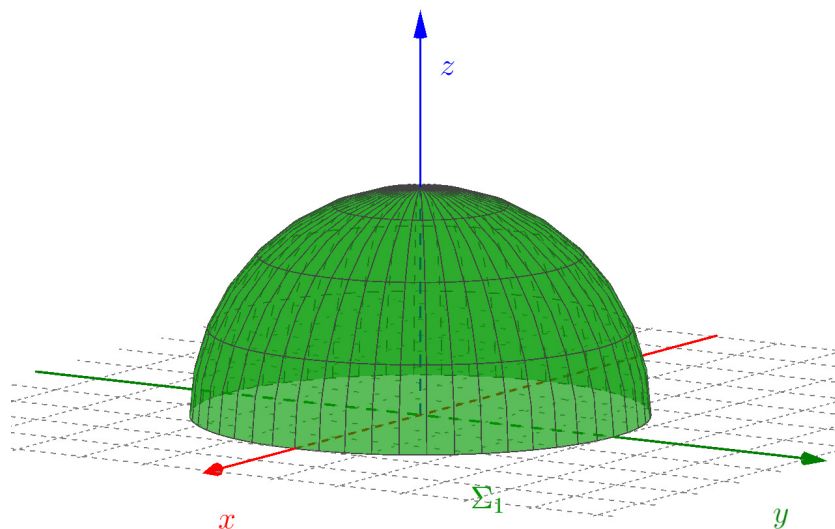
- Horní polovina kulové plochy (resp. sféry) o poloměru r se středem v počátku (viz obrázek 2.1)

$$\begin{aligned}\Sigma_1 : \quad x &= r \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\ y &= r \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\ z &= r \cdot \cos \theta,\end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\theta \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$.

²⁶Viz podkapitola 1.2.

²⁷Viz [2], str. 60.

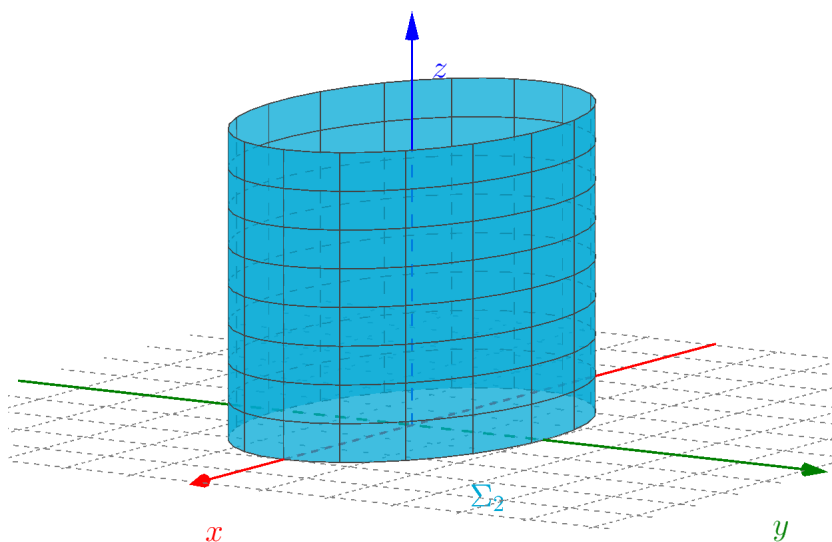


Obrázek 2.1: Horní polovina kulové plochy o poloměru r

- Plášť eliptického válce o výšce c , jehož podstavu tvoří elipsa (s poloosami a , b ležícími na osách x a y ; se středem v počátku) umístěná v rovině xy (viz obrázek 2.2)

$$\begin{aligned} \Sigma_2 : \quad x &= a \cdot \cos \phi \\ y &= b \cdot \sin \phi \\ z &= c \cdot t, \end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $t \in \langle 0, 1 \rangle$.



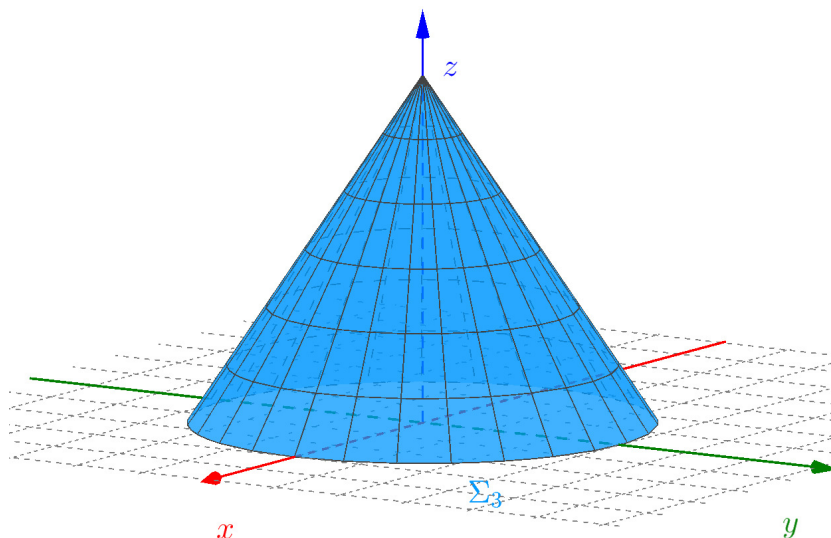
Obrázek 2.2: Plášť eliptického válce o výšce c se středem podstavy v počátku

Příklady parametrických vyjádření ploch, které nejsou „slušně vychované“:

- Plášť kužele, jehož podstava leží v rovině xy (podstavu tvoří kruh se středem v počátku a poloměrem 3) a výška délky $3c$ leží na ose z (viz obrázek 2.3)

$$\begin{aligned}\Sigma_3 : \quad x &= (3 - t) \cdot \cos \phi \\ y &= (3 - t) \cdot \sin \phi \\ z &= c \cdot t,\end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $t \in \langle 0, 3 \rangle$.



Obrázek 2.3: Plášť kužele, jehož podstava leží v rovině xy

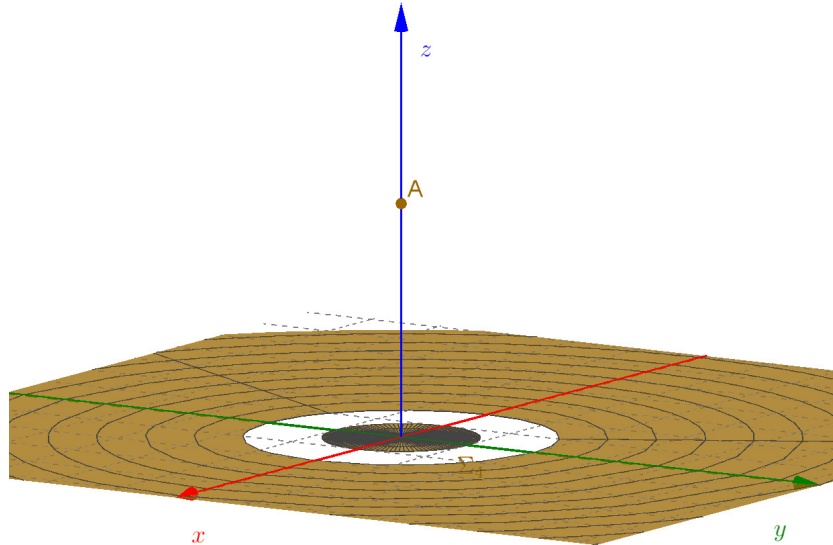
- Plocha složená z bodu $A = [0,0,3]$ a z roviny xy (neobsahující počátek), z níž vyřízneme mezikruží šířky 1 se středem v počátku (viz obrázek 2.4)

$$\begin{aligned}\Sigma_4 : \quad x &= t \cdot \cos \phi \\ y &= t \cdot \sin \phi \\ z &= 0,\end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $t \in (0, 1) \cup (2, +\infty)$ a zároveň bod $A = [0,0,3] \in \Sigma_4$.

Zaměříme se nyní na to, v čem se liší příklady ploch, které nazýváme „slušně vychovanými“, od ploch, které takto nazývat nebudeme. První, čeho si můžeme všimnout, je nespojitost plochy Σ_4 v bodě $A = [0,0,3]$. Dále bychom mohli zaznamenat, že plášť kužele (plocha Σ_3) vytváří „špičku“ v bodě $[0,0,3c]$, a tedy, že v tomto bodě není plocha spojitě diferencovatelná (není splněna podmínka hladkosti). Oproti tomu plochy Σ_1 a Σ_2 , které „slušně vychované“ jsou, podmínku spojitosti i hladkosti splňují. Kromě zmíněných dvou vlastností, které by měla mít každá „slušně vychovaná plocha“, by dále měla být splněna podmínka „neprotínání se“ (kromě případu uzavřených ploch) a také by „slušně vychovaná plocha“ měla být nesingulární.²⁸

²⁸Nesingulární plocha neobsahuje singulární body. [23], str. 11: *Singulární body jsou body na ploše, ve kterých existuje více tečných rovin. Všechny parciální derivace prvního řádu jsou v singulárních bodech nulové.*



Obrázek 2.4: Plocha složená z bodu $A = [0,0,3]$ a z roviny xy (neobsahující počátek), z níž vyřizneme mezikruží šířky 1 se středem v počátku

Když se nad tím zamyslíme, zjistíme, že vlastnosti, které požadujeme po „slušně vychované ploše“, se shodují s požadavky na „slušně vychovanou křivku“.

Doposud jsme pracovali s parametrickými vyjádřeními ploch Σ . U tohoto typu vyjádření potřebujeme obvykle dva parametry, které mohou nabývat pouze hodnot z příslušných intervalů. Plocha Σ však může být také zadána *explicitně*. To znamená, že jednu z proměnných x , y , z vyjádříme v závislosti na zbývajících dvou proměnných jako jejich funkci, např. $z = z(x, y)$. V jistém slova smyslu se jedná o opak k implicitnímu zadání plochy. Například horní polovina kulové plochy o poloměru r se středem v počátku by byla explicitně zadána rovnicí $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$. V tomto příkladu vidíme, že je souřadnice z vyjádřena v závislosti na souřadnicích x a y . Naopak implicitní zadání té samé plochy by mělo tvar $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \wedge z \geq 0$. Implicitní zadání plochy však dále nevyužijeme.

2.2 Zavedení plošného integrálu II. druhu

Jak již bylo zmíněno, plošný integrál II. druhu má důležité postavení ve fyzice. Například můžeme pomocí tohoto typu integrálu vypočítat tok elektrické intenzity \vec{E} (což je vektorové pole) uzavřenou plochou Σ (což vystupuje ve zmíněném Gaussově zákonu elektrostatiky).

Dříve než však začneme určovat tok obecného vektorového pole \vec{P} obecnou plochou Σ , zkusme se zabývat objemovým tokem (někdy též průtokem) kapaliny protékající pomyslným potrubím ve tvaru válce s průřezem o obsahu S . *Objemový tok* Q je definován jako (viz [24]):

$$Q = \frac{V}{t}, \quad (2.1)$$

kde V je objem kapaliny a t je čas, za který daný objem protekl průřezem o ob-

sahu S (viz obrázek 2.5). Objem V můžeme vyjádřit jako:

$$V = S \cdot l,$$

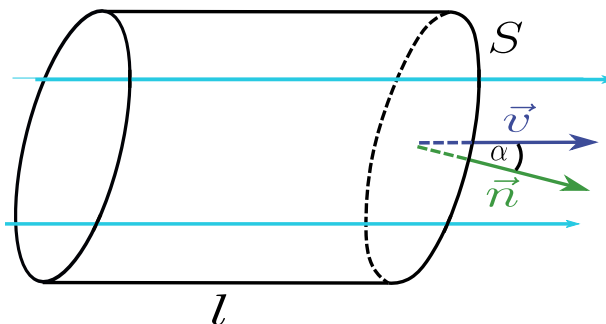
kde l je délka příslušné části potrubí. Pak pro objemový tok můžeme napsat:

$$Q = \frac{S \cdot l}{t} = S \cdot v,$$

kde v je velikost rychlosti kapaliny (rychlost v předpokládáme konstantní). Tento vztah však platí pouze pro případ, kdy je vektor rychlosti \vec{v} kolmý na průřez o obsahu S . Pokud by nebyl (situace znázorněná na obrázku 2.5), museli bychom vzít pro náš výpočet velikost průmětu vektoru \vec{v} do směru kolmého k průřezu S . Obecný vztah pro průtok Q by tak měl tvar:

$$Q = S \cdot \vec{v} \cdot \vec{n} = S \cdot \|\vec{v}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \alpha = S \cdot v \cdot \cos \alpha, \quad (2.2)$$

kde \vec{n} je jednotkový vektor kolmý k průřezu S a α je úhel, který svírá tento vektor s vektorem \vec{v} .²⁹



Obrázek 2.5: Tok kapaliny proudící rychlostí \vec{v} průřezem o obsahu S

Nyní se vraťme k toku vektorového pole \vec{P} „slušně vychovanou plochou“ Σ , který budeme značit ϕ . Představme si situaci znázorněnou na obrázku 2.6. U křivkového integrálu II. druhu jsme například při výpočtu práce rozdělili křivku Γ na malé úseky, na nichž byla síla přibližně konstantní a zmíněné úseky byly téměř rovné. Zde budeme naši plochu Σ dělit na velmi malé části³⁰ (očísloujeme je $1, 2, \dots, i, \dots, N$), na nichž budeme moct považovat vektorové pole $\vec{P}(\vec{r}_i)$ za konstantní a které jsou přibližně rovinné. Obsah takovéto i -té části plochy Σ označíme jako ΔS_i .

Budeme-li chtít přibližně vypočítat tok ϕ_i vektorového pole $\vec{P}(\vec{r}_i)$ i -tou částí plochy Σ o obsahu ΔS_i , pak tento tok vypočteme analogicky se vztahem 2.2 jako:

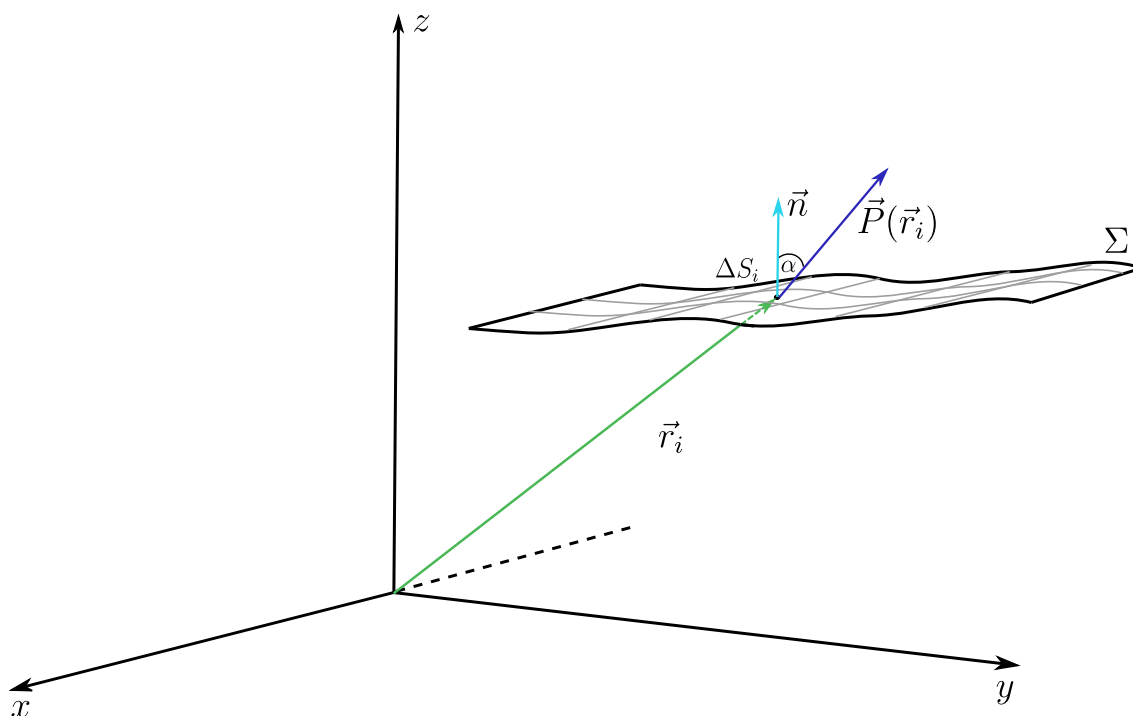
$$\phi_i = \Delta S_i \cdot \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \vec{n}_i, \quad (2.3)$$

kde \vec{n}_i je opět jednotkový vektor kolmý k ploše o obsahu ΔS_i . Označme nyní součin $\Delta S_i \cdot \vec{n}_i$ jako $\Delta \vec{S}_i$. Pak můžeme vztah 2.3 přepsat jako:

$$\phi_i = \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i. \quad (2.4)$$

²⁹Při úpravách využíváme definice skalárního součinu.

³⁰V některé literatuře (např. [3], str. 82) jsou tyto části plochy nazývány listy.



Obrázek 2.6: Schéma k toku vektorového pole \vec{P} plochou Σ

Přibližnou hodnotu celkového toku ϕ plochou Σ pak vypočteme jako součet jednotlivých toků ϕ_i :

$$\phi = \sum_{i=1}^N \phi_i = \sum_{i=1}^N \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i, \quad (2.5)$$

přičemž tato hodnota je přibližná kvůli tomu, že jsme plochu Σ rozdělili na části, které nebyly zcela rovné a také vektorové pole na nich nemuselo být zcela konstantní. Větší přesnost získáme tím, že zvětšíme počet částí, na které jsme plochu Σ rozdělili. S tím však souvisí to, že se obsahy zmíněných částí zmenší. Největší přesnosti dosáhneme, pokud počet částí N poroste nade všechny meze, neboli když pro celkový tok ϕ bude platit:

$$\phi = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \phi_i = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta \vec{S}_i. \quad (2.6)$$

Výraz na pravé straně vztahu 2.6 se obvykle značí³¹ $\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$ a budeme jej nazývat *plošný integrál II. druhu* vektorové funkce $\vec{P}(\vec{r})$ po ploše Σ . Definice

³¹Pokud je plocha Σ uzavřená, píšeme $\oiint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$.

plošného integrálu II. druhu³² má tak tvar:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i.} \quad (2.7)$$

Výhoda tohoto definičního vztahu je v tom, že z něj ihned vidíme, jak integrál „vznikl“. Jak budeme plošný integrál II. druhu počítat, se dozvíme v následující podkapitole.

2.3 Vztahy pro výpočet plošného integrálu II. druhu

Jak již bylo řečeno, při výpočtu plošného integrálu II. druhu budeme pracovat jak s parametrickým vyjádřením, tak s explicitním vyjádřením „slušně vycované plochy“ Σ .

2.3.1 „Slušně vycovaná plocha“ Σ zadaná parametricky

Z odvození plošného integrálu II. druhu již víme, že symbol $\Delta\vec{S}_i$ je označením součinu $\vec{n}_i \cdot \Delta S_i$, kde \vec{n}_i je jednotkový vektor kolmý na plochu ΔS_i . Obdobně platí, že symbol $d\vec{S}$ je označením součinu $\vec{n} \cdot dS$. Integrál 2.7 tak můžeme přepsat jako:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS.} \quad (2.8)$$

Výraz $\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$ značí skalární součin vektorů $\vec{P}(\vec{r})$ a \vec{n} . Jelikož je výsledkem skalárního součinu skalár, vidíme, že jsme převedli plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu.

Pokud tedy budeme počítat plošný integrál II. druhu po ploše Σ , k níž budeme v každém jejím bodě znát normálový vektor $\vec{n} = \vec{n}(\vec{r})$, pak můžeme jednoduše využít znalostí pro výpočet plošného integrálu I. druhu,³³ tj. integrálu ze skalární funkce po (parametricky zadané) ploše.

Výpočet normálového vektoru \vec{n} :

Máme-li parametricky zadanou plochu Σ , pak pro polohový vektor probíhající tuto plochu můžeme napsat: $\vec{r} = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, kde u a v jsou parametry.

