Kinematika hmotného bodu

V první a druhé kapitole se budeme zabývat pohybem asi nejjednoduššího objektu, který si v mechanice umíme představit: hmotného bodu. Proč se zabývat tak „nezajímavým“ objektem, o němž toho navíc spoustu znáte z nižších stupňů škol?

Stručně řečeno, protože se na něm můžeme přiučit hodně věcí, které budeme potřebovat při popisu složitějších systémů a které využijete i v dalších partiích fyziky. Proto je tato první kapitola docela dlouhá. Ale nezoufejte – až ji projdeme, další části mechaniky už nám půjdou výrazně rychleji.

1.1 Proč hmotný bod – aneb o potřebě idealizace a zanedbávání

Co si představit pod pojmem ***hmotný bod***[1]?

„Naivně“ řečeno, asi něco hodně malého, ale co má přitom nějakou hmotnost. V ideálním případě by to „něco“ mělo být opravdu bodové, tedy mít nulové rozměry[2]. Existuje taková věc v přírodě, ve světě kolem nás?

Zřejmě asi ne, alespoň žádnou takovou neznáme[3]. Hmotný bod je *idealizace*. Reálná tělesa mají spoustu vlastností – barvu, tvar, chemické složení, rozložení hustoty, moment setrvačnosti, jejich materiál se může deformovat, má nějakou elektrickou vodivost… Všechny tyto a další vlastnosti si u hmotného bodu „odmyslíme“, nebereme je v úvahu – chcete-li, *zanedbáme* je. Jediné, co nás bude zajímat, co pro nás bude charakterizovat hmotný bod, budou jeho:

- **poloha**
  a
- **hmotnost.**

Tím je hmotný bod plně popsán[4] [5].

Jak si ale můžeme dovolit vše ostatní zanedbat? A proč to děláme?

Zkuste si na obě otázky nejdřív odpovědět sami! [6]

---

[1] Zkuste si na tuto otázku nejdřív odpovědět sami. Představte si třeba, že byste někomu tento pojem chtěli vysvětlit. (Můžete si představit, že se vás na to zeptá žák základní školy, středoškolák, nebo vaše babička. Objasnění asi budou různá. Co byste řekli? Jaké příklady byste použili?)

[2] V angličtině se pro hmotný bod používá termín *point mass*, tedy „bodová hmotnost“.

[3] Poznámka „pro šťoury“: Nebudeme se zde pouštět do diskusí týkajících se toho, že v kvantové elektrodynamice jsou třeba elektrony formálně popisovány jako bodové objekty. Ostatně není jasné, zda sám prostor lze dělit na menší části do nekonečna, například pod tzv. Planckovu délku, která je řádu 10^{-35} m.

[4] No vlastně… občas se nám bude hodit popisovat či počítat pohyb nabité částice v elektrickém nebo magnetickém poli. Pak budeme uvažovat, že hmotný bod může mít také **elektrický náboj**.

[5] Poloha hmotného bodu se přirozeně může měnit s časem, takže dalšími veličinami, které budou pohyb hmotného bodu charakterizovat, budou *rychlost* a *zrychlení*; ty jsou ale odvozeny od polohy, takže je tu neuvádíme zvlášť.

[6] Další text schválně následuje až na další stránce, abyste se mohli zamyslet. (Aby to nebylo jen „denní snění“, není špatné, když si vaše odpovědi napíšete, třeba na prázdné místo na stránce.)

Chvála zanedbávání

Takže ještě jednou: Jak si můžeme dovolit zanedbat vše kromě polohy a hmotnosti? A proč to děláme?

Na otázku *proč* je jednoduchá odpověď: Výrazně nám to zjednoduší úvahy a výpočty – a fakticky nám to umožní v řadě situací vůbec problém vyřešit, tedy vypočítat, jak se tělesa pohybují. Ostatně, vezměte si úplně jednoduchý problém: v posluchárně hodíme kouskem křídy. Jak se pohybuje? Když si ze střední školy pamatujeme, jak je to se šikmým vrhem, odpovíme, že po parabole. Jenže k odvození takto jednoduchého výsledku zanedbáváme spoustu vlivů a faktorů. Zkuste se zamyslet, jaké to jsou.[7]

Vidíme tedy, že ve fyzice je zanedbávání nezbytné. A *jak to*, že si můžeme dovolit zanedbávat? Inu proto, že při rozumném zanedbání popisuje fyzika třeba pohyb těles dostatečně přesně.[8] Zjednodušení a pojmy, které budou idealizací a abstrakcí skutečnosti, proto budeme používat ve výkladu mechaniky i nadále, i když už to nebudeme explicite zdůrazňovat.

Zpět k hmotnému bodu

Co tedy reálně brát za hmotný bod? Mohli bychom říci, že je to **těleso zanedbatelných rozměrů**[9]. Přirozeně ovšem vyvstává otázka *zanedbatelných vůči čemu*?

Jinak řečeno: Kdy můžeme považovat křídu za hmotný bod? A co třeba zeměkoule – kdy ji můžeme brát jako hmotný bod?

Pro mravence, který po ní leze, určitě křída není hmotným bodem; podobně pro nás není hmotným bodem zeměkoule, když po ní chodíme, jezdíme či pokud bychom ji oblétali v kosmické lodi. Na druhou stranu, centimetrový kousek křídy hozený na vzdálenost několika metrů asi za hmotný bod považovat můžeme[10]. Podobně pokud budeme počítat, jak Země obíhá kolem Slunce, je rozumné brát ji jako hmotný bod. „Zanedbatelné rozměry“ tedy znamenají zanedbatelné vůči délkám a rozměrům celé situaci, celého problému, který popisujeme nebo řešíme.

---

[7] Začněme od těch jasných: Odpor vzduchu. (Díky němu není trajektorií přesně parabola, ale balistická křivka. Odpor vzduchu přitom závisí na velikosti a tvaru křídy.) Rotaci křídy. (Křída nastavuje vzduchu různé strany, tím se zřejmě trochu mění odpor vzduchu.) Skutečnost, že v místnosti může být průvan, ten křídu trochu „snáší“. (Konec konců, proudění vzduchu v místnosti ovlivňujeme i my, kdo v ní jsme, tím, že dýcháme. Tenhle vliv bych už opravdu nechtěl počítat…) A když jdeme do ještě nepatrnějších vlivů: Trajektorie by byla parabolou (ve vakuu) v případě homogenního gravitačního pole. Ovšem ve skutečnosti je gravitační pole u podlahy trochu silnější, než u stropu. (Sice zhruba jen o milióntinu, ale rozdíl to je. Ostatně, i předměty v místnosti a my sami křídu přitahujeme, takže ovlivňujeme její pohyb. ☺) A uvážíme-li ještě nicotnější vlivy: Na křídu dopadá světlo, třeba od okna nebo ze zářivek, takže na ni působí tlak záření. (Byť ji určitě neovlivňuje tolik, jako třeba sluneční záření chvosty komet.) Přes různé další vlivy bychom se nakonec dobrali i k tomu, že křída vlastně není klasický objekt, je složena z atomů, které se chovají kvantově, takže bychom vlastně měli jejich pohyb (a tím i pohyb celé křídy) počítat podle zákonů kvantové mechaniky. A pokud nám to ještě nestačí, můžeme si uvědomit, že Newtonova teorie gravitace není tou nejpřesnější teorií popisující gravitační působení, tou je obecná teorie relativity. Takže bychom vlastně měli pohyb křídy počítat podle obecné teorie relativity, ale současně, jak jsme k tomu dospěli výše, podle kvantové fyziky. A jsme v koncích – protože kvantovou fyziku a obecnou relativitu ještě nikdo dohromady nespojil. To znamená, že pohyb hozené křídy tedy vlastně ve fyzice přesně, bez zanedbávání, spočítat neumíme…

[8] Například křída hozená ve třídě se opravdu s dobrou přesností pohybuje po parabole.

[9] U něhož, jak už jsme uvedli, bereme v úvahu pouze jeho polohu a hmotnost (a případně elektrický náboj).

[10] Byť zde asi záleží na přesnosti měření i dalších faktorech; třeba pro zmuchlaný papírek podobných rozměrů, který by se ve vzduchu všelijak „převaloval“, by hmotný bod už nemusel být dobrou aproximací.

1.2 Poloha hmotného bodu – aneb známé věci s trochou matematiky

Získali jsme představu, co je to hmotný bod[11]. V kinematice se nebudeme starat o jeho hmotnost, pouze o jeho **polohu**. Mluvíme-li o poloze, okamžitě se ovšem naskytne otázka:

Poloha vůči čemu?

Polohu musíme vztáhnout vůči něčemu.

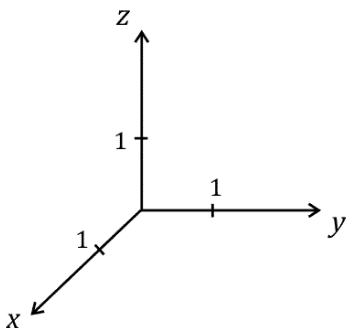
Vztažné soustavy a soustavy souřadnic

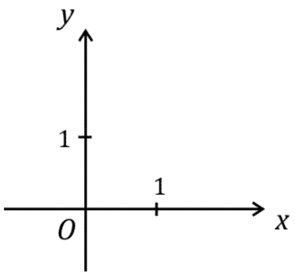
Pro ono „něco“, vůči čemu polohu vztahujeme, se užívá název **vztažná soustava**. Hezkou definicí[12], která tento pojem vystihuje je:

Vztažná soustava je systém skutečných nebo myšlených těles[13],
která jsou navzájem v klidu.

Máme-li vztažnou soustavu, můžeme v ní zavést **soustavu souřadnic[14]**.

Nejjednodušší soustavou je **kartézská soustava souřadnic[15]**. Ta má tři navzájem kolmé osy, na něž naneseme jednotky délky, jak ukazuje obrázek. Prakticky vždy přitom užíváme soustavu *pravotočivou*: Pokud k trojhranu os přiložíme pravou ruku tak, aby prsty směřovaly od osy *x* k ose *y*[16], míří palec do kladného směru osy *z*[17].





Často budeme řešit jen případy dvourozměrného pohybu, tedy pohybu v rovině. V těchto případech budou naše náčrtky soustav souřadnic jednodušší, omezí se jen na osy *x* a *y*, viz obrázek vlevo. V něm jsme vyznačili i části os, kde jsou souřadnice záporné, a počátek soustavy souřadnic[18].

