

Seznam použitého značení

V různých publikacích může být pro jednotlivé matematické objekty použito různé značení. Níže uvádíme seznam značení, které používáme v této diplomové práci.

$\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$	vektor se souřadnicemi a_x, a_y, a_z
$\ \vec{a}\ $	norma vektoru \vec{a}
$\vec{c} \cdot \vec{d}$	skalární součin vektorů \vec{c} a \vec{d}
$\vec{c} \times \vec{d}$	vektorový součin vektorů \vec{c} a \vec{d}
$A \times B$	kartézský součin množin A a B
$A \subseteq B$	množina A je podmnožinou množiny B
$\sum_{j=1}^N b_j$	součet prvků b_j pro j od 1 do N
$\int_c^d f(x)dx$	určitý integrál funkce $f(x)$ s mezemi c a d
$\int_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$	křivkový integrál II. druhu vektoru \vec{P} (po křivce Γ)
$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$	křivkový integrál II. druhu vektoru \vec{P} (po uzavřené křivce Γ)
$\iint_{\Sigma} \vec{P} \cdot d\vec{S}$	plošný integrál II. druhu vektoru \vec{P} (po ploše Σ)
$\text{grad} f$	gradient funkce f
$\vec{\nabla}$	označení pro „vektor“ $\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$
q_i	i -tá křivočará ortogonální souřadnice
h_i	i -tý Laméův koeficient
$\frac{\partial f}{\partial x}$	parciální derivace funkce f podle proměnné x
$\frac{df}{dx}$	derivace funkce f podle proměnné x
$\text{div} \vec{P}$	divergence vektoru \vec{P}
$\text{rot} \vec{P}$	rotace vektoru \vec{P}
$\sin \varphi$	sinus úhlu φ
$\cos \varphi$	kosinus úhlu φ
$\tan \varphi$	tangens úhlu φ
$\cot \varphi$	kotangens úhlu φ
δ_{ij}	Kroneckerův symbol
ε_{ijk}	Levi-Civitův symbol
\mathbb{N}	množina přirozených čísel
\mathbb{R}	množina reálných čísel
T^n	tenzor n -tého řádu

1. Parciální derivace

S pojmem derivace jsme se setkali již v textu [1], kapitola 4, str. 30. Zmíněná kapitola pojednává o derivaci reálné funkce (jedné) reálné proměnné, pro kterou bylo zvoleno označení $f(x)$. Pro derivaci funkce $f(x)$ podle proměnné x pak bylo používáno značení $\frac{df(x)}{dx}$, resp. $f'(x)$.

V této kapitole se seznámíme s parciální derivací funkce více proměnných. Nabízí se tak několik otázek:

- Co je to funkce více proměnných a jak si ji máme představit?
- V čem se liší parciální derivace od derivace, kterou známe?
- Má parciální derivace nějaký „geometrický“ význam?

Společně na tyto otázky odpovíme, zavedeme parciální derivaci, vypočteme několik příkladů a také se budeme zabývat využitím parciálních derivací ve fyzice.

1.1 Funkce více proměnných

Dosud jsme pracovali s reálnou funkcí $f(x)$ jedné reálné proměnné x . Touto funkcí rozumíme předpis, který každému x z definičního oboru (který je podmnožinou reálných čísel \mathbb{R}) přiřadí právě jednu funkční hodnotu $f(x)$ z \mathbb{R} .

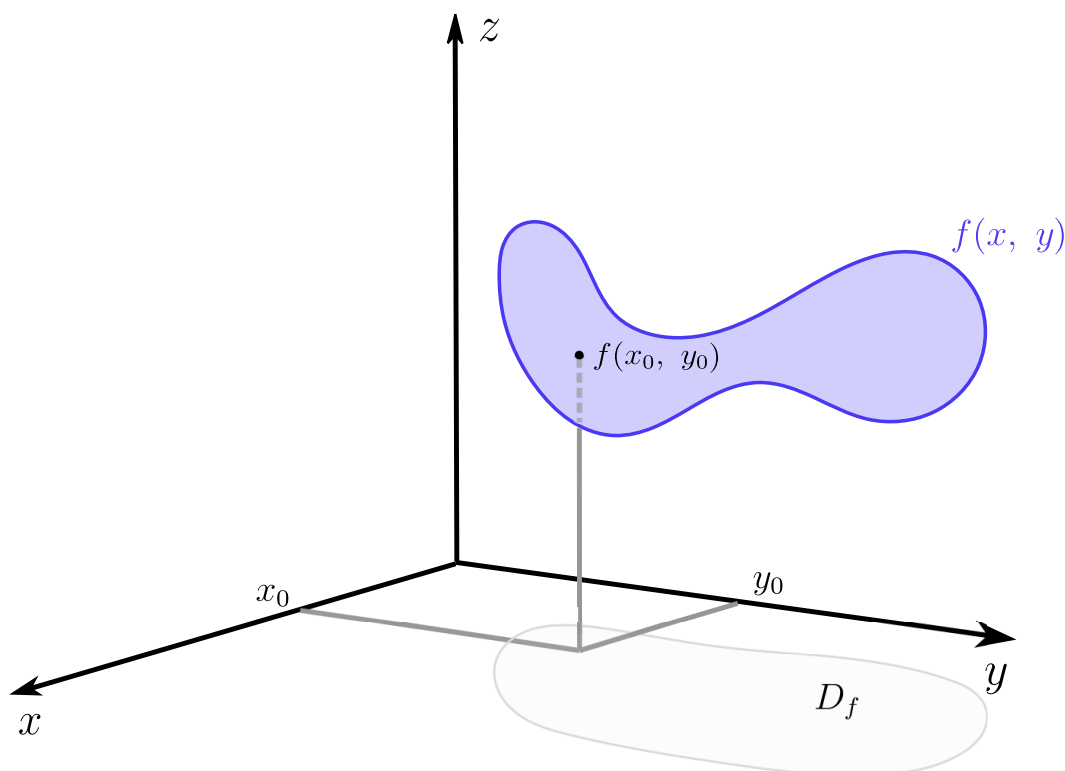
Nyní budeme pracovat s funkcemi závislými na dvou či více proměnných. Pro názornost se nejprve zaměříme na reálnou funkci dvou reálných proměnných x a y , kterou označíme $f(x, y)$. Tato funkce přiřadí každé (uspořádané) dvojici čísel z definičního oboru $D_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ právě jednu funkční hodnotu z \mathbb{R} . Popsaná situace je znázorněna na obrázku 1.1. Na něm je vidět, že uspořádané dvojici $[x_0, y_0] \in D_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ je přiřazena právě jedna funkční hodnota $f(x_0, y_0) \in \mathbb{R}$.

Reálná funkce tří reálných proměnných $f(x, y, z)$ přiřadí každému bodu $[x_0, y_0, z_0] \in D_f \subseteq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ právě jednu funkční hodnotu $f(x_0, y_0, z_0) \in \mathbb{R}$. Pro znázornění této situace bychom však potřebovali čtyři dimenze (tři dimenze pro tři proměnné a čtvrtou dimenzi pro funkční hodnotu).

Obecněji pak můžeme říci, že reálná funkce n proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$ přiřadí každému bodu $[x_{01}, \dots, x_{0n}] \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ právě jednu funkční hodnotu $f(x_{01}, \dots, x_{0n}) \in \mathbb{R}$. Pro znázornění této situace bychom potřebovali $n + 1$ dimenzí.

Příklady funkcí více proměnných

- $f(x, y) = \sin x \ln y$, kde $D_f = \mathbb{R} \times (0, \infty)$,
- $f(x, y, z) = x^3 \frac{1}{\sqrt{y}} |z|$, kde $D_f = \mathbb{R} \times (0, \infty) \times \mathbb{R}$,
- $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = \frac{x_1}{x_2} \cos x_3 x_4^5$, kde $D_f = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \setminus \{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.



Obrázek 1.1: Znázornění grafu funkce dvou proměnných v kartézském systému souřadnic

1.2 Od derivace k parciální derivaci

Derivace funkce $f(x)$ podle proměnné x v bodě x_0 byla definována jako (viz vztah 4.3 v [1], kapitola 4, str. 32):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}, \quad (1.1)$$

resp. jako (viz vztah 4.6 v [1], kapitola 4, str. 32):

$$f'(x_0) = \frac{df}{dx}(x_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}, \quad (1.2)$$

kde $\Delta x = x - x_0$. Můžeme těchto definic nějak využít pro zavedení parciální derivace funkce více proměnných?

Pro jednoduchost uvažujme funkci $f(x, y)$ dvou proměnných x a y . Pokud bychom chtěli vypočítat parciální derivaci této funkce např. podle proměnné y , znamenalo by to, že bychom funkci $f(x, y)$ derivovali podle proměnné y a na proměnnou x bychom nahlíželi jako na konstantu. Pro parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ funkce $f(x, y)$ podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ tak můžeme (analogicky ke vztahu 1.1) napsat:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \quad (1.3)$$

resp. můžeme (analogicky ke vztahu 1.2) napsat:

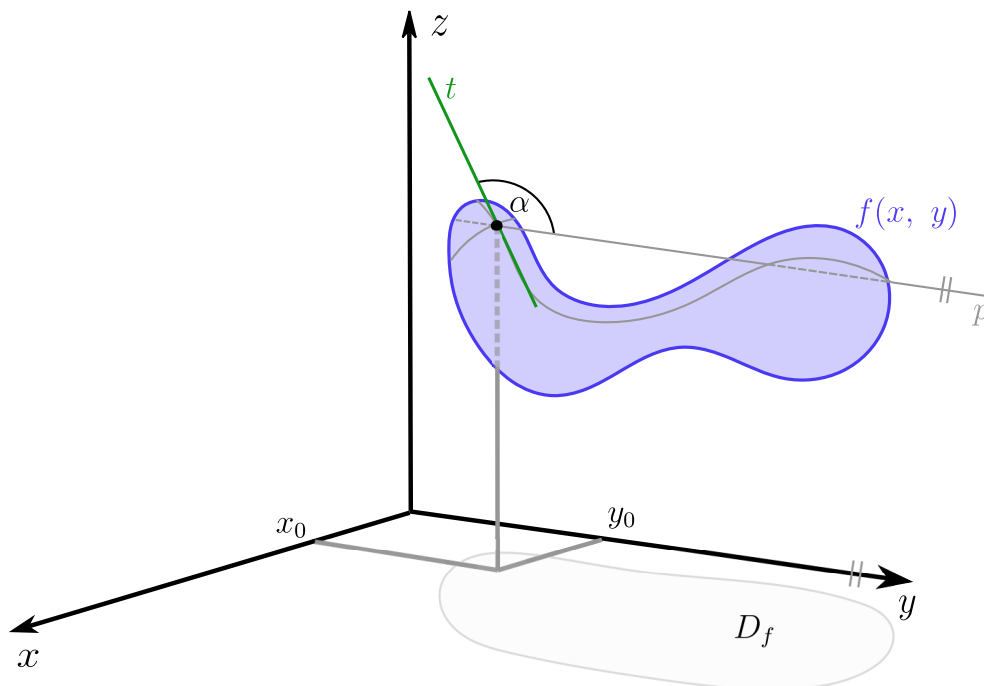
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y}, \quad (1.4)$$

kde $\Delta y = y - y_0$. Obdobné vztahy bychom mohli napsat pro parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x v bodě $[x_0, y_0]$, tj. pro $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$.

Zmíněný postup lze zobecnit pro libovolnou funkci n proměnných $f(x_1, \dots, x_n)$.

1.3 Geometrický význam parciální derivace

Z kapitoly 4 v textu [1], str. 31, víme, že derivace reálné funkce jedné reálné proměnné (v bodě x_0) má význam směrnice tečny ke grafu této funkce v bodě x_0 . Význam parciální derivace bude v jistém smyslu podobný.



Obrázek 1.2: Schéma ke znázornění geometrického významu parciální derivace

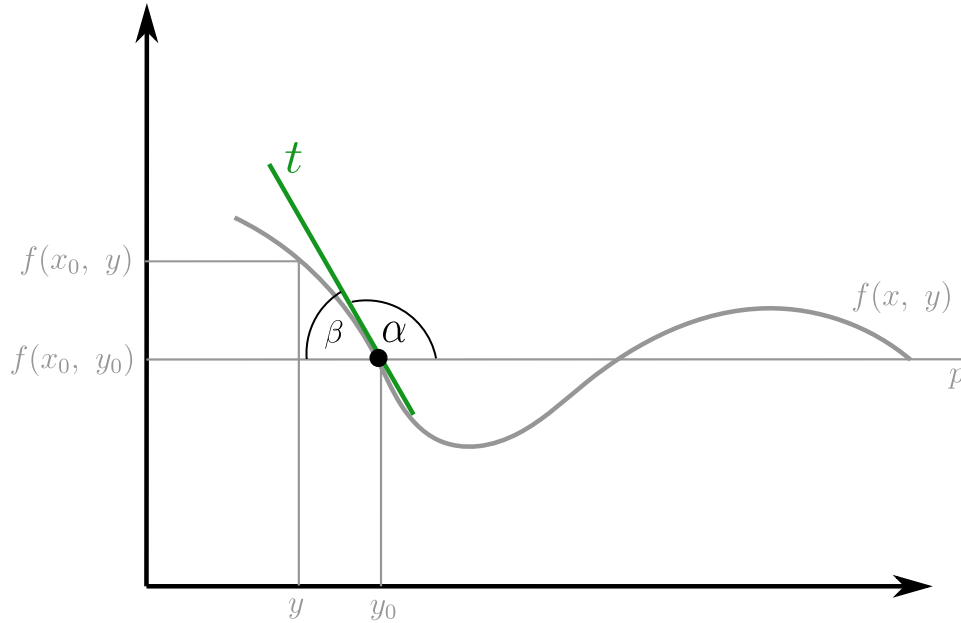
Pro jednoduchost budeme opět uvažovat funkci $f(x, y)$ dvou proměnných x a y a její parciální derivaci podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$, tj. derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Pro y blízké hodnotě y_0 můžeme přepsat vztah 1.3 pomocí přibližné rovnosti na tvar:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \doteq \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}. \quad (1.5)$$

Zaměřme se na pravou stranu tohoto vztahu. V čitateli je rozdíl funkčních hodnot v bodě $[x_0, y]$ a v bodě $[x_0, y_0]$, tj. ve dvou bodech majících stejnou x -ovou souřadnici x_0 a lišících se v y -ové souřadnici. Ve jmenovateli je pak rozdíl y -ových hodnot, tj. hodnot y a y_0 . Význam pravé strany vztahu 1.5 objasníme pomocí obrázků 1.2 a 1.3.

Na obrázku 1.3 vidíme kolmý řez grafu funkce $f(x, y)$ z obrázku 1.2 rovinou $x = x_0$, tj. rovinou rovnoběžnou s rovinou yz a procházející bodem $[x_0, 0, 0]$. Na obrázku 1.3 je rovněž znázorněna tečna t ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Nyní zkusme vypočítat směrnici tečny t . Tu vypočítáme jako tangens úhlu α , tj. úhlu, který svírá tečna s kladnou částí přímky p rovnoběžné s osou y . Když



Obrázek 1.3: Kolmý řez grafu funkce $f(x, y)$ z obrázku 1.2 rovinou $x = x_0$

označíme doplňkový úhel k úhlu α jako β , můžeme napsat:

$$\tan \alpha = \tan(\pi - \beta) = -\tan \beta. \quad (1.6)$$

Při poslední úpravě jsme využili znalosti goniometrického vzorce:²

$$\tan(\alpha_1 - \alpha_2) = \frac{\tan \alpha_1 - \tan \alpha_2}{1 + \tan \alpha_1 \cdot \tan \alpha_2},$$

kde $\alpha_1 = \pi$ a $\alpha_2 = \beta$.

Z obrázku 1.3 je vidět, že můžeme tangens úhlu β přibližně vyjádřit jako:

$$\tan \beta \doteq \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y_0 - y}, \quad (1.7)$$

kde rozdíl $f(x_0, y) - f(x_0, y_0)$ vyjadřuje velikost protilehlé odvěsny a rozdíl $y_0 - y$ vyjadřuje velikost přilehlé odvěsny příslušného pravoúhlého trojúhelníku.

Ze vztahů 1.6 a 1.7 tak plyne:

$$\tan \alpha = -\tan \beta \doteq -\frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y_0 - y} = \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}, \quad (1.8)$$

což je pravá strana vztahu 1.5. Z toho ale plyne, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$ je rovna³ směrnici tečny (ležící v rovině $x = x_0$) ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$.

Obdobně lze odvodit, že parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$ je rovna směrnici tečny, tentokrát ležící v rovině $y = y_0$, ke grafu funkce $f(x, y)$ v bodě $[x_0, y_0]$.

²Např. viz [4].

³Díky limitě pro y jdoucí k y_0 se ve vztahu 1.5 z přibližné rovnosti stane rovnost.

1.4 Parciální derivace vyšších řádů

Stejně jako u derivace je výsledkem parciální derivace funkce (obecně více proměnných) opět funkce (obecně více proměnných). Například vypočtěme parciální derivaci podle proměnné x funkce dvou proměnných $f(x, y) = x^2 \cos y$. Dostaneme:

$$\frac{\partial(x^2 \cos y)}{\partial x} = 2x \cos y, \quad (1.9)$$

tedy opět funkci dvou proměnných. Označme ji $g(x, y)$.

V této chvíli nám nic nebrání, abychom funkci $g(x, y)$ zderivovali podle proměnné x nebo y . Vypočtěme například její parciální derivaci podle proměnné y , dostaneme:

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(2x \cos y)}{\partial y} = 2x(-\sin y) = -2x \sin y. \quad (1.10)$$

Vidíme, že bychom opět mohli výslednou funkci derivovat jak podle proměnné x , tak podle proměnné y .

Zaměříme se ještě na levou stranu vztahu 1.10 a přepíšme ji s vědomím, že $g(x, y) = \frac{\partial(x^2 \cos y)}{\partial x}$. Tedy

$$\frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial(x^2 \cos y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}, \quad (1.11)$$

přičemž u poslední úpravy jsme využili zvyklosti, podle které můžeme předposlední výraz $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right)$ symbolicky zapsat jako $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x}$. Z úprav 1.10 a 1.11 plyne, že pro $f(x, y) = x^2 \cos y$ platí:

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y \partial x} = -2x \sin y. \quad (1.12)$$

Mluvíme o tzv. *smíšené parciální derivaci*⁴ funkce $f(x, y)$ podle proměnných x a y .

Pokud bychom počítali parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x a následně parciální derivaci z výsledku opět podle proměnné x , mluvili bychom o tzv. *parciální derivaci druhého řádu* funkce $f(x, y)$ podle proměnné x . Tuto derivaci obvykle značíme $\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2}$.

Zkusme ji pro funkci $f(x, y) = x^2 \cos y$ vypočítat:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial(x^2 \cos y)}{\partial x} \right) = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (2x \cos y) = 2 \cos y. \end{aligned} \quad (1.13)$$

Vidíme, že je výpočet naprosto analogický k výpočtu smíšené parciální derivace. Jediným rozdílem je, že místo toho, abychom parciálně derivovali funkci $f(x, y)$ nejprve podle proměnné x a následně výsledek podle proměnné y , parciálně derivujeme dvakrát po sobě podle proměnné x .

Obecně můžeme mluvit o parciální derivaci n -tého řádu funkce $f(x_1, \dots, x_k)$, kde $n, k \in \mathbb{N}$. Například pro $n = 3$ a $k = 2$ se nabízí počítat parciální derivace:

$$\frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^3}, \quad \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_2^3}, \quad \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1 \partial x_2^2}, \quad \frac{\partial^3 f(x_1, x_2)}{\partial x_1^2 \partial x_2}.$$

⁴Nejprve vypočteme parciální derivaci funkce $f(x, y)$ podle proměnné x a následně vypočteme parciální derivaci výsledku podle proměnné y .

Záleží na pořadí, ve kterém derivujeme?

Chtěli bychom například zjistit, zda platí následující rovnost:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x}. \quad (1.14)$$

Neboli změní se parciální derivace, když změníme pořadí, ve kterém derivujeme? Zkusme vypočítat pro funkci $f(x, y) = x^2 y$ uvedené parciální derivace. Tedy:

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial (x^2 y)}{\partial y} \right) = \frac{\partial x^2}{\partial x} = 2x. \quad (1.15)$$

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial (x^2 y)}{\partial x} \right) = \frac{\partial (2xy)}{\partial y} = 2x, \quad (1.16)$$

Z výsledků 1.15 a 1.16 je tak vidět, že v alespoň jednom případě vztah 1.14 platí. Bude to tak ale vždy, tj. pro všechny funkce a také pro všechny řady parciálních derivací?

Odpověď nalezneme v tzv. *Schwarzově větě* (viz [5], str. 9, Věta 3.9):

*Nechť všechny parciální derivace m -tého řádu funkce $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ jsou spojité v bodě $a \in D_f$. Pak v libovolné parciální derivaci m -tého řádu v bodě a nezávisí na pořadí derivací.*⁵

Podmínku spojitosti z uvedené věty obvykle funkce, se kterými ve fyzice pracujeme, splňují.