³²V některých zdrojích (jako např. [5], str. 583 nebo [9], sekce Plošný integrál) je při definici plošného integrálu II. druhu zmiňován vztah:

$$\iint_{\Sigma} (P_x(\vec{r}), P_y(\vec{r}), P_z(\vec{r})) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} P_x(\vec{r}) dydz + P_y(\vec{r}) dx dz + P_z(\vec{r}) dx dy,$$

kde např. $\iint_{\Sigma} P_x(\vec{r}) dydz$ je plošný integrál II. druhu po ploše Σ vzhledem k souřadnicím y a z .

³³Viz [2], str. 60.

Nejprve vypočteme vektory \vec{t}_1, \vec{t}_2 tečné k ploše Σ jako:

$$\vec{t}_1 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial u} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial u}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial u} \right) \quad (2.9)$$

a

$$\vec{t}_2 = \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} = \left(\frac{\partial x(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial y(u, v)}{\partial v}, \frac{\partial z(u, v)}{\partial v} \right). \quad (2.10)$$

Z podkapitoly 1.4 víme, že když uvažujeme graf funkce $x = x(t)$, tak má derivace $\frac{dx}{dt}$ význam tečny grafu funkce (v daném bodě), resp. její směrnice. Nyní však neuvažujeme graf funkce, ale parametricky zadanou plochu Σ . Přičemž polohový vektor \vec{r} probíhající tuto plochu je závislý na parametrech u, v . Tečné vektory \vec{t}_1 a \vec{t}_2 tak vypočteme podle vztahů 2.9 a 2.10.

Má-li být normálový vektor \vec{n} kolmý k ploše Σ , pak musí být kolmý i k jejím tečným vektorům \vec{t}_1, \vec{t}_2 v daném bodě. Vektor \vec{n} tak vypočteme za pomoci vektorového součinu³⁴ jako:

$$\vec{n} = \frac{\vec{t}_1 \times \vec{t}_2}{\|\vec{t}_1 \times \vec{t}_2\|}. \quad (2.11)$$

Aby byl normálový vektor \vec{n} jednotkový, dělíme vektor $\vec{t}_1 \times \vec{t}_2$ jeho velikostí.

2.3.2 „Slušně vychovaná plocha“ Σ zadaná explicitně

Pokud je plocha Σ zadána explicitně, pak je jedna ze souřadnic x, y, z vyjádřena pomocí zbývajících dvou. Předpokládejme, že je souřadnice z vyjádřena pomocí souřadnic x a y , tj. $z = z(x, y)$.

Pokud budeme uvažovat normálový vektor, který bude mířit do oblasti kladné části osy z , pak bude platit:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) dx dy}, \quad (2.12)$$

kde o je definiční oblast pro souřadnice x a y . Pokud bude normálový vektor mířit do oblasti záporné části osy z , bude platit vztah:

$$\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = - \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (2.13)$$

Právě vztahy 2.12 a 2.13 budeme používat pro výpočet plošného integrálu II. druhu pro plochu Σ zadanou explicitně. Odvození vztahu 2.12 bude provedeno v odstavci 3.1.5.

³⁴Z definice vektorového součinu plyne, že výsledek tohoto součinu je vektor kolmý k oběma vektorům, které vektorově násobíme.

2.4 Řešené úlohy na plošný integrál II. druhu

Úloha č. 1:

Vypočtete plošný integrál II. druhu z vektorové funkce $\vec{P}(\vec{r}) = (\frac{z^3}{x}, yz, x^2)$ po dolní polovině kulové plochy (s poloměrem p a středem v počátku soustavy souřadnic) vyjádřené jak parametricky, tak explicitně.

Řešení:

I. Plocha vyjádřena parametricky:

Dolní polovinu kulové plochy s poloměrem p můžeme vyjádřit jako:

$$\begin{aligned}x &= p \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi \\y &= p \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi \\z &= p \cdot \cos \theta,\end{aligned}$$

kde $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$, $\theta \in \langle \frac{\pi}{2}, \pi \rangle$.

Vyjdeme ze vztahu 2.8. Jelikož je plochou část kulové plochy, víme, že normálový vektor \vec{n} k této ploše lze vyjádřit jako $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$, kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor.

Pokud bychom si však vyjádřením normálového vektoru \vec{n} nebyli jistí, můžeme jej také určit způsobem popsaným v oddílu 2.3.1. Nejprve určíme tečné vektory \vec{t}_1, \vec{t}_2 ke kulové ploše dosazením do vztahů 2.9 a 2.10 (přičemž $u = \theta$ a $v = \phi$):

$$\begin{aligned}\vec{t}_1 &= \left(\frac{\partial x(\theta, \phi)}{\partial \theta}, \frac{\partial y(\theta, \phi)}{\partial \theta}, \frac{\partial z(\theta, \phi)}{\partial \theta} \right) = \\&= (p \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi, p \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi, -p \cdot \sin \theta),\end{aligned}\tag{2.14}$$

$$\begin{aligned}\vec{t}_2 &= \left(\frac{\partial x(\theta, \phi)}{\partial \phi}, \frac{\partial y(\theta, \phi)}{\partial \phi}, \frac{\partial z(\theta, \phi)}{\partial \phi} \right) = \\&= (-p \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, p \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, 0).\end{aligned}\tag{2.15}$$

Nyní dosadíme výsledky 2.14 a 2.15 do vztahu 2.11, čímž dostaneme normálový vektor \vec{n} :

$$\begin{aligned}\vec{n} &= \frac{(p \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi, p \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi, -p \cdot \sin \theta) \times (-p \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, p \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, 0)}{\|(p \cdot \cos \theta \cdot \cos \phi, p \cdot \cos \theta \cdot \sin \phi, -p \cdot \sin \theta) \times (-p \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi, p \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi, 0)\|} = \\&= \frac{(p^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \cos \phi, p^2 \cdot \sin^2 \theta \cdot \sin \phi, p^2 \cdot \sin \theta \cos \theta)}{p^2 \cdot \sin \theta} = \\&= (\sin \theta \cdot \cos \phi, \sin \theta \cdot \sin \phi, \cos \theta) = \left(\frac{x}{p}, \frac{y}{p}, \frac{z}{p} \right) = \frac{\vec{r}}{p} = \frac{\vec{r}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.\end{aligned}\tag{2.16}$$

V posledním kroku jsme využili toho, že p je poloměr sféry, který však můžeme vyjádřit také jako $\|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, tj. jako velikost polohového vektoru. Vidíme, že jsme se dostali k vyjádření normálového vektoru \vec{n} , které jsme uvedli na začátku tohoto výpočtu.

Známe tedy vektorové pole $\vec{P}(\vec{r})$ i normálový vektor, a tak můžeme dosadit do vztahu 2.8 a začít s úpravami:

$$\begin{aligned}
\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} \, dS = \iint_{\Sigma} \left(\frac{z^3}{x}, yz, x^2 \right) \cdot \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} \left(\frac{z^3}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + yz \cdot \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + x^2 \cdot \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} \left(\frac{z^3}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{x^2 z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} z \cdot \left(\frac{z^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} z \cdot \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \, dS.
\end{aligned}$$

Dosadíme za x, y, z a dostaneme:

$$\begin{aligned}
&\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \\
&= \iint_{\Sigma} p \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{(p \cdot \sin \theta \cdot \cos \phi)^2 + (p \cdot \sin \theta \cdot \sin \phi)^2 + (p \cdot \cos \theta)^2} \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} p^2 \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{\sin^2 \theta \cdot (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) + \cos^2 \theta} \, dS = \\
&= \iint_{\Sigma} p^2 \cdot \cos \theta \cdot \sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta} \, dS = \iint_{\Sigma} p^2 \cdot \cos \theta \, dS. \quad (2.17)
\end{aligned}$$

Převodli jsme tedy plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu. Nejprve provedeme pomocné výpočty (viz vzorce 2.96 a 2.97 v [2], str. 61):

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta} \right)^2 = p^2 \cos^2 \theta \cos^2 \phi + p^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + p^2 \sin^2 \theta = p^2,$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \phi} \right)^2 = p^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + p^2 \sin^2 \theta \cos^2 \phi + 0 = p^2 \sin^2 \theta,$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial y}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial y}{\partial \phi} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial z}{\partial \phi} = -p^2 \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi + p^2 \cos \theta \cos \phi \sin \theta \sin \phi + 0 = 0.$$

Tedy

$$\sqrt{EG - F^2} = p^2 \sin \theta.$$

Nyní se vrátíme k integrálu 2.17 a dokončíme výpočet:

$$\begin{aligned}\iint_{\Sigma} p^2 \cdot \cos \theta \, dS &= p^4 \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \cos \theta \sin \theta \, d\theta d\phi = p^4 \cdot 2\pi \cdot \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin(2\theta)}{2} \, d\theta = \\ &= p^4 \cdot \pi \cdot \left(-\frac{\cos(2\pi)}{2} + \frac{\cos \pi}{2} \right) = -\pi \cdot p^4.\end{aligned}$$

Plošný integrál II. druhu z vektorového pole \vec{P} po dolní polovině kulové plochy s poloměrem p tak vyšel $-\pi \cdot p^4$.

II. *Plocha vyjádřena explicitně:*

Explicitní vyjádření dolní poloviny kulové plochy má tvar:

$$z = -\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}.$$

K výpočtu použijeme vztah 2.13. Budeme tak potřebovat určit následující derivace:

$$\begin{aligned}\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial(-\sqrt{p^2 - x^2 - y^2})}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}}, \\ \frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{\partial(-\sqrt{p^2 - x^2 - y^2})}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}}.\end{aligned}$$

Nyní máme připravené všechny potřebné vztahy. Dosadíme do vztahu 2.13:

$$\begin{aligned}& - \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) \, dx dy = \\ &= - \iint_o \left(x^2 - \frac{z^3}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}} - yz \cdot \frac{y}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}} \right) \, dx dy = \\ &= - \iint_o \left(x^2 - z^2 \cdot \frac{(-\sqrt{p^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}} - y^2 \cdot \frac{(-\sqrt{p^2 - x^2 - y^2})}{\sqrt{p^2 - x^2 - y^2}} \right) \, dx dy = \\ &= - \iint_o (x^2 + z^2 + y^2) \, dx dy = - \iint_o p^2 \, dx dy.\end{aligned}$$

Převodli jsme tedy plošný integrál II. druhu na dvojný integrál.³⁵ Definiční oblast o , po které integrujeme, je v našem případě kruh se středem v počátku o poloměru p ležící v rovině xy . Pro pohodlnější integraci přejdeme do polárních souřadnic. Budeme tedy integrovat podle r (které vezmeme od 0 do p) a podle úhlu ϕ , který svírá polopřímka, na níž vynášíme hodnotu r , s kladnou poloosou x (vezmeme jej od 0 do 2π). Dostaneme tak:

$$- \iint_o p^2 \, dx dy = -p^2 \int_0^p \int_0^{2\pi} r \, dr d\phi = -p^2 \cdot 2\pi \int_0^p r \, dr = -p^2 \cdot 2\pi \cdot \left(\frac{p^2}{2} - 0 \right) = -\pi \cdot p^4.$$

Vidíme, že obě výše popsané metody výpočtu plošného integrálu II. druhu dávají stejný výsledek.

³⁵Viz [2], str. 38.

Úloha č. 2:

Odvoďte vztah pro výpočet povrchu koule o poloměru r užitím vztahu pro výpočet plošného integrálu II. druhu po explicitně zadané ploše.

Řešení:

V našem výpočtu využijeme vztah 2.12. Explicitní vyjádření poloviny kulové plochy známe. Budeme uvažovat polovinu kulové plochy ležící v poloprostoru $z > 0$, tj. $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, a vypočteme obsah této plochy. Povrch koule pak bude dvojnásobkem hodnoty, ke které dojdeme.

Obvykle bychom počítali povrch koule pomocí plošného integrálu I. druhu.³⁶ Ze vztahu mezi tímto integrálem a plošným integrálem II. druhu (vztah 2.8) plyne, že naším vektorovým polem musí být normálový vektor ke kulové ploše, tj. $\vec{P} = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right)$. Jenom tak totiž dostaneme v integrálu skalární součin dvou normálových vektorů, který je roven jedné.

Začneme s pomocnými výpočty:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Dosaďme do vztahu 2.12:

$$\begin{aligned} & \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) dx dy = \\ & = \iint_o \left(\frac{z}{r} + \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy = \\ & = \iint_o \left(\frac{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}{r} + \frac{x}{r} \cdot \frac{x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} + \frac{y}{r} \cdot \frac{y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy = \\ & = \iint_o \left(\frac{r^2 - x^2 - y^2 + x^2 + y^2}{r \cdot \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \right) dx dy = r \iint_o \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy. \end{aligned}$$

Přejdeme do polárních souřadnic:

$$\begin{aligned} r \iint_o \frac{1}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} dx dy &= r \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{R}{\sqrt{r^2 - (R \cdot \cos \phi)^2 - (R \cdot \sin \phi)^2}} dR d\phi = \\ &= r \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{-2R}{\sqrt{r^2 - R^2}} dR d\phi = r \cdot \left(\frac{-1}{2}\right) \cdot 2\pi \cdot \int_0^r \frac{-2R}{\sqrt{r^2 - R^2}} dR = \\ &= -\pi \cdot r \cdot \int_{r^2}^0 \frac{1}{\sqrt{t}} dt = -\pi \cdot r \cdot \left(\frac{\sqrt{0}}{\frac{1}{2}} - \frac{\sqrt{r^2}}{\frac{1}{2}}\right) = 2\pi \cdot r^2. \end{aligned}$$

Jelikož jsme však integrovali pouze po polovině kulové plochy, musíme vzít dvojnásobnou hodnotu výsledku, tj. $4\pi \cdot r^2$. Vidíme, že nám vyšel známý vztah pro výpočet povrchu koule o poloměru r .

³⁶Viz [2], str. 63.

Další řešené úlohy podobného charakteru lze nalézt např. v [7], str. 4–9 nebo v [3], str. 96.

2.5 Plošný integrál II. druhu v kontextu dalších integrálů

To, že plošný integrál II. druhu souvisí s jinými typy integrálů, jsme mohli postřehnout několikrát v předešlé části textu. Z názvu je zřejmé, že plošný integrál II. druhu souvisí s křivkovým integrálem II. druhu. Oba integrály totiž integrují vektorové funkce (resp. pole). Rozdíl mezi nimi je v tom, že u křivkového integrálu integrujeme po křivce, kdežto u plošného integrálu integrujeme po ploše. Co je ale opět společné, je fakt, že křivka i plocha musí být „slušně vychované“. V jistém slova smyslu tak lze plošný integrál II. druhu chápat jako analogii ke křivkovému integrálu II. druhu.

Plošný integrál II. druhu však rovněž poměrně úzce souvisí s plošným integrálem I. druhu. O tom jsme se mohli například přesvědčit ve druhé úloze (viz podkapitola 2.4). Již z názvů je patrné, že souvislost mezi těmito druhy integrálů je v tom, že u obou integrujeme po „slušně vychované ploše“.

O vztahu mezi oběma integrály jsme se již zmínili v oddílu 2.3.1. Víme tak, že:

$$\int_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \int_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS. \quad (2.18)$$

Připomeňme, že \vec{n} je normálový vektor k ploše Σ . Zaměřme se nyní na skalární součin $\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n}$. Pro něj platí:³⁷

$$\vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} = \|\vec{P}(\vec{r})\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \alpha = \|\vec{P}(\vec{r})\| \cdot \cos \alpha, \quad (2.19)$$

přičemž α je úhel, který svírá vektor $\vec{P}(\vec{r})$ s vektorem \vec{n} . Jedná se tak o průmět vektoru $\vec{P}(\vec{r})$ do směru normálového vektoru \vec{n} . Tedy plošný integrál II. druhu z vektorového pole $\vec{P}(\vec{r})$ je vlastně plošný integrál I. druhu z průmětu vektorového pole $\vec{P}(\vec{r})$ do směru normálového vektoru.

2.6 Využití plošného integrálu II. druhu ve fyzice

Zákon zachování hmotnosti

Představme si objem V ohraničený křivou plochou Σ , ze které vytéká nějaká kapalina. Její tok lze popsat pomocí hustoty toku, což je veličina, kterou lze vyjádřit jako $\rho \cdot \vec{v}$, kde ρ je hustota kapaliny a \vec{v} je její rychlost v místě, kde opouští ohraničený objem. Víme, že plošný integrál II. druhu má význam toku vektorového pole plochou Σ . V našem případě bude vektorovým polem právě součin $\rho \cdot \vec{v}$. Pro časovou derivaci hmotnosti kapaliny uvnitř objemu ohraničeného

³⁷Opět výraz rozepíšeme s využitím definice skalárního součinu.

plochou Σ pak můžeme napsat (viz [20], vztah 11.49, kapitola 11, str. 19):

$$\oiint_{\Sigma} \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = -\frac{dm_{celk}}{dt}, \quad (2.20)$$

kde m_{celk} je hmotnost kapaliny v objemu ohraničeném plochou Σ a t je čas. Z tohoto vztahu je vidět, že se vytékání kapaliny (které vyjadřuje plošný integrál) projeví úbytkem hmotnosti m_{celk} (který je vyjádřen záporně vzatou časovou derivací této hmotnosti) v oblasti uzavřené plochou a naopak. Rovnici 2.20 nazýváme *zákon zachování hmotnosti*.

Gaussův zákon elektrostatiky

Z elektřiny víme, že tok elektrické intenzity ϕ uzavřenou plochou Σ je přímo úměrný náboji Q uvnitř oblasti ohraničené touto plochou. Platí tedy vztah (viz [21], vztah 1.43):

$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}, \quad (2.21)$$

kde ε_0 je permitivita vakua. Jelikož ale víme, že plošný integrál II. druhu má význam toku vektorového pole plochou, tak můžeme pro tok elektrické intenzity napsat:

$$\phi = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S}, \quad (2.22)$$

kde \vec{E} je elektrická intenzita. Ze vztahu 2.21 a 2.22 pak již plyne *Gaussův zákon elektrostatiky* ve tvaru:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0}. \quad (2.23)$$

Úloha na Gaussův zákon elektrostatiky

Mějme bodovou částici s nábojem Q . Vypočtěte velikost intenzity E v okolí tohoto náboje v závislosti na vzdálenosti r od bodového náboje.

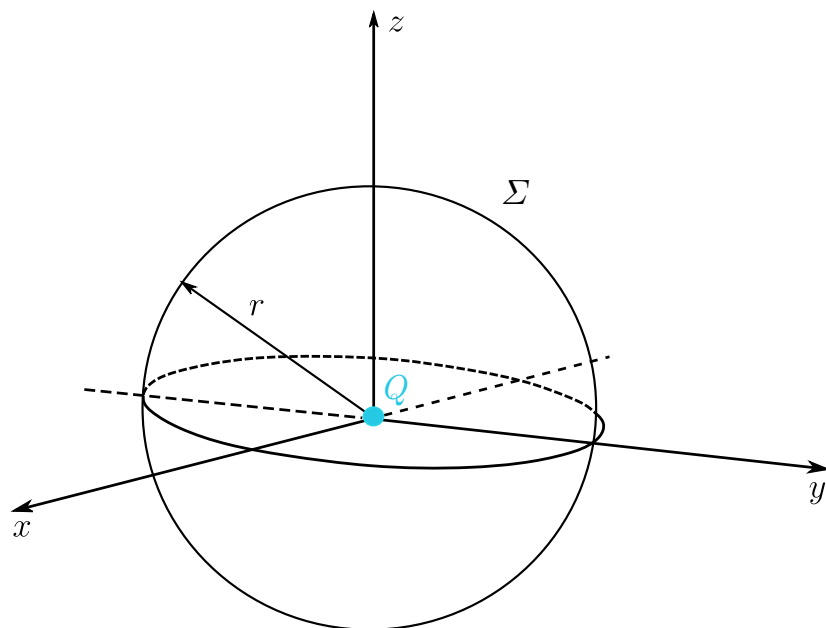
Řešení:

Bodový náboj Q umístíme do počátku soustavy souřadnic, viz obrázek 2.7. Vyjdeme z Gaussova zákona elektrostatiky, tj. využijeme vztah 2.23. Nejprve vyřešíme plošný integrál II. druhu z levé strany vztahu 2.23:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \vec{n} dS = \oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{r} dS = \oiint_{\Sigma} E dS, \quad (2.24)$$

kde \vec{n} je normálový vektor k ploše Σ , který můžeme vyjádřit jako polohový vektor \vec{r} vydělený jeho velikostí r , a E je velikost elektrické intenzity ve vzdálenosti r . Poslední rovnost výpočtu 2.24 platí, neboť:

$$\vec{E} \cdot \frac{\vec{r}}{r} = \|\vec{E}\| \cdot \left\| \frac{\vec{r}}{r} \right\| \cdot \cos \alpha = E \cdot 1 \cdot \cos 0 = E,$$



Obrázek 2.7: Bodový náboj Q uvnitř kulové plochy o poloměru r

příčměž α je úhel, který svírá vektor elektrické intenzity \vec{E} s normálovým vektorem $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$. Je zřejmé, že tento úhel bude nulový, neboť se jedná o dva stejně orientované vektory (ze symetrie úlohy plyne, že vektor \vec{E} je také kolmý k ploše Σ).