[11] Všimněte si, že jsme ale nezformulovali žádnou „slovníkovou definici“ hmotného bodu. Přesných definic si v našem seznamování s mechanikou vůbec moc neužijeme. Spíš než o definice, které bychom se mohli učit zpaměti, nám půjde o to, abychom poznali, jak fyzika popisuje svět, jaké pojmy přitom používá, jaký je jejich význam a co jim odpovídá v reálném světě, jaké jsou jejich vztahy… A také jak nám při tom popisu pomáhá matematika a jak to vše „drží pohromadě“. Občas se výstižná definice hodí, ale fyzika na nich nestojí.

[12] Vida, přece na definice došlo! ☺

[13] Skutečnými tělesy mohou být například podlaha a stěny naší laboratoře či posluchárny, pracovní deska stolu apod. Proč uvádět i myšlená tělesa? Někdy nás může zajímat, jak by určitá situace vypadala třeba z hlediska rakety, která by kolem našeho pokusu prolétala velkou rychlostí – a určitě přitom není potřeba, aby nám laboratoří nebo posluchárnou prolétala skutečná raketa.

[14] Užívá se také název „systém souřadnic“.

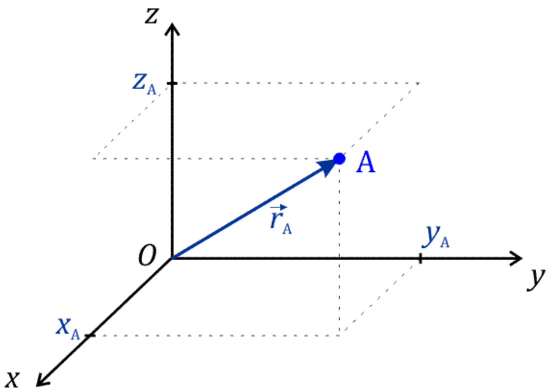
[15] Ve fyzice samozřejmě užíváme i další typy soustav souřadnic, velmi užitečné jsou třeba sférické a válcové souřadnice, v rovině pak polární souřadnice. Pro začátek však vystačíme s kartézskými.

[16] Přesněji: od šipky vyznačující kladný směr osy *x* k šipce vyznačující kladný směr osy *y*.

[17] Vyznačuje tedy orientaci osy *z*. Kdybychom použili levou ruku, byl by směr osy *z* opačný, šlo by o *levotočivou* soustavu. Někdy by její použití nevadilo, ale třeba ve vztahu pro vektorový součin vektorů by bylo opačné znaménko.

[18] Značívá se symbolem *O*, z anglického *origin*.

Poloha hmotného bodu, polohový vektor



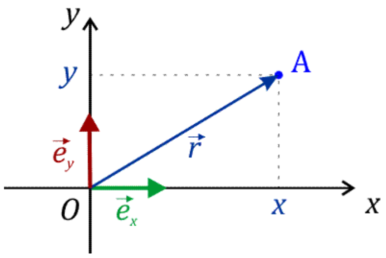
Polohu bodu ve zvolené kartézské soustavě charakterizujeme pomocí jeho souřadnic *x, y* a *z*. Souřadnice jsou dány průměty na osy, jak to ukazuje obrázek.[19]

Polohu bodu také můžeme popsat vektorem, jehož počátek je v počátku soustavy souřadnic a konec v daném bodě. (Na obrázku je tento vektor označen jako $\vec{r}_A$.) Tomuto vektoru říkáme **polohový vektor**[20].

Souřadnice bodu jsou přímo složkami polohového vektoru[21]:

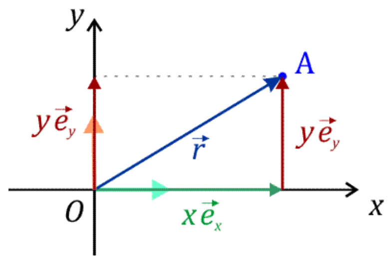
$$\vec{r} = (x, y, z) \tag{1.1}$$

V dvourozměrném případě je obrázek jednodušší a jsou na něm možná snáze vidět složky polohového vektoru[22]. Do obrázku jsme vyznačili také *jednotkové vektory ve směru os souřadnic*, $\vec{e}_x$ a $\vec{e}_y$. (Ve třírozměrné situaci by samozřejmě přibyl jednotkový vektor $\vec{e}_z$ ve směru osy *z*.) To, že jde o jednotkové vektory[23], můžeme zapsat standardním způsobem:



$$|\vec{e}_x| = |\vec{e}_y| = |\vec{e}_z| = 1 .$$

Když do obrázku vyznačíme násobky jednotkových vektorů $x\vec{e}_x$ a $y\vec{e}_y$, vidíme, že polohový vektor je jejich součtem: $\vec{r} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y$.



Jak z polohového vektoru získat zpátky souřadnice příslušného bodu? Stačí polohový vektor skalárně vynásobit [24] například vektorem $\vec{e}_x$:

$$\vec{r}\cdot\vec{e}_x = \left(x\vec{e}_x + y\vec{e}_y\right)\cdot\vec{e}_x = x\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x + y\vec{e}_y\cdot\vec{e}_x = x\cdot 1 + y\cdot 0 = x$$ [25]

Podobně platí $y = \vec{r}\cdot\vec{e}_y$. Z obrázku vidíme, že souřadnice jsou průmětem polohového vektoru do směrů os souřadnic. (A skalární součin s jednotkovým vektorem dělá právě průmět do jeho směru.)

---

[19] Představte si to konkrétně třeba v případě, že počátek soustavy souřadnic je v rohu stolu, osami *x* a *y* jsou hrany stolu, osa *z* míří nahoru, kolmo k desce stolu. Souřadnicí *z* je pak výška bodu nad deskou stolu; rozmyslete si sami, jak je tomu se souřadnicemi *x* a *y*.

[20] Ve starších učebnicích se lze setkat s názvem **rádiusvektor**, odtud jeho symbol $\vec{r}$.

[21] V tomto vztahu už nepíšeme indexy vyznačující, o který bod jde. Pokud budeme potřebovat rozlišovat různé hmotné body, můžeme samozřejmě psát třeba $\vec{r}_A = (x_A, y_A, z_A)$, $\vec{r}_B = (x_B, y_B, z_B)$ apod.

[22] Už k nim v obrázku nepíšeme index vyznačující hmotný bod. (Písmena *x* a *y* sice teď značí jak souřadnice bodu, tak osy, ale z kontextu resp. z jejich umístění je jasné, kdy jde o osu a kdy o souřadnici bodu.)

[23] Tedy „úsečky se šipkou“, jejichž délka je 1.

[24] O skalárním součinu najdete několik stručných informací v Dodatku 1.A na konci kapitoly.

[25] Platí totiž $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_x = |\vec{e}_x|^2 = 1$, protože jde o jednotkový vektor a $\vec{e}_x\cdot\vec{e}_y = 0$, protože jde o vektory, které jsou navzájem kolmé. (Oboje je vidět z obecného vztahu pro skalární součin vektorů $\vec{a}\cdot\vec{b} = a\,b\cos\alpha$, kde *a*, *b* jsou velikosti vektorů a α úhel jimi sevřený. Připomeňte si vztahy pro skalární součin nebo se s nimi seznamte, pokud vás v dosavadním studiu minuly, budete je často potřebovat, a to nejen v mechanice.)

Vše uvedené samozřejmě platí analogicky ve třírozměrném případě:

$$\vec{r} \;=\; x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z \;, \tag{1.2}$$

$$\begin{aligned} x &= \vec{r}\cdot\vec{e}_x \\ y &= \vec{r}\cdot\vec{e}_y \\ z &= \vec{r}\cdot\vec{e}_z \end{aligned} \tag{1.3}$$ [26]

Rozepisovat stále složky *x*, *y*, *z* je sice názorné, ale zaplní spoustu papíru. Proto se často souřadnice označují čísly: $x \overset{\text{ozn.}}{=} x_1$, $y \overset{\text{ozn.}}{=} x_2$, $z \overset{\text{ozn.}}{=} x_3$, a podobně i jednotkové vektory: $\vec{e}_x \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{e}_1$, $\vec{e}_y \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{e}_2$, $\vec{e}_z \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{e}_3$, takže polohový vektor

$$\vec{r} \;=\; \left(x_1, x_2, x_3\right) \;=\; x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2 + x_3\vec{e}_3 \tag{1.4}$$ [27]

lze napsat pomocí znaku pro součet jako

$$\vec{r} \;=\; \sum_{i=1}^{3} x_i \vec{e}_i \;. \tag{1.5}$$ [28]

Vyjádření souřadnic z polohového vektoru, tedy vztahy (1.3) pak můžeme napsat na jeden řádek:

$$x_i \;=\; \vec{r}\cdot\vec{e}_i \,, \quad i = 1, \dots, 3 \,. \tag{1.6}$$

Skutečnost, že se pro stejnou věc používá několik způsobů zápisu, nás může za začátku trochu mást, ale tak tomu prostě je.[29] [30] A dá se na to bez problémů zvyknout.

Pojďme ale už k něčemu fyzikálnějšímu. **Jak popsat pohyb?**

---

[26] Tyto vztahy samozřejmě můžeme z (1.1) odvodit i jinak: Složky vektoru $\vec{e}_x$ jsou $\vec{e}_x = (1,0,0)$, takže $\vec{r}\cdot\vec{e}_x = (x,y,z)\cdot(1,0,0) = x$, kde jsme využili vzorec $\vec{a}\cdot\vec{b} = (a_x, a_y, a_z)\cdot(b_x, b_y, b_z) = a_x\cdot b_x + a_y\cdot b_y + a_z\cdot b_z$ pro výpočet skalárního součinu ze složek vektorů. Podobně pro *y*-ovou a *z*-ovou složku.

[27] Samozřejmě lze psát také $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, vztah (1.4) odtud také dostaneme, když si uvědomíme, že $\vec{e}_1 = (1,0,0)$, $\vec{e}_2 = (0,1,0)$, $\vec{e}_3 = (0,0,1)$.

[28] Poznámka pro „fajnšmekry": V pokročilejších učebnicích se navíc často vynechává i znak sumace, tj. píše se jen $\vec{r} = x_i\vec{e}_i$. Až na to narazíte, neděste se. To, že se má sčítat, poznáme z faktu, že se index *i* v daném výrazu objevuje dvakrát; to, že se sčítá od jedné do tří, víme z kontextu. Tomuto pravidlu se říká *Einsteinova sumační konvence* nebo *Einsteinovo sumační pravidlo*. My v tomto textu zatím budeme znak sumy psát.

[29] Abychom parafrázovali klasika: Můžeme s tím nesouhlasit, můžeme proti tomu protestovat, ale to je tak vše, co s tím můžeme dělat.

[30] Pokud vám přijde, že různých označení nebylo dost, pak vězte, že v inženýrských učebnicích se často pro jednotkové vektory $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ používá značení $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$.

