Dynamika hmotného bodu I: hmotnost a síla

Kinematika popisovala pohyb hmotného bodu, aniž se starala, co jej způsobuje. V dynamice se budeme zabývat tím, co pohyb, resp. jeho změny, způsobuje.

Můžete si říci, že základní zákony dynamiky přece známe. Jsou to tři Newtonovy pohybové zákony, které formuloval ve svých *Principiích* už před více než 330 lety. Co by na nich mohlo být složitého? Tak se na ně podíváme trochu blíže.

2.1 Newtonovy zákony (aneb známé věci trochu novým pohledem)

Newtonovy pohybové zákony si tu připomeneme v „učebnicovém tvaru“[1] :

1. Těleso setrvává v klidu nebo rovnoměrném přímočarém pohybu, pokud není vnějšími silami donuceno tento pohyb změnit.
2. Zrychlení tělesa je úměrné celkové síle na těleso působící a nepřímo úměrné jeho hmotnosti, $m\vec{a} = \vec{F}$.
3. Dvě tělesa na sebe navzájem působí silami stejné velikosti, ale opačného směru.

Mohly by nás při bližším zamyšlení nad těmito formulacemi napadnout nějaké otázky či námitky?[2]

Hned první z možných otázek by byla docela provokativní: ***K čemu vlastně potřebujeme první Newtonův zákon?*** Neplyne jednoduše z druhého? Vždyť je-li síla působící na těleso nulová, $\vec{F} = 0$, je podle 2. Newtonova zákona nulové i zrychlení, $\vec{a} = 0$ a tím pádem je rychlost konstantní, $\vec{v} = \text{konst.}$ – čili takovéto těleso setrvává v rovnoměrném přímočarém pohybu. Tak proč pro to formulovat zvláštní zákon?

Také k druhému Newtonovu zákonu bychom mohli vznášet „nepříjemné“ otázky. ***Jak ho vůbec můžeme brát jako zákon?*** Vystupují v něm totiž **tři** veličiny: hmotnost, zrychlení a síla. Z nich ovšem známe a umíme měřit jen zrychlení. Hmotnost a síla sem vstupují jako úplně nové veličiny. Jak je máme definovat? Ze samotného vztahu $m\vec{a} = \vec{F}$? Ale jak jedním vztahem definovat dvě veličiny? A byl by pak tento vztah opravdu fyzikálním zákonem, nebo jenom definicí?[3]

Třetí Newtonův zákon už raději necháme na pokoji a podíváme se, jak se vypořádat s prvními dvěma.

První Newtonův zákon, inerciální soustavy

Pojďme jej nejprve zformulovat trochu stručněji. Místo o tělese budeme mluvit o hmotném bodu. Zákon se týká tělesa resp. bodu, na který nepůsobí vnější síly. V mechanice máme pro takový bod zvláštní název: **volný hmotný bod**.

[1] Tedy tak, jak bývají formulovány v učebnicích, typicky na středoškolské úrovni. Necitujeme zde přesně z konkrétních učebnic, spíše nám jde o to, jak si přibližně tyto zákony pamatujeme ze „školské fyziky“. Znění je přitom blízké původním Newtonovým formulacím.

[2] Nejde nám o to, kritizovat, co je napsáno v učebnicích. Spíše jde o to, abychom se nad Newtonovými zákony a jejich významem blíže zamysleli a získali nad nimi určitý nadhled.

[3] Teď se v tom zdá být docela zmatek…

Navíc, klid je jen speciální případ rovnoměrného přímočarého pohybu[4], takže ho nemusíme zvlášť zdůrazňovat. První Newtonův zákon tedy můžeme formulovat krátce a jednoduše:

Volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Jak je to ale s jeho závislostí či nezávislostí na druhém Newtonově zákonu? Klíčová je otázka:

Vůči čemu se volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře?
Vůči kterým vztažným soustavám?

Určitě je spousta vztažných soustav, vůči nimž se pohybuje jinak než rovnoměrně přímočaře. Příkladem je soustava spojená s rotujícím kolotočem, s rozjíždějícím se nebo brzdícím autem, s traktorem poskakujícím po rozbité polní či lesní cestě… Nebo jiný příklad: Pokud se v tramvaji nebo v autobuse ničeho nedržíte a tento dopravní prostředek prudce zabrzdí, určitě vůči němu nezůstanete v klidu – s tím možná máte zkušenost z běžného života.[5]

To znamená, že jsou vztažné soustavy, v nichž první Newtonův zákon neplatí!

Na druhou stranu, ze zkušenosti víme, že existují soustavy, v nichž „funguje“, tedy platí. Příkladem může být vlak jedoucí konstantní rychlostí (a bez drncání) po rovných kolejích. V takovém vlaku si můžete postavit na stoleček třeba i vysokou sklenici vašeho oblíbeného nápoje[6] a ona se nepřevrhne. Když byla vůči vlaku v klidu, v klidu i nadále zůstává.[7]

Takovýmto soustavám – tedy soustavám, vůči nimž se volné hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře – říkáme **inerciální soustavy** resp. **inerciální systémy**[8]. Prostě:

Vztažná soustava je inerciální,
jestliže se vůči ní volné hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře.