Je vidět, že jsme převedli plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu, který musíme nyní vyřešit. Jelikož je velikost elektrické intenzity E v dané vzdálenosti r konstantní, můžeme psát:

$$\oiint_{\Sigma} E \, dS = E \oiint_{\Sigma} dS. \quad (2.25)$$

Potřebujeme tedy vypočítat pouze integrál $\oiint_{\Sigma} dS$. Nejdříve se omezíme na integrál po polovině kulové plochy. Horní polosféru (ozn. Σ_1) totiž umíme vyjádřit explicitně jako $z = \sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$, což plyne z rovnice kulové plochy $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$. Integrál přes celou kulovou plochu pak bude díky symetrii dvojnásobkem zjištěného výsledku.

Výpočet plošného integrálu I. druhu $\iint_{\Sigma_1} dS$ po horní polosféře:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

$$\sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2} = \sqrt{1 + \frac{x^2}{r^2 - x^2 - y^2} + \frac{y^2}{r^2 - x^2 - y^2}} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}.$$

Přípravné výpočty máme hotové, a tak můžeme napsat:

$$\iint_{\Sigma_1} dS = \iint_{\sigma} \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} \, dx dy = \int_0^r \int_0^{2\pi} \frac{r}{\sqrt{r^2 - (R \cdot \cos \phi)^2 - (R \cdot \sin \phi)^2}} R \, dR d\phi =$$

$$= r \cdot 2\pi \int_0^r \frac{R}{\sqrt{r^2 - R^2}} dR = -\pi \cdot r \int_{r^2}^0 t^{-\frac{1}{2}} dt = -\pi \cdot r \cdot \frac{(0 - r)}{\frac{1}{2}} = 2\pi r^2.$$

Tedy

$$\oiint_{\Sigma} dS = 2 \iint_{\Sigma_1} dS = 4\pi r^2. \quad (2.26)$$

Tím jsme vyřešili plošný integrál II. druhu z levé strany vztahu 2.23. Víme tak, že:

$$\oiint_{\Sigma} \vec{E} \cdot d\vec{S} = E \cdot 4\pi r^2. \quad (2.27)$$

Ze vztahů 2.23 a 2.27 pak již snadno nahlédneme, že:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2}. \quad (2.28)$$

2.7 K zapamatování

- Plošný integrál II. druhu – integrujeme vektorové pole po ploše.
- Označení a definice: $\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \vec{P}(\vec{r}_i) \cdot \Delta\vec{S}_i$.
- Vzorec pro výpočet u plochy zadané
 - parametricky: $\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS$
(převedení na plošný integrál I. druhu),
 - explicitně: $\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\sigma} \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) dx dy$
(převedení na dvojný integrál).
- Využití ve fyzice: zákon zachování hmotnosti, Gaussův zákon elektrostatiky, ...

3. Diferenciální operátory

Diferenciální operátory jsou hojně využívaným matematickým aparátem. Ve fyzice se s některými z nich můžeme setkat již v úvodním kurzu mechaniky, avšak výrazněji se začnou využívat až během přednášky z elektřiny a magnetismu. V dalších fyzikálních přednáškách se pak používají zcela automaticky. Je proto dobré vědět nejen jak se s diferenciálními operátory počítá, ale také jaký mají význam, resp. čím je jejich zavedení motivováno. V této kapitole se budeme zabývat všemi zmíněnými aspekty tohoto tématu a také odvodíme Gaussovu větu propojující plošný integrál II. druhu s trojným integrálem právě pomocí jednoho z diferenciálních operátorů.

Mezi diferenciální operátory patří zejména *gradient*, *divergence* a *rotace*. Podrobně se jimi budeme zabývat v dílčích částech této kapitoly.

Na první pohled nejvýraznějším rozdílem mezi gradientem, divergencí a rotací je to, že gradient „přeměňuje“ skalár na vektor, divergence vytvoří z vektoru skalár a rotace „přemění“ vektor na jiný vektor.

Na úvod bychom také mohli nastínit alespoň přibližně fyzikální význam těchto tří nejdůležitějších diferenciálních operátorů. Co se týče gradientu, tak ten je spojen se směrem největšího růstu skalární veličiny. Divergence zase souvisí s existencí zdrojů vektorového pole. Kdežto rotace nám podává informaci o tom, zda je vektorové pole vírové, či nikoliv. Tyto vlastnosti však poměrně jednoduše vyplynou ze zavedení jednotlivých operátorů.

Co se týče samotného názvu, tj. diferenciální operátory, tak slovo diferenciální souvisí s tím, že u výpočtu gradientu, divergence i rotace budeme využívat derivací. Operátorem pak rozumíme nějaké pravidlo (resp. předpis), které přiřazuje prvkům jedné množiny prvky množiny druhé (podrobněji viz [25]).

Nakonec ještě zmiňme, že diferenciální operátory jsou odlišné od operátorů, se kterými se pracuje v kvantové mechanice.³⁸ Nicméně pokud v našem textu budeme mluvit o operátorech, vždy budeme mít na mysli diferenciální operátory, tj. zejména gradient, divergenci a rotaci.

3.1 Gradient

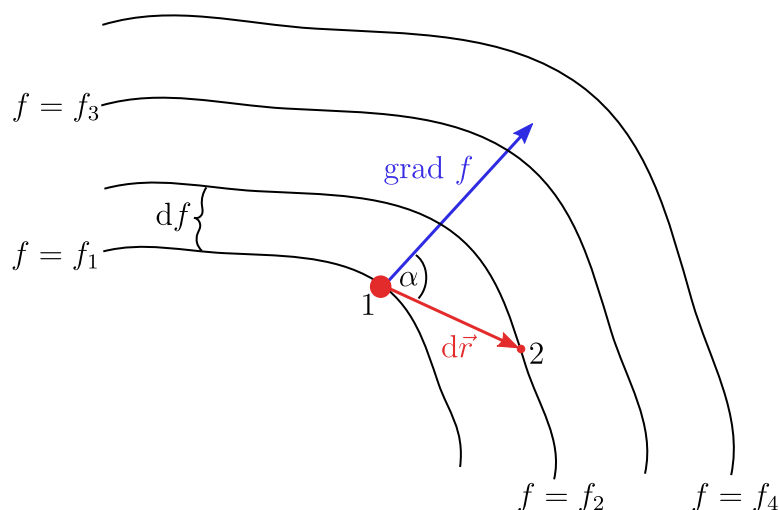
Gradient je diferenciální operátor, se kterým jsme se již setkali v oddílu 1.6.2 při odvození vztahu mezi konzervativním vektorovým polem a potenciálem. Tam jsme se ale spokojili s tím, že se jedná o označení „vektoru“ skládajícího se z parciálních derivací. Nezabývali jsme se však operátorem jako takovým. V této kapitole zavedeme operátor gradient, zaměříme se na jeho vlastnosti, souřadnicový tvar a také uvedeme několik řešených příkladů.

³⁸V kvantové mechanice přiřazujeme jednotlivým veličinám, jako je např. hybnost nebo souřadnice, operátory, tj. např. operátor hybnosti a operátor souřadnice. Jsou to však trochu jiné matematické objekty, než jsou diferenciální operátory. Více se lze o operátorech v kvantové mechanice dočíst např. v [26], str. 27.

3.1.1 Zavedení gradientu

Jak již bylo zmíněno, gradient vytváří ze skalární veličiny (zkráceně skaláru) vektorovou veličinu (zkráceně vektor). Z podkapitol zabývajících se integrály I. druhu³⁹ jsme zvyklí označovat skalární veličinu (resp. skalární funkci) jako f . Dále si připomeňme, že tato skalární funkce obecně závisí na poloze, tj. $f = f(\vec{r})$, kde \vec{r} je polohový vektor. Množinu bodů, na které je skalární funkce f konstantní, nazýváme *ekvipotenciálou*.⁴⁰ Každé ekvipotenciále tak můžeme přiřadit hodnotu skalární funkce f .

Představme si nyní situaci zobrazenou na obrázku 3.1. Na něm je znázorněno



Obrázek 3.1: Schéma týkající se zavedení gradientu

několik ekvipotenciál v řezu. Každé z nich je přiřazena hodnota skalární funkce (f_1, \dots, f_4 tak, že $f_4 > f_3 > f_2 > f_1$). Nacházíme-li se na první ekvipotenciále, víme, že má skalární funkce hodnotu f_1 . Pokud přejdeme na druhou ekvipotenciálu, skalární funkce bude mít hodnotu f_2 , atd.

S takto popsanou situací se běžně setkáváme u map. Roli ekvipotenciál hrají tzv. *vrstevnice* spojující body se stejnou nadmořskou výškou. Skalární funkce f je pak samotná nadmořská výška.

Otázkou však je, jakým směrem je vhodné se vydat, abychom se co „nejrychleji“ dostali do místa, jemuž odpovídá větší hodnota funkce f . Zvolme nějaký obecný vektor, po kterém se pomyslně přemístíme z první ekvipotenciály na druhou (např. z bodu 1 do velmi blízkého bodu 2), a označme ho $d\vec{r}$.⁴¹ Víme tedy, že se při „našem krůčku“ změnila hodnota skalární funkce $f(\vec{r})$ z hodnoty f_1 na hodnotu f_2 , tedy o rozdíl $f_2 - f_1$. Označme tento rozdíl jako df .⁴²

Možná intuitivně cítíme, že by měl existovat vztah mezi df a $d\vec{r}$. Víme, že df je rozdíl dvou hodnot skalární funkce, z čehož plyne, že df je skalár. Oproti

³⁹Viz [2], str. 53.

⁴⁰Označení ekvipotenciála se rovněž používá pro oblast s konstantním potenciálem. V tomto případě se nejedná o potenciál, nýbrž o skalární funkci. Význam je ale obdobný.

⁴¹Toto označení volíme proto, že při našich úvahách uvažujeme posun mezi dvěma velice blízkými ekvipotenciálami, posun tak značíme jako $d\vec{r}$ namísto $\Delta\vec{r}$. Zároveň je vhodné si uvědomit, že se vlastně přesouváme z místa, kterému přísluší polohový vektor \vec{r}_1 na místo s polohovým vektorem \vec{r}_2 . Posunu tedy odpovídá vektor $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ a ten označujeme jako $d\vec{r}$.

⁴²Opět značíme rozdíl jako df namísto Δf , protože uvažujeme velmi blízké ekvipotenciály.

tomu, $d\vec{r}$ je vektor. Nelze tak jednoduše tvrdit, že df a $d\vec{r}$ se rovnají. Jak tedy z vektoru „vyrobit“ skalár?

Zkusme tedy přijít na nějaký způsob, jak z vektoru „vyrobit“ skalár. Nejjednodušší odpověď by byla, že vezmeme velikost vektoru $d\vec{r}$, pak bychom již porovnávali dva skaláry. Obecně můžeme k vektoru např. přičíst další vektor nebo ho něčím vynásobit. Přičítání by nám nepomohlo,⁴³ ale násobení ano. Násobení skalárem změní pouze velikost vektoru, popř. jeho orientaci, a tak se nabízí vektor $d\vec{r}$ vynásobit jiným vektorem. Použijeme skalární součin.⁴⁴

Označíme-li vektor, kterým skalárně vynásobíme vektor $d\vec{r}$ tak, aby se součin rovnal df , jako $\text{grad}f$, můžeme napsat:

$$\boxed{df = \text{grad}f \cdot d\vec{r}}. \quad (3.1)$$

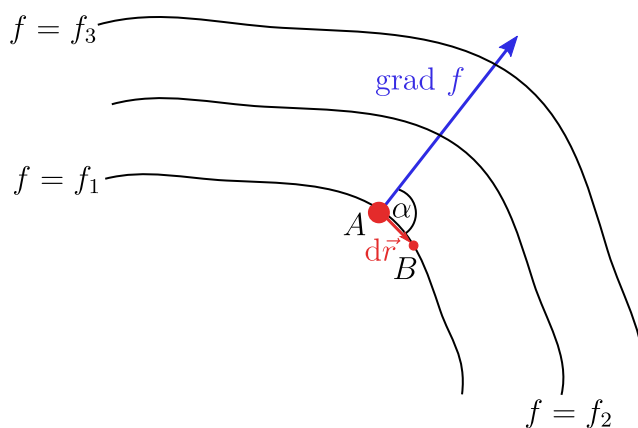
Označení $\text{grad}f$ čteme jako *gradient skalární funkce f* . Ačkoliv nad označením $\text{grad}f$ nepíšeme šipku, jedná se o vektor, což ostatně plyne ze zavedení vztahu 3.1. Ekvivalentně lze gradient skalární funkce f značit jako $\vec{\nabla}f$ (čteme: nabla f). Právě vztah 3.1 budeme považovat za definiční vztah pro diferenciální operátor gradient.⁴⁵

3.1.2 Vlastnosti gradientu

Gradient je kolmý k ekvipotenciále

Podíváme-li se na obrázek 3.1, vypadá to, že je vektor $\text{grad}f$ kolmý na ekvipotenciálu. Pojdme tuto skutečnost dokázat.

Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku 3.2. Vidíme, že vektor $d\vec{r}$ je určen



Obrázek 3.2: Kolmost gradientu k ekvipotenciále

dvěma velmi blízkými body A a B , které oba leží na té samé ekvipotenciále. Hodnota skalární funkce f v bodech A i B je rovna v našem případě f_1 . Hodnotu

⁴³Přičteme-li k vektoru jiný vektor, opět se z něj stane vektor.

⁴⁴V lineární algebře se o skalárním součinu mluví jako o symetrické pozitivně definitní bilinéární formě. Bilineární forma je zobrazení do tělesa (nejčastěji do reálných čísel). Tedy skutečně skalární součin „vyrobí“ z dvou vektorů skalár, což jsme chtěli. Na skalární součin však můžeme nahlížet i „středoškolsky“, tj. že pro dva vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ platí: $\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$, což je skalár („číslo“).

⁴⁵V mnoha zdrojích (jako např. v [5], str. 226 nebo v [15], str. 9) je operátor gradient zaveden pomocí jeho souřadnicového tvaru, kterým se budeme zabývat až v oddílu 3.1.3.

df určíme jako rozdíl hodnoty f v koncovém a počátečním bodě vektoru $d\vec{r}$, tj. v bodech B a A . Tedy $df = f_2 - f_1 = 0$. Pro tuto situaci tak můžeme přepsat vztah 3.1 do podoby:

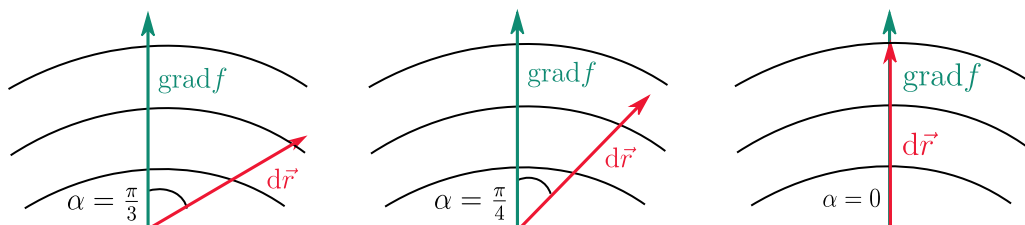
$$0 = \text{grad}f \cdot d\vec{r} = \|\text{grad}f\| \cdot \|d\vec{r}\| \cdot \cos \alpha, \quad (3.2)$$

kde α je úhel, který svírají vektory $\text{grad}f$ a $d\vec{r}$. Při úpravě jsme použili definici skalárního součinu.

Jelikož jsou vektory $\text{grad}f$ i $d\vec{r}$ obecně nenulové, musí být $\cos \alpha = 0$. To nastává pro $\alpha = \frac{\pi}{2}$ (nejmenší kladná hodnota). Jinými slovy, $\text{grad}f$ je kolmý na vektor $d\vec{r}$. Jelikož uvažujeme vektor $d\vec{r}$ velmi „malý“ (neboli, že jsou body A, B velmi blízko u sebe a vektor $d\vec{r}$ tedy lze považovat za tečný k ekvipotenciále), lze tak rovněž tvrdit, že *vektor $\text{grad}f$ je kolmý na ekvipotenciálu*.

Gradient určuje směr největšího růstu skalární funkce f

Uvažujme tři situace znázorněné na obrázku 3.3. Ve všech třech případech



Obrázek 3.3: Odvození – $\text{grad}f$ má směr největšího růstu f

mají vektory $\text{grad}f$ stejnou velikost, tj. $\|\text{grad}f\| = \text{konst.}$ (a jak jsme ukázali výše, jsou vždy kolmé na ekvipotenciály). Totéž platí pro vektory $d\vec{r}$, tj. $\|d\vec{r}\| = \text{konst.}$ Jednotlivé situace se tak liší pouze úhlem α , který svírají vektory $\text{grad}f$ a $d\vec{r}$.

Jakým směrem bychom měli udělat „krok“ o velikosti $\|d\vec{r}\|$, aby byla příslušná hodnota df maximální? Zkusme hodnotu df vypočítat. K tomu použijeme vztah 3.1, který rozepíšeme s využitím definice skalárního součinu na tvar:

$$df = \text{grad}f \cdot d\vec{r} = \|\text{grad}f\| \cdot \|d\vec{r}\| \cdot \cos \alpha.$$

Velikosti $\|\text{grad}f\|$ a $\|d\vec{r}\|$ jsou obecně nenulové. Hodnota df tak bude záviset pouze na členu $\cos \alpha$. Kdybychom měli porovnat situace na obrázku 3.3, tak by největší hodnota df vyšla pro situaci vpravo (neboť $\cos 0 = 1$), o něco menší by byla hodnota df pro prostřední situaci (neboť $\cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$) a ještě menší by byla hodnota df pro situaci vlevo (neboť $\cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$).

Z uvedeného můžeme usuzovat, že df bude nabývat největší hodnoty pro nulový úhel α . Skutečně tak tomu bude, neboť člen $\cos \alpha$ může z definice kosinu nabývat hodnot od -1 do $+1$, a právě hodnoty $+1$ nabyde pro $\alpha = 0$, neboli – pokud bude mít vektor $d\vec{r}$ stejný směr jako vektor $\text{grad}f$. Jinými slovy, největší růst skalární funkce f nastane pro případ, kdy se budeme „pohybovat“ ve směru vektoru $\text{grad}f$. Gradient tak skutečně *určuje směr největšího růstu skalární funkce f* .

3.1.3 Souřadnicový tvar gradientu

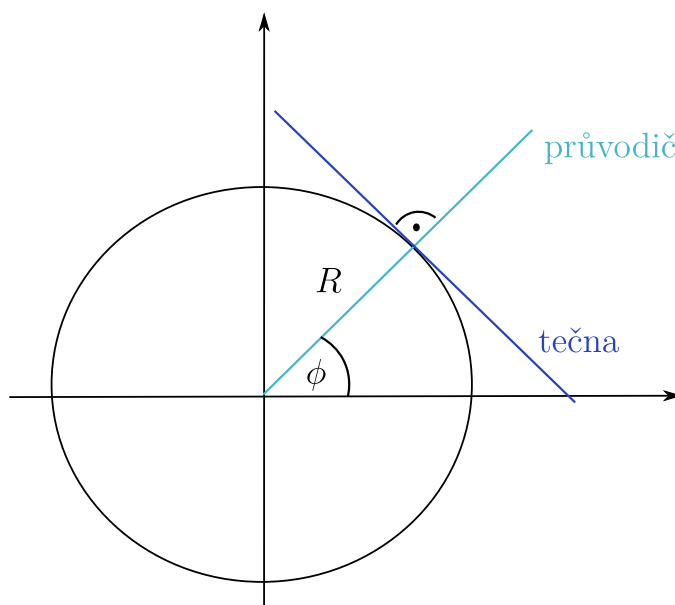
Křivočaré ortogonální souřadnice

V trojrozměrném prostoru používáme nejčastěji tři druhy systémů souřadnic, a to *kartézský*, *cylindrický* a *sférický* (podrobnosti viz [1], str. 13.; používáme stejně zavedené a označené souřadnice). Abychom nemuseli odvozovat souřadnicový tvar gradientu pro každý z těchto systémů zvlášť, bylo by dobré tyto tři systémy nějak „zobecnit“.