Jak popsat pohyb hmotného bodu

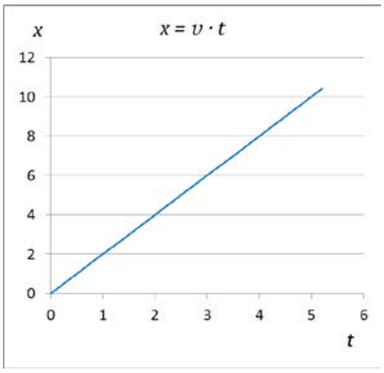
Samozřejmě tak, že souřadnice hmotného bodu se budou s časem měnit, tedy že budou funkcemi času. Například[31]:

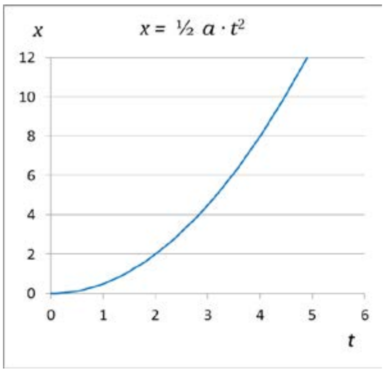
$$x = vt$$

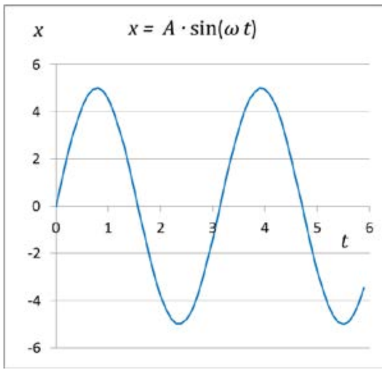
nebo: $$x = \tfrac{1}{2}at^2$$

nebo: $$x = A\sin(\omega t)$$

Závislost souřadnice na čase lze vystihnout i graficky. Pro výše uvedené příklady jde o grafy, s nimiž jsme se jistě už mnohokrát setkali[32]:







Ve dvourozměrném případě (tedy pro pohyb v rovině) se s časem mění souřadnice x i y. Například[33]:

$$x = v_0 t,\ y = -\tfrac{1}{2}gt^2$$

nebo: $$x = R\cos(\omega t),\quad y = R\sin(\omega t)$$

Obecně závislost souřadnic zapíšeme jako

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t) \qquad (1.7)$$ [34]

nebo krátce jako závislost polohového vektoru na čase:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) \qquad (1.8)$$ [35]

Dobrá, pohyb umíme popsat, konkrétně i obecně. Ale zatím to celé, snad až na grafické vyjádření vypadá hodně formálně a o pohybu jsme se zas tak mnoho nedozvěděli.[36]

Nešlo by ze závislostí (1.7) resp. (1.8) třeba také určit **jak rychle** se hmotný bod pohybuje?

---

[31] Rozmyslete si sami, jaký pohyb dále uvedené vztahy popisuji.
(Pro kontrolu: rovnoměrný, rovnoměrně zrychlený, harmonické kmitání.)

[32] Zkuste si je načrtnout i pro jiné hodnoty parametrů a rozsahu času. Třeba, když rychlost bude záporná. Nebo pro obecnější případ rovnoměrně zrychleného pohybu, $x = \tfrac{1}{2}at^2 + bt + c$, a třeba tak, aby graf reprezentoval pohyb auta, které brzdí…

[33] Opět si rozmyslete, jaký pohyb je danými vztahy popsán. (Pro kontrolu: vodorovný vrh, rovnoměrný pohyb po kružnici.)

[34] Totéž můžeme zapsat jako $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t),\ x_3 = x_3(t)$, nebo naráz jako $x_i = x_i(t),\ i = 1, 2, 3$.

[35] Také bychom mohli psát $\vec{r} = (x(t), y(t), z(t))$ - ale už asi přestaneme vypisovat všechny možné varianty zápisu, už to začíná být únavné.

[36] Neusnuli jste ještě nad tímto textem? Pokud ano, tak se probuďte, konečně se začne něco dít.

1.3 Rychlost – neprve v jednorozměrném případě

Průměrná rychlost

Nejjednodušší vztah pro výpočet rychlosti, který známe z nižších stupňů škol, říká „Rychlost je dráha dělená časem." Přesněji řečeno, dráhu s, kterou hmotný bod urazí za dobu t, vydělíme tou dobou. Dostaneme tak **průměrnou rychlost**[37]:

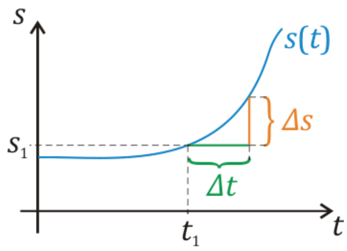
$$\overline{v} = \frac{s}{t} \ .$$

Příkladů je nespočet. Třeba jedeme-li z Prahy do Brna, je dráha $s = 206$ km, doba jízdy $t = 2$ h.[38] Průměrná rychlost je tedy 103 km/h. [39]

Průměrná rychlost ovšem nemusí mnoho říkat o tom, jaký byl průběh jízdy. V úsecích s různými omezeními se na D1 v kolonách můžeme ploužit třicítkou, na volných úsecích jet předpisových sto třicet. A pokud nás policie zastaví, že nám radarem naměřila rychlost 160 km/h, nemůžeme se vymlouvat a argumentovat průměrnou rychlostí.

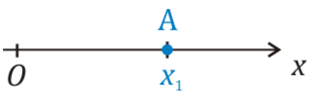
Potřebujeme tedy popsat, jak rychle jedeme právě v určitém okamžiku, potřebujeme znát **okamžitou rychlost**. Jak ji dostat z průměrné rychlosti?

Dobrým přiblížením je určit průměrnou rychlost v určitém krátkém časovém intervalu Δt. Jestliže za tento interval ujedeme dráhu Δs, je průměrná rychlost přirozeně $\overline{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$. Situaci ukazuje obrázek vpravo.



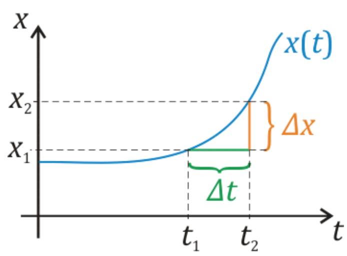
Příkladů lze opět vymyslet řadu. Jestliže třeba za 3 sekundy ujedeme 30 metrů, je naše průměrná rychlost na tomto úseku 10 m/s. [40]

Pro další úvahy bude užitečné zavést **složky rychlosti**. Začněme nejprve nejjednodušším případem, tedy **jednorozměrným pohybem** (můžeme jej třeba označovat symbolem 1D).



Obrázek ukazuje polohu hmotného bodu v čase t_1, jeho souřadnice je x_1. Příkladem může být auto jedoucí po rovné silnici. V čase $t_2 = t_1 + \Delta t$ bude souřadnice bodu $x_2 = x_1 + \Delta x$. Graf pohybu v závislosti na čase ukazuje obrázek vpravo. x-ová složka rychlosti je

$$\overline{v}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} \ . \qquad (1.9)$$



[37] To, že jde o průměrnou rychlost, značíme pruhem nad symbolem veličiny. Průměrování (někdy se též říká *středování*) se také značí „ostrými závorkami", v našem případě by tedy symbolem bylo $\langle v \rangle$.

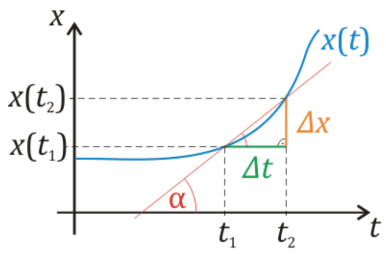
[38] Tedy, podle serveru mapy.cz je to 1 hodina 59 minut, ale řekněme, že jsme byli o minutu pomalejší.

[39] V tomto textu většinou nebudeme věnovat zvláštní pozornost jednotkám, zejména tam, kde předpokládáme, že jsou notoricky známé. Proto teď nebudeme tento údaj přepočítávat na m/s ani na míle za hodinu, mikroparseky za století ani jiné běžné, méně běžné či zcela obskurní jednotky. (Přiznávám, že mikroparsek za století jsem si právě vymyslel.) Samozřejmě bychom v případě potřeby údaje v různých jednotkách uměli navzájem převést.

[40] Tedy 36 km/h, abychom přece jen jeden převod jednotek udělali.

Stále jde o průměrnou rychlost v časovém intervalu <t_1,t_2>. Je ale dobré uvědomit si, že na rozdíl od průměrné rychlosti počítané z dráhy může υ_x vyjít záporné.[41]

Průměrnou rychlost můžeme také „vyčíst" z grafu časové závislosti $x(t)$. Z obrázku vlevo je vidět, že



přepona pravoúhlého trojúhelníka s odvěsnami délek Δt a Δx je sečnou grafu. Poměr $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ dává tangentu úhlu α.[42] Je tedy

$$\bar{\upsilon}_x = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \operatorname{tg}\alpha \ .$$

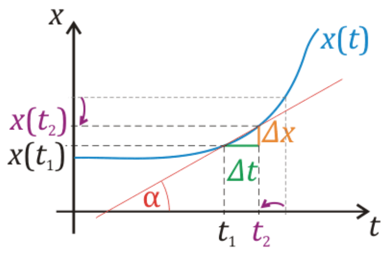
Tangenta úhlu, který přímka svírá s vodorovnou osou grafu, se nazývá *směrnice* dané přímky. Vidíme, že průměrná rychlost je *směrnicí sečny* grafu $x(t)$.

Fyzikální interpretace průměrné rychlosti je také jasná: je to rychlost, jakou bychom museli jet rovnoměrně, abychom se za dobu Δt dostali z místa, kde byl hmotný bod v čase t_1, do místa, kde je v čase t_2.[43]

Od průměrné rychlosti k okamžité

Ve výše uvažovaném časovém intervalu Δt se ovšem rychlost hmotného bodu stále může měnit. Máte-li třeba „žihadlo" Bugatti Veyron, můžete si ověřit, že za výše zmíněné 3 s dokáže rychlost změnit dosti podstatně.[44]

Jak se tedy přiblížit okamžité rychlosti? Zřejmě tak, že zmenšíme interval Δt ! Jak ukazuje obrázek, zmenší se současně Δx – a sečna se přiblíží *tečně* ke grafu $x(t)$. Samozřejmě, stále ještě nemáme okamžitou rychlost. Můžeme ale volit stále menší a menší intervaly Δt a okamžité rychlosti se zřejmě budeme přibližovat stále lépe.[45]



Interval Δt tak postupně zmenšujeme až k nule, i když nuly samotné nikdy nedosáhneme.[46] V matematice se tomuto postupu říká *limitní přechod*. Říkáme, že „Δt jde k nule", symbolicky to vyjádříme zápisem $\Delta t \to 0$.