1.5 Derivace funkce zadané implicitně

Dosud jsme pracovali s reálnou funkcí více reálných proměnných. Například reálnou funkci dvou reálných proměnných x a y jsme značili $f(x, y)$. Označme ji písmenem z , pak $z = f(x, y)$. O takovéto funkci říkáme, že je zadána *explicitně*.

K explicitnímu zadání funkce je, v jistém slova smyslu, opakem tzv. *implicitní zadání* funkce. V tomto případě bychom měli funkci ve tvaru $F(x, y, z) = 0$, resp. $F(x, y, f(x, y)) = 0$.

Rozdíl mezi explicitním a implicitním zadáním funkce nejsnáze pochopíme na konkrétním příkladu. Uvažujme elipsu E se středem v počátku, velikostí hlavní poloosy a a velikostí vedlejší poloosy b (viz obrázek 1.4).⁶ Elipsu E , tj. množinu bodů $[x, y]$, lze parametricky vyjádřit jako⁷

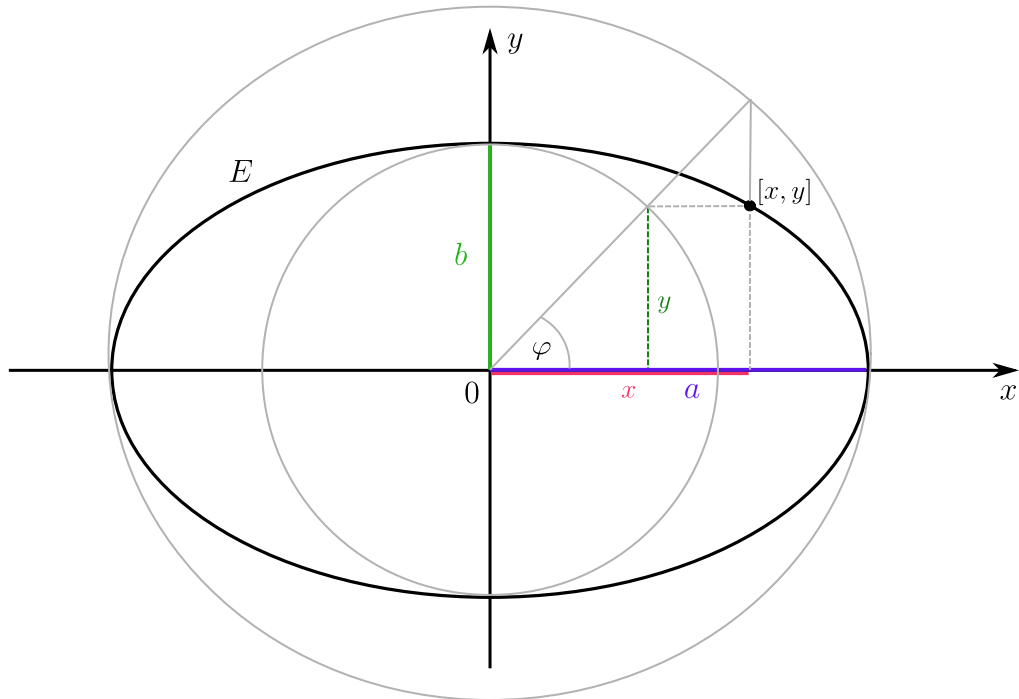
$$\begin{aligned} x &= a \cos \varphi \\ y &= b \sin \varphi, \quad \text{kde } \varphi \in \langle 0, 2\pi \rangle. \end{aligned} \quad (1.17)$$

O správnosti parametrického vyjádření se můžeme přesvědčit jednoduše. Stačí první, resp. druhý řádek vydělit a , resp. b a následně umocnit oba řádky na

⁵Poznamenejme, že označením $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ máme na mysli, že funkce f je reálnou funkcí n proměnných a označením D_f myslíme definiční obor funkce f .

⁶Obrázek 1.4 vychází z obrázků v [6], str. 2.

⁷Pokud bychom do parametrického vyjádření elipsy dosadili za velikost hlavní a vedlejší poloosy velikost r , dostali bychom parametrické vyjádření kružnice se středem v počátku a poloměrem r . Na kružnici lze totiž nahlížet jako na speciální případ elipsy.



Obrázek 1.4: Elipsa E s velikostí hlavní poloosy a , velikostí vedlejší poloosy b a se středem v počátku

druhou. Když tyto řádky sečteme, dostaneme výraz

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1, \quad (1.18)$$

což je známá rovnice elipsy (se středem v počátku a poloosami a , b). S tímto předpisem budeme nyní pracovat.

Když odečteme číslo 1 od pravé strany vztahu 1.18, dostaneme:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1.19)$$

Tento vztah je implicitním zadáním funkce popisující elipsu. Když ji označíme jako $F(x, y)$, můžeme napsat:

$$F(x, y) = \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - 1 = 0. \quad (1.20)$$

Zkusme nyní vyjádřit ze vztahu 1.19 proměnnou y . Dostaneme:⁸

$$y = \pm \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2}. \quad (1.21)$$

Vztah se znaménkem „+“ popisuje horní polovinu elipsy E , kdežto vztah se znaménkem „-“ popisuje její dolní část. Tyto vztahy jsou explicitním zadáním funkce popisující horní, resp. dolní polovinu elipsy. Když označíme výraz na pravé straně vztahu 1.21 (resp. jeho kladnou, nebo zápornou variantu) jako $f(x)$, dostali bychom vztah $y = f(x)$. Proměnná y je tak funkcí (jedné) proměnné x .

⁸Jednotlivé kroky výpočtu kvůli jejich jednoduchosti neuvádíme.

V této podkapitole bude naším hlavním úkolem zjistit, jak bychom mohli vypočítat derivaci funkce zadané explicitně (např. funkce $y = f(x)$), když máme k dispozici její implicitní tvar $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$. K tomu však budeme nejprve potřebovat pochopit, jak se derivuje složená funkce.

Derivace složené funkce

Uvažujme například funkci $F(s, t) = F(f(x, y), g(x, y)) = 0$ dvou proměnných $s = f(x, y)$ a $t = g(x, y)$ zadanou implicitně. Příkladem takovéto funkce může být například funkce $2 \sin(x + y) + 3 \cos(xy) = 0$. V tomto případě např. platí, že $s = f(x, y) = \sin(x + y)$ a $t = g(x, y) = \cos(xy)$, přičemž $F(s, t) = 2 \sin(x + y) + 3 \cos(xy) = 2s + 3t$.

Zkusme nejprve vypočítat parciální derivaci funkce $F(s, t) = 2 \sin(x + y) + 3 \cos(xy) = 0$ podle proměnné x . Parciální derivace pravé strany vyjde nula.⁹ Jak ale vyjde parciální derivace levé strany, tj. výrazu $F(s, t) = 2 \sin(x + y) + 3 \cos(xy)$?

Nejprve musíme parciálně zderivovat funkci $F(s, t) = 2s + 3t$ podle s . Výsledkem této derivace je číslo 2. Následně zderivujeme samotnou funkci $s = f(x, y) = \sin(x + y)$ podle proměnné x , čímž dostaneme výraz $\cos(x + y) \cdot 1$, kterým číslo 2 vynásobíme. Vzápětí parciálně zderivujeme funkci $F(s, t) = 2s + 3t$ podle t . Výsledkem této parciální derivace je číslo 3. Následně zderivujeme samotnou funkci $t = g(x, y) = \cos(xy)$ podle proměnné x , čímž dostaneme výraz $-\sin(xy)y$, kterým číslo 3 vynásobíme (a celek přičteme k předchozímu výsledku¹⁰). Neboli

$$\frac{\partial F(s, t)}{\partial x} = 2 \cos(x + y) \cdot 1 - 3 \sin(xy)y = 0.$$

Zmíněný postup lze zobecnit a zapsat symbolicky:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, t)}{\partial x} &= \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} = 0. \end{aligned} \quad (1.22)$$

Derivaci funkce $F(s, t)$ podle proměnné y bychom vypočítali jako

$$\begin{aligned} \frac{\partial F(s, t)}{\partial y} &= \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial y} + \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial F(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} + \frac{\partial F(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial y} = 0. \end{aligned} \quad (1.23)$$

Parciální derivací složené funkce zadané explicitně se zabývá úloha č. 3 v podkapitole 1.6.

⁹Nula je totiž konstanta a její parciální derivace je opět nula.

¹⁰Vyplývá to z věty o derivaci složené funkce, jejíž důkaz můžeme najít např. v [7], věta 2.4, snímek 30–32.

Jak vypočítáme derivaci explicitně zadané funkce $y = f(x)$?

Dostáváme se k našemu hlavnímu úkolu. Chceme vypočítat derivaci funkce $y = f(x)$ podle proměnné x , když máme k dispozici její implicitní zadání, tj. funkci $F(x, y) = F(x, f(x)) = 0$.

Vypočtěme derivaci funkce $F(x, y)$ podle proměnné x . Analogicky ke vztahu 1.22 dostaneme:

$$\begin{aligned}\frac{dF(x, y)}{dx} &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dx} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{df(x)}{dx} = \\ &= \frac{\partial F(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} \cdot \frac{df(x)}{dx} = 0.\end{aligned}\quad (1.24)$$

Během úpravy jsme využili znalosti, že $\frac{dx}{dx} = 1$.

Jelikož je naším cílem vypočítat derivaci $\frac{df(x)}{dx}$, tak ji ze vztahu 1.24 vyjádříme:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}.\quad (1.25)$$

Tím jsme dostali hledaný vztah.¹¹

1.6 Řešené úlohy k parciální derivaci

Úloha č. 1:

Vypočtěte parciální derivaci funkce $f(x, y, z) = x^2 \sin(yz) + 3z$ podle proměnné y .

Řešení:

Chceme vypočítat parciální derivaci $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$. Jak víme, když počítáme parciální derivaci funkce více proměnných (zde podle proměnné y), derivujeme tuto funkci podle dané proměnné a na zbylé proměnné (zde proměnné x a z) nahlížíme jako na konstanty. Provedme výpočet:

$$\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} = \frac{\partial(x^2 \sin(yz) + 3z)}{\partial y} = x^2 \cos(yz) z.$$

Všimněme si, že výraz $3z$ zcela zmizel. Z pohledu parciální derivace (podle proměnné y) je totiž konstantou.

Úloha č. 2:

Mějme funkci $F(x, y) = F(x, f(x)) = \cos^2 y + x = 0$. Vypočtěte derivaci funkce $y = f(x)$ podle proměnné x .

Řešení:

Použijeme odvozený vztah 1.25. Nejprve vypočítáme parciální derivace z čitatele a jmenovatele tohoto vztahu:

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial x} = \frac{\partial(\cos^2 y + x)}{\partial x} = 1,\quad (1.26)$$

¹¹K tomu, aby bylo možné považovat uvedené odvození za rigorózní, je nutné splnit několik předpokladů. Tyto předpoklady jsou zformulovány např. v [8], věta 5.3.1 a 5.3.2, str. 281.

$$\frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = \frac{\partial(\cos^2 y + x)}{\partial y} = -2 \cos y \sin y = -\sin(2y). \quad (1.27)$$

Dosadme nyní výsledky 1.26 a 1.27 do vztahu 1.25:

$$\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} = -\frac{1}{-\sin(2y)} = \frac{1}{\sin(2y)}.$$

Výpočet byl o mnoho snazší než kdybychom vyjadřovali z předpisu $\cos^2 y + x = 0$ proměnnou y a tu následně derivovali.

Úloha č. 3:

Mějme explicitně zadanou funkci $f(s, t)$, kde $s = g(x)$ a $t = h(x)$. S využitím úvah z podkapitoly 1.5, str. 12, se pokuste sestavit vztah pro výpočet parciální derivace $\frac{\partial f(s, t)}{\partial x}$.

Řešení:

V podkapitole 1.5 jsme se naučili derivovat složenou funkci zadanou implicitně. Nyní je naším úkolem sestavit vztah pro výpočet parciální derivace složené funkce zadané explicitně. Postup bude obdobný.

Funkci $f(s, t)$ můžeme přepsat na tvar $f(g(x), h(x))$. Tuto funkci máme parciálně derivovat podle proměnné x . Podobně jako u vztahů 1.22 a 1.23 budeme i zde nejprve parciálně derivovat funkci $f(s, t)$ podle $s = g(x)$, poté zderivujeme funkci $s = g(x)$ podle proměnné x a vzniklé výrazy mezi sebou vynásobíme. Totéž provedeme pro proměnnou $t = h(x)$. Výsledky následně sečteme. Neboli

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, t)}{\partial x} &= \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dx} + \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{dg(x)}{dx} + \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{dh(x)}{dx}. \end{aligned} \quad (1.28)$$

Obecněji bychom mohli uvažovat funkci $f(s, t)$, kde $s = g(x, y)$ a $t = h(x, y)$. Poté bychom museli ve vztahu 1.28 nahradit všechny „klasické“ derivace parciálními, neboli:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, t)}{\partial x} &= \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial s}{\partial x} + \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{\partial g(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{\partial h(x, y)}{\partial x}. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Úloha č. 4:

Mějme funkci $f(s, t) = s^2 \sin t$, kde $s = x^3$ a $t = 3x$. Vypočtete parciální derivaci funkce $f(s, t)$ podle proměnné x .

Řešení:

Nabízejí se dva postupy řešení této úlohy. Buď můžeme použít vztah 1.28 odvozený v úloze č. 3 nebo do předpisu funkce $f(s, t)$ dosadíme za s a t a následně budeme počítat „klasickou“ derivaci. Ačkoliv se druhý ze zmíněných postupů zdá být na první pohled jednodušší, zejména v komplikovanějších příkladech je výhodné použít zmíněný vztah 1.28.

VypočtĚme jednotlivĚ derivace ze vztahu 1.28:

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial s} = \frac{\partial(s^2 \sin t)}{\partial s} = 2s \sin t = 2x^3 \sin(3x), \quad (1.30)$$

$$\frac{\partial f(s, t)}{\partial t} = \frac{\partial(s^2 \sin t)}{\partial t} = s^2 \cos t = (x^3)^2 \cos(3x), \quad (1.31)$$

$$\frac{ds}{dx} = \frac{d(x^3)}{dx} = 3x^2, \quad (1.32)$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{d(3x)}{dx} = 3. \quad (1.33)$$

Dosaďme vĚsledky 1.30 aĹ 1.33 do vztahu 1.28, dostaneme:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f(s, t)}{\partial x} &= \frac{\partial f(s, t)}{\partial s} \cdot \frac{ds}{dx} + \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} \cdot \frac{dt}{dx} = \\ &= 2x^3 \sin(3x) \cdot 3x^2 + (x^3)^2 \cos(3x) \cdot 3 = 6x^5 \sin(3x) + 3x^6 \cos(3x). \end{aligned} \quad (1.34)$$

KdyĹ bychom dosadili do pĚdpsisu $f(s, t) = s^2 \sin t$ za s vĚraz x^3 a za t vĚraz $3x$, dostali bychom pĚdpsis $f(x) = x^6 \sin(3x)$. Pokud bychom takto vyjĚďřenou funkci $f(x)$ zderivovali podle promĚnnĚ x , dostali bychom vĚraz 1.34. Oba postupy tak dĚvají stejnĚ vĚsledek.

1.7 VyuĹitĚ parciĚlnĚ derivacĚ ve fyzice

HydrostatickĚ tlak

V mechanice se setkĚme v rĚmci hydrostatiky se vztahem (viz [9], kapitola 11, str. 4, vztah 11.8):

$$\text{grad } p = \rho \vec{g}, \quad (1.35)$$

kde p je tlak (v tekutinĚ), ρ je hustota tekutiny a \vec{g} je tĚhové zrychlenĚ, kterĚ mĚ sloĹky $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Jak se dozvĚme v [3], podkapitola 3.1, str. 48, vĚraz $\text{grad } p$ lze pĚpsat na tvar $(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z})$, tj. jednĚ se o vektor parciĚlnĚ derivacĚ tlaku p .

Vztah 1.35 tak mĚžeme pĚpsat na tvar:

$$\left(\frac{\partial p}{\partial x}, \frac{\partial p}{\partial y}, \frac{\partial p}{\partial z} \right) = \rho (0, 0, -g) = (0, 0, -\rho g). \quad (1.36)$$

KdyĹ porovnĚme sloĹky vektorĹ na levĚ a pravĚ stranĚ vztahu 1.36, dostaneme:

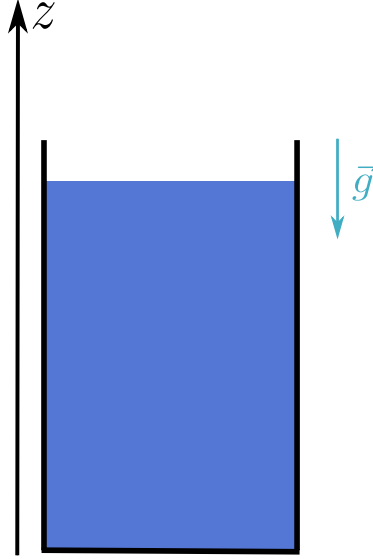
$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g. \quad (1.37)$$

VidĚme, Źe se tlak v zĚvislosti na souřadnicĚ x, y nemĚnĚ, kdeĹto na souřadnici z zĚvisĚ. S menĚm z (pĚi orientaci osy z jako na obrĚzku 1.5), tj. s vĚtĚm hloubkou, tlak roste.

Maxwellovy rovnice

S parciĚlnĚ derivacemi se rovnĚ setkĚme u MaxwellovĚch rovnic v diferenciĚlnĚ tvaru. DvĚ z tĚchto rovnic¹² mĚjĚ tvar (viz [10], kap. 12, vztahy 12.12, str. 4):

¹²Ve zbylĚch dvou rovnicĚch je diferenciĚlnĚ operĚtor divergence (viz podkapitola 3.2 v [3], str. 63), kterĚ v sobĚ takĚ zahrnuje parciĚlnĚ derivace.



Obrázek 1.5: Schéma znázorňující nádobu s kapalinou s vyznačenou osou z (osy x a y jsou k ní kolmé)

$$\text{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}, \quad (1.38)$$

$$\text{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0, \quad (1.39)$$

kde \vec{H} je magnetická intenzita, \vec{D} je elektrická indukce, t je čas, \vec{j} je plošná hustota elektrického proudu, \vec{E} je elektrická intenzita a \vec{B} je magnetická indukce.

Parciální derivace v rovnici 1.38, resp. v rovnici 1.39, má význam změny elektrické indukce \vec{D} , resp. magnetické indukce \vec{B} v závislosti na čase t .

Časová Schrödingerova rovnice

V kvantové mechanice se setkáme s tzv. časovou (nestacionární) Schrödingerovou rovnicí (viz [11], kapitola 2, vztah 2.66, str. 69):

$$i\frac{\hbar}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r}, t) = \hat{H}(t)\psi(\vec{r}, t), \quad (1.40)$$

kde i je imaginární jednotka, \hbar je Planckova konstanta, $\psi(\vec{r}, t)$ je vlnová funkce popisující stav částice v místě s polohovým vektorem \vec{r} a čase t a $\hat{H}(t)$ je hamiltonián, což je operátor¹³ mající význam celkové energie.

Parciální derivace vlnové funkce $\psi(\vec{r}, t)$ podle času t má význam změny stavu částice (popisovaného vlnovou funkcí $\psi(\vec{r}, t)$) v závislosti na čase t .

¹³V kvantové fyzice přiřazujeme jednotlivým veličinám operátory (značíme stříškou), viz [11], kapitola 2, str. 34. Jedná se o matematicky rozdílný objekt než je diferenciální operátor, kterým se zabývá kapitola 3 v [3].

1.8 K zapamatování

- Definice parciální derivace funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$
 (obdobně pro derivaci podle x).
- Parciální derivace funkce f podle proměnné y v bodě $[x_0, y_0]$ má význam směrnice tečny ke grafu funkce f v bodě $[x_0, y_0]$ ležící v rovině $x = x_0$ (obdobně pro derivaci podle x).
- Výpočet parciální derivace vyššího řádu, resp. smíšené parciální derivace –
– obecně záleží na pořadí, ve kterém derivujeme. Obvykle je záměna pořadí možná (při splnění podmínky spojitosti ze Schwarzovy věty).
- Derivace funkce zadané implicitně: $\frac{df(x)}{dx} = -\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$.
- Využití parciální derivace ve fyzice: např. ve vztahu pro hydrostatický tlak, v rámci Maxwellových rovnic, u časové Schrödingerovy rovnice.

2. Nevlastní integrál

Ke zvládnutí tématu nevlastní integrál bude důležité rozumět pojmem integrál funkce jedné proměnné (viz [2], str. 4), určitý integrál (viz [2], str. 29) a limita funkce (viz [1], str. 18). Nevlastní integrál totiž můžeme v jistém slova smyslu chápat jako speciální případ určitého integrálu.