Připomeňme, že u kartézského systému souřadnic musíme vždy zadat souřadnice x , y a z , aby byl bod zadán jednoznačně. U cylindrického systému musíme zadat kolmou vzdálenost od osy z (značíme R), úhel ϕ a souřadnici z . Kdežto u sférického systému souřadnic musíme zadat radiální vzdálenost od počátku r a dva úhly: ϑ a φ . *Co ale mají tyto systémy společného?*

U kartézského systému souřadnic je zřejmé, že jsou osy x , y a z (a přímky s nimi rovnoběžné) k sobě navzájem kolmé.

U cylindrického systému souřadnic určujeme vzdálenost R a úhel ϕ v rovině $z = 0$ (resp. $z = \text{konst.}$). Z toho plyne, že je přímka, na níž odečítáme z -ovou souřadnici, kolmá jak na polopřímku, na níž odměříme vzdálenost R , tak na kružnicový oblouk o poloměru R , který vznikne otočením okolo středu ležícího na ose z o úhel ϕ . Dvě křivky jsou k sobě v daném bodě kolmé právě tehdy, jestliže jsou k sobě kolmé jejich tečny (v tomto bodě). Z toho plyne, že je i polopřímka, na níž vynášíme vzdálenost R , kolmá k zmíněnému kružnicovému oblouku. Průvodič středu kružnice a jejího bodu je totiž vždy kolmý k její tečně (v daném bodě).

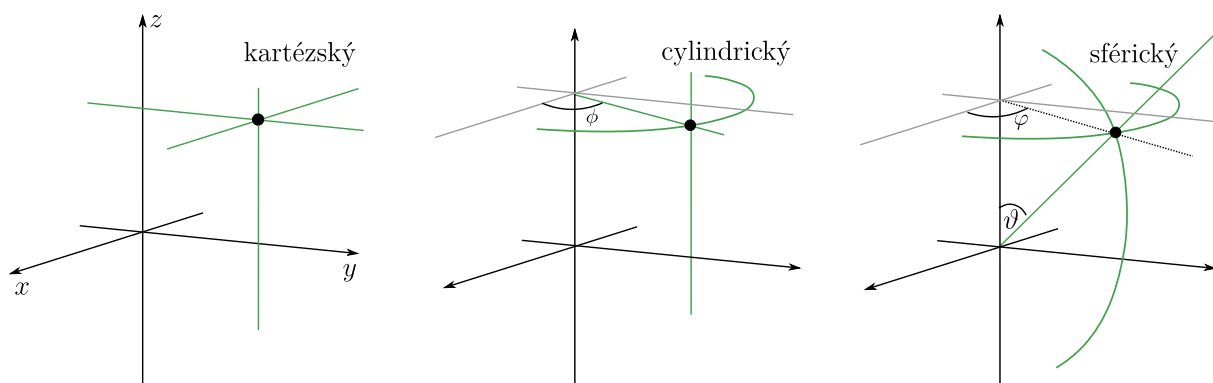


Obrázek 3.4: Polopřímka na níž nanášíme vzdálenost R (resp. průvodič) kolmá k tečně kružnice (v daném bodě)

U sférického systému souřadnic pracujeme s radiální vzdáleností r a úhly ϑ , φ . Stejně jako u cylindrického systému i zde vznikne pro každý z úhlů kružnicový oblouk o příslušném poloměru (pro úhel ϑ je poloměrem r). Pro úhel ϑ se bude jednat o otáčení okolo počátku, pro úhel φ okolo středu ležícího na ose z . V případě úhlu φ se jedná o otáčení v rovině rovnoběžné s rovinou xy (nebo přímo

v ní), kdežto u úhlu ϑ se jedná o otáčení v rovině kolmé k této rovině. Polopřímka, na níž vynášíme radiální vzdálenost r , je kolmá na zmíněné kružnicové oblouky. Tyto oblouky jsou k sobě rovněž kolmé. Nacházejí se totiž v rovinách k sobě kolmých.

Zavedme nyní pojem *souřadnicová čára*. Jedná se o čáru, která vznikne tak, že dvě ze tří souřadnic bodu (v prostoru) uvažujeme konstantní a jeho třetí souřadnici měníme. Souřadnicovou čarou je pak „trajektorie zmíněného bodu“. Z tohoto zavedení plyne, že pro kartézský systém souřadnic jsou souřadnicovými čarami osy x , y a z nebo přímky s nimi rovnoběžné. U cylindrického systému souřadnic bude jednou souřadnicovou čarou polopřímka, na níž vynášíme vzdálenost R , druhou čarou bude přímka, na níž vynášíme z -ovou souřadnici, a třetí souřadnicovou čarou bude kružnicový oblouk o poloměru R vzniklý otáčením okolo středu ležícího na ose z o úhel ϕ (v rovině rovnoběžné s rovinou xy). U sférického systému pak bude jednou souřadnicovou čarou opět polopřímka, na níž vynášíme radiální vzdálenost r , a zbývajícími dvěma čarami budou kružnicové oblouky vzniklé otáčením o úhel φ , resp. ϑ v rovinách k sobě kolmých. V případě úhlu ϑ se bude jednat o otáčení okolo počátku, kdežto v případě úhlu φ bude střed otáčení ležet na ose z . Jednotlivé souřadnicové čáry jsou vyobrazeny na obrázku 3.5.



Obrázek 3.5: Souřadnicové čáry (zeleně) pro jednotlivé souřadnicové systémy

Shrňme-li naše poznatky, tak všechny souřadnicové čáry jsou k sobě navzájem kolmé, tj. *ortogonální*, přičemž obecně mohou být tyto čáry „zahnuté“ (např. když se jedná o kružnicové oblouky), a tak budeme říkat, že jsou *křivočaré*. V našich dalších úvahách tak budeme místo kartézských, cylindrických a sférických souřadnicích pracovat s těmito obecnějšími *křivočarými ortogonálními souřadnicemi*. Označme je $q_i = (q_1, q_2, q_3)$.⁴⁶

Od totální derivace k totálnímu diferenciálu

Alespoň částečné pochopení pojmu totální diferenciál bude velice důležité pro odvození souřadnicového tvaru gradientu. Zkusme nejprve vyřešit následující úlohu:

⁴⁶Pro kartézský systém souřadnic je $q_i = (x, y, z)$, pro cylindrický systém je $q_i = (R, \phi, z)$ a pro sférický systém je $q_i = (r, \vartheta, \varphi)$.

Vypočítejme totální derivaci podle proměnné t funkce F zadané v implicitním tvaru: $F = \sin x + y^2 + z^3$, kde x , y i z obecně závisí na proměnné t .

Řešení vypadá takto:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{d(\sin x + y^2 + z^3)}{dt} = \cos x \cdot \frac{dx}{dt} + 2y \cdot \frac{dy}{dt} + 3z^2 \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (3.3)$$

Při výpočtu jsme využili pravidla pro derivování složené funkce. Nejprve jsme parciálně zderivovali funkci F podle proměnné x . Následně jsme si uvědomili, že i proměnná x může obecně záviset na t , a tak jsme výraz přenásobili derivací $\frac{dx}{dt}$ (zderivovali jsme vnitřní funkci x podle t). Totéž jsme provedli pro proměnné y , z a vše sečetli.

Napišme nyní totální derivaci funkce $F = F(x, y, z)$ podle proměnné t . Budeme postupovat analogicky k předchozímu příkladu:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dt}. \quad (3.4)$$

Vidíme, že v původním příkladu hrál člen $\cos x$ roli parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}$, člen $2y$ odpovídá $\frac{\partial F}{\partial y}$ a člen $3z^2$ hrál roli $\frac{\partial F}{\partial z}$.

Víme, že pro totální derivaci nějaké obecné funkce g platí přibližná rovnost:⁴⁷

$$\frac{dg}{dt} \doteq \frac{\Delta g}{\Delta t}, \quad (3.5)$$

kde Δg je malá změna funkce g a Δt je malá změna proměnné t . Přepišme nyní vztah 3.4 s využitím znalosti vztahu 3.5:

$$\frac{\Delta F}{\Delta t} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\Delta y}{\Delta t} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\Delta z}{\Delta t}. \quad (3.6)$$

Vynásobme rovnost 3.6 výrazem Δt a dostaneme:

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \Delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \Delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \Delta z. \quad (3.7)$$

Budeme-li uvažovat změnu funkce F , resp. proměnných x , y a z , jako velmi malou (blížící se limitně k nule), můžeme poslední vztah přepsat do tvaru:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot dz. \quad (3.8)$$

Vztah 3.8 nazveme *totálním diferenciálem* funkce F . Ten nám podává informaci o tom, jak se změní hodnota funkce F , pokud se změní proměnné x o dx , y o dy a z o dz . Jednotlivé parciální derivace pak udávají „rychlost změny“ funkce F ve směru dané souřadnice.

Na závěr přepišme vztah 3.8 do obecného tvaru pro křivočaré ortogonální souřadnice q_i . Funkce F bude závislá na souřadnicích q_i , tj. $F = F(q_i) = F(q_1, q_2, q_3)$, a tak ve vztahu 3.8 napíšeme q_1 namísto x , q_2 namísto y a q_3 namísto z . Dostaneme:

$$dF = \frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial F}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \frac{\partial F}{\partial q_3} \cdot dq_3. \quad (3.9)$$

⁴⁷Derivace $\frac{dg}{dt}$ v bodě t_0 je totiž definována jako $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0}$. Pro t blízko t_0 můžeme napsat přibližnou rovnost $\lim_{t \rightarrow t_0} \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} \doteq \frac{g(t) - g(t_0)}{t - t_0} = \frac{\Delta g}{\Delta t}$.

Laméovy koeficienty

Při zavádění gradientu jsme pracovali s vektorem $d\vec{r}$. V kartézském systému souřadnic má tento vektor souřadnice (dx, dy, dz) . Pro jeho velikost můžeme napsat vztah:⁴⁸

$$\|d\vec{r}\|^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2. \quad (3.10)$$

Budeme-li pracovat v cylindrickém systému souřadnic, pak platí,⁴⁹ že

$$\begin{aligned} x &= R \cdot \cos \phi \\ y &= R \cdot \sin \phi \\ z &= z, \end{aligned} \quad (3.11)$$

kde $R \in \langle 0, \infty \rangle$, $\phi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $z \in (-\infty, \infty)$. Přepíšme tyto vztahy pro „velice malé změny“ souřadnic x, y, z , resp. R, ϕ, z . Tedy

$$\begin{aligned} dx &= dR \cdot \cos \phi - R \cdot \sin \phi \cdot d\phi \\ dy &= dR \cdot \sin \phi + R \cdot \cos \phi \cdot d\phi \\ dz &= dz. \end{aligned} \quad (3.12)$$

Při úpravách jsme využili vztah 3.9. V tomto případě byla funkce F rovna x , resp. y , resp. z a platilo, že $F = F(R, \phi, z)$. Rozepíšme výpočet pro „malou“ změnu souřadnice x :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial R} \cdot dR + \frac{\partial x}{\partial \phi} \cdot d\phi + \frac{\partial x}{\partial z} \cdot dz = \\ &= \frac{\partial(R \cdot \cos \phi)}{\partial R} \cdot dR + \frac{\partial(R \cdot \cos \phi)}{\partial \phi} \cdot d\phi + \frac{\partial(R \cdot \cos \phi)}{\partial z} \cdot dz = \\ &= \cos \phi \cdot dR + (-R \cdot \sin \phi) \cdot d\phi + 0 \cdot dz = dR \cdot \cos \phi - R \cdot \sin \phi \cdot d\phi. \end{aligned}$$

Obdobně bychom vypočetli výrazy pro dy a dz uvedené v rámci vztahů 3.12.

Dosaďme nyní vztahy 3.12 do výrazu 3.10:

$$\begin{aligned} \|d\vec{r}\|^2 &= (dR \cdot \cos \phi - R \cdot \sin \phi \cdot d\phi)^2 + (dR \cdot \sin \phi + R \cdot \cos \phi \cdot d\phi)^2 + (dz)^2 = \\ &= (dR)^2(\cos \phi)^2 - 2R \sin \phi \cos \phi \cdot dR d\phi + R^2(\sin \phi)^2(d\phi)^2 + (dR)^2(\sin \phi)^2 + \\ &\quad + 2R \sin \phi \cos \phi \cdot dR d\phi + R^2(\cos \phi)^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = \\ &= (dR)^2 + R^2(d\phi)^2 + (dz)^2 \end{aligned} \quad (3.13)$$

Výsledek úpravy 3.13 lze přepsat na skalární součin jako

$$(dR)^2 + R^2(d\phi)^2 + (dz)^2 = (dR, R \cdot d\phi, dz) \cdot (dR, R \cdot d\phi, dz). \quad (3.14)$$

⁴⁸Využíváme vztah pro výpočet velikosti vektoru.

⁴⁹Viz [1], str. 14.

Druhou mocninu velikosti vektoru $d\vec{r}$ lze rovněž přepsat jako

$$\|d\vec{r}\|^2 = d\vec{r} \cdot d\vec{r}. \quad (3.15)$$

Z výsledků 3.13, 3.14 a 3.15 vyplývá, že

$$d\vec{r} = (dR, R \cdot d\phi, dz) = (1 \cdot dR, R \cdot d\phi, 1 \cdot dz), \quad (3.16)$$

kde 1, R a 1 jsou tzv. *Laméovy koeficienty* pro cylindrické souřadnice.

Budeme-li pracovat ve sférickém systému souřadnic, platí,⁵⁰ že

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \\ y &= r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \\ z &= r \cdot \cos \vartheta, \end{aligned} \quad (3.17)$$

kde $r \in \langle 0, \infty \rangle$, $\varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle$ a $\vartheta \in \langle 0, \pi \rangle$. Přepíšme tyto vztahy pro „velice malé změny“ souřadnic x, y, z , resp. r, ϑ, φ . Tedy

$$\begin{aligned} dx &= dr \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot d\vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\ dy &= dr \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi + r \cdot \cos \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot d\vartheta + r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi \\ dz &= dr \cdot \cos \vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot d\vartheta. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Rozepíšme opět výpočet pro „malou“ změnu souřadnice x :

$$\begin{aligned} dx &= \frac{\partial x}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial x}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{\partial x}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = \\ &= \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial r} \cdot dr + \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial \vartheta} \cdot d\vartheta + \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} \cdot d\varphi = \\ &= \sin \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot dr + r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi \cdot d\vartheta - r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi. \end{aligned}$$

Obdobně bychom vypočetli výrazy pro dy a dz uvedené v rámci vztahů 3.18.

Pokud bychom dosadili vztahy 3.18 do rovnosti 3.10, po úpravách bychom dostali⁵¹

$$\|d\vec{r}\|^2 = (dr)^2 + r^2 \cdot (d\vartheta)^2 + r^2 \cdot (\sin \vartheta)^2 \cdot (d\varphi)^2. \quad (3.19)$$

Opět můžeme výsledek 3.19 rozepsat jako skalární součin:

$$\begin{aligned} &(dr)^2 + r^2 \cdot (d\vartheta)^2 + r^2 \cdot (\sin \vartheta)^2 \cdot (d\varphi)^2 = \\ &= (dr, r \cdot d\vartheta, r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi) \cdot (dr, r \cdot d\vartheta, r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi). \end{aligned} \quad (3.20)$$

Porovnáním vztahů 3.19, 3.20 a 3.15 dostáváme:

$$d\vec{r} = (dr, r \cdot d\vartheta, r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi) = (1 \cdot dr, r \cdot d\vartheta, r \cdot \sin \vartheta \cdot d\varphi), \quad (3.21)$$

kde 1, r a $r \cdot \sin \vartheta$ jsou Laméovy koeficienty pro sférické souřadnice.

⁵⁰Viz [1], str. 16.

⁵¹Podrobné úpravy neuvádíme, neboť je postup obdobný jako u cylindrických souřadnic. Pouze je náročnější na úpravy.

Označme *Laméovy koeficienty pro křivočaré ortogonální souřadnice* jako h_1 , h_2 a h_3 (obecně h_i). Pak pro kartézský systém je $h_1 = 1$, $h_2 = 1$ a $h_3 = 1$, pro cylindrický systém je $h_1 = 1$, $h_2 = R$, $h_3 = 1$ a pro sférický systém je $h_1 = 1$, $h_2 = r$ a $h_3 = r \cdot \sin \vartheta$. Z předešlého rovněž plyne, že

$$d\vec{r} = (h_1 \cdot dq_1, h_2 \cdot dq_2, h_3 \cdot dq_3), \quad (3.22)$$

kde dq_i je nekonečně malá změna křivočaré ortogonální souřadnice q_i . Třeba součin $h_2 \cdot dq_2$ pak odpovídá délce nekonečně malého obloučku, který vznikne tím, že změním souřadnici q_2 o dq_2 a zbylé souřadnice q_1, q_3 necháme konstantní. Označme tuto délku ds_2 . Obdobně pak platí, že $ds_1 = h_1 \cdot dq_1$ a $ds_3 = h_3 \cdot dq_3$.

Vezmeme-li například cylindrický systém souřadnic, dostáváme $ds_1 = ds_R = 1 \cdot dR$, $ds_2 = ds_\phi = R \cdot d\phi$ a $ds_3 = ds_z = 1 \cdot dz$.

Odvození souřadnicového tvaru gradientu

Vyjdeme z definičního vztahu pro gradient (3.1). Na levé straně tohoto vztahu je výraz df , který značí změnu skalární funkce f , pokud se přesuneme z jedné ekvipotenciály na jinou, přičemž předpokládáme, že jsou tyto dvě ekvipotenciály velmi blízko u sebe. S využitím vztahu 3.9 lze df rozepsat jako:

$$df = \frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial f}{\partial q_2} \cdot dq_2 + \frac{\partial f}{\partial q_3} \cdot dq_3, \quad (3.23)$$

kde skalární funkce f odpovídá funkci F ve vztahu 3.9.

Zaměříme se na pravou stranu vztahu 3.1. Víme, že $\text{grad} f$ je vektor. Označme jeho složky jako $((\text{grad} f)_1, (\text{grad} f)_2, (\text{grad} f)_3)$. Nyní přepíšeme pravou stranu rovnosti 3.1, přičemž využijeme vztahu 3.22. Tedy

$$\text{grad} f \cdot d\vec{r} = ((\text{grad} f)_1, (\text{grad} f)_2, (\text{grad} f)_3) \cdot (h_1 \cdot dq_1, h_2 \cdot dq_2, h_3 \cdot dq_3). \quad (3.24)$$

Tento vztah ještě můžeme upravit na tvar

$$\text{grad} f \cdot d\vec{r} = (\text{grad} f)_1 \cdot h_1 \cdot dq_1 + (\text{grad} f)_2 \cdot h_2 \cdot dq_2 + (\text{grad} f)_3 \cdot h_3 \cdot dq_3. \quad (3.25)$$

Z definice gradientu plyne, že se mají pravé strany vztahů 3.23 a 3.25 rovnat. V obou výrazech jsou tři sčítance, v nichž se postupně vyskytují členy dq_1, dq_2 a dq_3 . Přičemž odpovídající sčítance se musejí rovnat. Porovnáme-li například sčítance, v nichž se vyskytuje člen dq_1 , dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot dq_1 = (\text{grad} f)_1 \cdot h_1 \cdot dq_1. \quad (3.26)$$

Vyjádříme nyní z tohoto vztahu první složku gradientu:

$$(\text{grad} f)_1 = \frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}. \quad (3.27)$$

Totéž můžeme provést pro sčítance s dq_2 a dq_3 . Dostaneme tak vyjádření druhé a třetí složky gradientu:

$$(\text{grad} f)_2 = \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}, \quad (3.28)$$

$$(\text{grad}f)_3 = \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3}. \quad (3.29)$$

Přepíšme vztahy 3.27, 3.28, 3.29 do kompaktnějšího tvaru:

$$\boxed{\text{grad}f = ((\text{grad}f)_1, (\text{grad}f)_2, (\text{grad}f)_3) = \left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3} \right)} \quad (3.30)$$

Dostali jsme tak souřadnicový tvar gradientu. Rozepíšme toto vyjádření postupně pro kartézský, cylindrický a sférický systém souřadnic.