A zde se dostáváme k odpovědi na otázku, proč potřebujeme první Newtonův zákon, proč ho lze brát jako nezávislý na druhém. Lze ho totiž chápat jako tvrzení, že vůbec existuje nějaký systém (alespoň jeden), vůči němuž se volné hmotné body pohybují rovnoměrně přímočaře. V tomto modernějším pojetí tedy první Newtonův zákon tvrdí prostě, že:

Existuje inerciální systém.

To totiž není samozřejmé, kdyby byly přírodní zákony jiné, žádný takový systém by existovat nemusel.[9] Takže první Newtonův zákon je opravdu velmi významný nezávislý zákon klasické mechaniky.

---

[4] Je to pohyb s nulovou rychlostí.

[5] A může to být zkušenost bolestivá…

[6] Třeba pramenité vody ☺.

[7] Toto samozřejmě není nijak přesné ověření, že zde platí první Newtonův zákon; také zde ignorujeme efekty spojené třeba s rotací Země apod. Ale pro názornou představu snad postačí.

[8] Připomeňme, že termíny „soustava“ a „systém“ bereme jako synonyma. Také již místo „vztažná soustava“ často říkáme jenom „soustava“; budeme-li mít na mysli soustavu souřadnic, poznáme to z kontextu.

[9] Ehmm… Když se na věc podíváme z pohledu obecné teorie relativity, tak žádný *globální* inerciální systém ve vesmíru fakticky neexistuje. Podobně jako hmotný bod, je tedy vlastně i inerciální systém idealizací. Ovšem idealizací velice užitečnou a v klasické mechanice oprávněně běžně používanou! A například systém, jehož počátek je v těžišti Sluneční soustavy a osy směřují ke vzdáleným hvězdám, můžeme s velmi dobrou přesností brát jako inerciální.

Inerciálním systémům se budeme blíže věnovat v jedné z dalších kapitol.[10] Zatím se dohodneme, že pokud neřekneme nic jiného, budeme předpokládat, že pracujeme v inerciálním systému.[11] Také všechny zákony a vztahy budeme formulovat v inerciálních systémech.

I druhý Newtonův zákon, ve tvaru v němž ho známe, platí právě v inerciálních systémech.

Než přejdeme k druhému zákonu: několik poznámek o fyzikálních interakcích

Z prvního Newtonova zákona plyne, že rovnoměrný přímočarý pohyb (vůči inerciálnímu systému) je „přirozeným pohybem“ hmotného bodu.[12] Většina věcí na světě se však nepohybuje rovnoměrně přímočaře: třeba padající jablko[13], fotbalový míč, když do něj fotbalista kopá, protony v urychlovači LHC v CERNu nebo koule řemdihu, když s ním točíme nad hlavou[14].

Všechna tato a podobná tělesa se pohybují se zrychlením. Toto zrychlení musí mít nějakou příčinu, zjevně je dáno působením jiných těles nebo objektů.[15]

Obecně ve fyzice pro vzájemné působení objektů používáme termín **interakce**. Na fundamentální úrovni dnešní fyzika zná čtyři **základní fyzikální interakce**:

silnou, slabou, elektromagnetickou a gravitační.

Silná a slabá interakce se projevují v mikrosvětě, na rozměrech do řádu zhruba 10^{-15} m. Týkají se působení elementárních částic; díky silné interakci například drží pohromadě atomová jádra[16], slabá interakce je odpovědná například za beta-rozpad. Elektromagnetická interakce se projevuje v mikrosvětě[17] i v makrosvětě: díky ní nám nejen fungují mobily a počítače, ale jejím projevem je i sluneční záření a vůbec světlo. Gravitace pak drží pohromadě Zemi, sluneční soustavu i celou galaxii.[18]

Do detailu zkoumat projevy základních fyzikálních interakcí a řešit s tím související problémy je velmi složité. Fakticky je to náplň mnoha partií moderní fyziky a doména základního výzkumu, kde se o světě stále dozvídáme něco nového. I věci, které v těchto oblastech již dávno patří do učebnic, nejsou jednoduché.[19] Buďme tedy vděčni za to, že v klasické mechanice ty základní věci jednoduché jsou!

---

[10] Podrobněji si tam ukážeme, že existuje-li (alespoň) jeden inerciální systém, existuje jich nekonečně mnoho, naučíme se tam, jak transformovat veličiny mezi různými inerciálními systémy, atd.

[11] Tedy že systém (tedy vztažná soustava), v němž popisujeme pohyby hmotných bodů a dalších objektů, je inerciální.

[12] Jinak řečeno, když hmotný bod „ponecháme sám sobě“, pohybuje se vůči inerciálnímu systému rovnoměrně přímočaře.

[13] Ať už padá na hlavu Newtonovi, nám, nebo jen tak do trávy.

[14] Pokud nejste fanoušky starých zbraní, tak si místo řemdihu představte svazek klíčů přivázaný na šňůrce, to je zbraň o něco méně nebezpečná.

[15] V konkrétních případech můžeme samozřejmě tyto objekty identifikovat: Země přitahující jablko, kopačka fotbalisty, magnetické pole v urychlovači…

[16] Částicoví fyzici nás poučí, že sama silná interakce je vlastně produktem interakcí mezi kvarky, což popisuje tzv. kvantová chromodynamika – ale do těchto oblastí zde nepůjdeme, už zmínkou o silných a slabých interakcích jsme daleko za rámcem klasické mechaniky.