Na úvod si zopakujme, jak určitý integrál počítáme. Vypočtěme například integrál $\int_1^3 (3x + 5) dx$. Dostaneme:

$$\int_1^3 (3x + 5) dx = \left[3 \frac{x^2}{2} + 5x \right]_1^3 = \left(3 \cdot \frac{3^2}{2} + 5 \cdot 3 - 3 \cdot \frac{1}{2} - 5 \cdot 1 \right) = 22.$$

Nejprve jsme museli určit primitivní funkci k integrandu $3x + 5$. Následně jsme do takto určené primitivní funkce dosadili horní a dolní mez určitého integrálu, přičemž jsme oba výsledky od sebe odečetli.

Nyní se zaměříme na nevlastní integrál. Budeme mluvit o tzv. *nevlastním integrálu I. a II. druhu*. O jednotlivých typech nevlastního integrálu pojednávají následující podkapitoly 2.1 a 2.2.

2.1 Nevlastní integrál I. druhu

Nevlastním integrálem I. druhu budeme rozumět určitý integrál, jehož horní či dolní mez je rovna ∞ , resp. $-\infty$. Příkladem tohoto typu integrálu může být integrál $\int_1^\infty \frac{1}{x} dx$. Jak ale integrál tohoto (nebo podobného) typu vypočítat?

2.1.1 Výpočet nevlastního integrálu I. druhu

Výpočet integrálů $\int_a^\infty f(x) dx$ a $\int_{-\infty}^a f(x) dx$

Pokud bychom měli vypočítat integrál $\int_a^b f(x) dx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, nebyl by to žádný problém. Jedná se totiž o určitý integrál, jehož výpočet jsme již opakovali. Nejprve bychom určili primitivní funkci k funkci $f(x)$ a následně bychom do ní dosadili horní a dolní mez, tj. hodnoty b a a , a tyto dva výsledky bychom od sebe odečetli.

Nyní je však naším úkolem vypočítat integrál $\int_a^\infty f(x) dx$, resp. $\int_{-\infty}^a f(x) dx$, kde $a \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a, \infty \rangle$, resp. $(-\infty, a)$ spojitá. Nešlo by nějakým způsobem převést uvedené typy integrálů na již známý určitý integrál?

Horní mez ∞ , resp. dolní mez $-\infty$ uvedených typů integrálů nahradíme parametrem p , který následně „pošleme“ k ∞ , resp. $-\infty$, k čemuž nám poslouží limita. Neboli:

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(x) dx, \text{ resp. } \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^a f(x) dx. \quad (2.1)$$

Výpočet integrálu $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$

Obdobně jako v předchozím případě nahradíme u integrálu $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$, kde $f(x)$ je na intervalu $(-\infty, \infty)$ spojitá funkce, dolní mez $-\infty$ a horní mez ∞ parametry p a q , které „pošleme“ k $-\infty$, resp. k ∞ . K tomu nám opět poslouží limita.

Neboli:

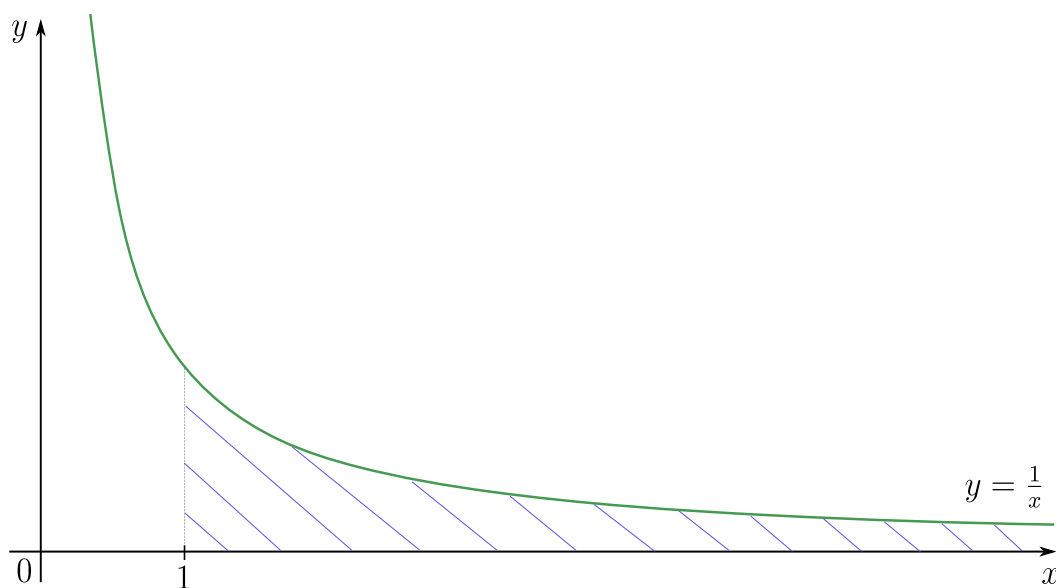
$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{p \rightarrow -\infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \int_p^q f(x) dx. \quad (2.2)$$

2.1.2 Geometrický význam nevlastního integrálu I. druhu

Máme-li určitý integrál $\int_a^b f(x) dx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$, víme, že je jeho hodnota rovna obsahu části roviny ohraničené spojitou funkcí $f(x)$, osou x a přímkami $x = a$, $x = b$. V případě, že je graf funkce $f(x)$ pod osou x , hodnota určitého integrálu má navíc znaménko minus.

Nyní však máme nevlastní integrál I. druhu, u kterého je dolní mez $-\infty$ nebo horní mez ∞ . Geometrický význam nevlastního integrálu I. druhu však bude podobný jako u zmíněného určitého integrálu.

Hodnota integrálu $\int_a^{\infty} f(x) dx$ odpovídá obsahu části roviny ohraničené grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkou $x = a$. Příkladem tohoto typu integrálu je integrál $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$. V tomto případě je funkce $f(x) = y = \frac{1}{x}$, dolní mezí je hodnota $a = 1$ a horní mezí je ∞ . Hodnota uvedeného integrálu pak odpovídá obsahu části roviny vymezené grafem funkce $y = \frac{1}{x}$, osou x a přímkou $x = 1$. Celá situace je znázorněna na obrázku 2.1, přičemž hodnotě integrálu odpovídá modře vyšrafovaný obsah. Jaký je tento obsah? Provedme výpočet integrálu. Dostaneme:



Obrázek 2.1: Graf funkce $y = \frac{1}{x}$ s vyšrafovaným obsahem odpovídajícím znázornění integrálu $\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx$

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_1^p \frac{1}{x} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} [\ln |x|]_1^p = \lim_{p \rightarrow \infty} (\ln |p| - \ln 1) = \infty.$$

Při výpočtu jsme použili vztah 2.1. Modře vyšrafovaný obsah na obrázku 2.1 je tak nekonečný (jelikož příslušný integrál diverguje¹⁴).

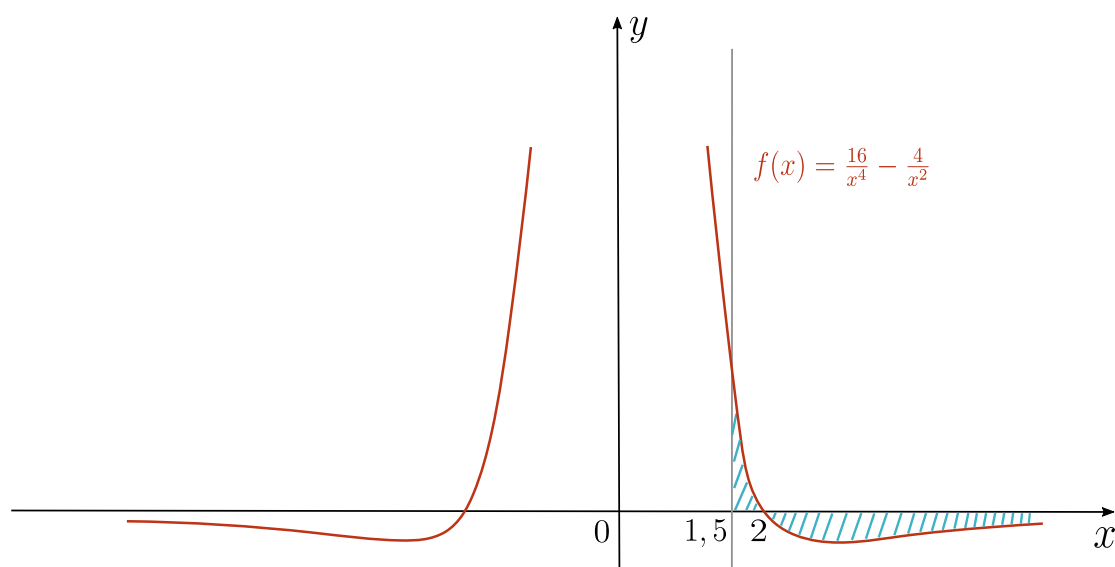
¹⁴Je-li hodnota integrálu rovna $\pm\infty$, říkáme, že integrál diverguje.

Poznamenejme, že geometrický význam integrálu $\int_{-\infty}^a f(x) dx$ je naprosto analogický.

Hodnota integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$ pak odpovídá obsahu části roviny ohraničené pouze grafem funkce $f(x)$ a osou x (jelikož dolní ani horní mez není konečná hodnota).

Na závěr uvedme, že případný obsah pod osou x má stejně jako u dosud známého určitého integrálu přiřazené znaménko minus. V případě, že je část grafu funkce $f(x)$ nad osou x a část pod osou x , je pro výpočet obsahu části roviny ohraničené touto funkcí, osou x (a případně přímkou $x = a$) vhodné výpočet rozdělit. Zvlášť vypočteme nevlastní integrál pro oblast, kde je graf funkce $f(x)$ nad osou x a zvlášť pro oblast, kde je graf funkce $f(x)$ pod osou x . U druhé části výpočtu změnímme znaménko a oba výsledky sečteme.

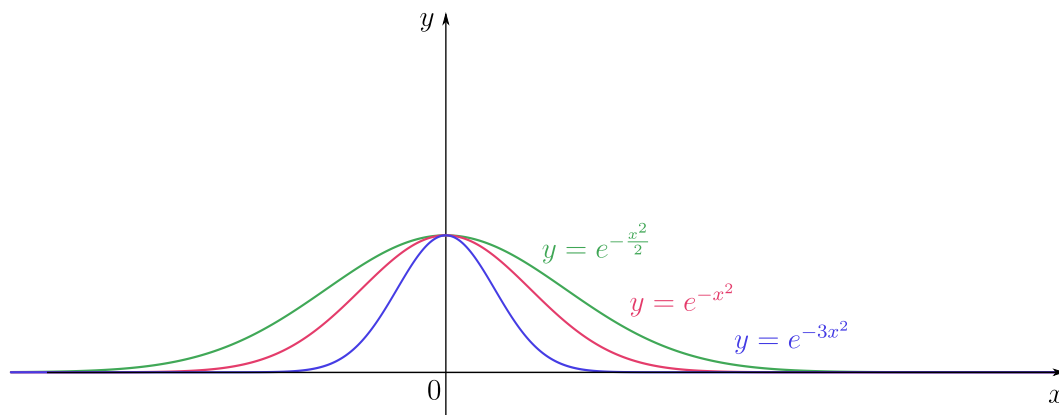
Když bychom například chtěli vypočítat obsah části roviny ohraničené grafem funkce $f(x) = \frac{16}{x^4} - \frac{4}{x^2}$, osou x a přímkou $x = 1,5$ (viz obrázek 2.2), vypočítali bychom nejprve integrál $\int_{1,5}^2 (\frac{16}{x^4} - \frac{4}{x^2}) dx$ (tj. integrál pro oblast, kde je graf funkce nad osou x) a následně bychom vypočítali integrál $\int_2^{+\infty} (\frac{16}{x^4} - \frac{4}{x^2}) dx$ (tj. integrál pro oblast, kde je graf funkce pod osou x). První z uvedených integrálů je roven hodnotě $\frac{20}{81}$, druhý integrál je pak roven $-\frac{4}{3}$. U druhého výsledku změnímme znaménko, sečteme jej s prvním výsledkem a dostaneme, že námi počítaný obsah je roven $\frac{128}{81}$.



Obrázek 2.2: Obsah části roviny vymezené grafem funkce $f(x) = \frac{16}{x^4} - \frac{4}{x^2}$, osou x a přímkou $x = 1,5$

2.1.3 Hodnota integrálu $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$

Integrál $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx$, kde $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, má ve fyzice významnou roli. Jeho výpočet však není triviální. Obtížnost výpočtu spočívá v nalezení primitivní funkce k funkci e^{-ax^2} . K tomu, abychom mohli výpočet provést, by byla zapotřebí znalost polárních souřadnic (viz [1], sekce 2.1.2, str. 10) a dvojného integrálu (viz [2], sekce 2.3.1, str. 38).



Obrázek 2.3: Grafy funkcí $y = e^{-\frac{x^2}{2}}$, $y = e^{-x^2}$, $y = e^{-3x^2}$ (osa x je asymptotou grafů těchto funkcí)

Např. z [12] plyne, že

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}. \quad (2.3)$$

Všimněme si, že je výsledkem konečná hodnota. K výsledku by se došlo obdobně jako při výpočtu integrálu $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, který je popsán v [2], str. 43–44.

2.2 Nevlastní integrál II. druhu

Nevlastním integrálem II. druhu budeme rozumět integrál $\int_a^b f(x) dx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a $f(x)$ obsahuje na intervalu $\langle a, b \rangle$ alespoň jeden bod nespojitosti $p \in \langle a, b \rangle$ takový, že $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(p + \lambda) = \pm\infty$ nebo $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(p - \lambda) = \pm\infty$.

Příkladem nevlastního integrálu II. druhu je integrál $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx$. V tomto případě je $a = 0$, $b = 5$ a bodem nespojitosti je bod $p = 2$. Zároveň platí, že $\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{(2+\lambda-2)^4} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{(2-\lambda-2)^4} = \infty$. Jak ale integrál tohoto typu vypočítat?

V následujícím oddílu se zaměříme na tři různé případy nevlastního integrálu II. druhu – „problémovým“ bodem je buď dolní, resp. horní mez integrálu nebo „problémový“ bod leží mezi dolní a horní mezí integrálu.

2.2.1 Výpočet nevlastního integrálu II. druhu

„Problémovým“ bodem je dolní mez integrálu $\int_a^b f(x) dx$, tj. $p = a$

Naším úkolem je vypočítat integrál $\int_a^b f(x) dx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu (a, b) , přičemž $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(a + \lambda) = \pm\infty$. Výpočet provedeme tak, že dolní mez, tj. hodnotu a , nahradíme hodnotou $a + \lambda$, kde $\lambda > 0$. Jelikož je funkční hodnota $f(a + \lambda)$ konečná, můžeme integrál $\int_{a+\lambda}^b f(x) dx$ vypočítat jako již známý určitý integrál. Na závěr „pošleme“ (pomocí limity) parametr λ k nule (zprava). Neboli:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b f(x) dx. \quad (2.4)$$

„Problémovým“ bodem je horní mez integrálu $\int_a^b f(x) dx$, tj. $p = b$

Nyní máme vypočítat integrál $\int_a^b f(x) dx$, kde $a, b \in \mathbb{R}$ a funkce $f(x)$ je spojitá na intervalu $\langle a, b \rangle$, přičemž $\lim_{\lambda \rightarrow 0} f(b - \lambda) = \pm\infty$. Tentokrát nahradíme horní mez, tj. hodnotu b , hodnotou $b - \lambda$, kde $\lambda > 0$. Jelikož je funkční hodnota $f(b - \lambda)$ konečná, můžeme integrál $\int_a^{b-\lambda} f(x) dx$ vypočítat jako již známý určitý integrál, přičemž na závěr opět „pošleme“ (pomocí limity) parametr λ k nule (zprava). Neboli:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\lambda} f(x) dx. \quad (2.5)$$

„Problémový“ bod leží mezi dolní a horní mezí integrálu $\int_a^b f(x) dx$, tj. $p \in (a, b)$

Tentokrát vypočteme integrál $\int_a^b f(x) dx$ tak, že jej vyjádříme jako součet dvou integrálů,¹⁵ neboli:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx. \quad (2.6)$$

Řešení uvedeného integrálu jsme tak převedli na situaci, kterou již řešit umíme. První z integrálů na pravé straně vztahu 2.6 je totiž integrál, jehož „problémovým“ bodem je jeho horní mez. Druhý z integrálů na pravé straně téhož vztahu je pak integrál, jehož „problémovým“ bodem je jeho dolní mez. Oba zmíněné typy integrálů již umíme vypočítat. Nakonec oba výsledky sečteme.

Co by se stalo, kdybychom si „problémového“ bodu nevšímalí?

Zkusme vypočítat integrál $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx$. „Problémovým“ bodem je bod $x = 2$. Integrál vyjádříme jako součet dvou dílčích integrálů. Tedy:

$$\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx = \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^4} dx + \int_2^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx. \quad (2.7)$$

Zaměříme se nyní na první ze dvou integrálů na pravé straně vztahu 2.7. Dle vztahu 2.5 můžeme napsat:¹⁶

$$\begin{aligned} \int_0^2 \frac{1}{(x-2)^4} dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_0^{2-\lambda} \frac{1}{(x-2)^4} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{3(x-2)^3} \right]_0^{2-\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{3(-\lambda)^3} - \frac{1}{3 \cdot 2^3} \right) = \infty. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Nyní vypočteme druhý z integrálů na pravé straně vztahu 2.7. Tentokrát je „problémovým“ bodem dolní mez integrálu. Podle vztahu 2.4 můžeme napsat:

¹⁵Viz [2], vztah 1.153, str. 31.

¹⁶V posledním kroku následujícího výpočtu počítáme limitu pro λ jdoucí k nule. Jelikož uvažujeme $\lambda > 0$, tak parametr λ jde k nule zprava.

$$\begin{aligned} \int_2^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{2+\lambda}^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{-1}{3(x-2)^3} \right]_{2+\lambda}^5 = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{-1}{3 \cdot 3^3} + \frac{1}{3\lambda^3} \right) = \infty. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Z výsledků 2.8 a 2.9 je tak zřejmé, že $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx = \infty$, tj. že integrál diverguje.

Vyšel by stejný výsledek, kdybychom si bodu $x = 2$ nevšímalí? Spočítejme to. Dostaneme:

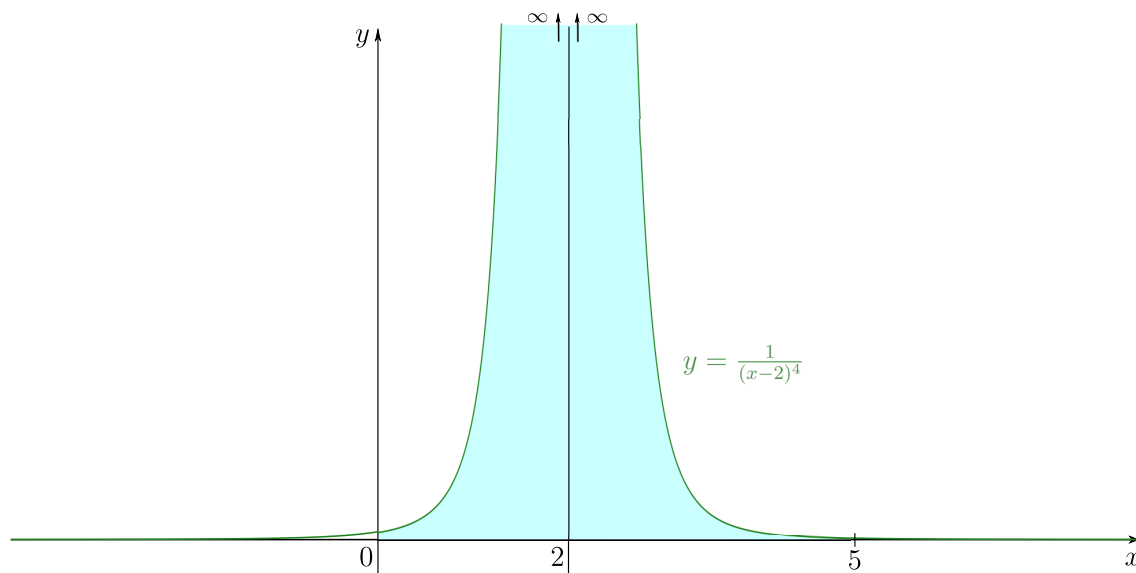
$$\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx = \left[\frac{-1}{3(x-2)^3} \right]_0^5 = \left(\frac{-1}{3 \cdot 3^3} - \frac{-1}{3 \cdot (-2)^3} \right) \doteq -0,05. \quad (2.10)$$

Je vidět, že se výsledek podstatně liší od výsledku správného.

2.2.2 Geometrický význam nevlastního integrálu II. druhu

Co se týče geometrického významu nevlastního integrálu II. druhu, bude obdobný jako u nevlastního integrálu I. druhu, resp. u určitého integrálu. Nevlastní integrál II. druhu $\int_a^b f(x) dx$ bude opět vyjadřovat obsah části roviny vymezené osou x , grafem funkce $f(x)$ a přímkami $x = a$, $x = b$.