Limity funkcí zde nebudeme blíže rozebírat po matematické stránce.[47] Raději si na jednoduchém příkladě ukážeme, „jak to funguje", tedy jak můžeme v konkrétním případě dospět od průměrné rychlosti k okamžité.

[41] Rozmyslete si, jak v tomto případě bude pohybovat hmotný bod a jak bude vypadat graf funkce $x(t)$.

[42] Samozřejmě za předpokladu, že jednotky na vodorovné i svislé ose mají stejnou délku, jinak bychom museli zůstat u vyjádření $\Delta x/\Delta t$.

[43] Pokud vám tato věta přijde příliš „zašmodrchaná", rozmyslete si to třeba na příkladu zrychlujícího auta.

[44] My ostatní, kdo toto autíčko nemáme, se musíme omezit na informace na webu. Podle nich dokáže z nuly na rychlost 100 km/h zrychlit za 2,5 s.

[45] Fakticky tímto způsobem ***konstruujeme*** okamžitou rychlost.

[46] Do vztahu (1.9) nemůžeme dosadit $\Delta t = 0$, nulou se dělit nedá. Ale Δt může být libovolně malé.

[47] To se podrobně dozvíte v matematické analýze. Jak ve fyzice počítat s limitami, derivacemi a užitečnými věcmi z matematické analýzy, se dozvíte (nebo si to připomenete, a v každém případě procvičíte) v předmětu Úvod do matematických metod fyziky.

Nejprve ale přepíšeme vztah (1.9) do tvaru, který se nám bude hodit v dalších úpravách:

$$\overline{v}_x = \frac{x(t_2)-x(t_1)}{t_2-t_1} = \frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t} \tag{1.10}$$

Příklad: rovnoměrně zrychlený pohyb

Při rovnoměrně zrychleném pohybu závisí souřadnice na čase podle vztahu

$$x = A\cdot t^2, \tag{1.11}$$

kde *A* je nějaká konstanta.

Po dosazení (1.11) do (1.10) dostaneme pro průměrnou rychlost na intervalu $<t_1, t_1+\Delta t>$:

$$\overline{v}_x = \frac{A\cdot(t_1+\Delta t)^2 - A\cdot t_1{}^2}{\Delta t} = \frac{A\cdot t_1{}^2 + 2At_1\Delta t + A\cdot(\Delta t)^2 - A\cdot t_1{}^2}{\Delta t} = 2At_1 + A\Delta t$$

Teď už je jasné, k čemu se bude přibližovat $\overline{v}_x$ když $\Delta t \to 0$. Zjevně to bude $2At_1$. Místo t_1 už budeme psát prostě t a nebudeme už psát pruh nad rychlostí – už nejde o průměrnou, ale o okamžitou rychlost:

$$v_x(t) = 2At\,. \tag{1.12}$$

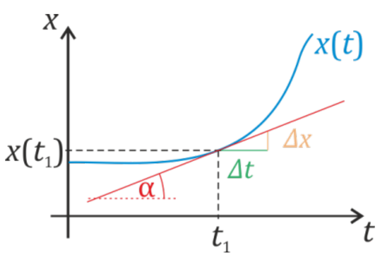
Samozřejmě jsme dostali známý výsledek: v případě rovnoměrně zrychleného pohybu se rychlost mění lineárně s časem. Obvykle se píše $x = \frac{1}{2}at^2$, pro rychlost pak vyjde známý vztah $v_x = at$.

Okamžitá rychlost

Okamžitou rychlost tedy z průměrné rychlosti (1.10) dostaneme limitou $\Delta t \to 0$:

$$v_x(t_1) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{x(t_1+\Delta t)-x(t_1)}{\Delta t} \tag{1.13}$$

V grafu $x = x(t)$ má okamžitá rychlost jednoduchou geometrickou interpretaci. Již jsme si rozmysleli, že jak se Δt přibližuje k nule, sečna grafu se stále víc přibližuje tečně. V limitě $\Delta t \to 0$ s tečnou splyne – viz obrázek níže.



Je tedy vidět, že pro okamžitou rychlost platí $v_x = \mathrm{tg}\,\alpha$, kde α je úhel, který svírá tečna s osou *x*.[48] Můžeme tedy říci, že okamžitá rychlost je rovna směrnici tečny ke grafu $x = x(t)$.

Názorně vidíme a bez všech vzorečků můžeme říci, že okamžitou rychlost poznáme z toho, jak strmě stoupá graf funkce $x = x(t)$. Strmé stoupání znamená velkou rychlost, pozvolné stoupání malou. A co když graf klesá? Zkuste si význam rozmyslet sami![49] A nakreslete a rozeberte odpovídající graf.

[48] Pro upřesnění: Toto platí samozřejmě opět za předpokladu, že na obou osách jsou jednotky stejně velké. Jinak bychom museli zůstat u poměru $\Delta x/\Delta t$ pro přírůstky souřadnic charakterizující tečnu, jak to ukazuje obrázek.

Okamžitá rychlost jako derivace souřadnice

Počítat rychlost vždy podle vzorce (1.13) by bylo zdlouhavé a únavné.[50] Ovšem podobný výraz, jakým je (1.13) známe z matematiky. Je jím definiční vztah pro derivaci funkce:[51]

$$\frac{df}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \ . \tag{1.14}$$

Porovnáním vztahů (1.13) a (1.14) vidíme, že

$$\boxed{\upsilon_x = \frac{dx}{dt} \ .} \tag{1.15}$$

Tento vztah můžeme vzít za definici okamžité rychlosti. Slovně to můžeme vyjádřit tak, že ***x*-ová složka rychlosti je derivací *x*-ové souřadnice podle času *t*.**[52]

Volněji (a méně přesně) často říkáme, že „**rychlost je derivací polohy podle času**“.

Poznamenejme, že tato definice rychlosti je vlastně přirozená. I ve vztahu (1.15) vlastně na pravé straně vidíme „přírůstek souřadnice dělený přírůstkem času“.[53]

Poznámka ke značení:

Z matematiky víme, že derivace podle *x* se často značí také čárkou: $\frac{df}{dx} \equiv f'$. V mechanice někdy používáme podobný zápis; derivaci podle času značíme **tečkou nad** příslušným symbolem. Vztah pro výpočet rychlosti tedy můžeme také psát jako

$$\upsilon_x = \dot{x} \ . \tag{1.16}$$

(Vztahy (1.15) a (1.16) znamenají přesně totéž, jde jen o jiné značení.)

Pojďme teď ilustrovat výše uvedenou obecnou definici rychlosti na několika jednoduchých příkladech.

---

[49] Pro kontrolu: znamená to, že *x*-ová složka rychlosti je záporná, tedy že $\upsilon_x < 0$. Znamená to, že hmotný bod „couvá“, tedy pohybuje se proti směru osy *x*.

[50] Zkuste si tímto způsobem spočíst třeba rychlost kmitavého pohybu, $x = A\cos(\omega t)$. To je úloha pro nadšence nebo masochisty!

[51] Kdo jste se s derivacemi potkali jen velmi vzdáleně nebo ještě vůbec ne, seznamte se s nimi prosím dříve, než budete studovat další části mechaniky. Derivace totiž budeme užívat prakticky pořád.
(S derivacemi se seznámíte nebo si je zopakujete např. v předmětu Úvod do matematických metod fyziky. V mechanice nebudeme o derivacích potřebovat znát žádné velké „jemnosti“, důležité ale je chápat jejich význam a umět s nimi počítat.)

[52] Poznamenejme, že předpokládáme, že závislost souřadnice na čase je taková, že derivace $\frac{dx}{dt}$ existuje. Toto budeme předpokládat i ve všech dalších případech, kdy budeme derivace v definicích veličin a při výpočtech používat.

[53] Pro matematiky je označení derivace, $\frac{df}{dx}$, a tedy i $\frac{dx}{dt}$, nedělitelným symbolem. Pokud se fyzikálního pochopení týče, je ale docela vhodné vidět v symbolu $\frac{dx}{dt}$ i původní poměr $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ - jen teď vlastně jsou ty přírůstky Δx a Δt v nějakém smyslu „nekonečně malé“.

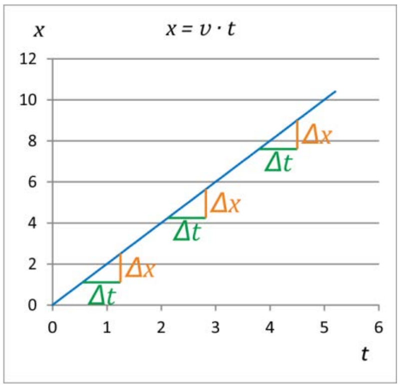
Při výpočtech rychlosti v konkrétních případech potřebujeme umět používat „tabulku derivací“ elementárních funkcí a několik základních pravidel pro práci s derivacemi.[54]

Příklad 1: rovnoměrný pohyb

Při rovnoměrném pohybu závisí souřadnice na čase podle vztahu $x = V \cdot t + x_0$. *x*-ovou složku rychlosti vypočteme s pomocí derivace jednoduše dosazením do (1.15):

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(V \cdot t + x_0\right) = \frac{d}{dt}\left(V \cdot t\right) + \frac{dx_0}{dt} = V \cdot \frac{dt}{dt} + 0 = V \quad ^{55} \tag{1.17}$$

Derivace přirozeně dala výsledek, který očekáváme. Skutečnost, že rychlost je konstantní, vidíme i z grafu. Strmost závislosti $x = x(t)$ je ve všech místech (resp. ve všech časech) stejná. Konstantní je tedy i derivace.



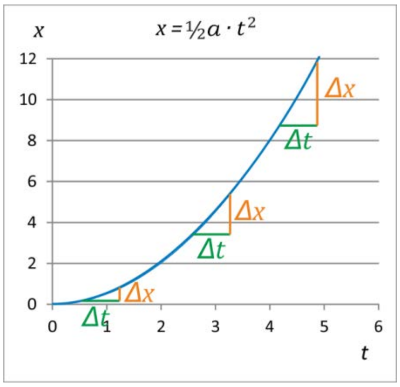
Příklad 2: rovnoměrně zrychlený pohyb

Souřadnice v tomto případě závisí na čase podle vztahu $x = A \cdot t^2$.[56] Pro *x*-ovou složku rychlosti dostáváme:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot t^2\right) = A\frac{d}{dt}\left(t^2\right) = A \cdot 2t \tag{1.18}$$

I teď vyšel očekávaný výsledek – a totéž, co jsme výše dostali limitou, viz (1.12).

Skutečnost, že se rychlost s časem zvětšuje, je opět vidět i z grafu. Pro vyšší časy je graf $x = x(t)$ strmější a strmější, poměr $\frac{\Delta x}{\Delta t}$ je větší a větší.