[17] Kdyby nepřitahovala elektrony k jádrům, atomy by nedržely pohromadě.

[18] Aha – ale kam do tohoto nádherného obrázku základních fyzikálních interakcí zapadá třeba to kopnutí do míče? Nebo skutečnost, že nás udrží židle či podlaha? Ve skutečnosti jde o projevy elektromagnetické interakce – o vzájemné působení elektronových obalů atomů.

[19] Otevřete si nějakou vysokoškolskou učebnici kvantové elektrodynamiky nebo obecné teorie relativity a přesvědčíte se sami. ☺

Když jde o pohyb makroskopických těles kolem nás (jablek, míčů, aut, planet apod.), lze naštěstí působení jiných objektů vyjádřit pozoruhodně jednoduše: pouhou jednou vektorovou veličinou – silou.

Na sílu jako veličinu, která charakterizuje vzájemné působení těles, jsme natolik zvyklí, že zvýrazňovat předchozí odstavec orámováním nám asi může připadat až nepatřičné.[20] Ovšem když se zamyslíme, nad skutečností, že vlastně obrovsky složité vzájemné působení neuvěřitelně mnoha atomových obalů atomů kopačky hráče a atomů míče, které na sebe působí podle zákonů kvantové fyziky a kvantové elektrodynamiky, můžeme nakonec popsat veličinou, která se dá znázornit jako úsečka se šipkou, a ono to na makroskopické úrovni funguje (!) – no není to fascinující?

Sílu jsme si tedy zasadili do širšího rámce fyzikálních interakcí. V klasické mechanice ovšem se silou pracujeme spíše jako s veličinou, kterou známe ze zkušenosti.[21] Ze zkušenosti a z experimentů také plyne vztah mezi silou, hmotností a zrychlením, již zmíněný **druhý Newtonův zákon**:

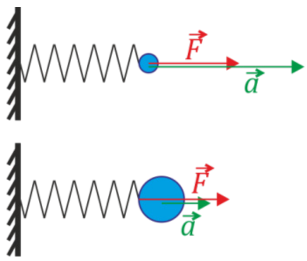
$$\boxed{m\vec{a} = \vec{F}\ ,} \tag{2.1}$$

Jak je to ale s veličinami, které se v něm vyskytují, a které z kinematiky neznáme, tedy se silou a hmotností. Jak je zavedeme? Jak je určíme?

Druhý Newtonův zákon – zákon i prostředek pro definici hmotnosti a síly

Ač jsme to výše zpochybnili, vztah $m\vec{a} = \vec{F}$ opravdu můžeme použít k určení veličin, které se v něm vyskytují – hmotnosti a síly – a přitom nepřestane být zákonem!

Jak je to možné? **Hmotnost** těles můžeme určit tak, že si zvolíme nějakou jednu „standardní“ pružinu. Jeden její konec připevníme na pevnou podložku, pružinu stlačíme vždy o stejnou délku a na druhý konec připevníme těleso, jehož hmotnost chceme určit. Pružina těleso urychlí a my měříme jeho zrychlení. Některým tělesům udělí pružina větší zrychlení, některým menší.[22] Tělesa se zřejmě něčím liší. Veličinu, která bude tyto rozdíly charakterizovat, nazveme *hmotnost*, označíme m a ze vztahu $m\vec{a} = \vec{F}$ ji můžeme určit, tedy změřit. Hodnota F bude pro stejně stlačenou stejnou pružinu stále stejná; řekněme, že ji vybereme jako jednotkovou. Ze změřeného zrychlení a pak můžeme jednoznačně vypočítat hmotnost tělesa: $m = \dfrac{F}{a}$.[23]



Uvedený postup možná působí složitě a těžkopádně – ale ve skutečnosti se podobný princip využívá k vážení[24] kosmonautů na kosmické stanici, tedy v beztížném stavu.[25]

[20] „Síla – no a co? To má být nějaká novinka?“

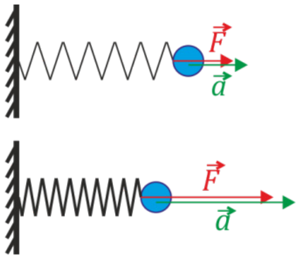
[21] Ze zkušenosti z běžného života se samozřejmě vychází i v běžné výuce na střední či základní škole, když se s pojmem síly seznamují žáci.

[22] Malý smartphone naše pružina urychlí víc než těžkou kovadlinu.

[23] Hmotnost jsme zde vlastně definovali tak, že jsme stanovili postup resp. operace, s jejichž pomocí hmotnost změříme. Tomuto způsobu se někdy říká *operacionalistická definice*.

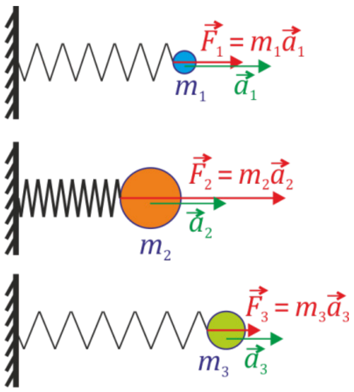
[24] Přesněji: k určování hmotnosti.