Zaměřme se na integrál $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx$, jehož hodnota je (dle předchozího výpočtu) rovna ∞ . K němu se váže obrázek 2.4, na kterém je (zeleně) graf funkce



Obrázek 2.4: Graf funkce $y = \frac{1}{(x-2)^4}$ s modře vyznačeným obsahem odpovídajícím integrálu $\int_0^5 \frac{1}{(x-2)^4} dx$

$y = f(x) = \frac{1}{(x-2)^4}$. Modře je pak vyznačen obsah odpovídající uvedenému integrálu.

Poznamenejme, že stejně jako u „klasického“ určitého integrálu platí, že případný obsah pod osou x má přiřazené znaménko minus.

2.3 Řešené úlohy k nevlastnímu integrálu

Úloha č. 1:

Vypočítejte integrál $\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3} dx$.

Řešení:

Ze zadání je zřejmé, že máme za úkol vypočítat nevlastní integrál I. druhu. Dle vztahu 2.1 můžeme napsat:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{1}{x^2+3} dx &= \lim_{p \rightarrow \infty} \int_0^p \frac{1}{x^2+3} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_0^p \frac{1}{\frac{x^2}{3}+1} dx = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \int_0^p \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{3}}\right)^2+1} dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{3} \left[\sqrt{3} \arctan \left(\frac{x}{\sqrt{3}} \right) \right]_0^p = \\ &= \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\arctan \left(\frac{p}{\sqrt{3}} \right) - 0 \right) = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

Při výpočtu jsme upravili integrand na tvar připomínající derivaci funkce arkustangens, dále jsme vypočítali primitivní funkci a na závěr jsme vypočítali limitu pro parametr p jdoucí k nekonečnu. Musíme si uvědomit, že se funkce arkustangens v nekonečnu limitně blíží k hodnotě $\frac{\pi}{2}$.

Úloha č. 2:

Vypočítejte integrál $\int_{-\infty}^0 2x e^{-x^2} dx$.

Řešení:

Opět máme vypočítat nevlastní integrál I. druhu. Dle vztahu 2.1 můžeme napsat:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^0 2x e^{-x^2} dx &= \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^0 2x e^{-x^2} dx = \lim_{p \rightarrow -\infty} \left[-e^{-x^2} \right]_p^0 = \\ &= \lim_{p \rightarrow -\infty} (-1 + e^{-p^2}) = -1 + 0 = -1.\end{aligned}$$

Určili jsme primitivní funkci a vypočítali příslušnou limitu. Výsledkem je záporná hodnota, což souvisí se skutečností, že funkce $f(x) = 2x \cdot e^{-x^2}$ nabývá na intervalu $(-\infty, 0)$ záporných hodnot, tj. že je část roviny vymezená grafem funkce $f(x)$, osou x a přímkou $x = 0$ (resp. osou y) pod osou x .

Úloha č. 3:

Vypočítejte integrál $\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx$.

Řešení:

Jedná se o nevlastní integrál II. druhu. „Problémovým“ bodem je bod $x = 3$. Dle vztahu 2.4 můžeme napsat:

$$\int_3^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{3+\lambda}^5 \frac{1}{\sqrt{x-3}} dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[2\sqrt{x-3} \right]_{3+\lambda}^5 =$$

$$= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} (2\sqrt{5-3} - 2\sqrt{3+\lambda-3}) = 2\sqrt{2}.$$

Určili jsme příslušnou primitivní funkci, dosadili jsme horní a dolní mez integrálu, výsledky jsme od sebe odečetli a nakonec jsme vypočetli limitu pro λ jdoucí k nule (zprava).

Úloha č. 4:

Vypočítejte integrál $\int_{-2}^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx$.

Řešení:

Opět počítáme nevlastní integrál II. druhu. „Problémovým“ bodem je bod $x = 0$. Dle vztahu 2.6 tak můžeme napsat:

$$\int_{-2}^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx = \int_{-2}^0 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx + \int_0^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx. \quad (2.11)$$

První integrál z pravé strany vztahu 2.11 vypočítáme podle vztahu 2.5. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_{-2}^0 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{-2}^{0-\lambda} \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{4}{x}\right]_{-2}^{0-\lambda} = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(\frac{4}{0-\lambda} + 2\right) = -\infty. \end{aligned} \quad (2.12)$$

Druhý integrál z pravé strany vztahu 2.11 vypočítáme podle vztahu 2.4. Dostaneme

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{0+\lambda}^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left[\frac{4}{x}\right]_{0+\lambda}^1 = \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \left(4 - \frac{4}{0+\lambda}\right) = -\infty. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Z výsledků 2.12 a 2.13 plyne, že:

$$\int_{-2}^1 \left(-\frac{4}{x^2}\right) dx = -\infty + (-\infty) = -\infty.$$

Integrál tedy diverguje.

2.4 Využití nevlastního integrálu ve fyzice

Výpočet potenciálu z elektrické intenzity

Potenciál $\varphi(\vec{r})$ v bodě, kterému odpovídá polohový vektor \vec{r} , vypočítáme díky vztahu (viz [10], kapitola 2, str. 6, vztah 2.6):

$$\varphi(\vec{r}) = - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{u}) \cdot d\vec{u} + \varphi_0, \quad (2.14)$$

kde \vec{E} je vektor elektrické intenzity, \vec{u} je proměnná, přes kterou integrujeme, \vec{r}_0 je polohový vektor bodu s nulovým potenciálem a φ_0 je konstanta, kterou obvykle pokládáme rovnu nule.

Často dokážeme tento křivkový integrál II. druhu¹⁷ převést, díky symetričnosti počítané úlohy, na jednodimenzionální integrál. Za bod s nulovým potenciálem obvykle¹⁸ považujeme ∞ , a tak ve výsledku počítáme nevlastní integrál I. druhu.

Příkladem takového výpočtu je výpočet potenciálu v okolí bodového náboje (viz [3], podkapitola 1.8, str. 29) nebo výpočet potenciálu v okolí nabitě koule (viz [13], úloha číslo 269).

Výpočty v kvantové fyzice

V kvantové fyzice mluvíme o normované vlnové funkci. Aby byla vlnová funkce normovaná, musí být splněna tzv. normovací podmínka (viz [11], kapitola 2, str. 19, vztah 2.4):

$$\int_{c.p.} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1. \quad (2.15)$$

Počítáme tedy objemový integrál přes celý prostor (*c.p.*) z druhé mocniny absolutní hodnoty vlnové funkce $\psi(\vec{r}, t)$, kterou chceme normovat.

Když se omezíme na jednodimenzionální systémy (např. nekonečnou potenciálovou jámu), stává se z objemového integrálu jednodimenzionální integrál:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = 1. \quad (2.16)$$

Počítáme tak nevlastní integrál I. druhu. Konkrétní výpočet lze nalézt např. v [11], podkapitola 3.7, str. 108.

Obdobná situace nastává při počítání skalárního součinu dvou vlnových funkcí (viz vztah 2.6 v [11], sekce 2.1.4, str. 23).

2.5 K zapamatování

- Výpočet nevlastního integrálu I. druhu:

$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{p \rightarrow \infty} \int_a^p f(x) dx, \quad \int_{-\infty}^a f(x) dx = \lim_{p \rightarrow -\infty} \int_p^a f(x) dx$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{p \rightarrow -\infty} \lim_{q \rightarrow \infty} \int_p^q f(x) dx.$$

- Výpočet nevlastního integrálu II. druhu se odvíjí od toho, kde se nachází bod nespojitosti („problémový“ bod) funkce, kterou integrujeme:

¹⁷O křivkovém integrálu II. druhu pojednává kapitola 1 v [3], str. 10.

¹⁸Například u výpočtu potenciálu v okolí nabitě přímky či roviny není vhodné volit nulový potenciál v nekonečnu.

- „Problémovým“ bodem je dolní mez integrálu:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_{a+\lambda}^b f(x) dx.$$

- „Problémovým“ bodem je horní mez integrálu:

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \int_a^{b-\lambda} f(x) dx.$$

- „Problémový“ bod p leží mezi dolní a horní mezí integrálu:

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^p f(x) dx + \int_p^b f(x) dx.$$

(Integrál vyjádříme jako součet dvou integrálů, které již umíme vypočítat.)

- Geometrický význam nevlastního integrálu – obsah části roviny vymezené osou x , grafem funkce $f(x)$, případně svislými přímkami odpovídajícími dolní, resp. horní mezi integrálu.
- Využití nevlastního integrálu ve fyzice: výpočty v elektrostatice či v kvantové fyzice.

3. Rotace

Diferenciálním operátorem rotace jsme se již zabývali v [3], str. 76–79. Dopusud jsme operátor rotace zavedli, popsali jsme jeho vlastnosti a uvedli jsme souřadnicový tvar tohoto operátoru.

Nyní bude naším úkolem odvodit souřadnicový tvar rotace a také tzv. Stokesovu větu, pomocí níž lze přejít od křivkového integrálu II. druhu k plošnému integrálu II. druhu. Kromě toho uvedeme ještě několik řešených úloh souvisejících s operátorem rotace.

3.1 Souřadnicový tvar rotace

Při odvození souřadnicového tvaru rotace vyjdeme, obdobně jako při odvození souřadnicového tvaru gradientu či divergence, z jejího definičního vztahu (viz [3], str. 79, vztah 3.88):

$$\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{P} = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.1)$$

Vidíme, že se na levé straně vztahu 3.1 vyskytuje skalární součin normálového vektoru \vec{n} a vektoru $\text{rot} \vec{P} = ((\text{rot} \vec{P})_1, (\text{rot} \vec{P})_2, (\text{rot} \vec{P})_3)$. Na pravé straně vztahu 3.1 pak vystupuje křivkový integrál II. druhu vektorového pole \vec{P} po uzavřené křivce Γ (obklopující plochu o obsahu ΔS). Navíc tento integrál dělíme výrazem ΔS a uvažujeme, že se obsah ΔS přibližuje limitně k nule.

Pokusme se nejprve vypočítat třetí složku vektoru $\text{rot} \vec{P}$, tj. složku $(\text{rot} \vec{P})_3$. Mohli bychom vhodnou volbou normálového vektoru \vec{n} převést skalární součin $\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{P}$ na potřebný výraz $(\text{rot} \vec{P})_3$?

Pokud zvolíme $\vec{n} = (0, 0, 1)$, zmíněný skalární součin bude skutečně roven složce $(\text{rot} \vec{P})_3$.¹⁹ O normálovém vektoru \vec{n} víme, že musí být kolmý k ploše o obsahu ΔS , kterou ohraničuje uzavřená křivka Γ . Z toho ale plyne, že musíme křivku Γ zvolit v „rovině“ $q_1 q_2$.²⁰

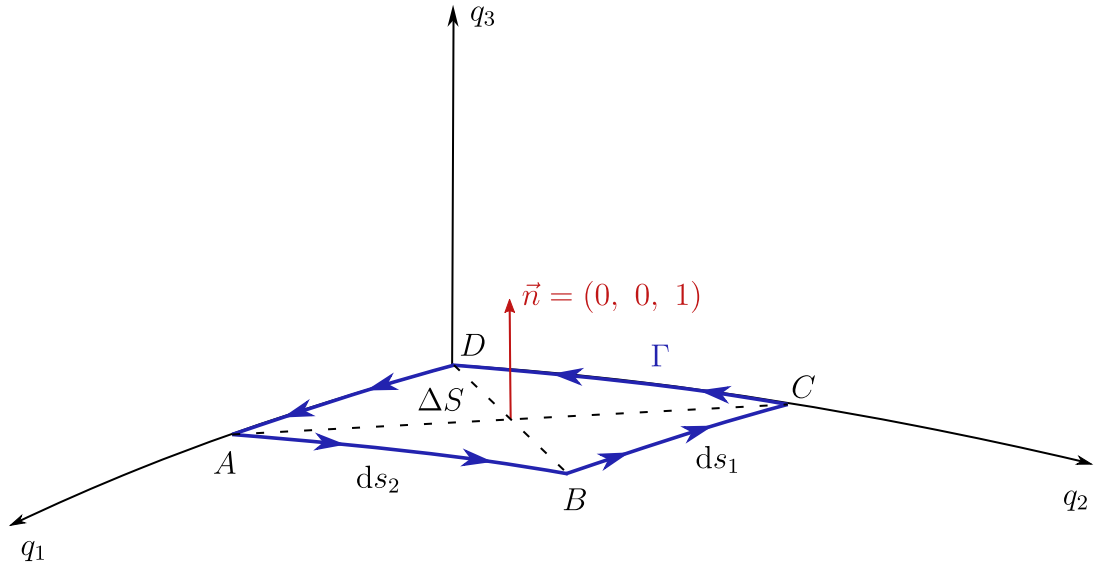
Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku 3.1. Křivku Γ jsme zvolili jako hranici „obdélníku“ $ABCD$ ležícího v „rovině“ $q_1 q_2$, a to tak, že strana DA leží na souřadnicové čáře q_1 a strana CD leží na souřadnicové čáře q_2 . Abychom splnili tzv. „pravidlo pravé ruky“,²¹ je křivka Γ orientovaná tak, jak je znázorněno (pomocí šipek) na obrázku.

Zaměřme se nyní na pravou stranu vztahu 3.1. Je zřejmé, že budeme muset nějakým způsobem vypočítat integrál $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$. Pro tento účel rozdělíme zvolenou křivku Γ na čtyři části odpovídající stranám AB , BC , CD a DA (viz obrázek 3.1).

¹⁹Skalární součin $\vec{n} \cdot \text{rot} \vec{P}$ je totiž pro $\vec{n} = (0, 0, 1)$ roven výrazu $0 \cdot (\text{rot} \vec{P})_1 + 0 \cdot (\text{rot} \vec{P})_2 + 1 \cdot (\text{rot} \vec{P})_3$.

²⁰Stejně jako u gradientu a divergence odvodíme souřadnicový tvar rotace pro křivočaré ortogonální souřadnice $q_i = (q_1, q_2, q_3)$. „Rovinou“ $q_1 q_2$ rozumíme dvoudimenzionální podprostor určený souřadnicovými čarami q_1 a q_2 , striktně vzato se však nemusí vždy jednat o rovinu.

²¹„Pravidlo pravé ruky“ říká, že když položíme prsty pravé ruky ve směru orientace křivky Γ , tak musí vztyčený palec ukazovat směr normálového vektoru \vec{n} .



Obrázek 3.1: Schéma k odvození souřadnicového tvaru rotace

Vypočteme-li křivkové integrály II. druhu vektorového pole \vec{P} po zmíněných částech křivky Γ , pak integrál $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ bude roven součtu těchto dílčích integrálů.

Integrace po části DA

Pojďme vypočítat křivkový integrál $\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ po straně DA . Skalární součin $\vec{P} \cdot d\vec{r}$ je roven výrazu $P_1 \cdot ds_1 + P_2 \cdot ds_2 + P_3 \cdot ds_3$, přičemž $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ je vektorové pole a $d\vec{r} = (ds_1, ds_2, ds_3)$ je vektor infinitezimálního posunutí po dané křivce.

Posouváme-li se po straně DA , platí, že $d\vec{r} = (ds_1, 0, 0)$, neboť strana DA leží na souřadnicové čáře q_1 . Souřadnice q_2 a q_3 se tedy nemění. Jelikož je $ds_i = h_i \cdot dq_i$ (viz [3], str. 57), kde $h_i = (h_1, h_2, h_3)$ jsou Laméovy koeficienty a dq_i je nekonečně malá změna křivočaré ortogonální souřadnice q_i , jsou ds_2 a ds_3 nulové. Můžeme tak napsat:

$$\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{DA} P_1 ds_1. \quad (3.2)$$

Převodli jsme křivkový integrál II. druhu na křivkový integrál I. druhu. Stejně jako u odvození souřadnicového tvaru divergence, použijeme větu o střední hodnotě,²² díky které lze napsat:

$$\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{DA} P_1 ds_1 = P_1 \int_{DA} ds_1. \quad (3.3)$$

Integrál $\int_{DA} ds_1$ odpovídá délce strany DA , kterou však uvažujeme nekonečně malou, a tak je přímo rovna délce ds_1 . Tedy:

$$\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r} = P_1 \int_{DA} ds_1 = P_1 ds_1 = P_1 h_1 dq_1. \quad (3.4)$$

²²Např. viz [14], str. 94, Věta 6.6.

Přičemž při poslední úpravě jsme využili vztahu $ds_i = h_i dq_i$, o kterém jsme se již zmínili.

Vztah 3.4 ještě přepíšeme podrobněji na tvar:

$$\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r} = (P_1 h_1 dq_1)_{q_2=q_2^D}. \quad (3.5)$$

Dolním indexem $q_2 = q_2^D$, který k zápisu výsledku přibyl, pouze naznačujeme, že jsme prováděli výpočet integrálu po části křivky Γ (konkrétně po straně DA), kde je hodnota souřadnice q_2 rovna hodnotě souřadnice q_2 v bodě D .

Integrace po části AB

Nyní bude naším úkolem vypočítat integrál $\int_{AB} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ po straně AB . Pro vektor posunutí $d\vec{r}$ bude platit, že $d\vec{r} = (0, ds_2, 0)$, neboť se posouváme po straně AB ve směru souřadnicové čáry q_2 , a tak se souřadnice q_1 a q_3 nemění.

Provedeme obdobný výpočet jako u integrace po straně DA , tedy

$$\int_{AB} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{AB} P_2 ds_2 = P_2 \int_{AB} ds_2. \quad (3.6)$$

Opět jsme v poslední úpravě využili větu o střední hodnotě. Integrujeme po straně AB , kterou uvažujeme opět jako nekonečně malou, a tak integrál $\int_{AB} ds_2$ je roven délce ds_2 . Protože $ds_2 = h_2 dq_2$, tak z uvedeného plyne:

$$\int_{AB} \vec{P} \cdot d\vec{r} = P_2 \int_{AB} ds_2 = (P_2 h_2 dq_2)_{q_1=q_1^D+dq_1}. \quad (3.7)$$

Dolním indexem $q_1 = q_1^D + dq_1$ rozumíme skutečnost, že jsme prováděli integraci po části křivky Γ (konkrétně po straně AB), kde je hodnota souřadnice q_1 rovna hodnotě souřadnice q_1 v bodě D , která je zvětšená o hodnotu dq_1 .

Integrace po části BC

Vypočtíme integrál $\int_{BC} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ po straně BC . Nyní bude $d\vec{r} = (-ds_1, 0, 0)$, jelikož se posouváme po straně BC proti orientaci souřadnicové čáry q_1 . Dostaneme

$$\int_{BC} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{BC} (-P_1) ds_1 = -P_1 \int_{BC} ds_1 = (-P_1 h_1 dq_1)_{q_2=q_2^D+dq_2}. \quad (3.8)$$

Dolním indexem $q_2 = q_2^D + dq_2$ opět rozumíme skutečnost, že jsme prováděli integraci po části křivky Γ (konkrétně po straně BC), kde je hodnota souřadnice q_2 rovna hodnotě souřadnice q_2 v bodě D , která je zvětšená o hodnotu dq_2 .

Integrace po části CD

Nakonec vypočítáme integrál $\int_{CD} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ po straně CD . Nyní bude $d\vec{r} = (0, -ds_2, 0)$, jelikož se posouváme po straně CD proti orientaci souřadnicové

čáry q_2 . Můžeme tak napsat:

$$\int_{CD} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \int_{CD} (-P_2) ds_2 = -P_2 \int_{CD} ds_2 = (-P_2 h_2 dq_2)_{q_1=q_1^D}. \quad (3.9)$$

Tentokrát dolním indexem $q_1 = q_1^D$ rozumíme, že jsme prováděli integraci po části křivky Γ (konkrétně po straně CD), kde je hodnota souřadnice q_1 rovna hodnotě souřadnice q_1 v bodě D .

Jak bude vypadat třetí složka rotace?

Jak jsme již zmínili, integrál $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ bude roven součtu integrálů $\int_{DA} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, $\int_{AB} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, $\int_{BC} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ a $\int_{CD} \vec{P} \cdot d\vec{r}$. Neboli:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} &= (P_1 h_1 dq_1)_{q_2=q_2^D} + (P_2 h_2 dq_2)_{q_1=q_1^D+dq_1} + \\ &+ (-P_1 h_1 dq_1)_{q_2=q_2^D+dq_2} + (-P_2 h_2 dq_2)_{q_1=q_1^D}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

kde jsme sečetli výsledky úprav 3.5, 3.7, 3.8 a 3.9. Součet 3.10 přepíšeme do tvaru:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} &= [(P_1 h_1)_{q_2=q_2^D} - (P_1 h_1)_{q_2=q_2^D+dq_2}] dq_1 + \\ &+ [(P_2 h_2)_{q_1=q_1^D+dq_1} - (P_2 h_2)_{q_1=q_1^D}] dq_2. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Využili jsme toho, že změna dq_1 , resp. dq_2 souřadnice q_1 , resp. q_2 je všude stejná (nezávisle na poloze). Tudíž jsme dq_1 a dq_2 mohli z potřebných výrazů vytknout.