---

[54] Viz Dodatek 1.B na konci kapitoly.

[55] Protože jde o první příklad, rozepisujeme zde výpočet velmi podrobně; s trochou praxe budete za chvíli takto jednoduché výpočty provádět z hlavy.

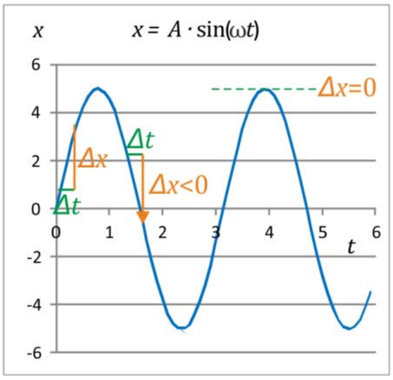
[56] Nebo obecněji $x = A \cdot t^2 + B \cdot t + C$. Vypočtete si rychlost i v tomto případě. (Pro kontrolu: $v_x = 2At + B$.)

Příklad 3: kmitavý pohyb

Při harmonických kmitech je časová závislost souřadnice dána funkcí sinus nebo kosinus, je tedy např. $x = A \cdot \sin(\omega t)$. x-ovou složku rychlosti opět vypočteme derivací podle času:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A \cdot \sin(\omega t)\right) = A \frac{d}{dt}\left(\sin(\omega t)\right) = A \cdot \left(\cos(\omega t) \cdot \omega\right) = A\omega \cos(\omega t)\,. \qquad (1.19)$$

Příklady, kdy je složka rychlosti kladná, kdy záporná a kdy rovna nule, ukazuje graf.



1.4 Rychlost – tentokrát ve třírozměrném případě

Složky rychlosti

Pohyb hmotného bodu v prostoru je dán tím, jak souřadnice x, y a z závisejí na čase:

$$x = x(t),\ y = y(t),\ z = z(t)\ . \tag{1.20}$$

Rychlost do směru osy x už umíme určit, je to derivace x podle času. Naprosto stejně tomu bude pro složky rychlosti do směrů y a z. Je tedy:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} \\ \upsilon_z &= \frac{dz}{dt} \end{aligned} \tag{1.21}$$

Prostě a jednoduše: **rychlost počítáme po složkách**. Totéž můžeme zapsat pomocí vektorů. υ_x, υ_y a υ_z, jsou složky vektoru rychlosti: $\vec{\upsilon} = (\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z)$. Vztahy (1.21) lze tedy vektorově zapsat jako

$$(\upsilon_x, \upsilon_y, \upsilon_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right), \tag{1.22}$$

nebo prostě jako

$$\boxed{\vec{\upsilon} = \frac{d\vec{r}}{dt}\ .} \tag{1.23}$$

Tento vztah můžeme chápat jako definici rychlosti hmotného bodu.

Obecné vztahy (1.21) resp. (1.23) je opět dobře ilustrovat na příkladech.

Příklad 4: vodorovný vrh

Jestliže osa x míří vodorovně a osa y svisle (vzhůru), je vodorovný vrh popsán vztahy $x = V \cdot t$, $y = -\frac{1}{2} g\, t^2$. Složky rychlosti dostaneme derivováním:

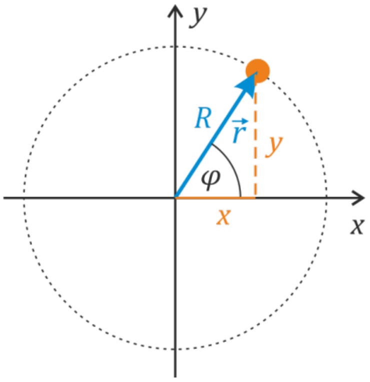
$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(V \cdot t) = V, \quad \upsilon_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\tfrac{1}{2} g\, t^2\right) = -\tfrac{1}{2} g \frac{d\left(t^2\right)}{dt} = -\tfrac{1}{2} g \cdot 2t = -g\, t \tag{1.24}$$

Výsledek dopadl podle očekávání: ve vodorovném směru je rychlost konstantní, ve svislém směru roste přímo úměrně času.[57]

[57] Rozmyslete si, proč je u svislé složky znaménko mínus. (Kam směřuje osa y a kam rychlost?)

Příklad 5: rovnoměrný pohyb po kružnici

Při rovnoměrném pohybu po kružnici o poloměru R jsou souřadnice x a y:



$$\begin{aligned} x &= R\cos(\omega t) \\ y &= R\sin(\omega t) \end{aligned} . \tag{1.25}$$

Skutečnost, že jde opravdu o pohyb po kružnici se středem v počátku souřadnic, je vidět z obrázku, úhel φ je přitom $\varphi = \omega t$. (Úhlová rychlost $\omega = \text{konst.}$, proto je pohyb rovnoměrný.) Z (1.25) se také můžeme přesvědčit, že $|\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2} = R$.

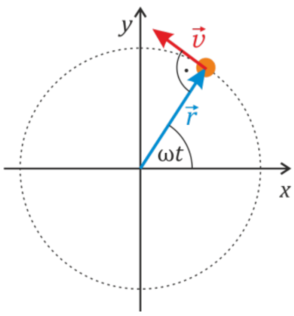
Složky rychlosti dostaneme derivováním:

$$\begin{aligned} \upsilon_x &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\big(R\cos(\omega t)\big) = -R\,\omega\sin(\omega t) \\ \upsilon_y &= \frac{dy}{dt} = \frac{d}{dt}\big(R\sin(\omega t)\big) = R\,\omega\cos(\omega t) \end{aligned} . \tag{1.26}$$

Ze složek rychlosti okamžitě dostaneme $\upsilon = |\vec{\upsilon}| = \sqrt{\upsilon_x{}^2 + \upsilon_y{}^2} = R\,\omega$, tedy rychlost při kruhovém pohybu. Navíc, skalární součin polohového vektoru a vektoru rychlosti je:

$$\vec{r}\cdot\vec{\upsilon} = x\cdot\upsilon_x + y\cdot\upsilon_y = R\cos(\omega t)\cdot\big(-R\omega\sin(\omega t)\big) + R\sin(\omega t)\cdot R\omega\cos(\omega t) = 0$$

Skalární součin je roven nule, to znamená, že oba vektory jsou na sebe **kolmé** – tak, jak to ukazuje obrázek vpravo.



Kolmost obou vektorů i velikost rychlosti bychom samozřejmě mohli odvodit i elementárně z obrázku, tím, že bychom kreslili, kam se hmotný bod posune za malý přírůstek času Δt. Na středoškolské úrovni (dokud studenti neznají derivace) je to celkem přirozený postup – a samozřejmě bychom ho také měli ovládat, resp. na požádání vymyslet.[58]

[58] Na výpočtu pomocí derivací však můžeme ocenit, že vlastně nevyžadoval žádnou zvláštní „chytrost“, stačí při něm umět derivovat. A stejným postupem vypočteme rychlost i v případě komplikovanějších pohybů.

1.5 Zrychlení

K pojmu zrychlení nás přivede jednoduchá otázka: ***Jak rychle se s časem mění rychlost?*** Nemusí to být otázka jen akademická. Majitelé rychlých a silných vozů se rádi pochlubí, za kolik sekund „to vytáhnou z nuly na stovku". Tím jinými slovy charakterizují zrychlení svých „bouráků". Jestliže za dobu Δt zvýší vůz rychlost o Δv, je jeho průměrné zrychlení

$$\bar{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t} .$$[59]

Podobně jako v případě rychlosti můžeme přejít od průměrného zrychlení k okamžitému. Nemusíme už procházet celý postup, protože máme nástroj, kterým určujeme, jak rychle se nějaká veličina s časem mění: derivaci, přesněji řečeno derivaci podle času.[60] Nepřekvapí nás tedy, že v jednorozměrném případě je složka zrychlení dána jako

$$\boxed{a_x = \frac{dv_x}{dt} .} \tag{1.27}$$

Pro pohyby ve výše uvedených příkladech 1 až 3, kde jsme počítali rychlost, můžeme nyní lehce spočíst zrychlení.

Příklad 1z: rovnoměrný přímočarý pohyb

Rychlost je dána vztahem $v_x = V$, takže zrychlení je $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(V\right) = 0$, v souladu s tím, co o rovnoměrném pohybu víme.

Příklad 2z: rovnoměrně zrychlený pohyb

Souřadnice je $x = A \cdot t^2$, rychlost (viz výše (1.18)) $v_x = 2A \cdot t$, takže zrychlení je

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(2At\right) = 2A ,$$

opět v souladu s tím, co známe. (Obvykle píšeme $x = \frac{1}{2} a \cdot t^2$, takže $A = a/2$.)

Příklad 3z: harmonický kmitavý pohyb

Souřadnice je $x = A \cdot \sin\left(\omega t\right)$, rychlost $v_x = A\omega \cos\left(\omega t\right)$. Zrychlení dostaneme opět derivováním:

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A\omega \cos\left(\omega t\right)\right) = -A\omega^2 \sin\left(\omega t\right) . \tag{1.28}$$

Z tohoto výsledku můžeme dostat zajímavý vztah mezi zrychlením a souřadnicí: $a_x = -x\omega^2$.

---

[59] Jestliže výše zmíněný Bugatti Veyron zrychlí z nuly na 100 km/h (tj. na 27,8 m/s) za 2,5 s, je tedy jeho průměrné zrychlení asi 11 m/s^2. (Z toho by se daly počítat další zajímavé věci…)

[60] Ve fyzice ji budete užívat velice často. Například v elektromagnetismu bude časová změna magnetického indukčního toku Φ dána derivací $\frac{d\Phi}{dt}$.

Při harmonickém kmitavém pohybu je zrychlení přímo úměrné výchylce, ale má opačný směr.[61]

Vektor zrychlení

Ve třírozměrném případě jsou *y*-ová i *z*-ová složka zrychlení dána analogickými vzorci jako a_x. Je tedy

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} \qquad a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} \qquad a_z = \frac{d\upsilon_z}{dt} \tag{1.29}$$

Všechny tyto tři vztahy můžeme opět zapsat naráz pomocí vektorů jako

$$\boxed{\vec{a} = \frac{d\vec{\upsilon}}{dt}\ ,} \tag{1.30}$$

kde vektor zrychlení je přirozeně $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$. Obecné vztahy si zase ilustrujeme na příkladech, konkrétně na „pokračování“ výše uvedených příkladů 4 a 5.

Příklad 4z: vodorovný vrh

Souřadnice jsou dány vztahy $x = V \cdot t$, $y = -\frac{1}{2} g\, t^2$, složky rychlosti z nich vyšly $\upsilon_x = V$ a $\upsilon_y = -g \cdot t$. Jejich zderivováním dostaneme $a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = \frac{dV}{dt} = 0$ a $a_y = \frac{d\upsilon_y}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-g\, t\right) = -g$.