[25] Až poletíte na kosmickou stanici, vezměte si s sebou domácí váhu a zkuste si na ni v beztížném stavu stoupnout… Moc se toho o své hmotnosti nedozvíte.



Hmotnosti tedy už umíme měřit. Jak měřit **sílu**? Naprosto analogicky. Vezměte závaží o jednotkové hmotnosti (hmotnost už přece měřit umíme!), dávejte je na konec různě stlačené pružiny, různých jiných pružin… a měřte zrychlení. Ze vztahu $F = m\,a$ pak určíte sílu.

Uvedené postupy by samozřejmě mohly v praxi narážet na určité technické potíže[26], ale v principu tak opravdu s jednou „standardní jednotkovou pružinou“ můžeme proměřit všechny hmotnosti a se standardním jednotkovým závažím zase všechny síly.



A proč vztah $m\vec{a} = \vec{F}$ nepřestává být **zákonem**? Inu proto, že můžeme vzít jakékoli těleso, jehož hmotnost m už máme změřenou, dát je na libovolnou (a libovolně stlačenou) pružinu, jejíž sílu $\vec{F}$ jsme také předem určili, a změřit při tomto pokusu výsledné zrychlení $\vec{a}$. Druhý Newtonův zákon tvrdí, že pro libovolnou takovou kombinaci vyjde $\vec{a} = \vec{F}/m$, tedy že vždy platí $m\vec{a} = \vec{F}$.

Výše uvedený postup ukázal, jak je možno druhý Newtonův zákon v principu využít k zavedení pojmů hmotnost a síla a k proměřování těchto veličin. Netřeba asi dodávat, že v praxi samozřejmě používáme k měření hmotností a sil řadu jiných metod.[27] Druhý Newtonův zákon pak používáme k výpočtu síly, když víme, jak se hmotný bod pohybuje, nebo naopak k výpočtu pohybu, když známe působící sílu[28].

[26] Chtělo by to opravdu beztížný stav, aby nevadilo tření; kdybychom malou pružinkou urychlovali třeba zaoceánskou loď, museli bychom měřit velice malá zrychlení; při urychlování velmi lehkých věcí by se zase muselo počítat i s hmotností samotné pružiny apod.

[27] Zřejmě také nemusíme dodávat, že uvedený postup by jistě nebyl vhodný pro seznamování žáků středních či základních škol s pojmy hmotnost a síla! Zde jsme ho uvedli proto, abychom měli nad věcmi určitý nadhled a uvědomili si, že i pojmy a veličiny, které považujeme za běžné, nemusí být úplně jednoduché definovat, jdeme-li na to úplně od základů.

[28] To je velmi důležitá úloha, a ne vždy úplně jednoduchá. V rámci seznamování s klasickou mechanikou se k ní budeme v řadě případů opakovaně vracet.

Druhý Newtonův zákon – a související miskoncepce

Výzkumy v oblasti fyzikálního vzdělávání už od 80. let minulého století ukázaly, že ačkoli žáci a studenti znění druhého Newtonova zákona formálně znají a umí s jeho pomocí ve školních úlohách leccos vypočítat, v řadě *kvalitativních* problémů často dají zcela špatné odpovědi. A když si nedáme pozor, nachytáme se v těchto úlohách leckdy i my sami.[29] Jak je to možné?

Právě proto, že zmíněné znalosti jsou jen formální. Jakmile nejde jen „dosadit do vzorečku" a zejména když je úloha formulována jako problém z reálného světa, naskakuje nám v hlavě zkušenost z běžného života. A v běžném životě se tělesa ponechaná sama sobě typicky ***nepohybují*** rovnoměrně přímočaře! Když strkáte po podlaze těžkou skříň, pohybuje se, dokud ji tlačíte. Když přestanete tlačit, skříň se zastaví. Již od útlého věku tak získáváme zkušenost, která odpovídá spíše (fyzikálně nesprávné) představě typu „síla je potřeba proto, aby se těleso pohybovalo", než správnému pojetí „síla mění pohyb tělesa".[30]

Zmíněné chybné představy měli lidé už ve starověku, někdy proto mluvíme o *aristotelovských představách*. Pro chybné představy se obecně používá název *miskoncepce*.[31] Výzkumy ukázaly, že je velmi těžké je z našeho myšlení odbourat – rozhodně nestačí ve výuce vysvětlit, jak je to správně.[32] Pomoci může řešení kvalitativních úloh, diskuse o problémech a o tom, jak chápeme fyzikální pojmy, vlastní přemýšlení o této problematice…[33] A je dobře o miskoncepcích vědět a být si vědom toho, že naše představy mohou být (a leckdy jsou) nesprávné.[34] [35]

Na některé další nesprávné představy ještě během našeho seznamování s mechanikou narazíme. Teď se však od tohoto malého „didaktického exkursu" vrátíme zpět k mechanice a k silám.

---

[29] Možná jste si to už vyzkoušeli na cvičení k přednášce – tam bývá v úvodu zadáván malý test obsahující podobné problémy.