Zaměříme se nyní na první sčítanec ze vztahu 3.11. Vytkneme -1 a dostaneme:

$$[(P_1 h_1)_{q_2=q_2^D} - (P_1 h_1)_{q_2=q_2^D+dq_2}] dq_1 = - [(P_1 h_1)_{q_2=q_2^D+dq_2} - (P_1 h_1)_{q_2=q_2^D}] dq_1.$$

Pokud bychom označili $P_1 h_1$ jako F , měli bychom v hranaté závorce rozdíl dvou hodnot funkce F v bodech q_2^D a $q_2^D + dq_2$, které se od sebe liší o rozdíl dq_2 . Rozdíl v závorce však odpovídá parciální derivaci funkce F podle proměnné q_2 vynásobené rozdílem dq_2 . Pro parciální derivaci funkce F podle proměnné q_2 totiž platí, že

$$\frac{\partial F}{\partial q_2} = \lim_{dq_2 \rightarrow 0} \frac{F_{q_2^D+dq_2} - F_{q_2^D}}{dq_2}. \quad (3.12)$$

Můžeme tak napsat:

$$- [(P_1 h_1)_{q_2=q_2^D+dq_2} - (P_1 h_1)_{q_2=q_2^D}] dq_1 = - \left[\frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} dq_2 \right] dq_1. \quad (3.13)$$

Obdobně lze druhý sčítanec ze vztahu 3.11 přepsat do tvaru:

$$[(P_2 h_2)_{q_1=q_1^D+dq_1} - (P_2 h_2)_{q_1=q_1^D}] dq_2 = \left[\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} dq_1 \right] dq_2. \quad (3.14)$$

Ze vztahů 3.11, 3.13 a 3.14 tak plyne:

$$\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \left[\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2. \quad (3.15)$$

Podíváme-li se na pravou stranu definičního vztahu 3.1, vidíme, že máme uvažovat limitu ze vztahu $\frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ pro ΔS jdoucí k nule. Jelikož jsme ale po celou dobu výpočtu integrálu $\oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ uvažovali křivku Γ jako hranici „obdélníku“ o nekonečně malém obsahu (a s nekonečně malými stranami), zmíněnou limitu jsme vlastně po celou dobu uvažovali. Zbývá tak pouze vydělit výsledek 3.15 výrazem $\frac{1}{\Delta S}$, kde $\Delta S \rightarrow 0$. Tento výraz je však roven obsahu „obdélníku“ $ABCD$, který je roven výrazu $ds_1 ds_2$ (viz obrázek 3.1). Dostáváme:

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{ds_1 ds_2} \left[\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right] dq_1 dq_2. \quad (3.16)$$

Výraz $ds_1 ds_2$ je roven výrazu $h_1 dq_1 h_2 dq_2$, a tak

$$\lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S} \oint_{\Gamma} \vec{P} \cdot d\vec{r} = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right]. \quad (3.17)$$

Jelikož jsme volili normálový vektor ve tvaru $\vec{n} = (0, 0, 1)$, víme, že výsledek 3.16 odpovídá třetí složce vektoru rotace, tj. složce $(\text{rot} \vec{P})_3$. Tedy:

$$\boxed{(\text{rot} \vec{P})_3 = \frac{1}{h_1 h_2} \left[\frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_1} - \frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_2} \right]}. \quad (3.18)$$

Jak bude vypadat první a druhá složka rotace?

První a druhou složku rotace bychom mohli odvodit naprosto analogicky k odvození třetí složky rotace. Pro první složku rotace bychom volili křivku Γ jako hranici „obdélníku“ ležícího v „rovině“ $q_2 q_3$, a to tak, že by jedna strana obdélníku ležela na souřadnicové čáře q_2 a jedna strana by ležela na souřadnicové čáře q_3 . Pro druhou složku rotace bychom volili křivku Γ jako hranici „obdélníku“ ležícího v rovině $q_1 q_3$, a to tak, že by jedna strana obdélníku ležela na souřadnicové čáře q_1 a jedna strana by ležela na souřadnicové čáře q_3 .

Výsledky, ke kterým bychom dospěli, odpovídají tzv. cyklické záměně souřadnic.²³ První a druhá složka rotace tak bude vypadat následovně:

$$\boxed{(\text{rot} \vec{P})_1 = \frac{1}{h_2 h_3} \left[\frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_2} - \frac{\partial(P_2 h_2)}{\partial q_3} \right]}, \quad (3.19)$$

$$\boxed{(\text{rot} \vec{P})_2 = \frac{1}{h_3 h_1} \left[\frac{\partial(P_1 h_1)}{\partial q_3} - \frac{\partial(P_3 h_3)}{\partial q_1} \right]}. \quad (3.20)$$

²³To znamená, že všechny indexy 1 nahradíme indexem 2, indexy 2 nahradíme indexem 3 a indexy 3 nahradíme indexem 1.

Souřadnicový tvar rotace v jednotlivých souřadnicových systémech

V podkapitole 3.1.3 práce [3], str. 52–57, jsme se zabývali zobecněnými křivochárými ortogonálními souřadnicemi a Laméovými koeficienty. Nyní této znalosti využijeme.

Pro konkrétní systémy souřadnic dosadíme do vztahů 3.18, 3.19 a 3.20 příslušné hodnoty Laméových koeficientů a také provedeme přeznačení indexů (v souladu s tím, pro jaké zobecněné souřadnice vztahy píšeme). U kartézského systému souřadnic tak například dolní index 3 přeznačíme na dolní index z .

Kartézský systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = 1, h_3 = 1$$

$$q_1 = x, q_2 = y, q_3 = z$$

$$\text{rot}\vec{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}, \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right). \quad (3.21)$$

Pro $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ dostáváme²⁴

$$\text{rot}\vec{P} = \vec{\nabla} \times \vec{P}. \quad (3.22)$$

Cylindrický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = R, h_3 = 1$$

$$q_1 = R, q_2 = \phi, q_3 = z$$

$$\text{rot}\vec{P} = \left(\frac{1}{R} \left[\frac{\partial P_z}{\partial \phi} - \frac{\partial(P_\phi R)}{\partial z} \right], \frac{\partial P_R}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial R}, \frac{1}{R} \left[\frac{\partial(P_\phi R)}{\partial R} - \frac{\partial P_R}{\partial \phi} \right] \right). \quad (3.23)$$

Sférický systém souřadnic:

$$h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r \sin \vartheta$$

$$q_1 = r, q_2 = \vartheta, q_3 = \varphi$$

$$\begin{aligned} (\text{rot}\vec{P})_1 &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(P_\varphi r \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(P_\vartheta r)}{\partial \varphi} \right], \\ (\text{rot}\vec{P})_2 &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial P_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(P_\varphi r \sin \vartheta)}{\partial r} \right], \\ (\text{rot}\vec{P})_3 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(P_\vartheta r)}{\partial r} - \frac{\partial P_r}{\partial \vartheta} \right]. \end{aligned} \quad (3.24)$$

3.2 Stokesova věta

Jak již bylo v úvodu kapitoly napsáno, pomocí Stokesovy věty lze převést křivkový integrál II. druhu²⁵ na plošný integrál II. druhu.²⁶ My se nyní pokusíme tuto větu odvodit.

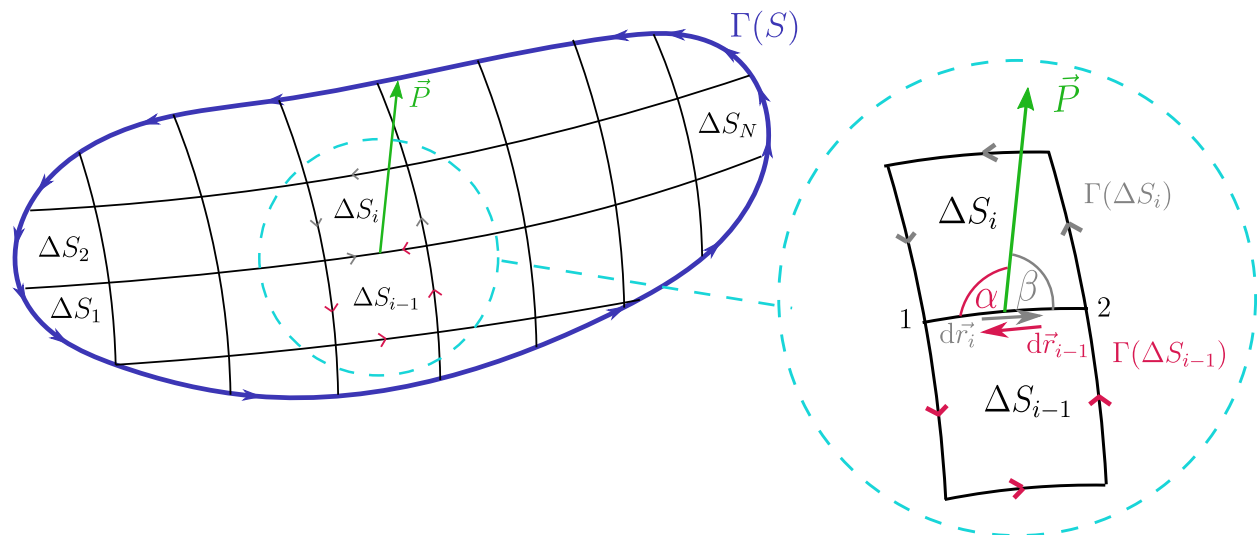
²⁴V některých zdrojích, jako např. v [15], rozumí zápisem $\vec{\nabla} \times \vec{P}$ rotaci vektorového pole \vec{P} bez ohledu na to, zda pracujeme v kartézských souřadnicích, nebo ne.

²⁵Viz [3], str. 10.

²⁶Viz [3], str. 32.

Obdobně jako u odvození Gaussovy (matematické) věty, kde jsme při jejím odvození vyšli z definice divergence, i při odvození Stokesovy věty využijeme definici jednoho z diferenciálních operátorů, a to rotace (vztah 3.1).

Vyjdeme ze situace znázorněné na obrázku 3.2. Na něm je znázorněna uzavřená (orientovaná) křivka Γ obklopující plochu o obsahu S . Přičemž tato křivka se nachází ve vektorovém poli \vec{P} . Plochu S jsme rozdělili na N ploch o obsahích $\Delta S_1, \dots, \Delta S_{i-1}, \Delta S_i, \dots, \Delta S_N$.



Obrázek 3.2: Schéma k odvození Stokesovy věty

Zaměříme se nyní na plochu o obsahu ΔS_i . Ta je ohraničena (orientovanou) křivkou, kterou označíme jako $\Gamma(\Delta S_i)$. Pro tuto křivku můžeme přepsat definici operátoru rotace:

$$\vec{n}_i \cdot \text{rot} \vec{P} = \lim_{\Delta S_i \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}, \quad (3.25)$$

kde \vec{n}_i je normálový vektor k ploše o obsahu ΔS_i . Uvažujeme-li plochu o obsahu ΔS_i za velmi malou, můžeme tento vztah přepsat do podoby:

$$\vec{n}_i \cdot \text{rot} \vec{P} \doteq \frac{1}{\Delta S_i} \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}, \quad (3.26)$$

ve kterém vystupuje namísto limity pro ΔS_i jdoucí k nule přibližná rovnost.

Vynásobíme-li vztah 3.26 výrazem ΔS_i , dostáváme:

$$\text{rot} \vec{P} \cdot \vec{n}_i \cdot \Delta S_i \doteq \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.27)$$

Vzpomeneme-li si, že jsme v podkapitole 2.2 práce [3] (str. 36) označili výraz $\vec{n}_i \cdot \Delta S_i$ jako $\Delta \vec{S}_i$, můžeme předešlý vztah ještě přepsat do tvaru:

$$\text{rot} \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}_i \doteq \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.28)$$

Dosud jsme všechny vztahy uváděli pro plochu o obsahu ΔS_i ohraničenou křivkou $\Gamma(\Delta S_i)$. My bychom však chtěli provést výpočet pro celou plochu o obsahu S ohraničenou křivkou Γ . O této ploše ale víme, že je sjednocením dílčích ploch o obsahích $\Delta S_1, \dots, \Delta S_{i-1}, \Delta S_i, \dots, \Delta S_N$. Zkusme tedy provést součet vztahů 3.28 pro $i = 1, 2, \dots, N$, neboli

$$\sum_{i=1}^N \text{rot} \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}_i \doteq \sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.29)$$

Výraz na pravé straně vztahu 3.29 je roven integrálu $\oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, kde integrujeme po celé křivce $\Gamma(S)$. Proč tomu tak je?

Zaměříme se na detail zobrazený na obrázku 3.2 (v tyrkysové kružnici). Na něm vidíme dvě dílčí křivky $\Gamma(\Delta S_i)$ a $\Gamma(\Delta S_{i-1})$. Jejich orientace je znázorněna šipkami. Když budeme nejprve „obcházet“ plochu o obsahu ΔS_i ve směru šedých šipek, příspěvek pro „úsečku“ vymezenou body 1 a 2 je roven výrazu $\vec{P} \cdot d\vec{r}_i$. Pokud budeme „obcházet“ plochu o obsahu ΔS_{i-1} ve směru červených šipek, příspěvek pro úsečku vymezenou body 2 a 1 je roven výrazu $\vec{P} \cdot d\vec{r}_{i-1}$.

Skalární součin dvou vektorů lze napsat jako součin velikostí daných vektorů vynásobený kosinem úhlu, který vektory svírají. Můžeme tak napsat:

$$\vec{P} \cdot d\vec{r}_i = \|\vec{P}\| \cdot \|d\vec{r}_i\| \cdot \cos \beta, \quad (3.30)$$

kde β je úhel, který svírá vektor \vec{P} s úsečkou vymezenou body 1 a 2. Rovněž můžeme napsat, že:

$$\vec{P} \cdot d\vec{r}_{i-1} = \|\vec{P}\| \cdot \|d\vec{r}_{i-1}\| \cdot \cos \alpha, \quad (3.31)$$

kde α je úhel, který svírá vektor \vec{P} s úsečkou vymezenou body 2 a 1.

Nyní si potřebujeme uvědomit dvě skutečnosti. První z nich je vzájemný vztah úhlů α a β . Z obrázku 3.2 vidíme, že dohromady tvoří přímý úhel, z čehož plyne, že $\alpha = \pi - \beta$. Tedy $\cos \alpha = \cos(\pi - \beta) = -\cos \beta$.

Druhou skutečností je vlastnost vektorů $d\vec{r}_{i-1}$ a $d\vec{r}_i$. Jelikož se jedná o nekonečně malé vektory, můžeme tvrdit, že jsou jejich velikosti shodné, tj. že $\|d\vec{r}_{i-1}\| = \|d\vec{r}_i\|$. Je tak zřejmé, že:

$$\vec{P} \cdot d\vec{r}_i = -\vec{P} \cdot d\vec{r}_{i-1}. \quad (3.32)$$

Pro úsečku vymezenou body 1 a 2 (resp. body 2 a 1) je tak celkový příspěvek (k pravé straně vztahu 3.29) roven nule – příspěvky $\vec{P} \cdot d\vec{r}_i$ a $\vec{P} \cdot d\vec{r}_{i-1}$ se odečtou. Z toho plyne, že výraz $\sum_{i=1}^N \oint_{\Gamma(\Delta S_i)} \vec{P} \cdot d\vec{r}$ z pravé strany vztahu 3.29 je roven integrálu $\oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}$, kde integrujeme po křivce $\Gamma(S)$. Kdyby tomu tak nebylo, musel

by alespoň jeden příspěvek na nějaké hranici dvou dílčích obsahů (vzniklých dělením obsahu S) vyjít nenulový. My bychom však mohli provést výpočet provedený pro spojnicí bodů 1 a 2 pro jakoukoliv jinou hranici dvou dílčích obsahů a došli bychom ke stejnému výsledku (spojnici mezi body 1 a 2 jsme volili bez újmy na obecnosti).

Vztah 3.29 tak můžeme přepsat do podoby:

$$\sum_{i=1}^N \operatorname{rot} \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}_i \doteq \oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.33)$$

Chceme-li nahradit přibližnou rovnost rovností přesnou, musíme provést limitu pro N jdoucí do nekonečna. Jinými slovy, rozdělíme plochu o obsahu S na nekonečně mnoho dílků ploch. Pak dostaneme:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \operatorname{rot} \vec{P} \cdot \Delta \vec{S}_i = \oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}. \quad (3.34)$$

Z definice plošného integrálu II. druhu²⁷ víme, že můžeme levou stranu vztahu 3.34 přepsat na integrál $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{P} \cdot d\vec{S}$, kde Σ je plocha o obsahu S ohraničená křivkou Γ . Dostáváme tak tzv. *Stokesovu větu*:

$$\boxed{\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}}, \quad (3.35)$$

pomocí níž lze převést křivkový integrál II. druhu na plošný integrál II. druhu a naopak.

3.3 Řešené úlohy na rotaci

Úloha č. 1:

Vypočítejte rotaci vektorového pole $\vec{P} = (x + y, 3y, z + 2x + y)$.

Řešení:

Pro výpočet rotace použijeme vztah 3.21. Dostáváme:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{P} &= \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}, \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right) = \\ &= \left(\frac{\partial(z + 2x + y)}{\partial y} - \frac{\partial(3y)}{\partial z}, \frac{\partial(x + y)}{\partial z} - \frac{\partial(z + 2x + y)}{\partial x}, \frac{\partial(3y)}{\partial x} - \frac{\partial(x + y)}{\partial y} \right) = \\ &= (1 - 0, 0 - 2, 0 - 1) = (1, -2, -1). \end{aligned}$$

Vidíme, že rotace vektorového pole $\vec{P} = (x + y, 3y, z + 2x + y)$ je vektor $(1, -2, -1)$.

Úloha č. 2:

Uvažujme vektorové pole $\vec{P} = (r \sin \varphi, \cos \varphi, r^2)$ zadané ve sférických souřadnicích. Vypočítejte rotaci tohoto pole.

²⁷Viz vztah 2.7 v [3], str. 38.

Řešení:

Jelikož je vektorové pole \vec{P} zadané ve sférických souřadnicích, k výpočtu jednotlivých složek rotace použijeme vztahy 3.24. Uvědomme si, že pro vektorové pole \vec{P} platí:

$$\vec{P} = (P_r, P_\vartheta, P_\varphi) = (r \sin \varphi, \cos \varphi, r^2).$$

Nejprve vypočítáme první složku rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{P})_1 &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(P_\varphi r \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(P_\vartheta r)}{\partial \varphi} \right] = \\ &= \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(r^2 r \sin \vartheta)}{\partial \vartheta} - \frac{\partial(\cos \varphi r)}{\partial \varphi} \right] = \frac{1}{r^2 \sin \vartheta} [r^3 \cos \vartheta - (-\sin \varphi)r] = \\ &= r \cot \vartheta + \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}. \end{aligned} \quad (3.36)$$

Nyní vypočítáme druhou složku rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{P})_2 &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial P_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(P_\varphi r \sin \vartheta)}{\partial r} \right] = \\ &= \frac{1}{r \sin \vartheta} \left[\frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial \varphi} - \frac{\partial(r^2 r \sin \vartheta)}{\partial r} \right] = \frac{1}{r \sin \vartheta} (r \cos \varphi - 3r^2 \sin \vartheta) = \\ &= \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - 3r. \end{aligned} \quad (3.37)$$

Nakonec vypočítáme třetí složku rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{P})_3 &= \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(P_\vartheta r)}{\partial r} - \frac{\partial P_r}{\partial \vartheta} \right] = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial(\cos \varphi r)}{\partial r} - \frac{\partial(r \sin \varphi)}{\partial \vartheta} \right] = \\ &= \frac{\cos \varphi}{r} - \frac{1}{r} \cdot 0 = \frac{\cos \varphi}{r}. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Zapišme hodnoty jednotlivých složek rotace (výsledky 3.36, 3.37, 3.38) do jednoho kompaktního tvaru:

$$\text{rot } \vec{P} = \left(r \cot \vartheta + \frac{\sin \varphi}{r \sin \vartheta}, \frac{\cos \varphi}{\sin \vartheta} - 3r, \frac{\cos \varphi}{r} \right). \quad (3.39)$$

Úloha č. 3:

Pro elektrickou intenzitu \vec{E} v okolí rovnoměrně nabitě sféry (resp. nabitě koule), jejíž střed umístíme do počátku soustavy souřadnic, ve vakuu, platí vztah (viz [16], vztah 1.104):

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{r}, \quad (3.40)$$

kde Q je elektrický náboj na sféře (resp. na kouli), ϵ_0 je permitivita vakua, \vec{r} je polohový vektor a r je vzdálenost od středu kulové plochy (tuto vzdálenost uvažujeme větší než poloměr kulové plochy). Určete, zda je dané vektorové pole konzervativní.

Řešení:

K tomu, abychom mohli rozhodnout o konzervativnosti vektorového pole \vec{P} , potřebujeme poznámku 1.43 z podkapitoly 1.6.3 v [3], str. 25. Ta nám říká, že je vektorové pole konzervativní právě tehdy, když je rotace daného vektorového pole rovna nulovému vektoru.