Je tedy, podle očekávání,

$$\vec{a} = \left(0, -g\right) .$$ [62]

Příklad 5z: rovnoměrný pohyb po kružnici

Souřadnice jsou dány vztahy $x = R\cos\left(\omega t\right)$, $y = R\sin\left(\omega t\right)$, složky rychlosti (viz (1.26)) $\upsilon_x = -R\,\omega\sin\left(\omega t\right)$, $\upsilon_y = R\,\omega\cos\left(\omega t\right)$. Složky zrychlení dané jejich derivováním jsou

---

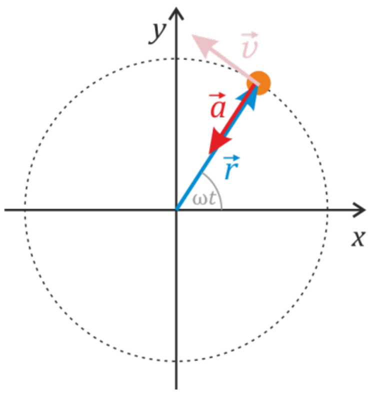
[61] Když již předem nahlédneme do dynamiky a využijeme druhý Newtonův zákon, $m\, a_x = F_x$, vidíme, že v případě harmonických kmitů je síla přímo úměrná výchylce a má opačný směr. Tohle platí např. pro sílu pružiny: $F_x = -k \cdot x$. Je tedy vidět (nebo alespoň můžeme „pojmout podezření, že“) např. závaží zavěšené na pružině bude kmitat harmonickými kmity – a chceme-li, můžeme z tuhosti pružiny k a hmotnosti závaží m spočíst úhlovou frekvenci kmitů ω a z ní pak frekvenci $f = \omega/(2\pi)$ a odtud periodu kmitů.

[62] Poznamenejme, že zde problém bereme jako dvourozměrný, takže neuvažujeme souřadnici z.

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\big(-R\,\omega\sin(\omega t)\big) = -R\,\omega^2\cos(\omega t)$$
$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d}{dt}\big(R\,\omega\cos(\omega t)\big) = -R\,\omega^2\sin(\omega t) \tag{1.31}$$

Vektor zrychlení je $\vec{a} = \left(-R\,\omega^2\cos(\omega t),\, -R\,\omega^2\sin(\omega t)\right) = -\omega^2\left(R\cos(\omega t),\, R\sin(\omega t)\right)$.

Porovnáním s polohovým vektorem $\vec{r} = \left(R\cos(\omega t),\, R\sin(\omega t)\right)$ vidíme, že platí



$$\vec{a} = -\vec{r}\,\omega^2 \,. \tag{1.32}$$

To znamená, že zrychlení má opačný směr než polohový vektor – jinými slovy, jak ukazuje obrázek, míří do středu kružnice, jde o **dostředivé zrychlení**. Navíc ze vztahu (1.32) plyne i známý vztah pro velikost dostředivého zrychlení:[63]

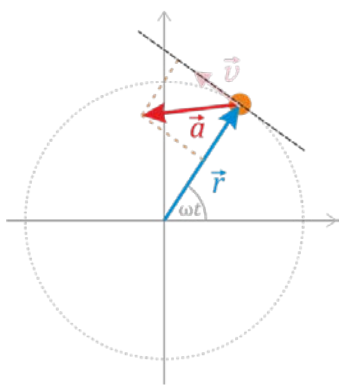
$$a = R\,\omega^2 \,. \tag{1.33}$$

Normálové a tečné zrychlení

Předchozí příklad ukazuje situaci, kdy je zrychlení kolmé na rychlost. Protože rychlost má směr tečny k trajektorii pohybu[64], můžeme říci, že zrychlení bylo v tomto případě kolmé k tečně. Nebo ještě jinak, že mělo směr **normály** k trajektorii. Tak je tomu třeba v případě, že projíždíte autem kruhovou zatáčku konstantní rychlostí – zrychlení auta míří do středu zatáčky.

Naopak v případě, kdy auto jede po přímé silnici a zrychluje, míří jeho zrychlení ve směru **tečny** k trajektorii.[65]

Co když ale auto jede v zatáčce a navíc zrychluje, tj. zvyšuje svou rychlost[66]? Evidentně jedna část jeho zrychlení odpovídá tomuto zvyšování rychlosti. Tuto část nazýváme **tečné zrychlení**. Druhá část je dána tím, že auto projíždí zatáčkou, tu nazýváme **normálové zrychlení.**



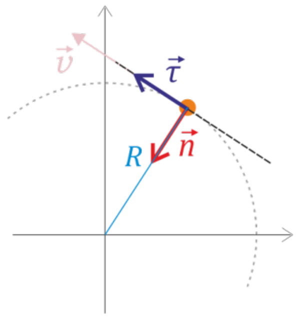
Tak, a teď už to jen formalizovat.

[63] Rozmyslete si, jak (1.33) plyne z (1.32)!
[64] Rozmyslete si, že tohle platí a proč. (Nebo ještě lépe: rozmyslete si, jak byste to někomu vysvětlili.)
[65] Prostě ve směru té přímky, tj. přímé silnice, po které jede. Příslušný obrázek si jistě umíte načrtnout sami.
[66] Přesněji bychom asi měli říci, že zvyšuje ***velikost své rychlosti***. To je totiž číslo, čili skalární veličina v. Termín *rychlost* bychom si rezervovali pro vektorovou veličinu $\vec{v}$, která kromě rychlosti určuje i směr. (Velikost rychlosti je $v = |\vec{v}|$.) Toto se může zdát jako poznámka pro puntičkáře, ale například v angličtině se rozlišuje *speed* (což je velikost rychlosti) a *velocity* (která má i směr). V češtině ovšem běžně říkáme, že „auto jelo rychlostí 50 km/h“. I v tomto textu tedy možná někdy použijeme termín „rychlost“ a z kontextu bude zřejmé, že máme na mysli velikost rychlosti.

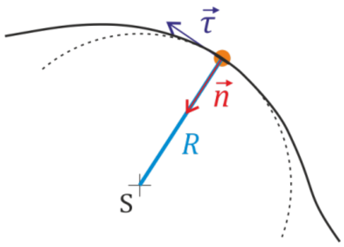
Nejprve ještě zavedeme **tečný vektor** $\vec{\tau}$ mířící ve směru pohybu. Je jednotkový, je tedy $|\vec{\tau}| = 1$. Ve směru pohybu míří také rychlost $\vec{v}$, to znamená, že

$$\vec{v} = v\,\vec{\tau} \;. \tag{1.34}$$

Normálový vektor $\vec{n}$ je kolmý na tečný vektor, $\vec{n} \perp \vec{\tau}$, tj. platí $\vec{n} \cdot \vec{\tau} = 0$. Je to také jednotkový vektor, $|\vec{n}| = 1$. Normálový vektor míří z daného bodu křivky do **středu křivosti**. V případě, kdy křivkou je kružnice, je jasné, kde střed křivosti leží a právě tak je jasné, jaký je **poloměr křivosti** *R*.[67]



Každá křivka samozřejmě není kružnice; hmotný bod se může pohybovat po různě „klikatých“ trajektoriích. Pro všechny „dostatečně hladké trajektorie“[68] ale můžeme najít kružnici, která křivku v daném bodě nejlépe aproximuje.[69], viz obrázek vpravo. Střed této kružnice je středem křivosti křivky a poloměr této kružnice je poloměrem křivosti křivky.



(Poznámka: Obecně střed křivosti není jeden pro celou křivku, podobně je tomu pro poloměr křivosti. Představte si třeba zatáčku, která se postupně „otevírá“, tedy „napřimuje“. Tam, kde je zatáčka „nejostřejší“, má malý poloměr křivosti, v „otevřenějších partiích“ větší.)

Teď už máme vše potřebné, abychom mohli zrychlení $\vec{a}$ rozložit na normálové a tečné. Vyjdeme ze vztahu (1.34) a budeme jej derivovat podle času:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(v\,\vec{\tau}\right) = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} + v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \;. \tag{1.35}$$

A jsme vlastně hotovi! První člen má směr tečného vektoru $\vec{\tau}$, je to tedy **tečné zrychlení** $\vec{a}_t$:

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \quad , \qquad a_t = \frac{dv}{dt} . \tag{1.36}$$

Druhý člen představuje **normálové zrychlení** $\vec{a}_n$:

$$\vec{a}_n = v\frac{d\vec{\tau}}{dt} \;. \tag{1.37}$$

Ovšem pozor:

---

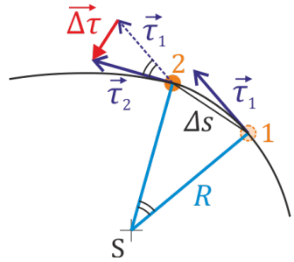
[67] Jen pro kontrolu, abyste v tom nehledali nějakou záludnost: Střed křivosti je ve středu kružnice, poloměr křivosti je poloměr dané kružnice.

[68] Matematika nás (v jejím oddílu zvaném diferenciální geometrie) poučí, jaké podmínky musí splňovat křivky, abychom pro ně mohli definovat normálový vektor a poloměr křivosti. V tomto našem úvodním výkladu občas použijeme velmi vágní vyjádření typu, že něco platí pro „všechny rozumné křivky“, „všechny rozumné funkce“ apod., čímž budeme rozumět křivky či funkce, pro něž platí předpoklady příslušných matematických vět, které jsou podkladem pro odvozování, která zde děláme. (Omlouváme se matematikům a matematičtěji zaměřeným čtenářům za tento přístup, v němž nám jde hlavně o fyzikální význam pojmů, veličin a vztahů. Věříme, že příslušné matematiky znalí čtenáři si přesnější formulace potřebných předpokladů sami vybaví či dohledají. A ti, kdo budou potřebné partie matematiky studovat teprve v budoucnu, si potřebná matematická zpřesnění uvědomí, až se k partiím klasické mechaniky budou někdy vracet.)

[69] Takové kružnici říkáme *oskulační kružnice.*

Směr výrazu na pravé straně (1.37) je dán vektorem $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. A **jak víme**, že tento směr má směr normálového vektoru, tedy že **je kolmý na** $\vec{\tau}$ **?**[70]

Že tomu tak je, lze ilustrovat pomocí obrázku vpravo. Poloha hmotného bodu je na něm vyznačena ve dvou časech: t_1 a $t_2 = t_1 + \Delta t$.