[30] Ve zkratce, formou krátkého zvolání, tuto správnou představu již před léty formuloval doc. M. Rojko: „**Když síla, tak zrychlení!**" Chybná představa, bohužel zakořeněná v hlavách lidí, je: „~~Když síla, tak rychlost~~". (Radši jsme ji tady přeškrtli, opravdu neplatí!)

[31] Miskoncepce, kterou jsme zde zmínili, zdaleka není jediná, máme jich v hlavách mnoho, jak co se týče mechaniky, tak dalších oblastí fyziky i dalších přírodních věd. Protože tyto představy mají děti, ještě než vstupují do systému vzdělávání, užívá se pro ně také termín *prekoncepce*.

[32] Podrobně o miskoncepcích resp. prekoncepcích informuje např. kniha D. Mandíková, J. Trna: *Žákovské prekoncepce ve výuce fyziky*. (Paido, Brno, 2011)

[33] Někdy se o tom, které představy jsou správné a které ne, člověk musí téměř „pohádat sám se sebou". Když to uděláme, není to příznak duševní poruchy, ale reakce na to, čemu odborníci říkají *„kognitivní konflikt"*: Zjišťuji, že mé staré představy (které byly tak názorné, pohodlné a zažité) nefungují, nevysvětlují třeba výsledek pokusu, který vidím. Propracovat se k lepšímu pochopení pojmů, vztahů, tomu, „jak fyzika funguje" – to občas není procházka májovým sadem. Ale stojí to za to!

[34] Na druhou stranu se z toho není nutno hroutit! Jak už bylo řečeno, nejsme v tom sami, nějaké miskoncepce měl či má prakticky každý. Uvědomit si, že jsem něco chápal špatně – to je přece příležitost a první krok k tomu, abych zjistil a promyslel si, jak je to správně!

[35] O tom, jak nás naše mysl leckdy šálí a zavádí, je celá řada knih. Jedna z nejlepších (ne-li vůbec nejlepší), kde najdete i spoustu dalších informací, je od Daniela Kahnemana: *Myšlení: rychlé a pomalé*. (český překlad Jan Melvil Publishing, 2012). Vřele doporučuji.

2.2 Vlastnosti pravých sil

Jako **pravé síly** označujeme síly, jimiž na náš hmotný bod působí ostatní tělesa či silová pole[36]. Pravou silou *není* například odstředivá síla.[37] [38]

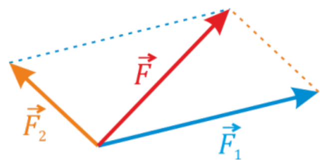
Uvedeme zde tři základní vlastnosti, které jsou vlastní všem silám, s nimiž se v klasické mechanice setkáme.

Princip superpozice

„Princip superpozice" je vlastně jen učený název pro to, co dávno známe: **síly se dají sčítat**. To znamená, že když na hmotný bod působí současně více sil, $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \ldots, \vec{F}_N$, je výsledné působení těchto sil stejné, jako by působila jediná výsledná síla

$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N \ .^{39} \tag{2.2}$$

Vektory samozřejmě můžeme sčítat tak, že sčítáme jejich složky[40], nebo při grafickém vyjádření tak jak to známe, tedy pomocí vektorových rovnoběžníků[41].



Na tuhle vlastnost sil jsme tak zvyklí, že se možná divíme: Jak by tomu mohlo být jinak?

Ovšem v přírodě nejsou jen děje a procesy, kde by se působení jednoduše sčítala. Příkladem mohou být různé biologické procesy[42] a chemické děje[43]. Ale prosté sčítání nemusí fungovat ani ve fyzice.

Příklad můžeme najít třeba v obecné teorii relativity[44]: Představme si kosmickou sondu v blízkosti černé díry. Na sondu působí velká síla – ale dejme tomu, že jí motory sondy dokážou vzdorovat. A řekněme, že máme motory, které by dokázaly vzdorovat i dvakrát větší síle. Takže kdybychom s danou černou dírou spojili ještě jednu (takže hmotnost černé díry by se zdvojnásobila), měla by se sonda udržet a do černé díry nespadnout, že? To by bylo pravda, kdyby šlo o normální tělesa a o Newtonovu teorii gravitace. Ale v obecné teorii relativity to není takhle jednoduché.[45]

Vidíme, že věci by mohly být mnohem složitější – a tak je vlastně úleva, že v klasické mechanice to jednoduché je a princip superpozice platí.

---

[36] Většinou půjde o blízká tělesa, která do hmotného bodu například „strkají", nebo například o Zemi, která ho přitahuje svým gravitačním polem. Ale například na nabitý hmotný bod může působit i z dálky přicházející elektromagnetické vlna.

[37] Pokud jste například na kolotoči a cítíte sílu, která vás táhne k okraji, není to tím, že by vás odpuzoval střed kolotoče.

[38] Pregnantně pravé síly charakterizoval již zmíněný doc. Rojko: «Pravá síla je ta, která má „pachatele".» (Tedy něco, co touto silou na náš bod působí.)

[39] Což samozřejmě můžeme také napsat jako $\vec{F} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$, kde N je počet hmotných bodů.

[40] Tj. $F_x = F_{1x} + F_{2x} + \ldots + F_{Nx}$, podobně pro F_y a F_z.