Pro polohový vektor \vec{r} platí, že $\vec{r} = (x, y, z)$. Vzdálenost r je rovna velikosti polohového vektoru \vec{r} , tj. $r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Vztah 3.40 tak můžeme přepsat do podoby:

$$\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{r}}{r^3} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.41)$$

Vypočtěme rotaci elektrické intenzity \vec{E} . Začneme první složkou rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_x &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} = \\ &= \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y - \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Nyní se zaměříme na druhou složku rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_y &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial z} - \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial x} = \\ &= \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2z - \frac{Qz}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Nakonec vypočteme třetí složku rotace:

$$\begin{aligned} (\text{rot } \vec{E})_z &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = \\ &= \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial x} - \frac{\partial \left(\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \right)}{\partial y} = \\ &= \frac{Qy}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x - \frac{Qx}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{3}{2} \right) (x^2 + y^2 + z^2)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Z výsledků 3.42, 3.43 a 3.44 plyne, že $\text{rot } \vec{E} = (0, 0, 0)$. Můžeme tedy říct, že elektrická intenzita \vec{E} (v zadaném tvaru) popisuje konzervativní vektorové pole. Tento poznatek koresponduje se známou vlastností elektrostatického pole, o kterém víme, že je nevírové (tj. $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$) a konzervativní.

3.4 K zapamatování

- Souřadnicový tvar rotace v kartézských souřadnicích:

$$\operatorname{rot} \vec{P} = \left(\frac{\partial P_z}{\partial y} - \frac{\partial P_y}{\partial z}, \frac{\partial P_x}{\partial z} - \frac{\partial P_z}{\partial x}, \frac{\partial P_y}{\partial x} - \frac{\partial P_x}{\partial y} \right).$$

- Stokesova věta: $\iint_{\Sigma} \operatorname{rot} \vec{P} \cdot d\vec{S} = \oint_{\Gamma(S)} \vec{P} \cdot d\vec{r}$.

Pomocí Stokesovy věty lze převést křivkový integrál II. druhu na plošný integrál II. druhu (a naopak).²⁸

²⁸Kapitola 3 slouží jako doplnění již existující podkapitoly 3.3 v [3], od str. 76. Proto také informace v podkapitole 3.4 chápeme jako doplnění informací k zapamatování v [3], str. 81.

4. Formalismus využívající Kroneckerův a Levi-Civitův symbol

V této kapitole se seznámíme s užitečným formalismem využívajícím mimo jiné tzv. Kroneckerův symbol a Levi-Civitův symbol. Výhodou tohoto formalismu je usnadnění výpočtů a odvození v pokročilejších partiích fyziky. Uplatnění tak najde např. v teoretické mechanice, klasické elektrodynamice nebo v kvantové mechanice.

Nejprve se seznámíme s tím, jak pracovat s vektorovými funkcemi (resp. s vektorovými poli). Poté se budeme zabývat tzv. Einsteinovým sumačním pravidlem a následně zavedeme Kroneckerův symbol společně s Levi-Civitovým symbolem. Na závěr kapitoly opět nebudou chybět příklady uplatnění zavedeného formalismu ve fyzice.

4.1 Práce s vektorovými funkcemi

S vektorovými funkcemi (resp. vektorovými poli) jsme pracovali již mnohokrát, ať už to bylo v kapitolách pojednávajících o křivkovém či plošném integrálu II. druhu (viz [3], str. 10, resp. 32) nebo u diferenciálních operátorů (viz [3], str. 48).

Víme tak, že vektorová funkce, kterou značíme např. \vec{P} , má oproti skaláru nejen velikost, ale i směr. V kartézské soustavě souřadnic má vektorová funkce složky $\vec{P} = (P_x, P_y, P_z)$.

Nyní zvolíme normovanou bázi vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ kartézské soustavy souřadnic (viz obrázek 4.1). Uvažujeme, že vektor \vec{e}_1 je jednotkovým vektorem ve směru kladné poloosy x , vektor \vec{e}_2 je jednotkovým vektorem ve směru kladné poloosy y a vektor \vec{e}_3 je jednotkovým vektorem ve směru kladné poloosy z . Všechny bázové vektory jsme umístili do počátku soustavy souřadnic. Pak můžeme pro vektorovou funkci \vec{P} napsat:

$$\vec{P} = P_x \vec{e}_1 + P_y \vec{e}_2 + P_z \vec{e}_3. \quad (4.1)$$

Vektorovou funkci \vec{P} jsme tak vyjádřili jako lineární kombinaci bázových vektorů $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ s koeficienty P_x, P_y a P_z .

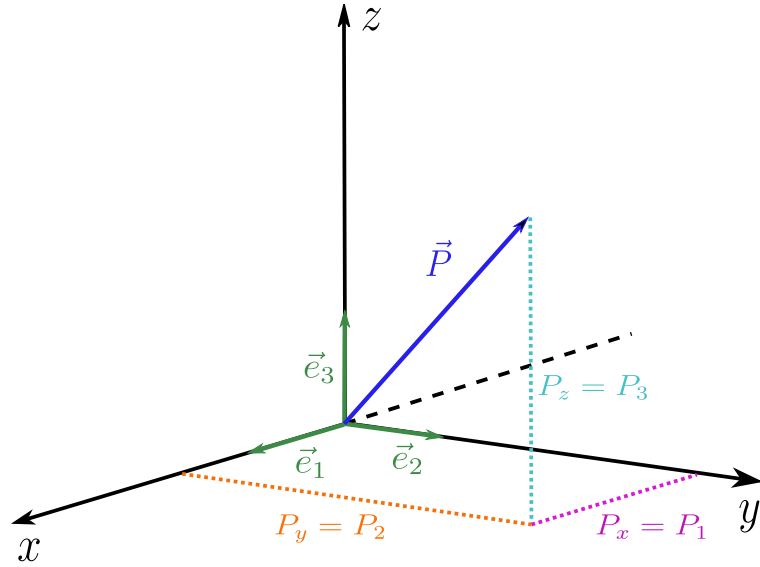
Když bychom přeznačili složku P_x na P_1 , složku P_y na P_2 a složku P_z na P_3 , mohli bychom vztah 4.1 přepsat na tvar:

$$\vec{P} = P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3. \quad (4.2)$$

Tento vztah můžeme ještě přepsat pomocí sumy do tvaru:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^3 P_i \vec{e}_i. \quad (4.3)$$

Je zvykem, že vektorovou funkci \vec{P} můžeme ekvivalentně také značit jen jako P_i .



Obrázek 4.1: Vektorová funkce \vec{P} v kartézské soustavě souřadnic se zvolenými bázovými vektory $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Skalární součin

Mějme dva vektory (resp. vektorové funkce) $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ a $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Pak lze skalární součin těchto dvou vektorů vyjádřit podle definice jako:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3. \quad (4.4)$$

Zkusme nyní ověřit, že dojdeme ke stejnému vztahu, i když vyjádříme vektory \vec{P} a \vec{Q} podle vztahu 4.3. Tedy

$$\begin{aligned} \vec{P} \cdot \vec{Q} &= \left(\sum_{i=1}^3 P_i \vec{e}_i \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^3 Q_j \vec{e}_j \right) = \\ &= (P_1 \vec{e}_1 + P_2 \vec{e}_2 + P_3 \vec{e}_3) \cdot (Q_1 \vec{e}_1 + Q_2 \vec{e}_2 + Q_3 \vec{e}_3) = \\ &= P_1 Q_1 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_1 + P_1 Q_2 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_2 + P_1 Q_3 \vec{e}_1 \cdot \vec{e}_3 + P_2 Q_1 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_1 + P_2 Q_2 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_2 + P_2 Q_3 \vec{e}_2 \cdot \vec{e}_3 + \\ &\quad + P_3 Q_1 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_1 + P_3 Q_2 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_2 + P_3 Q_3 \vec{e}_3 \cdot \vec{e}_3 = \\ &= P_1 Q_1 \|\vec{e}_1\|^2 + P_1 Q_2 \cdot 0 + P_1 Q_3 \cdot 0 + P_2 Q_1 \cdot 0 + P_2 Q_2 \|\vec{e}_2\|^2 + P_2 Q_3 \cdot 0 + \\ &\quad + P_3 Q_1 \cdot 0 + P_3 Q_2 \cdot 0 + P_3 Q_3 \|\vec{e}_3\|^2 = \\ &= P_1 Q_1 + P_2 Q_2 + P_3 Q_3. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Během úprav jsme využili toho, že skalární součin dvou kolmých (v našem případě bázových) vektorů je roven nule. Jelikož je velikost (norma) libovolného vektoru \vec{v}

definovaná jako $\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}}$, tak platí, že $\vec{v} \cdot \vec{v} = \|\vec{v}\|^2$, čehož jsme využili při úpravě prvního, pátého a posledního sčítance třetího, resp. čtvrtého řádku. Velikost jednotkového (v našem případě bázevého) vektoru, a tedy i její druhá mocnina, je rovna jedné. Dospěli jsme tak, podle očekávání, ke stejnému vztahu pro skalární součin dvou vektorů jako je vztah 4.4.

Na závěr doplníme, že vztah 4.4, resp. 4.5 můžeme přepsat pomocí sumy jako:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = \sum_{i=1}^3 P_i Q_i. \quad (4.6)$$

4.2 Einsteinovo sumační pravidlo

Einsteinovo sumační pravidlo slouží ke zjednodušení symbolických zápisů u výpočtů či odvození. Zjednodušeně řečeno toto pravidlo říká, že můžeme v zápisu vynechat symbol $\sum_{i=1}^3$. To, že máme sčítat „přes i “ od jedné do tří, poznáme ze skutečnosti, že daný výraz obsahuje dva stejné indexy (v našem případě indexy i).²⁹

Vztah 4.6 (pro skalární součin dvou vektorových funkcí) tak můžeme podle Einsteinova sumačního pravidla přepsat na tvar:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_i Q_i. \quad (4.7)$$

Vidíme, že tento zápis taktéž koresponduje s tím, že vektorovou funkci \vec{P} , resp. \vec{Q} můžeme symbolicky značit jako P_i , resp. Q_i .

Einsteinovo sumační pravidlo můžeme např. rovněž použít k vyjádření divergence vektorové funkce \vec{P} . Ze sekce 3.2.3 publikace [3], str. 66, již známe vztah pro výpočet divergence vektorové funkce \vec{P} v kartézských souřadnicích:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \vec{\nabla} \cdot \vec{P}, \quad (4.8)$$

kde $\vec{\nabla} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$ je „vektor“ parciálních derivací. Když označíme i -tou složku tohoto vektoru jako ∇_i , pak můžeme vztah 4.8 přepsat do podoby:

$$\operatorname{div} \vec{P} = \nabla_i P_i, \quad (4.9)$$

neboť platí, že

$$\begin{aligned} \nabla_i \cdot P_i &= \sum_{i=1}^3 \nabla_i P_i = \nabla_1 P_1 + \nabla_2 P_2 + \nabla_3 P_3 = \\ &= \frac{\partial}{\partial x} P_1 + \frac{\partial}{\partial y} P_2 + \frac{\partial}{\partial z} P_3 = \frac{\partial P_x}{\partial x} + \frac{\partial P_y}{\partial y} + \frac{\partial P_z}{\partial z} = \operatorname{div} \vec{P}. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Einsteinovo sumační pravidlo jsme použili hned při první úpravě, když jsme k výrazu $\nabla_i \cdot P_i$ doplnili sumu $\sum_{i=1}^3$. V předposledním kroku jsme využili toho, že jsme označili P_x jako P_1 , P_y jako P_2 a P_z jako P_3 .

V neposlední řadě můžeme použít Einsteinovo sumační pravidlo u maticového násobení. Pokud bychom měli matici A se členy a_{ij} , kde $i = 1, \dots, n$ a $j = 1, \dots, r$,

²⁹Máme na mysli indexy jakožto „písmena“, nikoliv „číselné“ indexy.

a matici B se členy b_{jk} , kde $k = 1, \dots, l$, pak pro prvek c_{ik} (v i -tém řádku a v k -tém sloupci) matice $C = A \cdot B$ platí vztah:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^r a_{ij} \cdot b_{jk}. \quad (4.11)$$

Podle Einsteinova sumačního pravidla pak můžeme ve vztahu 4.11 vynechat symbol pro sumu. Lze tedy napsat

$$c_{ik} = a_{ij} \cdot b_{jk}. \quad (4.12)$$

V dalším textu této kapitoly budeme Einsteinovo sumační pravidlo systematicky používat.

4.3 Kroneckerův symbol

Kroneckerův symbol (značíme δ_{ij}) je symbol definovaný³⁰ tak, že pro $i = j$ je roven jedné a pro $i \neq j$ je roven nule. Přičemž indexy i, j nabývají hodnot od jedné do tří. Neboli

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \delta_{33} = 1,$$

$$\delta_{12} = \delta_{13} = \delta_{21} = \delta_{23} = \delta_{31} = \delta_{32} = 0. \quad (4.13)$$

Čemu je roven δ_{ii} ?

Na první pohled by nás mohlo napadnout, že výraz δ_{ii} je roven jedné, neboť indexy u Kroneckerova symbolu jsou ii , tedy stejné. Výraz δ_{ii} však roven jedné nebude. Musíme si totiž uvědomit, že pod indexy ii se skrývají varianty 11, 22 a 33. Jelikož máme u Kroneckerova symbolu dva stejné indexy (resp. „písmena“) ii , musíme zohlednit Einsteinovo sumační pravidlo, které říká, že v takovémto případě musíme sčítat přes index i , a to od jedné do tří. Dostáváme tak:

$$\delta_{ii} = \sum_{i=1}^3 \delta_{ii} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 1 + 1 + 1 = 3. \quad (4.14)$$

Čemu je roven $\delta_{ij}P_i$?

Opět vidíme, že se ve výrazu $\delta_{ij}P_i$ vyskytuje dvakrát index i . Musíme tedy respektovat Einsteinovo sumační pravidlo a sčítat všechny varianty pro $i = 1, 2, 3$. Neboli

$$\delta_{ij}P_i = \sum_{i=1}^3 \delta_{ij}P_i = \delta_{1j}P_1 + \delta_{2j}P_2 + \delta_{3j}P_3. \quad (4.15)$$

Tento součet ještě můžeme zjednodušit. Položme např. $j = 2$. Pak lze vztah 4.15 přepsat na součet:

$$\delta_{i2}P_i = \sum_{i=1}^3 \delta_{i2}P_i = \delta_{12}P_1 + \delta_{22}P_2 + \delta_{32}P_3 = P_2. \quad (4.16)$$

³⁰Kroneckerův symbol lze také zavést jako speciální případ tenzoru druhého řádu, např. viz [17]. O tom, co je tenzor, pojednává kapitola 5.

Při úpravách jsme využili toho, že $\delta_{12} = \delta_{32} = 0$ a $\delta_{22} = 1$. Je vidět, že pro obecně zvolený index j (od 1 do 3), bude $\delta_{ij}P_i = P_j$.

Se znalostí tohoto vztahu (a vztahu 4.7) můžeme pro skalární součin vektorů \vec{P} a \vec{Q} napsat:

$$\vec{P} \cdot \vec{Q} = P_i Q_i = P_i \delta_{ij} Q_j = \delta_{ij} P_i Q_j. \quad (4.17)$$

Během úpravy jsme využili toho, že $Q_i = \delta_{ij} Q_j$, což plyne z předchozího odstavce.

4.4 Levi-Civitův symbol

Levi-Civitův symbol (značíme ε_{ijk}) je symbol definovaný tak, že pro indexy ijk odpovídající trojicím čísel 123, 231, 312 (tj. pro index 123 a indexy vzniklé cyklickou záměnou) je roven 1. Pro indexy ijk , které nevznikly cyklickou záměnou indexů 123 (ale platí, že $i \neq j \neq k$) je Levi-Civitův symbol roven -1 . Pro ostatní případy je Levi-Civitův symbol roven 0. Neboli

$$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{231} = \varepsilon_{312} = 1,$$

$$\varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = \varepsilon_{132} = -1,$$

$$\text{pro ostatní případy } \varepsilon_{ijk} = 0. \quad (4.18)$$

Jinými slovy, pokud jsou indexy u ε tvořeny sudou permutací čísel 1, 2, 3, Levi-Civitův symbol je roven 1. Když se jedná o lichou permutaci, Levi-Civitův symbol je roven -1 . Jinak je roven 0. Například symboly ε_{112} , ε_{322} nebo ε_{222} jsou rovny 0.

Čemu je roven $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$?

Ve výrazu $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk}$ se opakuje jak index i , tak index j . Budeme tedy muset zohlednit Einsteinovo sumační pravidlo, a to hned dvakrát. Tedy

$$\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = \sum_{j=1}^3 \delta_{1j}\varepsilon_{1jk} + \sum_{j=1}^3 \delta_{2j}\varepsilon_{2jk} + \sum_{j=1}^3 \delta_{3j}\varepsilon_{3jk} =$$

$$= (\delta_{11}\varepsilon_{11k} + \delta_{12}\varepsilon_{12k} + \delta_{13}\varepsilon_{13k}) + (\delta_{21}\varepsilon_{21k} + \delta_{22}\varepsilon_{22k} + \delta_{23}\varepsilon_{23k}) +$$

$$+ (\delta_{31}\varepsilon_{31k} + \delta_{32}\varepsilon_{32k} + \delta_{33}\varepsilon_{33k}) = (\delta_{11} \cdot 0 + 0 \cdot \varepsilon_{12k} + 0 \cdot \varepsilon_{13k}) +$$

$$+ (0 \cdot \varepsilon_{21k} + \delta_{22} \cdot 0 + 0 \cdot \varepsilon_{23k}) + (0 \cdot \varepsilon_{31k} + 0 \cdot \varepsilon_{32k} + \delta_{33} \cdot 0) = 0. \quad (4.19)$$

Čemu je roven $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$?

Výraz $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm}$ lze vyjádřit pomocí Kroneckerových symbolů jako (viz [18], oddíl 1.12.4):

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}. \quad (4.20)$$

Všimněme si, že se v prvním sčítanci vyskytuje součin Kroneckerových symbolů s indexy jl , resp. km , což jsou druhé, resp. třetí indexy Levi-Civitových symbolů.

Ve druhém sčítanci se pak vyskytuje součin Kroneckerových symbolů s indexy jm , resp. kl . Index jm je „vytvořen“ z druhého indexu v pořadí prvního Levi-Civitova symbolu a ze třetího indexu v pořadí druhého Levi-Civitova symbolu. Index kl je „vytvořen“ ze třetího indexu v pořadí prvního Levi-Civitova symbolu a z druhého indexu v pořadí druhého Levi-Civitova symbolu.

Vektorový součin vyjádřený pomocí Levi-Civitova symbolu

Mějme vektorové funkce $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$ a $\vec{Q} = (Q_1, Q_2, Q_3)$. Pak můžeme vyjádřit i -tou složku vektorového součinu $\vec{P} \times \vec{Q}$ pomocí Levi-Civitova symbolu jako:

$$(\vec{P} \times \vec{Q})_i = \varepsilon_{ijk} P_j Q_k. \quad (4.21)$$

Platnost vztahu 4.21 ověříme např. pro druhou složku vektorového součinu:

$$\begin{aligned} (\vec{P} \times \vec{Q})_2 &= \varepsilon_{2jk} P_j Q_k = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{2jk} P_j Q_k = \\ &= \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{21k} P_1 Q_k + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{22k} P_2 Q_k + \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{23k} P_3 Q_k = \\ &= (\varepsilon_{211} P_1 Q_1 + \varepsilon_{212} P_1 Q_2 + \varepsilon_{213} P_1 Q_3) + \sum_{k=1}^3 0 \cdot P_2 Q_k + \\ &+ (\varepsilon_{231} P_3 Q_1 + \varepsilon_{232} P_3 Q_2 + \varepsilon_{233} P_3 Q_3) = \varepsilon_{213} P_1 Q_3 + \varepsilon_{231} P_3 Q_1 = \\ &= (-1) \cdot P_1 Q_3 + 1 \cdot P_3 Q_1 = P_3 Q_1 - P_1 Q_3. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Během úprav jsme využili Einsteinovo sumační pravidlo a definici Levi-Civitova symbolu. Vidíme, že jsme skutečně dospěli ke vztahu pro druhou složku vektorového součinu vektorových funkcí \vec{P} a \vec{Q} , což je vztah, který známe ze střední školy.

4.5 Řešené úlohy ke Kroneckerovu a Levi-Civitovu symbolu

Úloha č. 1:

Mějme polohový vektor $\vec{r} = (x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$. Vyjádřete parciální derivaci $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$, kde $i = 1, 2, 3$ a $j = 1, 2, 3$, pomocí Kroneckerova symbolu.

Řešení:

Nejprve vypočítáme parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial x_1}$ pro $i = 1, 2, 3$. Tedy

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_1} = 1; \quad \frac{\partial x_2}{\partial x_1} = 0; \quad \frac{\partial x_3}{\partial x_1} = 0.$$

Poslední dvě parciální derivace vyšly nulové, neboť souřadnice x_2 a x_3 nejsou na souřadnici x_1 závislé.