Kartézský systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1 \\ q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$$

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.31)$$

Zadefinujme nyní operátor $\vec{\nabla}$ jako „vektor“ $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, pak můžeme vztah 3.31 přepsat na tvar:

$$\text{grad}f = \vec{\nabla}f, \quad (3.32)$$

což je vztah, o kterém jsme již psali v oddílu 3.1.1.

Cylindrický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1 \\ q_1 = R, q_2 = \phi, q_3 = z$$

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial R}, \frac{1}{R} \cdot \frac{\partial f}{\partial \phi}, \frac{\partial f}{\partial z} \right). \quad (3.33)$$

Sférický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \cdot \sin \vartheta \\ q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$$

$$\text{grad}f = \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right). \quad (3.34)$$

3.1.4 Řešené úlohy na gradient

Úloha č. 1:

Je dána skalární funkce $f(x, y, z) = \ln x + y^3 + z \cdot y$. Vypočtete gradient této funkce.

Řešení:

Funkce $f = f(x, y, z)$ je závislá na proměnných x, y a z . K řešení tak využijeme vztahu 3.31 pro kartézský systém souřadnic. Vypočteme nejprve potřebné parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial(\ln x + y^3 + z \cdot y)}{\partial x} = \frac{1}{x} + 0 + 0 = \frac{1}{x},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial(\ln x + y^3 + z \cdot y)}{\partial y} = 0 + 3y^2 + z = 3y^2 + z,$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial(\ln x + y^3 + z \cdot y)}{\partial z} = 0 + 0 + y = y.$$

Dosadíme do vztahu 3.31:

$$\text{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{1}{x}, 3y^2 + z, y \right).$$

Úloha č. 2:

Je dána skalární funkce $f(r, \vartheta, \varphi) = r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi$. Vypočtěte gradient této funkce.

Řešení:

Ze zadání je zřejmé, že pracujeme se sférickými souřadnicemi. Bude se nám tedy hodit vztah 3.34. Vypočtěme nejprve potřebné parciální derivace:

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial r} = \sin \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \vartheta} = \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial \vartheta} = r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \varphi} = \frac{\partial(r \cdot \sin \vartheta \cdot \cos \varphi)}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi.$$

Nyní dosadíme do vztahu 3.34, dostáváme:

$$\begin{aligned} \text{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial r}, \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial f}{\partial \vartheta}, \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot \frac{\partial f}{\partial \varphi} \right) = \\ &= \left(\sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \frac{1}{r} \cdot r \cdot \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, \frac{1}{r \cdot \sin \vartheta} \cdot (-r \cdot \sin \vartheta \cdot \sin \varphi) \right) = \\ &= (\sin \vartheta \cdot \cos \varphi, \cos \vartheta \cdot \cos \varphi, -\sin \varphi). \end{aligned}$$

Úloha č. 3:

V kartézském systému dokažte, že pro funkce $f(x, y, z)$, $g(x, y, z)$ a konstantu b platí následující vztahy:

$$\text{grad}(f + g) = \text{grad} f + \text{grad} g, \quad (3.35)$$

$$\text{grad}(b \cdot f) = b \cdot \text{grad} f. \quad (3.36)$$

Řešení:

U obou vztahů provedeme důkaz přímý. Rozepíšme nejprve levou stranu vztahu 3.35 pomocí vztahu 3.31. Dostaneme:

$$\text{grad}(f + g) = \left(\frac{\partial(f + g)}{\partial x}, \frac{\partial(f + g)}{\partial y}, \frac{\partial(f + g)}{\partial z} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} + \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial g}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial y}, \frac{\partial g}{\partial z} \right) = \\
&= \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g.
\end{aligned}$$

Během úprav jsme využili toho, že parciální derivace součtu funkcí je rovna součtu parciálních derivací jednotlivých funkcí. V předposledním kroku jsme rozdělili vektor na součet dvou vektorů. Dokázali jsme tedy platnost vztahu 3.35.

Rozepišme nyní levou stranu vztahu 3.36 opět podle vztahu 3.31. Dostaneme:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad}(b \cdot f) &= \left(\frac{\partial(b \cdot f)}{\partial x}, \frac{\partial(b \cdot f)}{\partial y}, \frac{\partial(b \cdot f)}{\partial z} \right) = \\
&= \left(b \cdot \frac{\partial f}{\partial x}, b \cdot \frac{\partial f}{\partial y}, b \cdot \frac{\partial f}{\partial z} \right) = b \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = b \cdot \operatorname{grad} f.
\end{aligned}$$

Během úprav jsme využili toho, že lze konstantu vytknout z parciální derivace, a také toho, že můžeme vytknout konstantu z celého vektoru. Dokázali jsme tak platnost vztahu 3.36.

Úloha č. 4:

Vypočítejte gradient skalární funkce, jejíž hodnota je rovna vzdálenosti r od počátku soustavy souřadnic.

Řešení:

Vzdálenost od počátku soustavy souřadnic můžeme určit jako velikost polohového vektoru $\vec{r} = (x, y, z)$. Tedy $r = \|\vec{r}\| = \|(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Opět použijeme vztah 3.31:

$$\begin{aligned}
\operatorname{grad} f &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \\
&= \left(\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x}, \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y}, \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} \right). \quad (3.37)
\end{aligned}$$

Vypočtěme potřebné derivace:

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2x = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r},$$

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2y = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2z = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{z}{r}.$$

Pokračujme v úpravě 3.37:

$$\begin{aligned}
\left(\frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial x}, \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial y}, \frac{\partial \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\partial z} \right) &= \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \\
&= \frac{1}{r} \cdot (x, y, z) = \frac{\vec{r}}{r}.
\end{aligned}$$

Tedy $\operatorname{grad} r = \frac{\vec{r}}{r}$. Jedná se vlastně o normálový vektor ke kulové ploše se středem v počátku, jejíž poloměr je r .

Úloha č. 5:

Vypočítejte gradient potenciálu elektrostatického pole v okolí bodového náboje Q , pro nějž platí vztah ([29], kapitola 2, str. 7):

$$\phi = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r},$$

kde r je vzdálenost od bodového náboje a ϵ_0 je permitivita vakua.

Řešení:

Z uvedeného vztahu vyplývá, že je potenciál ϕ závislý na vzdálenosti r . Když bychom umístili náboj Q do počátku soustavy souřadnic, tak by pro tuto vzdálenost platilo: $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, kde \vec{r} je polohový vektor. Pro výpočet gradientu použijeme vztah 3.31, tedy

$$\begin{aligned} \text{grad}\phi &= \text{grad}\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right), \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{2} \cdot \frac{2y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}, -\frac{1}{2} \cdot \frac{2z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right) = \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \left(\frac{-x}{r^3}, \frac{-y}{r^3}, \frac{-z}{r^3} \right) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{\vec{r}}{r^3} = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r}. \end{aligned}$$

Dospěli jsme k výrazu, který se až na znaménko shoduje se vztahem pro elektrickou intenzitu, který jsme odvodili v podkapitole 2.6, což odpovídá vlastnosti vyjádřené vztahem 1.51. Z výsledku je rovněž patrné, že směr největšího růstu potenciálu je radiální.

Mnoho obdobných příkladů na téma gradient lze nalézt například v [4], sekce C/KS, popřípadě v [15], str. 11–13.

3.1.5 Odvození vztahu pro výpočet plošného int. II. druhu pro „slušně vychovanou plochu“ Σ zadanou explicitně

K následujícímu odvození je potřeba znát diferenciální operátor gradient, a tak jsme jej zařadili do této kapitoly (přestože se týká plošného integrálu II. druhu).

Již víme, že když je plocha Σ zadána explicitně, pak je jedna ze souřadnic x , y , z vyjádřena pomocí zbývajících dvou. Předpokládejme, že je souřadnice z vyjádřena pomocí souřadnic x a y , tj. $z = z(x, y)$.

Naším úkolem nyní bude odvodit vztah pro výpočet plošného integrálu II. druhu po takto zadané ploše Σ .

Vyjdeme ze vztahu

$$\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS, \quad (3.38)$$

se kterým jsme se již setkali v oddílu 2.3.1. V něm vystupuje vektorové pole $\vec{P}(\vec{r}) = (P_x(\vec{r}), P_y(\vec{r}), P_z(\vec{r}))$ a normálový vektor \vec{n} , jehož tvar musíme v první řadě zjistit.

Pro kartézské souřadnice plochy Σ platí, že $z = z(x, y)$. To je ale totéž jako $z - z(x, y) = 0$. Jelikož se vztah na levé straně rovná nule, tedy konstantě, můžeme tvrdit, že se jedná o ekvipotenciálu.⁵² Normálový vektor \vec{n} k ní musí být kolmý a navíc musí být jednotkový.

Z vlastností gradientu víme, že vždy „ukazuje“ směr největšího růstu skalárního pole a také to, že je vždy kolmý k ekvipotenciále. Zdá se tak, že bude velice výhodné gradient použít.

Označme výraz $z - z(x, y)$ jako ξ . Pak normálový vektor \vec{n} bude mít tvar:

$$\vec{n} = \pm \frac{\text{grad } \xi}{\|\text{grad } \xi\|}. \quad (3.39)$$

Gradient zaručuje kolmost k ekvipotenciále a jeho velikost ve jmenovateli zajišťuje jednotkovost normálového vektoru. Znaménka „ \pm “ říkají, že normálový vektor může mít obecně směr růstu, ale i směr poklesu. Rozepíšme nyní vztah 3.39 podrobněji:

$$\begin{aligned} \vec{n} &= \pm \frac{\text{grad } \xi}{\|\text{grad } \xi\|} = \pm \frac{\text{grad } (z - z(x, y))}{\|\text{grad } (z - z(x, y))\|} = \\ &= \pm \frac{\left(\frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial x}, \frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial y}, \frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial z} \right)}{\left\| \left(\frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial x}, \frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial y}, \frac{\partial(z - z(x, y))}{\partial z} \right) \right\|} = \pm \frac{\left(-\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, 1 \right)}{\left\| \left(-\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, 1 \right) \right\|} = \\ &= \pm \frac{\left(-\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right)^2 + 1}}. \end{aligned} \quad (3.40)$$

Během úprav jsme využili souřadnicový tvar gradientu a také vztah pro výpočet velikosti vektoru.⁵³

Vraťme se nyní ke vztahu 3.38 a dosadíme do něj ze vztahu 3.40 za normálový vektor \vec{n} . Pak dostaneme:

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} &= \iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot \vec{n} dS = \\ &= \pm \iint_{\Sigma} (P_x(\vec{r}), P_y(\vec{r}), P_z(\vec{r})) \cdot \frac{\left(-\frac{\partial z(x, y)}{\partial x}, -\frac{\partial z(x, y)}{\partial y}, 1 \right)}{\sqrt{\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right)^2 + 1}} dS = \\ &= \pm \iint_{\Sigma} \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z(x, y)}{\partial y} \right)^2 + 1}} dS = \end{aligned}$$

⁵²Ekvipotenciála je plocha, na níž je hodnota skalární funkce ve všech místech stejná (konstantní).

⁵³ $\|\vec{u}\| = \|(u_1, u_2, u_3)\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$.

$$\begin{aligned}
&= \pm \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) \cdot \frac{\sqrt{\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1}}{\sqrt{\left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z(x,y)}{\partial y}\right)^2 + 1}} dx dy = \\
&= \pm \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) dx dy. \quad (3.41)
\end{aligned}$$

Nejprve jsme tedy provedli dosazení za normálový vektor \vec{n} . Dále jsme skálárně vynásobili vektorové pole $\vec{P}(\vec{r}) = (P_x(\vec{r}), P_y(\vec{r}), P_z(\vec{r}))$ s normálovým vektorem. V předposledním kroku jsme využili vztahu pro výpočet plošného integrálu I. druhu pro explicitně zadanou plochu.⁵⁴ Oblast o , po které v posledních dvou krocích integrujeme, je definiční oblast pro souřadnice x, y .

Pokud budeme uvažovat normálový vektor, který bude mířit do oblasti kladné části osy z („nahoru“), pak bude platit:

$$\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iint_o \left(P_z(\vec{r}) - P_x(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial x} - P_y(\vec{r}) \cdot \frac{\partial z(x,y)}{\partial y} \right) dx dy, \quad (3.42)$$

což je vztah, který jsme uvedli v oddílu 2.3.2.

3.2 Divergence

Divergence je ve fyzice velice využívaným diferenciálním operátorem. Její hlavní fyzikální význam spočívá v souvislosti s existencí zdrojů vektorového pole. Velice významnou roli také sehrává v tzv. Gaussově větě, kterou se budeme zabývat v oddílu 3.2.4.

Na začátku této podkapitoly zavedeme operátor divergence bez využití souřadnic, dále se budeme zabývat jeho souřadnicovým tvarem a na závěr uvedeme několik řešených úloh.

3.2.1 Zavedení divergence

Pro zavedení diferenciálního operátoru divergence je velice důležitá znalost plošného integrálu II. druhu, kterým jsme se zabývali v kapitole 2. Připomeňme, že tento integrál vyjadřuje tok vektorového pole $\vec{P}(\vec{r})$ plochou Σ . Značíme jej $\iint_{\Sigma} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$.

V úvodu této kapitoly již bylo zmíněno, že divergence vytváří z vektorového pole (zkráceně vektoru) skalární pole (zkráceně skalár). My budeme uvažovat obecné vektorové pole, které značíme $\vec{P}(\vec{r})$. Z předešlého je rovněž zřejmé, že bude naším úkolem určit, zda má toto pole v bodě, jemuž odpovídá polohový vektor \vec{r} , zdroj.

Stejně jako u zavedení plošného integrálu II. druhu, i zde vyjdeme z představy pracující s kapalinou. Představme si, že by po nás někdo chtěl, abychom rozhodli,

⁵⁴Vztah 2.110 viz [2], str. 63.

zda v nějakém bodě prostoru (s polohovým vektorem \vec{r}) existuje zdroj, ze kterého vytéká kapalina⁵⁵ – tzv. *zřídlo*. Jak o tom rozhodnout?

Jako poměrně dobrý nápad se jeví následující úvaha: bod, jehož polohu určuje vektor \vec{r} , pomyslně obalíme uzavřenou plochou Σ , přičemž nezávisí na jejím tvaru.⁵⁶ Důležitou vlastností je uzavřenost této plochy. Následně bychom sledovali, zda uzavřenou plochou Σ protéká kapalina.

Pokud by plochou Σ kapalina protékala, a to tak, že by tekla převážně⁵⁷ zevnitř objemu vymezeného plochou Σ (označme jej ΔV) směrem ven, řekli bychom, že je v tomto objemu zdroj (neboli zřídlo) kapaliny. Naopak, pokud by kapalina převážně vtékala dovnitř objemu ΔV plochou Σ , řekli bychom, že je někde uvnitř tohoto objemu tzv. *antizdroj*, neboli místo, kde se kapalina „ztrácí“.

Otázkou však nebylo, zda se nachází zdroj kapaliny v objemu ΔV , nýbrž zda se nachází zdroj přímo v bodě, jemuž přísluší polohový vektor \vec{r} . Abychom dostali odpověď na tuto otázku, budeme muset zmenšit uzavřenou plochu Σ , a to tak, že bude obklopotvat pouze „náš“ bod, tj. objem ΔV se bude limitně blížit nule.

Nyní přejdeme k obecnější úvaze: mějme vektorové pole,⁵⁸ u kterého chceme zjistit, zda v bodě s polohovým vektorem \vec{r} existuje jeho zdroj, resp. antizdroj. Budeme postupovat analogicky k příkladu s kapalinou. Daný bod „obalíme“ uzavřenou plochou Σ , která tak bude vymežovat objem ΔV , a budeme sledovat, zda dochází k nějakému toku vektorového pole touto plochou. K tomu využijeme právě plošný integrál II. druhu. Tok vektorového pole $\vec{P}(\vec{r})$ uzavřenou plochou Σ obklopující objem ΔV je definován:

$$\phi = \oiint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}. \quad (3.43)$$

Stejně jako u kapaliny, i zde budeme zmenšovat uzavřenou plochu Σ , a tedy i objem ΔV (k nule). K tomu nám poslouží limita pro ΔV . Výraz pro výpočet toku z bodu s polohovým vektorem \vec{r} by tak mohl vypadat takto:

$$\phi = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \oiint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}. \quad (3.44)$$

Zde však narážíme na problém: pokud bychom totiž počítali tok ϕ podle vztahu 3.44, vyšel by nulový. Plocha Σ by totiž byla najednou tvořena pouze jedním bodem (s polohovým vektorem \vec{r}). Bod je však bezrozměrný – nemá tedy smysl mluvit o dělení plochy Σ na plošky dS a o jejich normálových vektorech – nemůže jím tedy z definice nic protékat. Argument limity tak vydělíme výrazem ΔV ,⁵⁹

⁵⁵Jedná se o „myšlenkový experiment“. Můžeme si tak představit skutečně jediný bod prostoru, ze kterého může hypoteticky vytékat kapalina. V přírodě by této představě mohl odpovídat pramen potoka.

⁵⁶Přirozenou volbou uzavřené plochy může být kulová sféra, popřípadě povrch kváдру. Na tvaru plochy Σ však skutečně nezávisí.

⁵⁷Pokud by plochou Σ byla např. kulová sféra, jednalo by se (v případě zdroje) pouze o tok kapaliny zevnitř vymezeného objemu ven. V případě, že by byla plocha různě prohýbaná, mohla by kapalina v některých částech plochy i vtékat. V případě zdroje by však vytékání kapaliny převažovalo nad vtékáním.

⁵⁸V případě s kapalinou by tímto vektorovým polem byla rychlost kapaliny $\vec{v}(\vec{r})$.

⁵⁹Dostaneme tak limitu neurčitého výrazu „ $\frac{0}{0}$ “, která rozhodně není automaticky nulová.

dostaneme výraz:

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}. \quad (3.45)$$

Právě tento výraz nazveme *divergencí vektorového pole* $\vec{P}(\vec{r})$ a označíme jej $\text{div}\vec{P}$. Můžeme tak napsat:

$$\boxed{\text{div}\vec{P} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta V} \oiint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}.} \quad (3.46)$$

Vztah 3.46 budeme považovat za definiční.⁶⁰

3.2.2 Vlastnosti divergence

Již při zavedení divergence bylo zmíněno, co považujeme za zdroj vektorového pole, resp. jeho antizdroj.

Pro zdroj platí, že vektorové pole převážně „vytéká“ z uzavřené plochy Σ . Pro jednoduchost uvažujme např. plochu ve tvaru sféry.⁶¹ Zvolme normálový vektor \vec{n} k ploše tak, že bude mít vždy směr „ven“ z plochy Σ . Pak tento vektor svírá v každém místě plochy s vektorem $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ úhel $\gamma \in \langle 0, \frac{\pi}{2} \rangle$. Tedy skalární součin $\vec{P} \cdot \vec{n}$ bude v každém místě plochy Σ kladný (neboť je roven výrazu $\|\vec{P}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos \gamma$). Z toho však také plyne, že integrál $\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S}$ je kladný,⁶² a tedy i divergence vyjde kladná.

Naopak, je-li v prostoru vymezeném plochou Σ antizdroj, vektorové pole \vec{P} do uzavřené plochy Σ převážně „vtéká“. Tentokrát bude pro plochu Σ (opět pro jednoduchost sféru) s normálovým vektorem ve směru „ven“ z plochy platit, že $\gamma \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, z čehož plyne, že skalární součin $\vec{P} \cdot \vec{n}$ bude v každém bodě plochy záporný. Z toho však vyplývá, že i divergence bude záporná.