[41] Ne že bychom mysleli, že to neumíte, ale je pěkné, když je na stránce alespoň jeden malý barevný obrázek. ☺

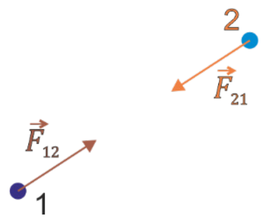
[42] Třeba lékové interakce v organismu. Například barbituráty působí jako sedativa, alkohol má zase jiné účinky. Ale kombinace barbiturátů a alkoholu rozhodně není jednoduchým součtem účinků – naopak může být smrtící.

[43] Například děje, jichž se účastní katalyzátory.

[44] Protože je to nelineární teorie.

[45] Zvětší se tzv. horizont černé díry; sonda se může ocitnout pod ním a být nenávratně lapena.

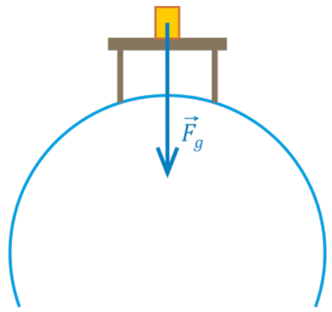
Princip akce a reakce



Další vlastnost pravých sil vystihuje **třetí Newtonův zákon**, tedy princip akce a reakce. Jestliže hmotný bod 1 působí na hmotný bod 2 silou $\vec{F}_{21}$, působí bod 2 na bod 1 silou stejně velkou, ale opačného směru, tedy $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$.

Jestliže například praštíte pěstí do stolu, působíte na desku stolu silou $\vec{F}_{\text{pěst na desku}}$. Deska stolu ale naopak působí na vaši pěst silou $\vec{F}_{\text{deska na pěst}} = -\vec{F}_{\text{pěst na desku}}$. To je celkem jasné, je ale potřeba uvědomit si jednu věc. V uvedeném příkladu je velmi přirozené nazvat sílu pěsti na desku „akcí“ a sílu desky na pěst „reakcí“. To budí dojem, že „akce“ je něco aktivního[46] a „reakce“ něco pasivního. Tak tomu ale není, obě síly jsou rovnocenné, o nějakou „aktivitu“ nebo dokonce úmysl v mechanice vůbec nejde.[47]

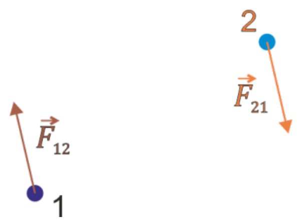
Další často se vyskytující miskoncepcí je představa, že když se těžší těleso srazí s lehčím, tak to těžší „přece musí působit na lehčí větší silou“.[48] Není tomu tak, síly jsou stejné.[49]



Další chyba, kterou lidé v souvislosti s třetím Newtonovým zákonem někdy dělají, se týká toho, nač akce a reakce působí. Podstatné je, že akce a reakce působí na různá tělesa – takže se v působení na jedno těleso nevyruší! Například pro závaží ležící na stole *není pravda*, že k síle, kterou Země přitahuje závaží, by byla reakcí síla, kterou závaží podpírá desku stolu!

Na obrázku vpravo je vyznačena síla $\vec{F}_g$, kterou Země přitahuje závaží. Dokreslete si do obrázku sami všechny další síly, které v této situaci působí.[50]

Centrálnost sil



Princip akce a reakce ale ještě neříká vše o silách působících mezi hmotnými body. Vyhovovaly by mu totiž třeba i síly, které by působily „šikmo“, jak to ukazuje obrázek vpravo.
Takovéto síly by ovšem dvojici bodů (kdybyste si je představili spojené třeba tenkou tyčkou, jako jakousi „činku“) roztočily – a roztáčely pořád dál. Nic takového ovšem v přírodě nepozorujeme.

[46] Dokonce snad něco vlastního živým organizmům: člověk udeří do stolu, do něčeho nebo do někoho aktivně strčí, datel klovne zobákem do stromu.

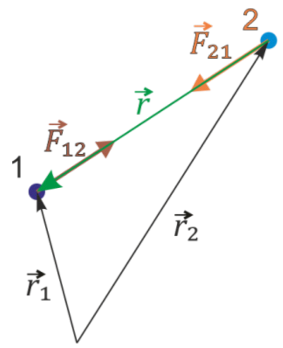
[47] Když se srazí dvě kulečníkové koule, není ta, která se pohybovala „aktivnější“ než ta, která stála. Ostatně, kdybyste si představili dvě kulečníkové koule, které by se srazily v beztížném stavu, a na každé by seděl (resp. byl nějak připoután) inteligentní mravenec, každý z nich by mohl volat na toho druhého: „Já byl se svou koulí v klidu, ty jsi do mě s tou svou vrazil!“

[48] Náklaďák, který se srazí s lehkým osobním autem, na něj „určitě“ působil větší silou, než naopak, že? Přece ten osobák je mnohem víc poničen! To sice zní sugestivně, ale pravda to není. Síly jsou stejné, míra škod je dána tím, jak jsou daná auta odolná proti nárazu.