Obdobným postupem bychom došli k závěru, že je parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial x_2}$ rovna 1 pro $i = 2$. Pro $i = 1, 3$ je rovna 0. Parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial x_3}$ je pak rovna 1 pro $i = 3$ a pro $i = 1, 2$ je rovna 0.

Z uvedeného vyplývá, že parciální derivace $\frac{\partial x_i}{\partial x_j}$ je rovna 1, pokud je $i = j$. Pro $i \neq j$ je tato derivace rovna 0. To ale přímo odpovídá definici Kroneckerova symbolu. Můžeme tedy napsat, že

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij}. \quad (4.23)$$

Úloha č. 2:

Vyjádřete vztah pro výpočet rotace vektorové funkce \vec{P} (v kartézském systému souřadnic) pomocí Levi-Civitova symbolu.

Řešení:

V podkapitole 3.1 jsme odvodili vztah 3.22 pro souřadnicový tvar rotace (v kartézském systému souřadnic). Rotaci vektorové funkce \vec{P} tak můžeme formálně vyjádřit jako vektorový součin „vektoru“ parciálních derivací $\vec{\nabla} = (\nabla_1, \nabla_2, \nabla_3) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ a vektorového pole $\vec{P} = (P_1, P_2, P_3)$. Nyní využijeme vztah 4.21. Pro i -tou složku rotace tak můžeme napsat:

$$(\text{rot}\vec{P})_i = (\vec{\nabla} \times \vec{P})_i = \varepsilon_{ijk} \nabla_j P_k. \quad (4.24)$$

Všimněme si, že se v zápisu vyskytuje dvakrát index j a také dvakrát index k . Při výpočtu tak musíme vzít v úvahu dvakrát Einsteinovo sumační pravidlo.

Úloha č. 3:

Zdůvodněte platnost identity: $\delta_{ij} a_j = a_i$, kde $i, j = 1, 2, 3$ a $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Řešení:

Definice Kroneckerova symbolu říká, že pro $i = j$ je $\delta_{ij} = 1$, pro $i \neq j$ je $\delta_{ij} = 0$. Aby byl výraz $\delta_{ij} a_j$ nenulový, musí tak platit, že $i = j$. Zvolíme-li např. $i = 3$, potom

$$\delta_{3j} a_j = \sum_{j=1}^3 \delta_{3j} a_j = \delta_{31} a_1 + \delta_{32} a_2 + \delta_{33} a_3 = 0 \cdot a_1 + 0 \cdot a_2 + 1 \cdot a_3 = a_3. \quad (4.25)$$

Obdobně by pro $i = 1$ platilo, že $\delta_{1j} a_j = a_1$ a pro $i = 2$ by platilo, že $\delta_{2j} a_j = a_2$. Je tedy zřejmé, že $\delta_{ij} a_j = a_i$.

Úloha č. 4:

Ukažte, že platí rovnost: $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$, kde $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ a $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$.

Řešení:

Vypočteme nejdříve i -tou složku z vektorového součinu $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Tedy

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i = \varepsilon_{ijk} a_j (\vec{b} \times \vec{c})_k = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m. \quad (4.26)$$

Dvakrát po sobě jsme použili vztah 4.21. Nyní výsledek 4.26 vhodně přeuspořádáme:

$$[\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m. \quad (4.27)$$

V posledním kroku úpravy 4.27 jsme využili skutečnosti, že $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{kij}$ (jedná se o cyklickou záměnu v dolním indexu). Použijme vztah 4.20 (proto jsme požadovali, aby u obou ε začínaly dolní indexy „stejným písmenem“, tj. písmenem k). Tudiž

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} a_j b_l c_m = \delta_{il} \delta_{jm} a_j b_l c_m - \delta_{im} \delta_{jl} a_j b_l c_m = \\ &= \delta_{jm} a_j \delta_{il} b_l c_m - \delta_{jl} a_j b_l \delta_{im} c_m = a_m b_i c_m - a_l b_l c_i = b_i a_m c_m - c_i a_l b_l. \end{aligned} \quad (4.28)$$

V předposlední úpravě jsme využili výsledku, ke kterému jsme dospěli v úloze č. 3. Nyní si povšimneme, že se v rozdílu opakují stejné indexy, a tak uplatníme Einsteinovo sumační pravidlo. Tedy

$$\begin{aligned} [\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})]_i &= b_i a_m c_m - c_i a_l b_l = b_i \sum_{m=1}^3 a_m c_m - c_i \sum_{l=1}^3 a_l b_l = \\ &= b_i (\vec{a} \cdot \vec{c}) - c_i (\vec{a} \cdot \vec{b}). \end{aligned} \quad (4.29)$$

Výrazy se sumami jsme nahradili příslušnými skalárními součiny, kterým se sumy rovnají. Odvodili jsme tak vztah pro i -tou složku výrazu $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$. Obecně tak platí, že

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}). \quad (4.30)$$

Úloha č. 5:

Ukažte, že pro každé dva vektory \vec{a} , \vec{b} platí: $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$.

Řešení:

K řešení úlohy využijeme znalost vztahu 4.21. Pro i -tou složku vektorového součinu vektorů \vec{a} a \vec{b} tak můžeme napsat:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k = -\varepsilon_{ikj} b_k a_j = -(\vec{b} \times \vec{a})_i, \quad (4.31)$$

a tak platí, že $\vec{a} \times \vec{b} = -(\vec{b} \times \vec{a})$. Ve výpočtu jsme využili toho, že $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{ikj}$. Před Levi-Civitovým symbolem přibude minus, neboť trojice indexů ikj není cyklickou záměnou trojice ijk .

4.6 Využití Kroneckerova a Levi-Civitova symbolu ve fyzice

Vyjádření tenzoru napětí pro ideální kapalinu

S tenzorem³¹ napětí τ_{ij} pro ideální kapalinu se můžeme setkat v přednášce z mechaniky. V ní bývá odvozeno, že tenzor τ_{ij} má tvar (viz [9], kapitola 11, str. 2, vztah 11.1):

$$\tau_{ij} = -p\delta_{ij}, \quad (4.32)$$

kde $i, j = 1, 2, 3$ a p je tlak. Vztah 4.32 vyjadřuje složku matice (čtvercové řádu 3) tenzoru napětí na pozici ij . Z definice Kroneckerova symbolu vidíme, že je tato složka rovna $-p$ pro $i = j$, pro $i \neq j$ je pak složka matice nulová. Tenzor napětí pro ideální kapalinu je tak vyjádřen diagonální maticí, která má na všech pozicích diagonály prvek $-p$.

³¹Tenzory se budeme zabývat v kapitole 5.

Pomocné výpočty při odvození zákona zachování hybnosti elektromagnetického pole

V klasické elektrodynamice je z Maxwellových rovnic³² odvozován zákon zachování hybnosti pro elektromagnetické pole. K tomu je zapotřebí odvodit např. pomocný vztah:

$$[(\text{rot } \vec{E}) \times \vec{D}]_i = \varepsilon E_k \frac{\partial E_i}{\partial x_k} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E_k E_k \right), \quad (4.33)$$

kde $\vec{E} = (E_1, E_2, E_3)$ je elektrická intenzita, $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$ je elektrická indukce a ε je permitivita prostředí. Právě při odvození tohoto vztahu je výhodné použít formalismus využívající Kroneckerův a Levi-Civitův symbol. Pro ilustraci tento vztah odvodíme. Tedy

$$\begin{aligned} [(\text{rot } \vec{E}) \times \vec{D}]_i &= \varepsilon_{ijk} (\text{rot } \vec{E})_j D_k = \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{jlm} \nabla_l E_m D_k = \varepsilon_{jki} \varepsilon_{jlm} (\nabla_l E_m) D_k = \\ &= \delta_{kl} \delta_{im} (\nabla_l E_m) D_k - \delta_{km} \delta_{il} (\nabla_l E_m) D_k = (\nabla_k E_i) D_k - (\nabla_i E_k) D_k = \\ &= \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_k} \right) D_k - \left(\frac{\partial E_k}{\partial x_i} \right) D_k = \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \varepsilon E_k - \frac{\partial E_k}{\partial x_i} \varepsilon E_k. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Na začátku výpočtu jsme využili znalost vztahu 4.21, poté jsme si museli uvědomit, že rotaci elektrické intenzity lze rovněž vyjádřit pomocí Levi-Civitova symbolu (viz úloha č. 1). Dále jsme použili vztah 4.20 a pak jsme vztahy přepsali díky znalosti značení: $\nabla_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$, $\nabla_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Nyní si stačí uvědomit, že

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\varepsilon E_k E_k) = \varepsilon \frac{\partial E_k}{\partial x_i} E_k + \varepsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i} = 2\varepsilon E_k \frac{\partial E_k}{\partial x_i}, \quad (4.35)$$

a tak můžeme druhý sčítanec ze vztahu 4.34 nahradit výrazem $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E_k E_k \right)$. Neboli

$$[(\text{rot } \vec{E}) \times \vec{D}]_i = \frac{\partial E_i}{\partial x_k} \varepsilon E_k - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} \varepsilon E_k E_k \right). \quad (4.36)$$

Komutátory operátorů v kvantové fyzice

V kvantové fyzice je každé veličině přiřazen její operátor, např. operátor souřadnice x značíme \hat{x} . Ten je roven $x\hat{\mathbb{E}}$, kde $\hat{\mathbb{E}}$ je jednotkový operátor přiřazující každé funkci tutéž funkci. Operátor x -ové složky hybnosti je pak $\hat{p}_x = -i\frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial x}$, kde h je Planckova konstanta a i je imaginární jednotka.³³

Komutátorem dvou operátorů \hat{a} , \hat{b} potom rozumíme výraz $[\hat{a}, \hat{b}]$ definovaný jako

$$[\hat{a}, \hat{b}] = \hat{a}\hat{b} - \hat{b}\hat{a}. \quad (4.37)$$

Lze odvodit, že pro komutátor souřadnice x_i a j -té složky hybnosti platí (např. viz [13], úloha 726):

$$[\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\frac{h}{2\pi} \delta_{ij}. \quad (4.38)$$

³²O Maxwellových rovnicích a jejich významu pojednává podkapitola 3.5 v [3], str. 80.

³³Více viz [11], sekce 2.2.4, str. 34.

Z definice Kroneckerova symbolu je zřejmé, že komutátor $[\hat{x}_i, \hat{p}_j]$ bude nenulový jen pro $i = j$, z čehož plynou v kvantové fyzice zajímavé závěry.³⁴

Obdobně lze napsat komutátor pro i -tou a j -tou složku momentu hybnosti \vec{L} (např. viz [19], str. 30):

$$[\hat{L}_i, \hat{L}_j] = i \frac{\hbar}{2\pi} \varepsilon_{ijk} L_k. \quad (4.39)$$

Z uvedeného mimo jiné plyne, že pro $i = j$ je komutátor nulový (dle definice Levi-Civitova symbolu). Taktéž si musíme uvědomit, že se na pravé straně vztahu 4.39 vyskytuje dvakrát index k , a tak nesmíme zapomenout uplatnit Einsteinovo sumační pravidlo.

4.7 K zapamatování

- Einsteinovo sumační pravidlo říká, že můžeme v matematickém zápisu vynechat symbol sumy. To, že máme sčítat, poznáme podle toho, že daný výraz obsahuje dva stejné indexy („písmena“).
- Kroneckerův symbol: $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$, jinak je $\delta_{ij} = 0$ (pro $i, j = 1, 2, 3$).
- Levi-Civitův symbol ε_{ijk} je roven 1, pokud ijk tvoří sudou permutaci čísel 1,2,3. Pokud tvoří ijk lichou permutaci čísel 1,2,3, Levi-Civitův symbol je roven -1 . V ostatních případech je roven 0.
- Užitečné vztahy:
 - a) $\delta_{ij}\varepsilon_{ijk} = 0$,
 - b) $\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{ilm} = \delta_{jl}\delta_{km} - \delta_{jm}\delta_{kl}$,
 - c) vektorový součin: $(\vec{P} \times \vec{Q})_i = \varepsilon_{ijk} P_j Q_k$.
- Využití Kroneckerova a Levi-Civitova symbolu ve fyzice: např. k vyjádření tenzoru napětí pro ideální kapalinu, při odvození zákona zachování hybnosti elektromagnetického pole, k vyjádření komutátorů operátorů v kvantové fyzice.

³⁴Více např. viz [11], sekce 2.3.1 a 2.3.2.

5. Tenzory

Ve vysokoškolské fyzice se poměrně často setkáme s matematickým objektem, který nazýváme tenzor. Aniž bychom o tom věděli, s tenzorem jsme se již setkali v podkapitole 4.3 zabývající se Kroneckerovým symbolem. O něm bychom totiž mohli říct, že je tzv. tenzorem 2. řádu. Kromě zmíněného příkladu se s tenzory setkáme nejen v mechanice, ale také např. v optice nebo ve speciální teorii relativity.

V této kapitole se postupně dostaneme od skaláru přes vektor až ke zmiňovanému tenzoru. Dále se zaměříme na tenzor z pohledu lineární algebry a řekneme si, jak s tenzorem souvisí skalární součin. Jako v každé kapitole, nebudou chybět řešené úlohy ani konkrétní využití tenzorů ve fyzice.

5.1 Od skalárů k tenzorům

Nyní je naším cílem dojít od skalárů (resp. skalárních veličin) přes vektory (resp. vektorové veličiny) až k tenzorům,³⁵ přičemž o skalárech a vektorech již leccos víme.³⁶ K tomu, abychom zmíněným objektům lépe porozuměli, nám pomůže uvědomit si, jak se transformuje kartézský systém souřadnic.

5.1.1 Transformace kartézského systému souřadnic

Mějme vektor $\vec{v} = (v_1, v_2)$ v kartézském systému souřadnic (pro názornost v rovině) umístěný do počátku. Jaké složky bude mít tentýž vektor \vec{v} vzhledem k pootočenému systému souřadnic (okolo počátku O v kladném smyslu o úhel ϑ)? Stejně jako na obrázku 5.1 označíme složky vektoru \vec{v} v pootočeném systému souřadnic jako $\vec{v} = (\hat{v}_1, \hat{v}_2)$.

Zaměřme se na pravoúhlý trojúhelník PQR z obrázku 5.1. Vidíme, že je u vrcholu R taktéž úhel ϑ .³⁷ Pro tangens úhlu ϑ platí:

$$\tan \vartheta = \frac{c}{v_2}, \quad (5.1)$$

kde c je velikost strany PQ a v_2 je druhá složka vektoru \vec{v} vzhledem k původnímu systému souřadnic.

Nyní se podívejme na pravoúhlý trojúhelník OSQ s úhlem otočení ϑ u vrcholu O . Je vidět, že pro kosinus tohoto úhlu platí:

$$\cos \vartheta = \frac{\hat{v}_1}{v_1 + c}, \quad (5.2)$$

kde \hat{v}_1 je první složka vektoru \vec{v} vzhledem k pootočenému systému souřadnic a výraz $v_1 + c$ je roven velikosti strany OQ .

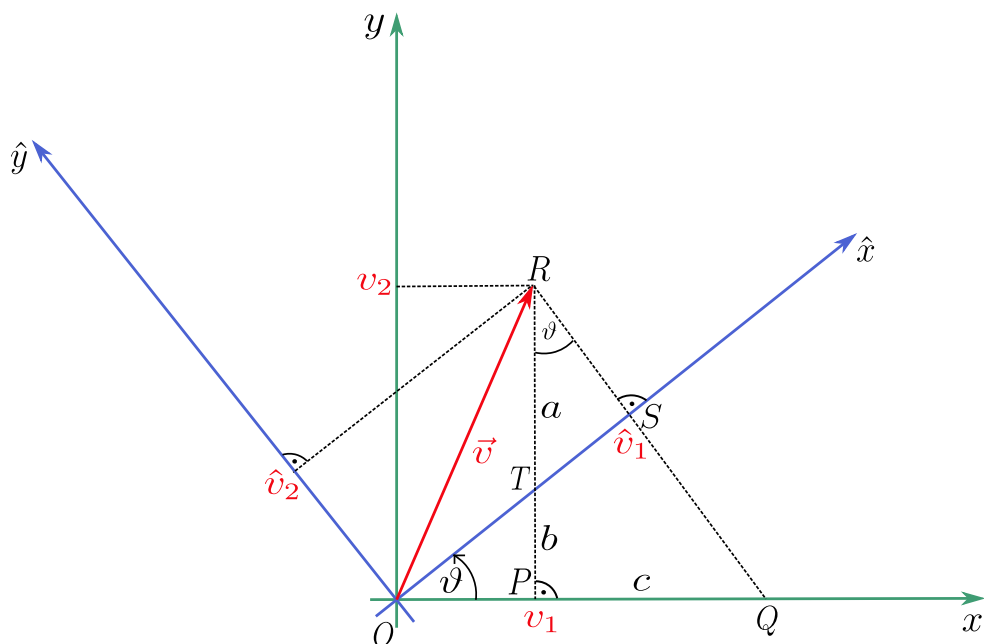
Ze vztahů 5.1 a 5.2 pak plyne, že:

$$\hat{v}_1 = v_1 \cos \vartheta + v_2 \sin \vartheta. \quad (5.3)$$

³⁵Někdy vektorové veličiny nazýváme vektorovými funkcemi nebo také vektorovými poli.

³⁶Viz podkapitola 1.1 v [3], str. 10.

³⁷Tvrzení plyne například z podobnosti trojúhelníků OQS a RQP .



Obrázek 5.1: Schéma k odvození vztahu vyjadřujícího transformaci složek vektoru při pootočení systému souřadnic o úhel ϑ

Odvoďme obdobný vztah pro druhou složku \hat{v}_2 vektoru \vec{v} vzhledem k pootočenému systému souřadnic. Zaměřme se na pravoúhlý trojúhelník OPT a vyjádřeme tangens úhlu ϑ :

$$\tan \vartheta = \frac{b}{v_1}, \quad (5.4)$$

kde b je velikost strany PT a v_1 je první souřadnice vektoru \vec{v} vzhledem k původnímu systému souřadnic.

Nakonec se podívejme na pravoúhlý trojúhelník TSR (s úhlem ϑ u vrcholu R). Pro kosinus úhlu ϑ platí:

$$\cos \vartheta = \frac{\hat{v}_2}{a}, \quad (5.5)$$

kde a je velikost strany TR .

Jelikož platí, že $v_2 = a + b$, tak se znalostí vztahů 5.4 a 5.5 můžeme po nezbytných úpravách napsat, že

$$\hat{v}_2 = -v_1 \sin \vartheta + v_2 \cos \vartheta. \quad (5.6)$$

Maticový zápis vztahů 5.3 a 5.6 vyjadřujících transformaci složek vektoru \vec{v} při pootočení systému souřadnic (o úhel ϑ) má podobu:

$$(\hat{v}_1, \hat{v}_2)^T = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2)^T, \quad (5.7)$$

kde horní index T značí transponování vektorů (jakožto matic typu 1×2).

5.1.2 Skaláry, vektory a tenzory

V následujících odstavcích se zaměříme na to, jak se „chovají“ skaláry a vektory při transformaci kartézského systému souřadnic. Následně zavedeme tenzory.

Skaláry

Příkladem skaláru (resp. skalární veličiny) je hmotnost. Jak víme, skalár je určen pouze jedním číslem a případnou fyzikální jednotkou. Je zřejmé, že je hmotnost tělesa vzhledem k původnímu i pootočenému systému souřadnic stejná.

Totéž bude platit pro všechny skaláry. Označíme-li skalár (resp. jeho hodnotu) v původním systému souřadnic jako s , potom z uvedeného vyplývá, že pro hodnotu skaláru \hat{s} v pootočeném systému souřadnic platí, že $\hat{s} = s$.

Vektory

V sekci 5.1.1 jsme odvodili vztah 5.7 pro transformaci složek vektoru \vec{v} při pootočení systému souřadnic (v rovině) o úhel ϑ . Když označíme matici

$$\begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

jako matici A s prvky a_{ij} , kde $i, j = 1, 2$, můžeme vztah 5.7 přepsat do podoby:

$$\hat{v}_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} v_j, \quad (5.9)$$

kde $i = 1, 2$. Např. pro $i = 2$ bychom dostali:

$$\hat{v}_2 = \sum_{j=1}^2 a_{2j} v_j = a_{21} v_1 + a_{22} v_2 = (-\sin \vartheta) v_1 + \cos \vartheta v_2, \quad (5.10)$$

což je stejný vztah jako vztah 5.6.