Pokud se bude jednat o *průtok*, divergence bude nulová. To plyne z toho, že průtokem rozumíme situaci, kdy vektorové pole \vec{P} do plochy Σ „vtéká“, ale také „vytéká“. Přičemž „vtékání“ pole nepřevažuje nad „vytékáním“ (a naopak). Toky se tak odečtou.⁶³

Zavedme nyní pojem *siločára*. Siločarou budeme rozumět orientovanou křivku, která má takovou vlastnost, že v každém jejím bodě má vektor \vec{P} směr tečny k této křivce. Zároveň mají siločáry stejnou orientaci jako vektorové pole \vec{P} . Siločáry se navzájem neprotínají. V místě, kde je vektorové pole \vec{P} „silné“, jsou znázorněné siločáry blíže u sebe než je tomu v místě, kde je vektorové pole „slabé“. Mluvíme-li o proudění kapaliny, nazveme siločáry *proudnicemi*. U magnetického pole hrají roli siločar tzv. *magnetické indukční čáry*.

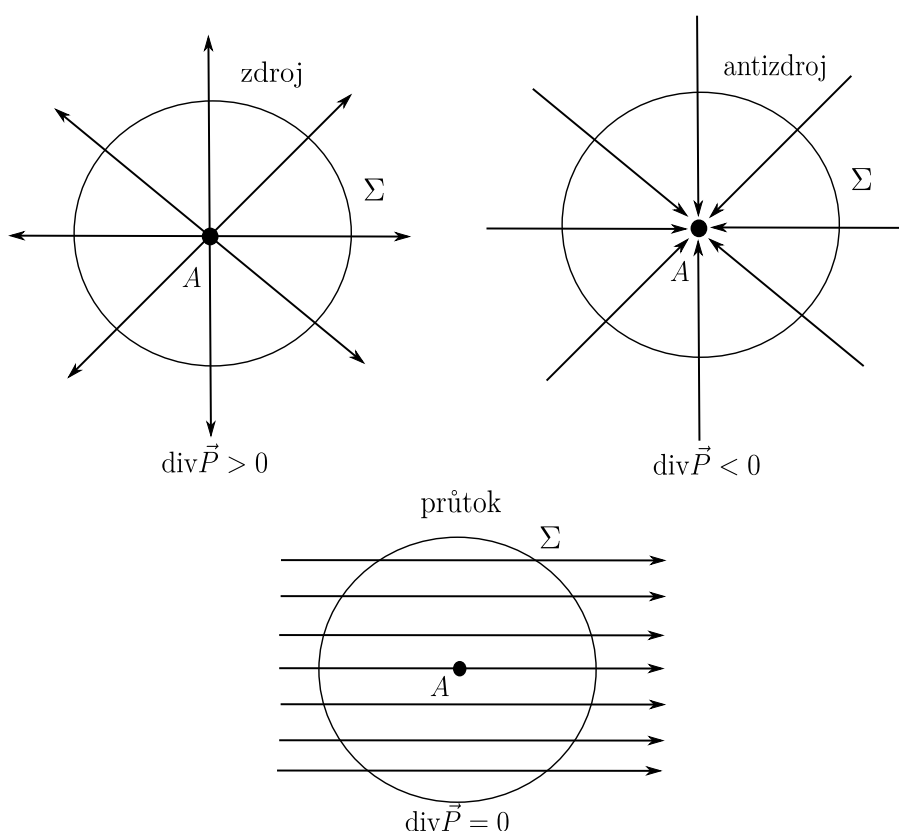
⁶⁰V mnohé literatuře, jako např. v [15], str. 15 nebo v [5], str. 228, je divergence definována pomocí jejího souřadnicového tvaru, kterým se budeme zabývat v oddílu 3.2.3.

⁶¹Pro „složitější“, např. různě prohýbané, plochy by byly úvahy obtížnější. Došli bychom však ke stejnému výsledku jako u úvah s plochou ve tvaru sféry.

⁶²Tento integrál totiž dle vztahu 2.8 můžeme přepsat na tvar $\oiint_{\Sigma} \vec{P} \cdot \vec{n} dS$.

⁶³Pokud bychom měli v prostoru kladný bodový náboj a někde mimo něj kulovou plochu Σ , tak „vtékající“ vektory elektrické intenzity \vec{E} budou mít větší velikost než vektory „vytékající“ (velikost intenzity se zmenšuje s r^2). I přesto však bude celkový tok plochou Σ nulový. Vysvětlení tohoto zdánlivého paradoxu se provede pomocí úvahy s prostorovým úhlem. Pro rostoucí vzdálenost r se plocha k příslušnému prostorovému úhlu zvětšuje s r^2 . Efekty se tak vyruší.

Máme-li zavedeny siločáry, můžeme pomocí nich znázornit situaci se zdrojem, antizdrojem či průtokem vektorového pole \vec{P} uzavřenou plochou Σ jako je tomu na obrázku 3.6.⁶⁴



Obrázek 3.6: Znázornění zdroje, antizdroje a průtoku vektorového pole \vec{P} v bodě A (Σ je velmi malá)

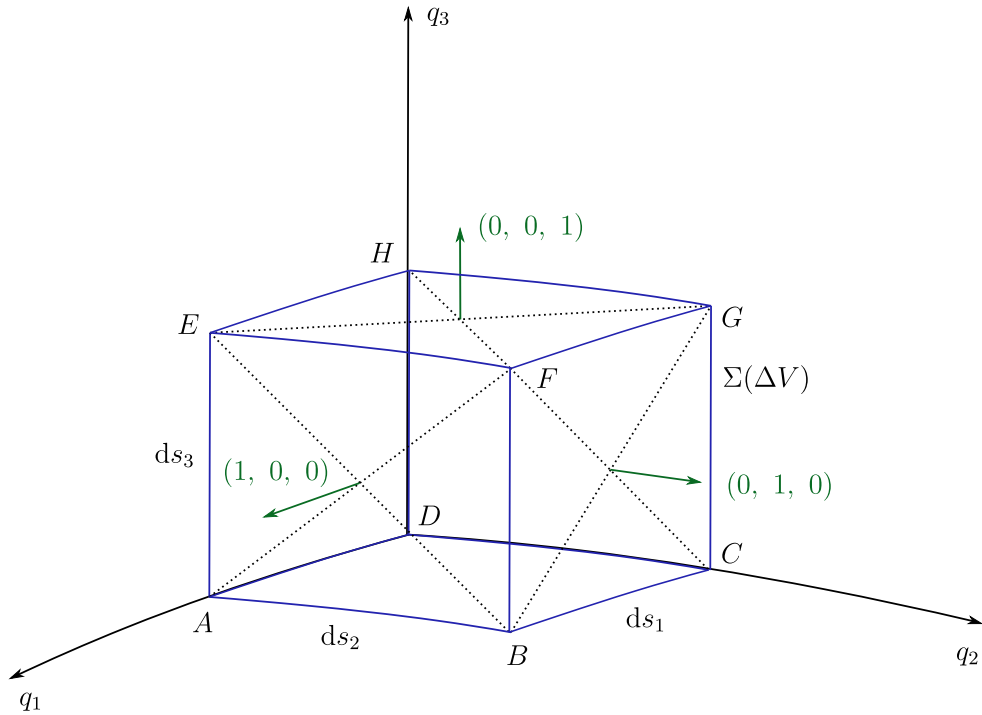
3.2.3 Souřadnicový tvar divergence

Při odvození souřadnicového tvaru divergence vyjdeme z definičního vztahu, ve kterém hraje stěžejní roli integrál $\iint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}$. Jak již víme, jedná se o plošný integrál II. druhu z vektorového pole $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ po uzavřené ploše Σ obklopující objem ΔV . Kromě toho, tento integrál vyjadřuje tok vektorového pole \vec{P} plochou Σ .

Zkusme si nyní představit situaci znázorněnou na obrázku 3.7. Za uzavřenou plochu Σ jsme zvolili povrch „kvádrů“ $ABCDEFGH$, a to tak, že hrany AD , DC , DH leží postupně na (zobecněných) souřadnicových čarách q_1 , q_2 , q_3 .

Nyní bude naším cílem spočítat tok ϕ vektorového pole \vec{P} plochou Σ . Počítat naráz tok celým povrchem „kvádrů“ by bylo poměrně obtížné, a proto jej rozdělíme na jednotlivé „obdélníky“ odpovídající stěnám „kvádrů“. Je zřejmé, že celkový tok plochou Σ bude součtem dílčích toků jednotlivými stěnami „kvádrů“. Vypočteme jednotlivé toky:

⁶⁴U schématu týkajícího se zdroje a antizdroje jsou siločáry (a tedy i vektorové pole \vec{P}) kolmé na kulovou plochu Σ . S normálovým vektorem \vec{n} tak v tomto případě svírají úhel $\gamma = 0$, resp. $\gamma = \pi$.



Obrázek 3.7: Schéma k odvození souřadnicového tvaru divergence (plocha Σ připomínající kvádr)

Tok ϕ_1 pole \vec{P} (přední) stěnou $ABFE$:

Hledaný tok ϕ_1 vypočteme jako

$$\phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{P} \cdot d\vec{S}, \quad (3.47)$$

kde Σ_1 je stěna $ABFE$. Nyní využijeme vztahu 2.8, pomocí něhož lze převést plošný integrál II. druhu na plošný integrál I. druhu a dostaneme tak

$$\phi_1 = \iint_{\Sigma_1} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_1} \vec{P} \cdot \vec{n}_1 dS, \quad (3.48)$$

kde \vec{n}_1 je normálový vektor k ploše Σ_1 . Označme složky vektorového pole \vec{P} jako (P_1, P_2, P_3) . Jelikož je plocha Σ_1 (neboli stěna $ABFE$) kolmá k souřadnicové čáře q_1 , její normálový vektor \vec{n}_1 bude mít souřadnice $(1, 0, 0)$ (viz obrázek 3.7). Použijme tyto poznatky při dosazení do pravé strany předešlého vztahu a dostaneme

$$\phi_1 = \iint_{\Sigma_1} (P_1, P_2, P_3) \cdot (1, 0, 0) dS = \iint_{\Sigma_1} P_1 dS. \quad (3.49)$$

Nyní využijeme věty o střední hodnotě.⁶⁵ Dostaneme tak

$$\phi_1 = P_1 \iint_{\Sigma_1} dS = (P_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3)_{\Sigma_1}, \quad (3.50)$$

⁶⁵Věta o střední hodnotě stručně řečeno říká, že máme-li plošný integrál I. druhu $\iint_{\Sigma} f dS$, tak musí existovat nějaký bod (označme jej Q) na ploše Σ takový, že platí $\iint_{\Sigma} f dS = f(Q) \iint_{\Sigma} dS$. Přesné znění věty včetně jejího důkazu lze nalézt např. v [27], str. 140, věta 9.6.

kde ds_2 je délka strany AB (resp. FE) a ds_3 je délka strany BF (resp. AE). Toto označení délek stran volíme kvůli tomu, že uvažujeme „nekonečně malý kvádr“, a tedy i velmi malé strany „obdélníku“ $ABFE$. Uvědomme si nyní, že např. ds_2 je délka odpovídající velice malé změně souřadnice q_2 . V oddílu zabývajícím se Laméovými koeficienty (viz 3.1.3) bylo zmíněno, že tuto délku lze vypočítat jako $ds_2 = h_2 \cdot dq_2$, kde h_2 je jeden z Laméových koeficientů. Obdobně $ds_3 = h_3 \cdot dq_3$. Přepišme tedy vztah 3.50 jako

$$\phi_1 = P_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 = P_1 \cdot h_2 \cdot dq_2 \cdot h_3 \cdot dq_3. \quad (3.51)$$

Celé odvození jsme provedli pro stěnu $ABFE$ neboli plochu Σ_1 , a proto jej označíme:⁶⁶

$$\phi_1 = (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_1}. \quad (3.52)$$

Tok ϕ_2 pole \vec{P} (zadní) stěnou $DCGH$:

Tok ϕ_2 plochou Σ_2 (neboli stěnou $DCGH$) vypočteme naprosto analogicky jako ϕ_1 . Zásadní změna je pouze v tom, že normálový vektor $\vec{n}_2 = (-1, 0, 0)$, neboť míří kolmo k Σ_2 „ven z objemu“. Provedme tedy odvození:

$$\begin{aligned} \phi_2 &= \iint_{\Sigma_2} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_2} \vec{P} \cdot \vec{n}_2 dS = \\ &= \iint_{\Sigma_2} (P_1, P_2, P_3) \cdot (-1, 0, 0) dS = \iint_{\Sigma_2} (-P_1) dS = \\ &= -P_1 \iint_{\Sigma_2} dS = -(P_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3)_{\Sigma_2} = -(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_2}. \end{aligned} \quad (3.53)$$

Tok ϕ_3 pole \vec{P} (pravou) stěnou $BCGF$:

Nyní platí, že plocha Σ_3 je stěnou $BCGF$ a normálový vektor $\vec{n}_3 = (0, 1, 0)$. Tedy

$$\begin{aligned} \phi_3 &= \iint_{\Sigma_3} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_3} \vec{P} \cdot \vec{n}_3 dS = \\ &= \iint_{\Sigma_3} (P_1, P_2, P_3) \cdot (0, 1, 0) dS = \iint_{\Sigma_3} P_2 dS = \\ &= P_2 \iint_{\Sigma_3} dS = (P_2 \cdot ds_1 \cdot ds_3)_{\Sigma_3} = (P_2 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot dq_1 \cdot dq_3)_{\Sigma_3}. \end{aligned} \quad (3.54)$$

⁶⁶Dolním indexem Σ_1 ve vztahu 3.52 vyjadřujeme skutečnost, že jsme daný výsledek dostali pro plochu Σ_1 .

Tok ϕ_4 pole \vec{P} (levou) stěnou $ADHE$:

V tomto případě je plocha Σ_4 stěnou $ADHE$ a normálový vektor $\vec{n}_4 = (0, -1, 0)$. Tedy

$$\begin{aligned}\phi_4 &= \iint_{\Sigma_4} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_4} \vec{P} \cdot \vec{n}_4 dS = \\ &= \iint_{\Sigma_4} (P_1, P_2, P_3) \cdot (0, -1, 0) dS = \iint_{\Sigma_4} (-P_2) dS = \\ &= -P_2 \iint_{\Sigma_4} dS = -(P_2 \cdot ds_1 \cdot ds_3)_{\Sigma_4} = -(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot dq_1 \cdot dq_3)_{\Sigma_4}.\end{aligned}\quad (3.55)$$

Tok ϕ_5 pole \vec{P} (horní) stěnou $EFGH$:

Zde platí, že plocha Σ_5 je stěnou $EFGH$ a normálový vektor $\vec{n}_5 = (0, 0, 1)$. Tudíž

$$\begin{aligned}\phi_5 &= \iint_{\Sigma_5} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_5} \vec{P} \cdot \vec{n}_5 dS = \\ &= \iint_{\Sigma_5} (P_1, P_2, P_3) \cdot (0, 0, 1) dS = \iint_{\Sigma_5} P_3 dS = \\ &= P_3 \iint_{\Sigma_5} dS = (P_3 \cdot ds_1 \cdot ds_2)_{\Sigma_5} = (P_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot dq_1 \cdot dq_2)_{\Sigma_5}.\end{aligned}\quad (3.56)$$

Tok ϕ_6 pole \vec{P} (dolní) stěnou $ABCD$:

Nyní platí, že plocha Σ_6 je stěna $ABCD$ a normálový vektor $\vec{n}_6 = (0, 0, -1)$. Dostáváme

$$\begin{aligned}\phi_6 &= \iint_{\Sigma_6} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iint_{\Sigma_6} \vec{P} \cdot \vec{n}_6 dS = \\ &= \iint_{\Sigma_6} (P_1, P_2, P_3) \cdot (0, 0, -1) dS = \iint_{\Sigma_6} (-P_3) dS = \\ &= -P_3 \iint_{\Sigma_6} dS = -(P_3 \cdot ds_1 \cdot ds_2)_{\Sigma_6} = -(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot dq_1 \cdot dq_2)_{\Sigma_6}.\end{aligned}\quad (3.57)$$

Odvodili jsme tedy dílčí toky vektorového pole \vec{P} jednotlivými stěnami „kvá-dru“. Víme, že celkový tok ϕ bude roven součtu všech dílčích toků. Využitím výsledků 3.52 až 3.57 (pro názornost je rozlišíme barevně) tak dostaneme

$$\begin{aligned}\phi &= \phi_1 + \phi_2 + \phi_3 + \phi_4 + \phi_5 + \phi_6 = (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_1} - \\ &- (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_2} + (P_2 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot dq_1 \cdot dq_3)_{\Sigma_3} - (P_2 \cdot h_1 \cdot h_3 \cdot dq_1 \cdot dq_3)_{\Sigma_4} +\end{aligned}$$

$$+(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot dq_1 \cdot dq_2)_{\Sigma_5} - (P_3 \cdot h_1 \cdot h_2 \cdot dq_1 \cdot dq_2)_{\Sigma_6}, \quad (3.58)$$

přičemž toky odpovídající navzájem protilehlým stěnám „kvádrů“ jsou vyznačeny stejnou barvou.

Zaměřme se nejprve na „tmavě modrý součet“. Z obou sčítanců můžeme vytknout součin $dq_2 \cdot dq_3$, neboť dq_2 i dq_3 jsou nekonečně malé změny souřadnic q_2 a q_3 , a výraz $dq_2 \cdot dq_3$ bude tedy stejný jak pro plochu Σ_1 , tak pro plochu Σ_2 . Dostáváme tak

$$\begin{aligned} \phi_1 + \phi_2 &= (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_1} - (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3 \cdot dq_2 \cdot dq_3)_{\Sigma_2} = \\ &= [(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)_{\Sigma_1} - (P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)_{\Sigma_2}] \cdot dq_2 \cdot dq_3. \end{aligned} \quad (3.59)$$

Rozdíl v závorce bude roven výrazu

$$\frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} \cdot dq_1. \quad (3.60)$$

Když bychom totiž označili výraz $(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)$ jako F , tak bychom dostali rozdíl $F_{\Sigma_1} - F_{\Sigma_2}$, který můžeme označit jako dF , jelikož víme, že jsou plochy Σ_1 a Σ_2 nekonečně blízko u sebe. Použijeme vztah 3.9. Zajímá nás, jak se změní hodnota F , pokud se pomyslně přesuneme ve směru čáry q_1 mezi plochou Σ_1 a Σ_2 . „Změna“ dF tak bude odpovídat pouze prvnímu sčítanci $\frac{\partial F}{\partial q_1} \cdot dq_1$ ze zmíněného vztahu.

„Tmavě modrý součet“ tak vyjde jako

$$\phi_1 + \phi_2 = \frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3. \quad (3.61)$$

Obdobným postupem bychom pro „tyrkysový součet“ dostali

$$\phi_3 + \phi_4 = \frac{\partial(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3)}{\partial q_2} \cdot dq_2 \cdot dq_1 \cdot dq_3 \quad (3.62)$$

a pro „červený součet“ bychom dostali

$$\phi_5 + \phi_6 = \frac{\partial(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2)}{\partial q_3} \cdot dq_3 \cdot dq_1 \cdot dq_2. \quad (3.63)$$

Ze vztahů 3.58, 3.61, 3.62 a 3.63 dostáváme výraz pro celkový tok ϕ uzavřenou plochou Σ (obklopující objem ΔV jdoucí k nule):

$$\phi = \left(\frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2)}{\partial q_3} \right) \cdot dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3. \quad (3.64)$$

Na začátku odvození jsme zmiňovali, že se tok ϕ rovná integrálu

$$\oiint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P}(\vec{r}) \cdot d\vec{S}.$$

V definici divergence (viz vztah 3.46) před tímto integrálem stojí výraz $\frac{1}{\Delta V}$. Přičemž bereme limitu z celého výrazu pro ΔV jdoucí k nule. My ale víme, že objem ΔV je objem vymezený plochou Σ (neboli se jedná o „kvádr“ $ABCDEFGH$). Limitu tohoto objemu (jdoucí k nule) snadno vypočteme jako

$$\lim_{\Delta V \rightarrow 0} \Delta V = ds_1 \cdot ds_2 \cdot ds_3 = h_1 \cdot dq_1 \cdot h_2 \cdot dq_2 \cdot h_3 \cdot dq_3, \quad (3.65)$$

což lze snadno nahlédnout z obrázku 3.7.