$\Delta\vec{\tau}$ je změna vektoru $\vec{\tau}$ za dobu Δt: $\Delta\vec{\tau} = \vec{\tau}_2 - \vec{\tau}_1$. Z obrázku je vidět, že $\Delta\vec{\tau}$ je „skoro kolmé“ na vektory $\vec{\tau}_1$ i $\vec{\tau}_2$.[71] Když zmenšujeme Δt, vektory $\vec{\tau}_1$ a $\vec{\tau}_2$ se k sobě přibližují a úhel mezi každým z nich a $\Delta\vec{\tau}$ se blíží pravému úhlu. V limitě $\Delta t \to 0$ je na ně $\Delta\vec{\tau}$ kolmé – a proto je také $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ kolmé na $\vec{\tau}$.[72]

Uvedený obrázek nám navíc pomůže určit i velikost vektoru $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$. Začneme tím, že spočteme velikost $|\Delta\vec{\tau}|$. Z podobnosti trojúhelníků na obrázku plyne $\frac{|\Delta\vec{\tau}|}{|\vec{\tau}|} = \frac{\Delta s}{R}$ a odtud (protože $|\vec{\tau}| = 1$) $|\Delta\vec{\tau}| = \frac{\Delta s}{R}$.

Délka úsečky mezi body 1 a 2 je prakticky rovna délce oblouku mezi těmito body. (Pro malé Δt se oblouk hodně přimyká k úsečce.) Tato délka je dráha uražená za čas Δt, tedy $\Delta s = \upsilon \cdot \Delta t$. Je tedy $|\Delta\vec{\tau}| = \frac{\Delta s}{R} = \frac{\upsilon\,\Delta t}{R}$. Po vydělení Δt dostáváme $\left|\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}\right| = \frac{\upsilon}{R}$. V limitě $\Delta t \to 0$ přejde zlomek $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ v derivaci, takže dostaneme výsledek $\left|\frac{d\vec{\tau}}{dt}\right| = \frac{\upsilon}{R}$.[73] Ze vztahu (1.37) pak konečně dostaneme $\vec{a}_n = \upsilon\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \upsilon\frac{\upsilon}{R}\vec{n}$, takže:

$$\vec{a}_n = \frac{\upsilon^2}{R}\vec{n}\,, \qquad a_n = \frac{\upsilon^2}{R}\,. \tag{1.38}$$
[74]

Zrychlení hmotného bodu je součtem tečného a normálového zrychlení:

$$\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n\,. \tag{1.39}$$

[70] Pokud by nebyl kolmý, pak by ani nebylo pravda, že výraz na pravé straně (1.36) je opravdu tečným zrychlením. (Uvědomte si proč.) A přitom konstatování na řádku nad (1.36) znělo tak samozřejmě a sugestivně, že? (Poučení: Nevěřte všemu, co se někde sugestivně říká a píše. V matematice a fyzice si naštěstí můžeme věci sami propočítat a ověřit – a při jejich studiu je velmi vhodné to dělat!)

[71] Uvědomte si, že vektory $\vec{\tau}_1$ a $\vec{\tau}_2$ jsou stejně dlouhé, takže spolu s vektorem $\overrightarrow{\Delta\tau}$ tvoří rovnoramenný trojúhelník. Tuto vlastnost využijeme i při dalším odvození.

[72] Derivace $\frac{d\vec{\tau}}{dt}$ totiž vznikla z limity výrazu $\frac{\Delta\vec{\tau}}{\Delta t}$ právě pro $\Delta t \to 0$.

[73] Než jsme udělali limitu $\Delta t \to 0$, byly některé z výše uvedených vztahů jen přibližné, např. Δs bylo jen přibližnou délkou úsečky spojující body 1 a 2. Po provedení limity je výsledek už přesně.

[74] Pokud symbol normálového zrychlení píšeme bez šipky, znamená samozřejmě velikost normálového zrychlení. Podobně je tomu pro tečné zrychlení, viz výše vztah (1.36); ovšem $a_t = \frac{d\upsilon}{dt}$ může být i záporné (třeba když auto brzdí).

Výše uvedené odvození kolmosti vektorů $\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$ a $\vec{\tau}$ „z obrázku“ bylo sice snad názorné, ale přece jen možná přemýšlíte, zda by ta kolmost nešla dokázat nějak „pořádněji“, formálněji.

Šla. Z toho, že $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor, plyne, že

$$\vec{\tau}\cdot\vec{\tau} = 1 \tag{1.40}$$

Derivujeme-li levou stranu podle t, dostaneme $\dfrac{d}{dt}\left(\vec{\tau}\cdot\vec{\tau}\right) = \dfrac{d\vec{\tau}}{dt}\cdot\vec{\tau} + \vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{dt} = 2\,\vec{\tau}\cdot\dfrac{d\vec{\tau}}{dt}$. Pravá strana je konstanta, takže její derivace je rovna nule. Derivací (1.40) podle času tedy dostaneme

$$\vec{\tau}\cdot\frac{d\vec{\tau}}{dt} = 0\ , \tag{1.41}$$

To znamená, že dané vektory jsou na sebe kolmé.

Z kinematiky hmotného bodu jsme se toho už přiučili dost; doplňme už jen několik drobností.

Zrychlení je druhá derivace polohového vektoru

Zrychlení je derivace rychlosti podle času; rychlost je derivací polohového vektoru podle času. To znamená, že zrychlení je derivace derivace – tedy **druhá derivace** – polohového vektoru:

$$\vec{a} = \frac{d}{dt}\left(\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\right) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}\ . \tag{1.42}$$

Vztah (1.42) opět můžeme (a pro konkrétní výpočty musíme) vyjádřit ve složkách:

$$\begin{aligned} a_x &= \frac{d^2x}{dt^2} \\ a_y &= \frac{d^2y}{dt^2} \\ a_z &= \frac{d^2z}{dt^2} \end{aligned} \tag{1.43}$$

Podobně, jako se první derivace podle času alternativně vyjadřuje tečkou nad veličinou, vyznačuje se **druhá** derivace **dvěma tečkami**: $\dfrac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$, apod. Vztahy (1.43) tedy můžeme také zapsat ve tvaru

$$a_x = \ddot{x},\quad a_y = \ddot{y},\quad a_z = \ddot{z} \tag{1.44}$$

a vztah (1.42) jako

$$\vec{a} = \ddot{\vec{r}}\ . \tag{1.45}$$

1.6 Jak z rychlosti určit polohu (a ze zrychlení rychlost)

Zatím umíme z polohy, tedy z časové závislosti souřadnic, určit rychlost. Jde to i naopak – tedy ze složek rychlosti určit souřadnice polohy? Jde!

Z matematiky víme, že je-li $g(x)=\dfrac{df}{dx}$, pak „původní“ funkce f je integrálem z g: $f(x)=\int g(x)\,dx$.[75]

Jestliže tedy $\upsilon_x=\dfrac{dx}{dt}$, je souřadnice integrálem z příslušné složky rychlosti:

$$x=\int \upsilon_x(t)\,dt\ . \tag{1.46}$$

Totéž platí pro další souřadnice: $y=\int \upsilon_y(t)\,dt,\ \ z=\int \upsilon_z(t)\,dt$. Ve vektorovém zápisu pak

$$\vec{r}=\int \vec{\upsilon}(t)\,dt\ , \tag{1.47}$$

přičemž z výše uvedeného je jasné, že integraci děláme po složkách.

Rychlost ze zrychlení

Podobně můžeme ze známého zrychlení určit rychlost:

$$\vec{\upsilon}=\int \vec{a}(t)\,dt\ , \tag{1.48}$$

ve složkách tedy $\upsilon_x=\int a_x(t)\,dt,\ \upsilon_y=\int a_y(t)\,dt,\ \upsilon_z=\int a_z(t)\,dt$.

Obecné vztahy budeme opět ilustrovat na příkladech.[76]

Příklad 6: rovnoměrně zrychlený pohyb

Jde o jednorozměrný pohyb, jehož zrychlení je konstantní: $a_x=a=\text{konst.}$ Integrací dostaneme rychlost:

$$\upsilon_x(t)=\int a_x(t)\,dt=\int a\,dt\ =\ a\cdot t+B\,, \tag{1.49}$$

kde B je libovolná konstanta (integrační konstanta)[77]. Její význam je jasný, když do (1.49) dosadíme $t=0$: $\upsilon_x(0)=B$. Konstanta B je **počáteční rychlost**. Integrací (1.49) dostaneme souřadnici:

$$x(t)=\int \upsilon_x(t)\,dt=\int\left(a\cdot t+B\right)dt\ =\ \tfrac{1}{2}a\cdot t^2+B\cdot t+C\,. \tag{1.50}$$

[75] Jde o ***neurčitý integrál***, v matematické analýze také nazývaný ***primitivní funkce***. Neurčitý integrál několika elementárních funkcí a několik základních pravidel pro práci s integrály stručně připomíná Dodatek 1.C na konci kapitoly.
[76] Potřebné vztahy pro výpočet integrálů jsou připomenuty v Dodatku 1.C, v následujících příkladech budeme potřebovat jen ty nejjednodušší.
[77] V Dodatku 1.C značíme integrační konstantu obecně *C*, můžeme ji však značit libovolným písmenem.

C je opět integrační konstanta, která má význam počáteční hodnoty souřadnice ($C = x(0)$ [78]).

Z příkladu je vidět, že při výpočtu souřadnic ze známého zrychlení se ve výsledku objeví dvě libovolné integrační konstanty. Ty určíme z **počátečních podmínek** $x(0) = x_0$, $\upsilon_x(0) = \upsilon_0$, tedy z polohy a rychlosti hmotného bodu v čase $t = 0$ [79].

To, že při výpočtu pohybu budeme některé konstanty určovat z počátečních podmínek, bude typické i v dalších úlohách a příkladech.[80]

Příklad 7: šikmý vrh

Jaký pohyb koná hmotný bod v homogenním gravitačním poli s gravitačním zrychlením g? Orientujeme-li soustavu souřadnic tak, aby osy *x* a *y* mířily vodorovně a osa *z* svisle vzhůru, je $\vec{g} = (0, 0, -g)$. To znamená, že složky zrychlení hmotného bodu jsou

$$a_x = 0, \quad a_y = 0, \quad a_z = -g \quad . \tag{1.51}$$

Integrací získáme složky rychlosti:

$$\upsilon_x = \upsilon_{x0}, \quad \upsilon_y = \upsilon_{y0}, \quad \upsilon_z = -g \cdot t + \upsilon_{z0} \; . \tag{1.52}$$

Integrační konstanty jsme označili $\upsilon_{x0}, \upsilon_{y0}$ a υ_{z0}; jde o složky rychlosti do směrů *x*, *y* a *z* v čase $t = 0$.