V trojrozměrném prostoru můžeme pro transformaci složek vektoru \vec{v} (při pootočení³⁸ systému souřadnic) napsat analogický vztah ke vztahu 5.9. Tedy:

$$\hat{v}_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} v_j, \quad (5.11)$$

kde $i = 1, 2, 3$, (v_1, v_2, v_3) jsou složky vektoru \vec{v} vzhledem k původnímu systému souřadnic a $(\hat{v}_1, \hat{v}_2, \hat{v}_3)$ jsou složky téhož vektoru \vec{v} vzhledem k pootočenému systému souřadnic. Zohledníme-li navíc Einsteinovo sumační pravidlo,³⁹ můžeme napsat:

$$\hat{v}_i = a_{ij} v_j. \quad (5.12)$$

Vektor (resp. vektorová veličina) je tedy veličina, která je (v prostoru) charakterizována třemi složkami (číslly a případnými fyzikálními jednotkami). K jednoznačnému určení konkrétní složky vektoru stačí jeden (dolní) index.

³⁸Aby byla transformace otočením, musí platit (viz vztah 10.B.5 v [9], kapitola 10, str. 46): $a_{ij} a_{ik} = \delta_{jk}$.

³⁹Viz podkapitola 4.2, str. 42.

Tenzory

Nyní již víme, že skalár je veličina, která je charakterizována pouze jedním číslem a případnou fyzikální jednotkou, které má stejnou hodnotu jak vzhledem k původnímu systému souřadnic, tak vzhledem k pootočenému systému souřadnic. Vektor je pak veličina charakterizována (v trojrozměrném prostoru) třemi složkami (číslly a případnými fyzikálními jednotkami), přičemž tyto složky rozlišujeme pomocí jednoho (dolního) indexu. Složky vektoru se transformují podle vztahu 5.12.

Tenzorem n -tého řádu T^n budeme rozumět veličinu, která je charakterizována 3^n složkami (číslly a případnými fyzikálními jednotkami) $T_{j\dots l}^n$, přičemž k jejich rozlišení budeme potřebovat n indexů j, \dots, l . Označíme-li tenzor n -tého řádu vyjádřený vzhledem k pootočenému systému souřadnic⁴⁰ jako \hat{T}^n , potom pro jeho složky $\hat{T}_{i\dots k}^n$ platí:

$$\hat{T}_{i\dots k}^n = a_{ij}\dots a_{kl}T_{j\dots l}^n, \quad (5.13)$$

kde a_{ij}, \dots, a_{kl} jsou transformační matice (pro každý z indexů i, \dots, k , resp. j, \dots, l , jedna matice).

Zvolíme-li $n = 0$, dostaneme tenzor charakterizovaný jednou složkou (čísllem a případnou fyzikální jednotkou), což je skalár. Pro $n = 1$ dostaneme tenzor charakterizovaný 3^1 složkami (číslly a případnými fyzikálními jednotkami), což je vektor.

Ve fyzice se často setkáváme s tenzory 2. řádu T^2 (pro $n = 2$) charakterizovaným devíti (tj. 3^2) složkami T_{jl}^2 , které se transformují podle vztahu:

$$\hat{T}_{ik}^2 = a_{ij}a_{kl}T_{jl}^2, \quad (5.14)$$

kde \hat{T}_{ik}^2 jsou složky tenzoru 2. řádu vyjádřené vzhledem k pootočenému systému souřadnic. Symbol a_{ij} je transformační matice odpovídající indexu i , resp. j , a symbol a_{kl} je transformační matice odpovídající indexu k , resp. l .

5.2 Tenzor 2. řádu z pohledu lineární algebry

Na tenzor 2. řádu lze nahlížet z pohledu lineární algebry jako na bilineární formu. Nejprve si obecně řekneme, co je to bilineární forma, a poté se zaměříme na její souvislost s tenzory 2. řádu.

Máme-li vektorový prostor V nad reálnými čísly,⁴¹ potom je *bilineární forma* (označíme ji g) zobrazení, které každé dvojici vektorů (z kartézského součinu $V \times V$)⁴² přiřadí reálné číslo. Zároveň však musí platit určité podmínky.

Pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ (z daného vektorového prostoru V) a libovolné reálné číslo r musí platit, že:

- $g(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{v})$,

⁴⁰Opět chceme, aby byla transformace otočením, a tak musí platit podmínka z poznámky 35.

⁴¹Vektorový prostor (nad reálnými čísly) je množina, na které je definovaná operace sčítání a násobení (prvků vektorového prostoru reálnými čísly), pro kterou platí soubor podmínek. Přesná definice vektorového prostoru je např. v [20], kapitola 7, definice 7.2, str. 61.

⁴²Kartézský součin libovolných dvou množin M, N je množina všech uspořádaných dvojic $[m, n]$, kde m jsou prvky množiny M a n jsou prvky množiny N .

- $g(r\vec{u}, \vec{v}) = rg(\vec{u}, \vec{v})$,
- $g(\vec{u}, \vec{v} + \vec{w}) = g(\vec{u}, \vec{v}) + g(\vec{u}, \vec{w})$,
- $g(\vec{u}, r\vec{v}) = rg(\vec{u}, \vec{v})$.

Uvedené podmínky vyjadřují linearitu první, resp. druhé složky bilineární formy. O bilineárních formách podrobně pojednává kniha [20], kapitola 23, od str. 326.

Tenzorem 2. řádu rozumíme bilineární formu T^2 , která každým dvěma vektory (resp. vektorovým veličinám) \vec{u}, \vec{v} přiřadí reálné číslo $T^2(\vec{u}, \vec{v})$. Pro tenzor 2. řádu tak platí všechny vlastnosti uvedené v předchozím odstavci.

5.2.1 Skalární součin

V kartézském systému souřadnic můžeme skalární součin dvou vektorů $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ a $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ vyjádřit jako:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3, \quad (5.15)$$

přičemž výraz na pravé straně je reálné číslo. Lze najít souvislost mezi skalárním součinem a tenzorem 2. řádu?

Je zřejmé, že vztah 5.15 můžeme přepsat na tvar:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot (v_1, v_2, v_3)^T, \quad (5.16)$$

kde horním indexem T značíme transponování vektoru (jako matice typu 1×3), aby bylo možné vektory (u_1, u_2, u_3) a (v_1, v_2, v_3) maticově vynásobit.

Vztah 5.16 můžeme dále, s pomocí jednotkové matice typu 3×3 , přepsat do tvaru:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, v_3)^T, \quad (5.17)$$

což můžeme provést, jelikož platí, že

$$(u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, u_3), \quad (5.18)$$

resp. jelikož platí, že

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, v_3)^T = (v_1, v_2, v_3)^T. \quad (5.19)$$

Ze vztahů 5.15, 5.16 a 5.17 tak plyne, že

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (u_1, u_2, u_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2, v_3)^T = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3. \quad (5.20)$$

Přepišme tento vztah do složek. Místo (u_1, u_2, u_3) napíšeme symbol u_i , kde $i = 1, 2, 3$, výraz $(v_1, v_2, v_3)^T$ nahradíme symbolem v_j , kde $j = 1, 2, 3$, a místo jednotkové matice napíšeme Kroneckerův symbol δ_{ij} .⁴³ Dostaneme tak:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_i \delta_{ij} v_j = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3. \quad (5.21)$$

Pravá strana vztahu se nezměnila, jelikož díky platnosti vztahu $\delta_{ij} v_j = v_i$ a Einsteinova sumačního pravidla platí, že $u_i \delta_{ij} v_j = u_i v_i = \sum_{i=1}^3 u_i v_i$.

Kroneckerův symbol δ_{ij} má dva dolní indexy, reprezentuje matici o devíti (resp. 3^2) složkách a libovolným dvěma vektorům přiřazuje reálné číslo (přičemž splňuje všechny uvedené podmínky pro bilineární formu). Jedná se tak o tenzor 2. řádu.

Můžeme tedy říct, že skalární součin v kartézském systému souřadnic vzniká působením tenzoru 2. řádu δ_{ij} na dva vektory.

5.3 Řešené úlohy k tenzorům

Úloha č. 1:

Tenzor je *symetrický*, pokud je symetrická matice,⁴⁴ která jej reprezentuje. Je tenzor 0. nebo 1. řádu symetrický? Uvedte alespoň jeden příklad symetrického tenzoru 2. řádu.

Řešení:

Jak víme, tenzor 0. řádu je skalár, který je charakterizován jednou složkou (číslem a případnou fyzikální jednotkou). Hodnotu skaláru jsme označili s . Na tuto hodnotu můžeme v podstatě nahlížet jako na matici (s) typu 1×1 . Jelikož je matice typu 1×1 vždy symetrická, tak i tenzor 0. řádu je vždy symetrický.

Tenzorem 1. řádu je vektor. V trojrozměrném prostoru má vektor tři souřadnice, které píšeme do řádku, nebo do sloupce. Vektor je tak maticí typu 1×3 , resp. 3×1 . V každém případě se nejedná o čtvercovou matici.⁴⁵ Symetrická však může být pouze čtvercová matice. Tenzor 1. řádu tak nemůže být symetrický.

Příkladem symetrického tenzoru 2. řádu je Kroneckerův symbol δ_{ij} , který je, jak víme, reprezentován jednotkovou maticí typu 3×3 . Ta je symetrickou maticí.

Dalším příkladem symetrického tenzoru 2. řádu je tenzor napětí pro ideální kapalinu $\tau_{ij} = -p\delta_{ij}$, o kterém jsme se zmiňovali v podkapitole 4.6, str. 47.

Úloha č. 2:

V sekci 5.1.2 byl odvozen vztah 5.14 pro transformaci složek tenzoru 2. řádu při pootočení kartézského systému souřadnic. Zaměřte se na jednotlivé indexy a uplatněte Einsteinovo sumační pravidlo.⁴⁶

Řešení:

Na pravé straně vztahu $\hat{T}_{ik}^2 = a_{ij} a_{kl} T_{jl}^2$ se dvakrát opakují indexy j a l . Podle

⁴³Kroneckerův symbol je roven 1 jen, když je $i = j$, neboli když se index označující pořadí řádku matice rovná indexu označujícímu pořadí sloupce matice. V ostatních případech je roven nule. Přesně totéž však platí pro jednotkovou matici.

⁴⁴Matice A s prvky a_{ij} je symetrická, pokud pro každé i a j platí, že $a_{ij} = a_{ji}$.

⁴⁵Matice je čtvercová, když má stejný počet řádků jako sloupců.

⁴⁶Viz podkapitola 4.2, str. 42.

Einsteinova sumační pravidla tak máme počítat přes $j = 1, 2, 3$, resp. $l = 1, 2, 3$. Vztah 5.14 tak můžeme přepsat do podoby:

$$\hat{T}_{ik}^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ij} a_{kl} T_{jl}^2, \quad (5.22)$$

kde indexy i, k mohou nabývat hodnot od 1 do 3.

Úloha č. 3:

Ze sekce 5.2.1 víme, že Kroneckerův symbol δ_{ij} je tenzorem 2. řádu. Musí tak platit, že δ_{ij} je bilineární formou. Ověřte, že Kroneckerův symbol δ_{ij} splňuje podmínky pro linearitu první, resp. druhé složky bilineární formy (z podkapitoly 5.2).

Řešení:

Mějme vektory $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ a $\vec{w} = (w_1, w_2, w_3)$. Nejprve ověříme podmínku $g(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) = g(\vec{u}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{v})$, kde g je zobrazení (zde Kroneckerův symbol přiřazující každým dvěma vektorům reálné číslo), u kterého ověřujeme, že se jedná o bilineární formu. Tedy

$$\begin{aligned} g(\vec{u} + \vec{w}, \vec{v}) &= (\vec{u} + \vec{w})_i \delta_{ij} v_j = (u_i + w_i) \delta_{ij} v_j = \\ &= u_i \delta_{ij} v_j + w_i \delta_{ij} v_j = g(\vec{u}, \vec{v}) + g(\vec{w}, \vec{v}). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Při úpravách bylo výhodné pracovat se složkami vektorů.

Ověřme nyní druhou podmínku $g(r\vec{u}, \vec{v}) = rg(\vec{u}, \vec{v})$, kde r je reálné číslo. Dostaneme

$$g(r\vec{u}, \vec{v}) = (r\vec{u})_i \delta_{ij} v_j = ru_i \delta_{ij} v_j = r(u_i \delta_{ij} v_j) = rg(\vec{u}, \vec{v}). \quad (5.24)$$

Když násobíme vektor \vec{u} reálným číslem r , pak jím násobíme každou složku u_i tohoto vektoru. Ověřili jsme tak linearitu první složky. Zcela analogicky bychom ověřili linearitu druhé složky.

5.4 Využití tenzorů ve fyzice

Tenzor momentu setrvačnosti

V teoretické mechanice se zpravidla setkáme s odvozením vztahu pro moment hybnosti rotující tuhé soustavy hmotných bodů.⁴⁷ Moment hybnosti jednoho hmotného bodu lze vyjádřit jako:

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v}, \quad (5.25)$$

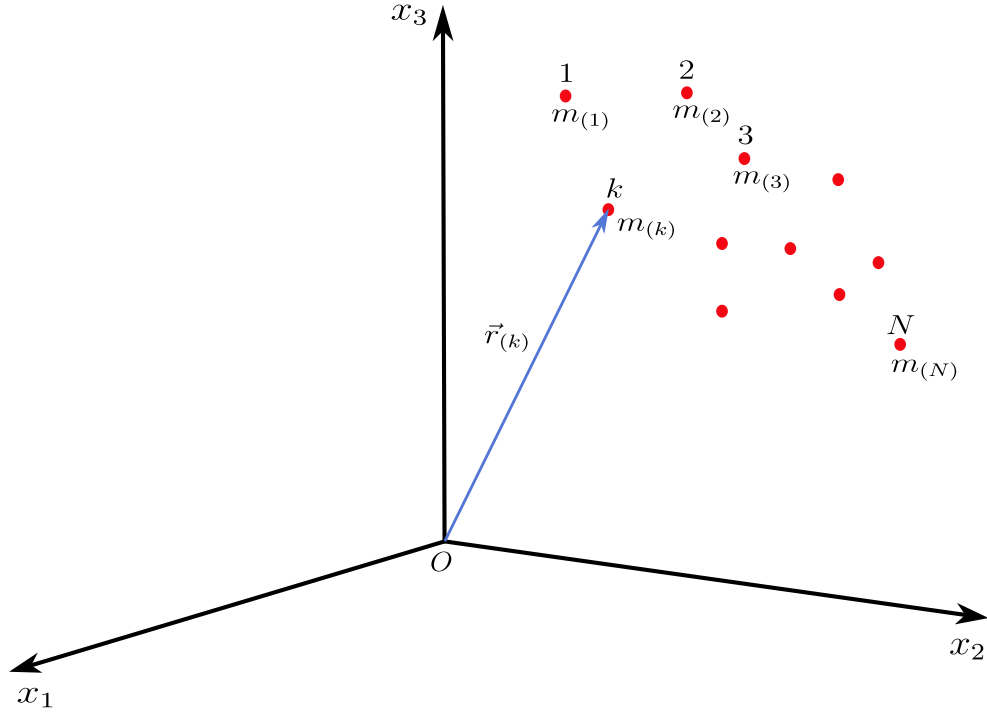
kde \vec{r} je polohový vektor hmotného bodu a \vec{p} je jeho hybnost, kterou lze vyjádřit jako součin hmotnosti m hmotného bodu a jeho rychlosti \vec{v} .

Pro i -tou složku momentu hybnosti tuhé soustavy N hmotných bodů pak lze odvodit vztah (viz [21], kapitola 9, str. 2, vztah 9.6):

$$L_i = \sum_{j=1}^3 \left(\sum_{k=1}^N m_{(k)} (r_{(k)}^2 \delta_{ij} - x_{(k)i} x_{(k)j}) \right) \omega_j, \quad (5.26)$$

⁴⁷Řekneme, že soustava hmotných bodů je tuhá, pokud se vzájemné vzdálenosti jednotlivých hmotných bodů (v čase) nemění.

kde $m_{(k)}$ je hmotnost k -tého hmotného bodu (viz obrázek 5.2), $r_{(k)}^2$ je druhá mocnina vzdálenosti k -tého bodu od počátku (bod, kolem kterého soustavu rotujeme), $x_{(k)i}$, resp. $x_{(k)j}$ je i -tá, resp. j -tá složka polohového vektoru k -tého hmotného bodu a ω_j je j -tá složka úhlové rychlosti otáčení $\vec{\omega}$.



Obrázek 5.2: Znázornění tuhé soustavy N hmotných bodů umístěné do kartézského systému souřadnic

Všimněme si, že **oranžově** zvýrazněný výraz ze vztahu 5.26 nezávisí na úhlové rychlosti otáčení (závisí jen na hmotnostech hmotných bodů a na jejich polohách). Zároveň se ve výrazu vyskytují dva indexy i, j (a výraz obsahuje Kroneckerův symbol, který je tenzorem 2. řádu). Ověřením definice tenzoru 2. řádu pro **oranžově** zvýrazněný výraz bychom zjistili, že se skutečně jedná o tenzor 2. řádu. Obvykle jej značíme J_{ij} . Všimněme si, že se jedná o symetrický tenzor.⁴⁸

Vztah 5.26 tak můžeme přepsat do tvaru (rovněž viz [21], kapitola 9, str. 3, vztah 9.10):

$$L_i = \sum_{j=1}^3 J_{ij} \omega_j, \quad (5.27)$$

který ještě můžeme díky Einsteinovu sumačnímu pravidlu přepsat na tvar:

$$L_i = J_{ij} \omega_j. \quad (5.28)$$

Tenzor napětí

V přednáškách mechaniky bývá pojednáváno o napětí. K popsání napětí v daném bodě trojrozměrného prostoru již nebude stačit skalár ani vektor. Musíme

⁴⁸Když bychom tenzor J_{ij} rozepsali do matice, zjistili bychom, že je matice symetrická. Např. ve druhém řádku ($i = 2$) a třetím sloupci ($j = 3$) by byl prvek $\sum_{k=1}^N m_{(k)} (r_{(k)}^2 \cdot 0 - x_{(k)2} x_{(k)3}) = -\sum_{k=1}^N m_{(k)} x_{(k)2} x_{(k)3}$. Stejný prvek by pak rovněž byl ve třetím řádku ($i = 3$) a druhém sloupci ($j = 2$).

totiž zohlednit skutečnost, že napětí v konkrétním bodě může být způsobeno působením sil „v různých směrech“.

Veličinou popisující napětí bude tenzor 2. řádu se složkami (viz [9], kapitola 10, str. 10, vztah 10.16):

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}, \quad (5.29)$$

přičemž složky tenzoru τ_{11} , τ_{22} , τ_{33} vyjadřují tah (resp. tlak) ve směru souřadnicových os a ostatní složky tenzoru souvisejí se smykovým napětím. Podrobné odvození tenzoru napětí (včetně významu jednotlivých složek tenzoru) lze najít např. v [9], podkapitola 10.3, str. 7.

Permitivita v anizotropním prostředí

Tenzory naleznou své uplatnění také v optice. V izotropním (nevodivém) prostředí⁴⁹ platí pro elektrickou indukci známý vztah (viz [22], str. 2):

$$\vec{D} = \varepsilon \vec{E}, \quad (5.30)$$

kde ε je permitivita prostředí a \vec{E} je elektrická intenzita.

Nacházíme-li se v anizotropním prostředí, musíme u permitivity prostředí zohlednit, že může být její hodnota v různých směrech různá. K jejímu popisu nám tak poslouží opět tenzor 2. řádu se složkami (viz [22], str. 2):

$$\varepsilon_{ij} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{21} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{31} & \varepsilon_{32} & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \quad (5.31)$$

Pro i -tou složku elektrické indukce \vec{D} tak platí, že $D_i = \varepsilon_{ij} E_j$.⁵⁰

5.5 K zapamatování

- Při pootočení kartézského systému souřadnic (v rovině, kolem počátku o úhel ϑ) se transformují složky vektoru \vec{v} (umístěného do počátku) podle vztahu:

$$(\hat{v}_1, \hat{v}_2)^T = \begin{pmatrix} \cos \vartheta & \sin \vartheta \\ -\sin \vartheta & \cos \vartheta \end{pmatrix} \cdot (v_1, v_2)^T.$$

- Skalár je veličina charakterizovaná jedním číslem a případnou fyzikální jednotkou (bez indexu), vektor je (v prostoru) charakterizován třemi složkami (číslly a případnými fyzikálními jednotkami), jehož složky od sebe odlišíme pomocí jednoho indexu, a tenzor n -tého řádu je charakterizován 3^n složkami, které od sebe odlišíme n indexy.
- Složky tenzoru n -tého řádu se transformují podle vztahu: $\hat{T}_{i\dots k}^n = a_{ij\dots kl} T_{j\dots l}^n$.

⁴⁹Prostředí, které má ve všech směrech stejné vlastnosti, nazýváme izotropní. Opakem izotropního prostředí je anizotropní prostředí.

⁵⁰Opět nesmíme zapomenout uplatnit Einsteinovo sumační pravidlo.

- Na tenzor 2. řádu lze nahlížet jako na bilineární formu přiřazující dvěma vektorům reálné číslo.
- Skalární součin v kartézském systému souřadnic vzniká působením tenzoru 2. řádu δ_{ij} na dva vektory.
- Využití tenzorů ve fyzice: např. vyjádření momentu setrvačnosti, popis (mechanického) napětí v trojrozměrném prostoru, popis permitivity v anizotropním prostředí.