Vydělme výraz 3.64 výrazem 3.65. Dostaneme⁶⁷

$$\frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2)}{\partial q_3} \right). \quad (3.66)$$

Tento výsledek však odpovídá divergenci vektorového pole \vec{P} , což plyne z již zmíněné definice 3.46.

Souřadnicový tvar divergence tak můžeme finálně zapsat jako

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2)}{\partial q_3} \right)}. \quad (3.67)$$

Rozepišme nyní výsledek 3.67 pro jednotlivé souřadnicové systémy:

Kartézský systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$$

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z}. \quad (3.68)$$

Pro $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ dostáváme⁶⁸

$$\operatorname{div} \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}. \quad (3.69)$$

Cylindrický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1$$

$$q_1 = R, q_2 = \phi, q_3 = z$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{R} \cdot \left(\frac{\partial(P_R \cdot R)}{\partial R} + \frac{\partial P_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial(P_z \cdot R)}{\partial z} \right). \quad (3.70)$$

Sférický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \cdot \sin \vartheta$$

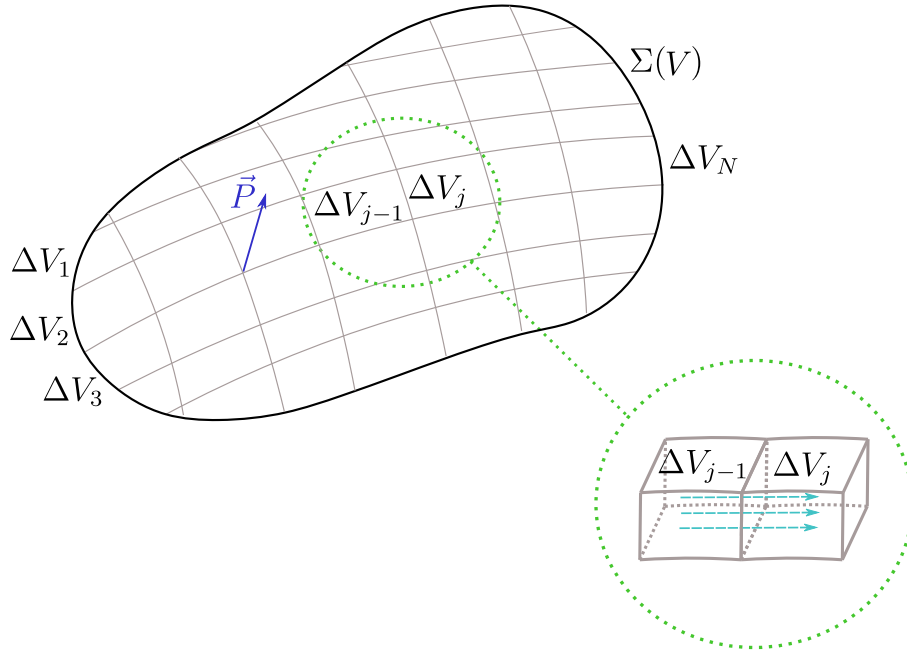
$$q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$$

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{1}{r^2 \cdot \sin \vartheta} \cdot \left(\frac{\partial(P_r \cdot r^2 \cdot \sin \vartheta)}{\partial r} + \frac{\partial(P_\vartheta \cdot r \cdot \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} + \frac{\partial(P_\varphi \cdot r)}{\partial \varphi} \right). \quad (3.71)$$

3.2.4 Gaussova věta (matematická)

Na úvod je nutné podotknout, že se budeme v tomto oddílu zabývat tzv. Gaussovou větou matematiky nikoliv Gaussovým zákonem elektrostatiky, který známe z fyziky.

Gaussova věta (někdy též Gaussův vzorec) udává vztah mezi plošným integrálem II. druhu a trojným (resp. objemovým) integrálem (viz [2], str. 45). Naším úkolem bude tento vztah najít.



Obrázek 3.8: Schéma týkající se odvození Gaussovy (matematické) věty

Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku 3.8. Máme uzavřenou plochu Σ vymežující objem V . Tento objem jsme rozdělili na N objemů $\Delta V_1, \Delta V_2, \dots, \Delta V_N$.

Při odvození Gaussovy věty vyjdeme z definičního vztahu pro divergenci (vztah 3.46). V této definici vystupuje limita pro objem (vymezený uzavřenou plochou) jdoucí k nule. My ji vynecháme, čímž však způsobíme to, že se dále nebude jednat o přesnou rovnost. Zaměříme-li se pouze na j -tý objem ΔV_j , můžeme napsat

$$\operatorname{div} \vec{P} \doteq \frac{1}{\Delta V_j} \oiint_{\Sigma(\Delta V_j)} \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.72)$$

Přemnožením přibližné rovnosti 3.72 výrazem ΔV_j dostáváme

$$\operatorname{div} \vec{P} \cdot \Delta V_j \doteq \oiint_{\Sigma(\Delta V_j)} \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.73)$$

Nyní si uvědomme, že objem V je součtem N objemů ΔV_j , tj.

$$V = \sum_{j=1}^N \Delta V_j. \quad (3.74)$$

Kromě toho, integrál $\oiint_{\Sigma(\Delta V_j)} \vec{P} \cdot d\vec{S}$ vyjadřuje tok vektorového pole \vec{P} uzavřenou plochou $\Sigma(\Delta V_j)$. Objemů ΔV_j vymezených plochami $\Sigma(\Delta V_j)$ máme N . Zkusme výrazy na obou stranách vztahu 3.73 „posčítat“ přes $j = 1, 2, \dots, N$, tj.

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{div} \vec{P} \cdot \Delta V_j \doteq \sum_{j=1}^N \oiint_{\Sigma_j(\Delta V_j)} \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.75)$$

⁶⁷Součin $dq_1 \cdot dq_2 \cdot dq_3$ se zkrátí. Laméovy koeficienty nemůžeme vytknout z jednotlivých parciálních derivací, neboť mohou obecně záviset na zobecněných souřadnicích.

⁶⁸V některých zdrojích, jako např. v [18], rozumí zápisem $\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$ divergenci vektorového pole \vec{P} bez ohledu na to, zda pracujeme v kartézských souřadnicích.

Nyní se zaměříme na obrázek 3.8. Pokud vektorové pole \vec{P} „vytéká“ z dílčího objemu ΔV_{j-1} , a to tak, že „neopouští“ celkový objem V , pak musí „vtéct“ do nějakého vedlejšího dílčího objemu (např. ΔV_j). Toky vektorového pole \vec{P} přes hranici objemů ΔV_{j-1} a ΔV_j se odečtou. Z toho plyne, že součet toků jednotlivými plochami $\Sigma(\Delta V_j)$ je roven toku „vnější“ plochou $\Sigma(V)$. Můžeme tedy napsat

$$\sum_{j=1}^N \oint_{\Sigma_j(\Delta V_j)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Sigma(V)} \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.76)$$

Vztah 3.75 tak lze přepsat jako

$$\sum_{j=1}^N \operatorname{div} \vec{P} \cdot \Delta V_j \doteq \oint_{\Sigma(\Delta V)} \vec{P} \cdot d\vec{S}. \quad (3.77)$$

Provedme nyní limitu v tom smyslu, že budeme uvažovat počet N dílčích objemů, resp. ploch, blíží se nekonečnu. Z toho plyne, že objemy ΔV_j budou nekonečně malé, tudíž bude platit, že

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \operatorname{div} \vec{P} \cdot \Delta V_j = \iiint_V \operatorname{div} \vec{P} \, dV. \quad (3.78)$$

Všimněme si, že se z dílčího objemu ΔV_j stal nekonečně malý objem dV a ze sumy se stal trojný (neboli objemový) integrál. Uvědomíme-li si, že platí vztah⁶⁹

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^N \operatorname{div} \vec{P} \cdot \Delta V_j = \oint_{\Sigma(V)} \vec{P} \cdot d\vec{S}, \quad (3.79)$$

získáme porovnáním tohoto vztahu se vztahem 3.78 vztah mezi plošným integrálem II. druhu a trojným integrálem:

$$\boxed{\oint_{\Sigma(V)} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{P} \, dV.}$$

Tento vztah nazveme *Gaussovou větou* (resp. *vzorcem*).

3.2.5 Řešené úlohy na divergenci

Úloha č. 1:

Je dáno vektorové pole $\vec{P} = (x^2 + y, 3y + 3z, 25)$. Vypočtete divergenci tohoto pole.

Řešení:

Pole \vec{P} je závislé na proměnných x , y a z . K řešení tak využijeme vztah 3.68 pro kartézský systém souřadnic. Vypočteme nejprve potřebné parciální derivace:

$$\frac{\partial P_x}{\partial x} = \frac{\partial(x^2 + y)}{\partial x} = 2x + 0 = 2x,$$

⁶⁹Díky limitě můžeme přibližnou rovnost ze vztahu 3.77 nahradit „přesnou“ rovností.

$$\frac{\partial P_y}{\partial y} = \frac{\partial(3y + 3z)}{\partial y} = 3 + 0 = 3,$$

$$\frac{\partial P_z}{\partial z} = \frac{\partial(25)}{\partial z} = 0.$$

Dosadíme do vztahu 3.68 a dostaneme

$$\operatorname{div} \vec{P} = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = 2x + 3 + 0 = 2x + 3.$$

Je vidět, že divergence skutečně převedla vektorové pole na skalární funkci.

Úloha č. 2:

Dokažte v kartézském systému souřadnic, že pro vektorová pole $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$, $\vec{G} = (G_x, G_y, G_z)$ a konstantu b platí následující vztahy:

$$\operatorname{div}(\vec{P} + \vec{G}) = \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{div} \vec{G}, \quad (3.80)$$

$$\operatorname{div}(b \cdot \vec{P}) = b \cdot \operatorname{div} \vec{P}. \quad (3.81)$$

Řešení:

U obou vztahů provedeme důkaz přímý. Rozepíšme nejprve levou stranu vztahu 3.80 pomocí vztahu 3.68. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(\vec{P} + \vec{G}) &= \operatorname{div}(P_x + G_x, P_y + G_y, P_z + G_z) = \frac{\partial(P_x + G_x)}{\partial x} + \frac{\partial(P_y + G_y)}{\partial y} + \frac{\partial(P_z + G_z)}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} + \frac{\partial G_z}{\partial z} = \\ &= \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) + \left(\frac{\partial G_x}{\partial x} + \frac{\partial G_y}{\partial y} + \frac{\partial G_z}{\partial z} \right) = \operatorname{div} \vec{P} + \operatorname{div} \vec{G}. \end{aligned}$$

Během úprav jsme využili toho, že parciální derivace součtu funkcí je rovna součtu parciálních derivací jednotlivých funkcí. V předposledním kroku jsme přeuspořádali jednotlivé sčítance tak, aby u sebe byly sčítance odpovídající vektoru \vec{P} , resp. \vec{G} . Dokázali jsme tedy platnost vztahu 3.80.

Rozepíšme nyní levou stranu vztahu 3.81 opět podle vztahu 3.68. Dostaneme:

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(b \cdot \vec{P}) &= \operatorname{div}(b \cdot P_x, b \cdot P_y, b \cdot P_z) = \frac{\partial(b \cdot P_x)}{\partial x} + \frac{\partial(b \cdot P_y)}{\partial y} + \frac{\partial(b \cdot P_z)}{\partial z} = \\ &= b \cdot \frac{\partial P_x}{\partial x} + b \cdot \frac{\partial P_y}{\partial y} + b \cdot \frac{\partial P_z}{\partial z} = b \cdot \left(\frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} \right) = b \cdot \operatorname{div} \vec{P}. \end{aligned}$$

Během výpočtu jsme využili toho, že lze konstantu vytknout z parciální derivace. Dokázali jsme tak platnost vztahu 3.81.

Úloha č. 3:

Vypočítejte divergenci vektorového pole, které se rovná normálovému vektoru $\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|}$, kde $\vec{r} = (x, y, z)$.

Řešení:

K výpočtu použijeme opět vztah 3.68. Dosadme do něj a pokračujme ve výpočtu

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) &= \operatorname{div} \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial z}. \quad (3.82)\end{aligned}$$

Vypočtjme jednotlivé parciální derivace

$$\frac{\partial \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial x} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + x \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + y \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2y}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{x^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3},$$

$$\frac{\partial \left(\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right)}{\partial z} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + z \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \cdot \frac{2z}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{x^2 + y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}.$$

Dosadme tyto tři výsledky do vztahu 3.82:

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \left(\frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|} \right) &= \frac{y^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{x^2 + z^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} + \frac{x^2 + y^2}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \\ &= \frac{2 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} = \frac{2 \cdot r^2}{r^3} = \frac{2}{r}.\end{aligned}$$

Výsledkem je opět skalár, což jsme očekávali.

Úloha č. 4:

Vypočtjme divergenci elektrické intenzity

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \cdot \frac{\vec{r}}{r} \quad (3.83)$$

v okolí bodového náboje Q (umístěného do počátku soustavy souřadnic), kde $\vec{r} = (x, y, z)$ je polohový vektor, r je jeho velikost a ϵ_0 je permitivita vakua.

Řešení:

K výpočtu použijeme vztah 3.68. Vzdálenost $r = \|\vec{r}\|$ můžeme vyjádřit jako $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vztah 3.83 tak můžeme přepsat na tvar

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{(x, y, z)}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3}. \quad (3.84)$$

Nejprve vypočítáme parciální derivaci x -ové složky intenzity \vec{E} podle souřadnice x :

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{x}{(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})^3} \right) =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2} \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-2x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{3.85}
\end{aligned}$$

Obdobným výpočtem bychom dostali následující parciální derivace

$$\frac{\partial E_y}{\partial y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-2y^2 + x^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \tag{3.86}$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{(-2z^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \tag{3.87}$$

Nyní dosadíme výsledky 3.85, 3.86 a 3.87 do vztahu 3.68:

$$\begin{aligned}
\operatorname{div} \vec{E} &= \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{(-2x^2 + y^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(-2y^2 + x^2 + z^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} + \frac{(-2z^2 + x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \right) = \\
&= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{0}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} = 0, \text{ pokud je } (x, y, z) \neq (0, 0, 0).
\end{aligned}$$

Jediný bod, kde může být divergence nenulová, je počátek, do kterého jsme umístili bodový náboj Q . Pouze v tomto bodě se nachází zdroj elektrické intenzity. Proto je pro $\vec{r} \neq (0, 0, 0)$ divergence elektrické intenzity nulová.

Další úlohy na téma divergence lze nalézt např. v [4], sekce C/KS nebo v [15], str. 18.

3.3 Rotace

Rotace patří spolu s gradientem a divergencí mezi nejvýznamnější zástupce diferenciálních operátorů. V úvodu již bylo zmíněno, že tento operátor souvisí s „vírovostí“ vektorového pole. Ve fyzice se s rotací můžeme setkat např. v elektrostatičce, kde lze pomocí operátoru rotace ukázat, že je elektrostatičké pole nevírové. Operátor rotace se rovněž vyskytuje ve dvou ze čtyř Maxwellových rovnic.

V této podkapitole zavedeme rotaci a uvedeme její souřadnicový tvar.

3.3.1 Zavedení rotace a její vlastnosti

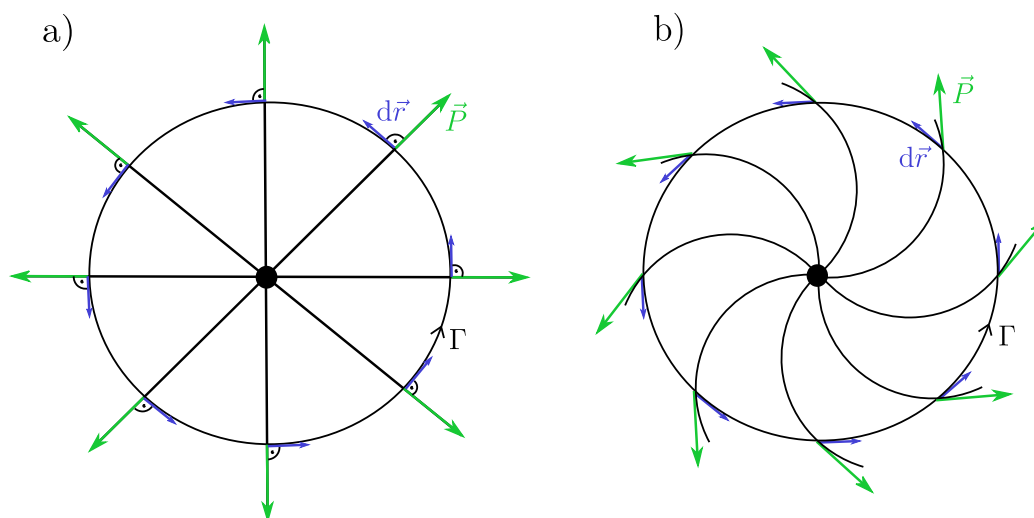
K tomu, abychom byli schopni zavést rotaci, musíme znát křivkový integrál II. druhu, kterým jsme se zabývali v kapitole 1. Již bylo řečeno, že do rotace „vstupuje“ vektorové pole (resp. vektor) a „vystupuje“ z ní opět vektorové pole (obecně jiné).

Začneme opět situací s kapalinou (např. vodou). Představme si, že by po nás někdo chtěl, abychom rozhodli, zda se v nějakém bodě prostoru tvoří vodní

víry. Po zkušenosti se zavedením divergence, kde jsme při zkoumání existence vodních zdrojů (či antizdrojů) obklopovali dané místo plochou Σ , by nás mohlo napadnout zmíněné místo opět něčím obklopit. Tentokrát to však nebude plocha, nýbrž uzavřená křivka Γ . To ostatně koresponduje s úvodní zmínkou, že využijeme křivkový integrál II. druhu.

Vypočteme-li zmíněný integrál, pak podle jeho hodnoty budeme schopni určit, zda voda tvoří víry, či nikoliv. V jistém slova smyslu tato metoda odpovídá postupu u určování existence vodních zdrojů, kde jsme počítali hodnotu plošného integrálu II. druhu. Musíme si však uvědomit, že jsme chtěli zjistit, zda se tvoří vodní víry v daném bodě, nikoliv v oblasti ohraničené křivkou Γ . To ale vyřešíme snadno tím, že budeme brát čím dále menší uzavřenou křivku, a tedy i čím dále menší oblast, kterou tato křivka ohraničuje. Limitně se tak dostaneme pouze k bodu, který nás zajímá.⁷⁰

Uvažujme nyní obecnou situaci, kdy se ptáme na vírovost vektorového pole $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$ v bodě, jemuž přiřazujeme polohový vektor \vec{r} .⁷¹ Stejně jako u příkladu s vodou i zde obklopíme tento bod uzavřenou křivkou Γ . Obsah, který tato křivka vymezuje, označíme jako ΔS . Dále vypočteme křivkový integrál $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, pomocí něhož rozhodneme o vírovosti pole.



Obrázek 3.9: Schéma k zavedení rotace - a) nevírové pole; b) vírové pole

Představme si nyní situaci na obrázku 3.9 a), který znázorňuje siločáry nevírového pole. Jeho nevírovost můžeme usuzovat ze skutečnosti, že znázorněné siločáry nejsou nijak zakřivené. Na tomto obrázku je vidět, že vektorové pole \vec{P} je ve všech bodech uzavřené křivky Γ (ve tvaru kružnice) na ni kolmé. Tedy vektorové pole \vec{P} je kolmé na infinitezimálně malý tečný vektor $d\vec{r}$ mířící ve směru orientované křivky. Skalární součin $\vec{P} \cdot d\vec{r}$ tak bude v každém bodě křivky nulový. Pokud bychom uvažovali „složitější“ křivku, než je kružnice, tento skalární součin by ve všech bodech křivky nulový vycházet nemusel. Součet jednotlivých výsledků součinů ve všech bodech křivky by však přesto nulový vyšel. Jelikož na integrál $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ můžeme nahlížet jako na součet skalárních součinů $\vec{P} \cdot d\vec{r}$ ve všech bodech uzavřené křivky Γ , bude integrál nulový. Můžeme tak říci, že

⁷⁰Srovnejte se zavedením divergence (viz oddíl 3.2.1).