[49] Ono ani ty škody nemusejí být větší u lehčího tělesa: střela, která složí statného divočáka, je mnohonásobně lehčí, než ten kňour…

[50] Tedy jak závaží působí na stůl, stůl na závaží a jak závaží působí na Zemi. (Nezapomněli jste na tuhle poslední sílu? Navíc pokud stůl nebereme jako součást Země, tak jsou zde síly mezi stolem a Zemí…)

Kdy síly nezpůsobí roztočení dvojice bodů? Zjevně jen v případě, když míří tak, jak ukazuje vedlejší obrázek, tedy ve směru spojnice obou bodů. Takovýmto silám říkáme **centrální**.



Označíme-li směr spojnice bodů jako $\vec{r}$, tedy $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$, můžeme fakt, že síly jsou centrální, napsat jako

$$\vec{F}_{12} \sim \vec{r}\,.$$

Závislost na vzdálenosti

Pro řadu sil, s nimiž se v mechanice setkáváme, platí ještě další věc: jejich **velikost závisí jen na vzdálenosti**. Formálně to můžeme zapsat jako

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = f(r), \quad \text{kde} \quad r = \left|\vec{r}_2 - \vec{r}_1\right|.$$

Souhrnně tedy pro pravé síly, které splňují princip akce a reakce, jsou centrální a závisejí jen na vzdálenosti, platí

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} = f(r)\frac{\vec{r}}{r}\,, \quad \text{kde } \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2\,. \text{ [51] [52]} \tag{2.3}$$

Samozřejmě, ne všechny síly závisí jen na vzdálenosti. Například odporové síly při pohybu tělesa v nějakém prostředí (kapalině nebo plynu) závisejí na rychlosti tělesa vzhledem k danému prostředí.[53] Řada důležitých sil ale má právě tvar daný vztahem (2.3).

Příklady:

Gravitační síla je v klasické mechanice popsána **Newtonovým gravitačním zákonem**:

$$\vec{F}_g = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,. \text{ [54]} \tag{2.4}$$

Newtonova **gravitační konstanta** označované též κ [55] má hodnotu $G \doteq 6{,}67\cdot 10^{-11}\ \mathrm{N\,m^2\,kg^{-2}}$.

Síla, kterou se elektrostaticky přitahují nebo odpuzují dva bodové náboje, je dána Coulombovým zákonem:

$$\vec{F}_e = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{2.5}$$

kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \doteq 9\cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2\,C^{-2}}$.

---

[51] Když se hmotné body přitahují bude před $f(r)$ navíc znaménko mínus, srovnejte dále (2.4) a (2.5). Připomeňme, že $\vec{F}_{12}$ je síla, kterou bod 2 působí na bod 1.

[52] Vektor $\dfrac{\vec{r}}{r}$ udává směr síly. Míří od bodu 2 k bodu 1 a má jednotkovou velikost, je totiž $\left|\dfrac{\vec{r}}{r}\right| = \dfrac{|\vec{r}|}{r} = \dfrac{r}{r} = 1$.

[53] Někde nám to spíš vadí, například v případě ponorky, nebo když jedeme na kole proti větru. Někdo toho naopak využívá, třeba parašutisté. Podobně závisí na rychlosti i tlumení způsobené vířivými proudy, například když silným magnetem hýbáte blízko měděné destičky.

[54] Konkrétněji (aby bylo jasné, kam míří vektor $\vec{r}$) bychom mohli psát $\vec{F}_{g12} = -G\dfrac{m_1 m_2}{r_{12}^{\,2}}\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$, kde $\vec{r}_{12} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$.

[55] Též bývá psáno jako $\varkappa$. V obou případech jde o řecké písmeno kappa. Takto bývá gravitační konstanta značena v české fyzikální literatuře (zejména ve středoškolských učebnicích, tabulkách apod.), ve světě se značí symbolem G.

2.3 Známe-li pohyb, sílu určíme lehce

V první kapitole jsme se naučili, jak ze známého pohybu $\vec{r} = \vec{r}(t)$ spočítat zrychlení. Prostě souřadnice bodu dvakrát derivujeme podle času: $\vec{a} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$. Druhý Newtonův zákon (2.1) nám ze zrychlení umožňuje okamžitě určit sílu:

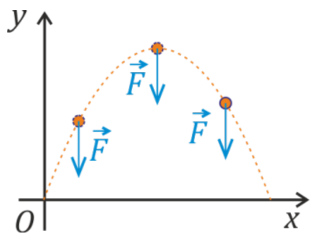
$$\vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \,. \tag{2.6}$$ [56]

Když nám kdokoli zadá, jak se bod pohybuje, tedy zadá závislost souřadnic na čase, sílu spočteme lehce, stačí umět derivovat.