Pro jednoduchost můžeme navíc předpokládat, že osy x a y natočíme tak, aby bylo $\upsilon_{y0} = 0$, tedy aby pohyb probíhal jen v rovině *xz*. Pak se vztahy (1.52) nepatrně zjednoduší na

$$\upsilon_x = \upsilon_{x0}, \quad \upsilon_y = 0, \quad \upsilon_z = -g \cdot t + \upsilon_{z0} \; . \tag{1.53}$$

Jejich další integrací podle času dostaneme

$$x = \upsilon_{x0} \cdot t + x_0, \quad y = 0, \quad z = -\frac{1}{2} g \cdot t^2 + \upsilon_{z0} \cdot t + z_0 \; . \tag{1.54}$$

Zde už jsme pro zjednodušení rovnou uvažovali počáteční podmínku $y(0) = 0$, x_0 a z_0 jsou samozřejmě počáteční hodnoty souřadnic *x* a z.

Pokud bychom uvažovali šikmý vrh z počátku (tj. $x_0 = 0, z_0 = 0$) rychlostí υ_0 pod úhlem α vůči vodorovné rovině (tedy $\upsilon_{x0} = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha$, $\upsilon_{y0} = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha$) vyjdou z (1.54) známé vztahy pro šikmý vrh,

$$x = \upsilon_0 \cdot \cos\alpha \cdot t, \qquad z = \upsilon_0 \cdot \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2} g \cdot t^2 \; .$$

A to už je z naší kapitoly o kinematice hmotného bodu opravdu všechno…[81]

[78] Ověřte si z (1.50), že je tomu opravdu tak.
[79] Samozřejmě bychom mohli jako počáteční hodnotu zadat libovolný jiný čas t_0.
[80] Netýká se to jen mechaniky. Například i v elektrických obvodech budeme zadávat třeba to, na jaké napětí je v počátečním čase nabit elektrický kondenzátor apod.
[81] Až na shrnutí a tři drobné dodatky shrnující některou potřebnou matematiku.

Shrnutí

Hmotný bod charakterizujeme hmotností a polohou. Je to (užitečná) abstrakce. Prakticky za hmotný bod můžeme považovat těleso, jehož rozměry jsou velmi malé (zanedbatelně malé) vůči charakteristickým rozměrům v dané situaci či úloze.

Polohu hmotného bodu určujeme vůči **vztažné soustavě**. (Tu můžeme definovat jako systém skutečných nebo myšlených těles, která jsou navzájem v klidu.) Ve vztažné soustavě zavádíme **soustavu souřadnic**. (Většinou budeme užívat **kartézskou** soustavu souřadnic.)

Polohu hmotného bodu určuje **polohový vektor** $\vec{r} = (x, y, z) \equiv (x_1, x_2, x_3)$, x, y, z jsou jeho složky.

Pohyb je popsán tím, jak se polohový vektor mění s časem: $\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$.

Rychlost (přesněji řečeno **okamžitá rychlost**) je derivací polohového vektoru podle času:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \dot{\vec{r}}$$

Ve složkách (vektor rychlosti je $\vec{v} = (v_x, v_y, v_z) = (v_1, v_2, v_3)$) je $v_x = \dfrac{dx}{dt} \equiv \dot{x}$, atd., tedy:

$$v_1 = \frac{dx_1}{dt} \equiv \dot{x}_1, \quad v_2 = \frac{dx_2}{dt} \equiv \dot{x}_2, \quad v_3 = \frac{dx_3}{dt} \equiv \dot{x}_3,$$ což lze napsat jako $v_i = \dfrac{dx_i}{dt} \equiv \dot{x}_i$, pro $i = 1, 2, 3$.

Zrychlení je derivací rychlosti podle času:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \dot{\vec{v}} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \equiv \ddot{\vec{r}} ,$$

ve složkách $a_x = \dfrac{dv_x}{dt} \equiv \dot{v}_x = \dfrac{d^2x}{dt^2} \equiv \ddot{x}$, atd.

Zrychlení se dá rozložit na **tečné zrychlení** $\vec{a}_t$ a **normálové zrychlení** $\vec{a}_n$: $\vec{a} = \vec{a}_t + \vec{a}_n$, kde

$$\vec{a}_t = \frac{dv}{dt}\vec{\tau} \quad \text{a} \quad \vec{a}_n = \frac{v^2}{R}\vec{n} .$$

$\vec{\tau}$ je **tečný vektor** (tečný k trajektorii, po níž se bod pohybuje, je $\vec{v} = v\,\vec{\tau}$), $\vec{n}$ je **normálový vektor** k této trajektorii. $\vec{\tau}$ a $\vec{n}$ jsou jednotkové vektory.

Polohu bodu ($\vec{r}$ resp. jeho souřadnice) lze ze známé rychlosti učit její integrací podle času:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(t)dt \;, \quad \text{tj. } x(t) = \int v_x(t)dt \text{, atd.}$$

Podobně ze známého zrychlení integrací vypočteme rychlost:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(t)dt \;, \quad \text{tj. } v_x(t) = \int a_x(t)dt \text{, atd.}$$

Při výpočtu souřadnic ze zrychlení obsahuje výsledek dvě libovolné konstanty (dvě pro každou souřadnici, celkem tedy pro třírozměrný problém 6 konstant). Ty určíme z **počátečních podmínek**, tady z polohy a rychlosti v počátečním čase (ten se obvykle volí $t = 0$).

Dodatek 1.A: Vektory

O vektorech zde připomeneme jen to nejzákladnější a nejpotřebnější:

Vektor ve třírozměrném prostoru má tři **složky**: $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$, složky také označujeme a_1, a_2, a_3.

Lze tedy psát také $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$.

Velikost vektoru je $a = |\vec{a}| = \sqrt{(a_1)^2 + (a_2)^2 + (a_3)^2}$.

Skalární součin vektorů $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ a $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ je $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$.

S pomocí symbolu sumace je vztah pro skalární součin kratší: $\vec{a} \cdot \vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i$. [82]

Pomocí skalárního součinu lze zapsat velikost vektoru jako $a = |\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$, je tedy $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$.

Jiné vyjádření skalárního součinu: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a\ b \cos\alpha$, kde α je úhel, který svírají vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$.

Graficky vektor reprezentujeme úsečkou se šipkou – ale to snad nemusíme připomínat.

[82] Často se (zejména v textech a učebnicích věnujících se pokročilejším partiím) dokonce ani nepíše symbol sumace, takže se skalární součin zapisuje jen jako $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_i \cdot b_i$. Využívá se přitom tzv. *Einsteinovy sumační konvence*: pokud se v součinu index opakuje dvakrát, znamená to, že se přes něj sčítá. (Rozsah, odkud kam se sčítá, je daný kontextem, v našem případě je jasné, že to je od 1 do 3.) V tomto učebním textu ale pro větší srozumitelnost danou sumační konvenci užívat nebudeme a symbol sumace budeme psát.

Dodatek 1.B: Pravidla pro práci s derivacemi

V tomto dodatku stručně shrneme derivace některých elementárních funkcí a pravidla pro práci s derivacemi. Nebudeme zde ale zvlášť upozorňovat na podmínky platnosti uvedených vztahů[83].

Derivace elementárních funkcí:

$\dfrac{d(x^n)}{dx} = n \cdot x^{n-1}$ ..... platí pro všechna x a n, kde výrazy mají smysl, např. je

$$\frac{dy}{dx}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{d\left(x^{-1}\right)}{dx} = -1 \cdot x^{-2} = -\frac{1}{x^2} \quad \text{a} \quad \frac{dy}{dx}\left(\sqrt{x}\right) = \frac{d\left(x^{1/2}\right)}{dx} = \frac{1}{2}\cdot x^{-1/2} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Speciálně také platí, že derivace konstanty je nula.

$$\frac{d(\sin x)}{dx} = \cos x \ , \qquad \frac{d(\cos x)}{dx} = -\sin x$$ [84]

$$\frac{d\,e^x}{dx} = e^x \ , \qquad \frac{d\,(\ln x)}{dx} = \frac{1}{x}$$

Pravidla pro práci s derivacemi:

$$\frac{d(f+g)}{dx} = \frac{d\,f}{dx} + \frac{d\,g}{dx} \ , \qquad \frac{d(f-g)}{dx} = \frac{d\,f}{dx} - \frac{d\,g}{dx}$$

$$\frac{d(f \cdot g)}{dx} = \frac{d\,f}{dx}\cdot g + f \cdot \frac{d\,g}{dx} \ , \qquad \frac{d}{dx}\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{\frac{d\,f}{dx}\cdot g - f \cdot \frac{d\,g}{dx}}{g^2}$$

Derivace složené funkce: $\dfrac{d\ \ f\left(g(x)\right)}{dx} = \dfrac{d\,f}{dy}\cdot\dfrac{d\,g}{dx}$ (Je $f = f(y)$, kde za y dosazujeme $y = g(x)$.)

Kratší a možná přehlednější je **zápis, kdy se derivace označuje čárkou**:

$\left(x^n\right)' = n \cdot x^{n-1}$	$(\sin x)' = \cos x$	$(\cos x)' = -\sin x$	$\left(e^x\right)' = e^x$	$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$

$(f \pm g)' = f' \pm g'$	$(f \cdot g)' = f'g + fg'$	$\left(\dfrac{f}{g}\right)' = \dfrac{f'g - fg'}{g^2}$

---

[83] Například na to, že ve jmenovateli nesmí být nula nebo že nesmíme odmocňovat záporná čísla. V pravidlech pro práci s derivacemi předpokládáme, že pro všechny uvedené funkce jejich derivace existují.

[84] Pomocí pravidla pro derivaci podílu lze odvodit, že $\dfrac{d(\mathrm{tg}\,x)}{dx} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\sin x}{\cos x}\right) = \cdots = \dfrac{1}{\cos^2 x}$ a $\dfrac{d(\mathrm{cotg}x)}{dx} = \dfrac{-1}{\sin^2 x}$.

Dodatek 1.C: Integrály základních funkcí

V tomto dodatku velmi stručně připomeneme neurčité integrály (primitivní funkce) několika základních funkcí. Podobně jako v předchozím dodatku nebudeme upozorňovat na podmínky platnosti uvedených vztahů. Symbolem C označujeme libovolnou konstantu.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int e^x dx = e^x + C$$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

Pravidla pro práci s integrály ($f = f(x)$ a $g = g(x)$ jsou libovolné funkce[85]):

$$\int \left(f(x) \pm g(x) \right) dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx$$

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \qquad \text{(integrace per partes)}$$

$$\int f\left(g(x)\right) \cdot g'(x) \, dx = \int f(y) \, dy \qquad \text{(integrace substitucí, je } y = g(x) \text{)}$$

[85] Libovolné, ale takové, že mají integrál (tj. jsou integrovatelné) a v případě potřeby mají derivaci.