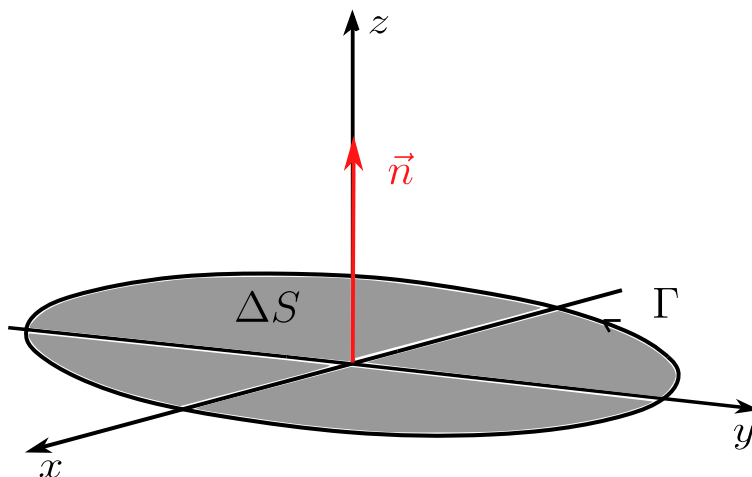
⁷¹U vody by tímto vektorovým polem byla rychlost \vec{v} .

vektorové pole \vec{P} je nevírové, pokud bude křivkový integrál II. druhu tohoto pole také nulový.

Uvažujme dále případ, kdy siločáry budou zahnuté a křivkou Γ bude opět kružnice (viz obrázek 3.9 b)).⁷² Podle obrázku 3.9 b) svírá vektor \vec{P} s vektorem $d\vec{r}$ úhel různý od $\frac{\pi}{2}$, z čehož plyne, že skalární součin $\vec{P} \cdot d\vec{r}$ je různý od nuly. Pokud by byl výsledný součet těchto součinů, a tedy i integrál, různý od nuly, mohli bychom tvrdit, že je vektorové pole \vec{P} vírové, což jsme ostatně mohli odhadovat z již zmíněného zakřivení siločar.

Nakonec zmiňme, že když bude hodnota integrálu $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ kladná, „směr víru“ bude souhlasný s orientací křivky Γ a když bude hodnota tohoto integrálu záporná, směr bude opačný. To souvisí s hodnotami zmiňovaných skalárních součinů, které lze přepsat jako součin velikostí vektorů krát kosinus úhlu, který svírají. Funkce kosinus je pro úhly z intervalu $(0, \frac{\pi}{2})$ kladná a pro úhly z intervalu $(\frac{\pi}{2}, \pi)$ záporná. Pokud se tak vektorové pole stáčí do směru orientace křivky Γ , vektory \vec{P} a $d\vec{r}$ svírají ostré úhly, a integrál je kladný. V opačném případě svírají zmíněné vektory úhly tupé, a tudíž je integrál záporný.

Na závěr se zaměříme na formální stránku věci. Označme rotaci vektorového pole \vec{P} jako $\text{rot}\vec{P}$. Z dřívějšíka již víme, že rotace vektoru je vektor. My jsme však doposud mluvili pouze o integrálu $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, jehož výsledkem je skalár. Z vektoru $\text{rot}\vec{P}$ tak musíme „vyrobit“ skalár. Toho dosáhneme tak, že vektor $\text{rot}\vec{P}$ skalárně vynásobíme jednotkovým normálovým vektorem \vec{n} , který je kolmý k ploše o obsahu ΔS ohraničené uzavřenou křivkou Γ (viz obrázek 3.10). Normálový vektor \vec{n} má orientaci podle *pravidla pravé ruky*: položíme-li prsty pravé ruky ve směru orientace křivky Γ , pak vztyčený palec ukazuje směr normálového vektoru \vec{n} .



Obrázek 3.10: Normálový vektor \vec{n} kolmý na plochu o obsahu ΔS ohraničenou křivkou Γ

Když mluvíme o ploše o obsahu ΔS , narážíme na druhý nedostatek, o kterém jsme se již zmínili. Ptáme se na vírovost vektorového pole \vec{P} v bodě s polohovým vektorem \vec{r} nikoliv na vírovost v oblasti plošky o obsahu ΔS . Řešení tohoto problému jsme již dříve nastínili. Budeme uvažovat limitu pro ΔS jdoucí k nule. Aby však integrál, se kterým pracujeme, nevyšel automaticky nulový, vynásobíme jej hodnotou $\frac{1}{\Delta S}$.

⁷²To, že jsou siločáry zahnuté, ihned nezaručuje vírovost vektorového pole.

Z uvedeného tak plyne, že *rotaci*⁷³ *vektorového pole* \vec{P} můžeme definovat takto:⁷⁴

$$\vec{n} \cdot \text{rot}\vec{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.88)$$

3.3.2 Souřadnicový tvar rotace

V oddílech 3.1.3 a 3.2.3 jsme se setkali s „vektorem“ $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$, pomocí něhož můžeme vyjádřit v kartézských souřadnicích také rotaci jako (viz [5], str. 228)

$$\text{rot}\vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times (P_x, P_y, P_z), \quad (3.89)$$

přičemž symbol „ \times “ znamená vektorový součin. Vztah 3.89 tak ještě můžeme upravit na tvar

$$\text{rot}\vec{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}, \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right). \quad (3.90)$$

Když bychom nemluvili pouze o kartézských souřadnicích, ale obecně o křivočarých ortogonálních souřadnicích q_1, q_2, q_3 , tak můžeme jednotlivé složky vektoru rotace vyjádřit jako (plyne z determinantu v [11], oddíl 8.8.4):⁷⁵

$$(\text{rot}\vec{P})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_3} \right), \quad (3.91)$$

$$(\text{rot}\vec{P})_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_1} \right), \quad (3.92)$$

$$(\text{rot}\vec{P})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \left(\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right), \quad (3.93)$$

kde h_1, h_2, h_3 jsou Laméovy koeficienty a $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ je vektorové pole. Je vidět, že z uvedených vztahů 3.91 až 3.93 pro složky rotace plyne vztah 3.90 pro kartézské souřadnice.

3.4 Laplaceův operátor

Laplaceův operátor skalární funkce f (značíme Δf) definujeme pomocí vztahu (viz [3], str. 90):

$$\Delta f = \text{div grad} f. \quad (3.94)$$

⁷³[28], str. 7: *Vektor* $\text{rot}\vec{P}$ *má směr normály k ploše, kolem které je maximální cirkulace vektoru* \vec{P} . Srovnajte vektor $\text{rot}\vec{P}$ s vektorem úhlové rychlosti.

⁷⁴Poznamenejme, že v některé literatuře, jako např. v [15], str. 19 nebo v [5], str. 228, můžeme narazit na zavedení diferenciálního operátoru rotace pomocí jeho souřadnicového tvaru, kterým se budeme zabývat v oddílu 3.3.2.

⁷⁵Vztahy 3.91 až 3.93 je možné, podobně jako u divergence, odvodit z jejího definičního vztahu (viz 3.88). Křivku Γ bychom zvolili ve tvaru obvodu „obdélníku“, jehož dvě strany leží na souřadnicových čarách. Kvůli obsáhlosti odvození jej neuvádíme.

Tento operátor charakterizuje v daném bodě, jak silný je bodový zdroj pole gradientu skalární funkce f . Pokud bychom dosadili složky vektoru $\text{grad} f$ ze vztahu 3.30 do vztahu 3.67 pro výpočet divergence, dostali bychom souřadnicový tvar Laplaceova operátoru:

$$\Delta f = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \cdot \frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial f}{\partial q_3} \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \right) \right]}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}, \quad (3.95)$$

kde h_1, h_2, h_3 jsou Laméovy koeficienty. Například v kartézských souřadnicích, kde $h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$, má Laplaceův operátor tvar:

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}. \quad (3.96)$$

Více podrobností o Laplaceově operátoru lze nalézt např. v [14], str. 144 nebo v [18], kde se rovněž nachází vztahy pro Laplaceův operátor rozepsané pro cylindrické a sférické souřadnice.

3.5 Využití diferenciálních operátorů ve fyzice

Význam Maxwellových rovnic

V tomto odstavci se budeme snažit interpretovat Maxwellovy rovnice na základě vlastností diferenciálních operátorů.

Maxwellovy rovnice (viz [29], kapitola 12, str. 16):

$$\text{div} \vec{D} = \rho, \quad (3.97)$$

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (3.98)$$

$$\text{rot} \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (3.99)$$

$$\text{div} \vec{B} = 0, \quad (3.100)$$

kde \vec{D} je elektrická indukce, ρ je hustota volného náboje, \vec{E} je elektrická intenzita, \vec{B} je magnetická indukce, \vec{H} je magnetická intenzita a \vec{j} je hustota elektrického proudu.

První rovnice (3.97) říká, že „vznik“ elektrické indukce \vec{D} je úměrný hustotě volného náboje v daném bodě. To plyne z vlastnosti divergence, která vyjadřuje mohutnost zdroje pole v daném bodě.

Zaměříme-li se na druhou z Maxwellových rovnic (3.98), tak výraz $-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ souvisí s časovými změnami magnetického pole zatímco výraz $\text{rot} \vec{E}$ souvisí s elektrickým polem. Operátor rotace charakterizuje mohutnost víření vektorového pole. Časové změny magnetického pole tak souvisí s mohutností víření elektrického pole.

Ve třetí rovnici (3.99) jde opět o vztah mezi elektrickým a magnetickým polem. V jistém slova smyslu jde o obdobu druhé rovnice (3.98). Zde však změny

elektrického pole (vyjádřené výrazem $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$) souvisí s mohutností víření pole magnetického.

Čtvrtá rovnice (3.100) pak pojednává o magnetickém poli, které charakterizuje magnetická indukce \vec{B} . To, že je divergence vektoru \vec{B} nulová, říká, že mohutnost zdrojů magnetického pole v daném bodě je nulová. Magnetické pole tak nemá bodové zdroje, nebo tzv. antizdroje. Vždy se bude jednat o průtok magnetického pole v daném místě. Dalo by se také říci, že Maxwellovy rovnice v uvedeném tvaru zakazují magnetické monopóly. Tím se liší magnetické pole od pole elektrického, kde „póly“ (samotný kladný nebo záporný bodový náboj) existují.

3.6 K zapamatování

- Nejvýznamnější diferenciální operátory: gradient, divergence a rotace.
- Souřadnicové tvary operátorů:

$$- \text{gradient: } \text{grad} f = \left(\frac{1}{h_1} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_1}, \frac{1}{h_2} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_2}, \frac{1}{h_3} \cdot \frac{\partial f}{\partial q_3} \right),$$

$$- \text{divergence: } \text{div} \vec{P} = \frac{1}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_1 \cdot h_2 \cdot h_3)}{\partial q_1} + \frac{\partial(P_2 \cdot h_1 \cdot h_3)}{\partial q_2} + \frac{\partial(P_3 \cdot h_1 \cdot h_2)}{\partial q_3} \right),$$

- rotace:

$$(\text{rot} \vec{P})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_3} \right),$$

$$(\text{rot} \vec{P})_2 = \frac{1}{h_1 h_3} \cdot \left(\frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_1} \right),$$

$$(\text{rot} \vec{P})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \cdot \left(\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right).$$

- Laplaceův operátor:

$$\Delta f = \frac{\left[\frac{\partial}{\partial q_1} \left(\frac{\partial f}{\partial q_1} \cdot \frac{h_2 \cdot h_3}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial q_2} \left(\frac{\partial f}{\partial q_2} \cdot \frac{h_1 \cdot h_3}{h_2} \right) + \frac{\partial}{\partial q_3} \left(\frac{\partial f}{\partial q_3} \cdot \frac{h_1 \cdot h_2}{h_3} \right) \right]}{h_1 \cdot h_2 \cdot h_3}$$

- Gradient souvisí se směrem největšího růstu skalárního pole, divergence souvisí se zřídlovostí vektorového pole a rotace souvisí s vírovostí vektorového pole.
- Druhy křivočarých ortogonálních souřadnicových systémů a přechod mezi nimi pomocí Laméových koeficientů, souřadnicové tvary diferenciálních operátorů.
- Gaussova (matematická) věta umožňuje přechod mezi plošným integrálem II. druhu a trojným (objemovým) integrálem.
- Využití ve fyzice: např. v Maxwellových rovnicích.

Seznam použité literatury

- [1] KOLÁŘ, Petr. Elektronická učebnice k předmětu Úvod do matematických metod fyziky [online]. Praha, 2014 [cit. 2021-05-12]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/matematicke_metody/materialy/Ucebnice_1.pdf. Bakalářská práce. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [2] KOLÁŘ, Petr. Elektronická učebnice matematických metod fyziky [online]. Praha, 2016 [cit. 2021-03-18]. Dostupné z: https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/matematicke_metody/materialy/Ucebnice_2.pdf. Diplomová práce. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [3] FIALKA, Miloslav. Integrální počet funkcí více proměnných s aplikacemi: výklad, řešené příklady, cvičení : učební text. Vyd. 2. Ve Zlíně: Univerzita Tomáše Bati, 2006. ISBN 80-7318-378-1.
- [4] HLADÍK, Antonín. Pomocný učební text k průpravnému předmětu učitelského studia fyziky. Praha, 1983/4. Skriptum. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [5] REKTORYS, Karel. Přehled užití matematiky I. 6., přeprac. vyd. Praha: Prometheus, 1995. Česká matice technická (Prometheus). ISBN 80-85849-92-5.
- [6] BOUCHALA, Jiří a Oldřich VLACH. Křivkový a plošný integrál [online]. Ostrava, 2012 [cit. 2020-07-31]. Dostupné z: <https://home1.vsb.cz/~bou10/archiv/kpi.pdf>. Výukový materiál. Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava, Západočeská univerzita v Plzni.
- [7] ŠIŠMA, Pavel. Plošný integrál [online]. Brno, 2020 [cit. 2020-08-01]. Dostupné z: <http://www.math.muni.cz/~sisma/plochy.pdf>. Učební materiál. Masarykova univerzita.
- [8] MAŘÍK, Robert. Aplikovaná matematika [online]. Brno, 2019 [cit. 2020-08-02]. Dostupné z: <http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/prezentace.pdf>. Prezentace. Mendelova univerzita v Brně.
- [9] HUŠEK, M. a P. PYRIH. Matematická analýza. Matematika.cuni.cz [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2000 [cit. 2020-08-01]. Dostupné z: <http://matematika.cuni.cz/dl/analyza/>.
- [10] ZEMAN, Radek. Křivkový integrál druhého druhu. OnlineSchool.cz [online]. Brno: OnlineSchool.cz, 2020 [cit. 2020-7-31]. Dostupné z: <https://onlineschool.cz/matematika/krivkovy-integral-druheho-druhu/>.
- [11] KALUS, René a Daniel HRIVŇÁK. Multimediální kurz z aplikované vyšší matematiky. Přírodovědecká fakulta Ostravské univerzity [online]. Ostrava: Ostravská univerzita, 2002 [cit. 2020-08-01]. Dostupné z: <http://artemis.osu.cz/MMMAT/>.

- [12] KOPÁČEK, Jiří. Integrály. 2. opravené vydání. Praha: MATFYZPRESS, 2008. ISBN 978-80-7378-043-2.
- [13] MAŘÍK, Robert. Křivkový integrál. Kiwi.mendelu.cz [online]. Brno: Mendelova univerzita v Brně, 2019 [cit. 2020-07-31]. Dostupné z: http://user.mendelu.cz/marik/wiki/am/slidy/krivkovy_integral/index_h.html.
- [14] KVASNICA, Jozef. Matematický aparát fyziky. Vyd. 2. opr. Praha: Academia, 1997. ISBN 80-200-0603-6.
- [15] HRIVŇÁK, Daniel. Diferenciální operátory vektorové analýzy [online]. Ostrava, 2002 [cit. 2020-08-02]. Dostupné z: http://artemis.osu.cz/uvma3/UVMA3_1.pdf. Učební materiál. Ostravská univerzita.
- [16] DOLEŽAL, Jiří. Obecně o křivkách. Základy geometrie a Geometrie [online]. Ostrava: VŠB - Technická univerzita Ostrava, 2021 [cit. 2021-03-22]. Dostupné z: <https://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/Geometrie/StudOpory/Geometrie/Krivky/KrivkyObecne/KrivkyObecne.html>.
- [17] DUBCOVÁ, Miroslava, Drahoslava JANOVSÁ a Daniel TURZÍK. Matematika III Základy vektorové analýzy [online]. Praha, 2016 [cit. 2020-08-02]. Dostupné z: http://old.vscht.cz/mat/Ostatni/vect_anal_2012.pdf. Prezentace. Vysoká škola chemicko-technologická v Praze.
- [18] KURFÜRST, Petr. Diferenciální operátory. Početní praktikum [online]. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2017 [cit. 2020-08-02]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js17/pocetni_praktikum1/web/ch05_s03.html.
- [19] KOČANDRLE, Milan a Leo BOČEK. Matematika pro gymnázia: analytická geometrie. 2. upr. vyd. Praha: Prometheus, 1999. Učebnice pro střední školy. ISBN 80-7196-163-9.
- [20] DVOŘÁK, Leoš. Prozatímní učební text k přednášce Mechanika [online]. Praha, 2020 [cit. 2021-03-06]. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/FyzikaI/>. Učební text. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [21] Elektrostatické pole ve vakuu [online]. Praha, 2019 [cit. 2021-02-13]. Dostupné z: https://physics.mff.cuni.cz/kfpp/skripta/kurz_fyziky_pro_DS/display.php/elmag/1_2. Učební materiál. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [22] Sběrka řešených úloh [online]. Praha: Matematicko-fyzikální fakulta UK, 2016 [cit. 2021-03-06]. Dostupné z: <http://reseneulohy.cz/cs>.
- [23] BANASIOVÁ, Lucie. Využití matematických ploch k zastřešení [online]. Brno, 2006 [cit. 2021-04-27]. Dostupné z: <https://adoc.pub/masarykova-univerzita4cbef7f4c99486f95106af13f6f7a06959127.html>. Diplomová práce. Masarykova univerzita.

- [24] REICHL, Jaroslav a Martin VŠETIČKA. Rovnice spojitosti (kontinuity). Encyklopedie fyziky [online]. Praha: Jaroslav Reichl, 2021 [cit. 2021-02-14]. Dostupné z: <http://fyzika.jreichl.com/main.article/view/124-rovnice-spojivosti-kontinuity>.
- [25] Operator. Encyclopedia of Mathematics [online]. Springer, The European Mathematical Society: Europe, 2020 [cit. 2021-04-28]. Dostupné z: <https://encyclopediaofmath.org/wiki/Operator>.
- [26] SKÁLA, Lubomír. Úvod do kvantové mechaniky. Praha: Karolinum, 2011. ISBN 978-80-246-2022-0.
- [27] KUNCOVÁ, Kristýna. Plošný integrál funkce [online]. Praha, 2020 [cit. 2020-12-12]. Dostupné z: <https://www2.karlin.mff.cuni.cz/~kuncova/kalkulus1/krp12.pdf>. Učební materiál. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [28] Další vlastnosti konzervativního pole [online]. Plzeň, 2020 [cit. 2021-05-06]. Dostupné z: <https://kfy.zcu.cz/export/sites/kfy/dokumenty/FYA2/dalsi.vlast.konz.pole.pdf>. Učební materiál. Západočeská univerzita v Plzni.
- [29] DVORŽÁK, Leoš. Prozatímní učební text k přednášce Elektřina a magnetismus [online]. Praha, 2021 [cit. 2021-03-06]. Dostupné z: <https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzika2elmag/>. Učební text. Matematicko-fyzikální fakulta UK.
- [30] KURFÜRST, Petr. Křivočaré souřadnice. Početní praktikum [online]. Brno: Přírodovědecká fakulta Masarykovy univerzity, 2017 [cit. 2020-11-29]. Dostupné z: https://is.muni.cz/do/rect/el/estud/prif/js17/pocetni_praktikum/web/apA_s02.html.
- [31] GEORG, Karl-Friedrich, Radovan DANIEL a Daniel DOSTAL. Úvod do projektivní geometrie rovinných křivek [online]. Praha, 2014 [cit. 2021-02-12]. Dostupné z: <https://www.wlyceum.cz/web/soubory/17-preklad-projektivka.pdf>. Překlad metodické literatury. Střední škola - Waldorfské lyceum.