Příklad 1: šikmý vrh

Souřadnice šikmého vrhu jsou dány vztahy $x = V_1 \cdot t$, $y = V_2 \cdot t - (1/2) \cdot g \cdot t^2$.[57] Derivací dostaneme složky rychlosti a další derivací složky zrychlení[58] $a_x = 0$, $a_y = -g$. Z (2.6) pak okamžitě dostáváme $F_x = 0$, $F_y = -m\,g$.[59] Síla způsobující daný pohyb je tedy $\vec{F} = (0, -mg)$ resp., pokud napíšeme také *z*-ovou složku,

$$\vec{F} = (0, -mg, 0) \,.$$ [60]

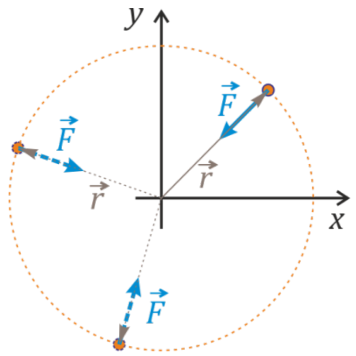


Příklad 2: rovnoměrný pohyb po kružnici

Také tento pohyb jsme už rozebírali v kapitole 1 (v příkladech 5 a 5z). Je dán vztahy $\vec{r} = \left(R\cos(\omega t), R\sin(\omega t)\right)$, zrychlení vychází $\vec{a} = \left(-R\omega^2\cos(\omega t), -R\omega^2\sin(\omega t)\right) = -\vec{r}\omega^2$. Síla je tedy

$$\vec{F} = -m\,\vec{r}\,\omega^2 \,,$$

to znamená, že je ***dostředivá*** a pro její velikost platí známý vztah $F = m\,R\,\omega^2$.



---

[56] Ve složkách je samozřejmě $F_x = m\frac{d^2x}{dt^2}$, $F_y = m\frac{d^2y}{dt^2}$, $F_z = m\frac{d^2z}{dt^2}$.

[57] Osa *x* je vodorovná, osa *y* míří svisle vzhůru, házíme v rovině $z = 0$, zanedbáváme odpor vzduchu, takže trajektorií je parabola. V_1 a V_2 jsou konstanty. Jde o složky počáteční rychlosti; snad čtenáři nevadí, že je tu značíme velkým písmenem. (Pokud vadí, pište si místo V_1 např. v_{01} apod.)

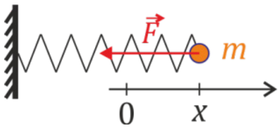
[58] Prakticky totéž už jsme dělali v první kapitole v příkladech 4 a 4z, takže si potřebné derivování proveďte sami. (Pokud s derivacemi ještě zápolíte, proveďte si výpočet podrobně, po troše cviku se to pak dá dělat z hlavy.)

[59] Pro *z*-ovou složku je samozřejmě také $F_z = 0$ - rozmyslete si, jak byste někomu vysvětlili, proč tomu tak je.

[60] Vidíme tedy, že i v těch částech trajektorie, kdy třeba vržený míček stoupá, působí síla stále směrem *dolů* a není zde žádná síla, která by míček „postrkovala směrem vzhůru". (Představa, že míček musí něco táhnout nebo strkat směrem vzhůru, je také jednou z běžných miskoncepcí, z našeho příkladu vidíme, že není správná.)

2.4 Známe sílu – jak určit pohyb?

Podstatně obtížnější je úloha, spočítat ze zadané síly, jak se hmotný bod pohybuje. Na první pohled se může zdát, že prostě ze síly spočteme zrychlení[61], integrací zrychlení dostaneme rychlost a další integrací pak polohu – tak jak jsme to dělali v první kapitole v části 1.6. Takhle jednoduše to ale jde, jen pokud je síla konstantní nebo pokud je známou funkcí času.[62]



V obecném případě ale s výše jednoduchým postupem narazíme. Uvažujme jednorozměrný pohyb hmotného bodu, na který silou působí pružina.[63] Síla závisí na výchylce x podle vztahu

$$F_x = -k \cdot x \ , \tag{2.7}$$

kde k je tuhost pružiny.[64] Zrychlení je samozřejmě $a_x = F_x / m = -(k/m) \cdot x$. Ovšem kdybychom teď chtěli ze zrychlení spočítat rychlost podle vztahu $v_x = \int a_x \, dt$, zjistíme, že to nedokážeme udělat.[65] [66]

Jak tedy postupovat?

Rovnice

$$\boxed{m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}} \tag{2.8}$$

je opravdu rovnicí, určující pohyb hmotného bodu; proto se nazývá **pohybová rovnice**.[67]

Pro určení pohybu potřebujeme najít **řešení pohybové rovnice**, tedy funkci $\vec{r} = \vec{r}(t)$, kterou když dosadíme do pohybové rovnice (2.8), tak je tato rovnice splněna.

---

[61] $\vec{a} = \vec{F}/m$

[62] To může někdy být. Příkladem je třeba síla, kterou na nabitý hmotný bod působí elektrické pole, jehož velikost se s časem mění; třeba v deskovém kondenzátoru, na jehož elektrody bychom přivedli střídavé napětí.

[63] Pohyb se děje jen ve směru osy x, hmotnost hmotného bodu označíme m. Počátek zvolíme v bodě, kde pružina má svou „klidovou délku“, tj. není ani zkrácená ani prodloužená.

[64] Předpokládáme, že jde o pružinu, která se chová podle Hookova zákona. Znaménko mínus znamená, že síla působí na opačnou stranu, než výchylka, tedy vrací náš hmotný bod do rovnovážné polohy. (Tuhost pružiny bereme samozřejmě kladnou, $k > 0$. Pro $x > 0$ pak je $F_x < 0$.)

[65] Rozmyslete si, proč to nejde. Vztah $v_x = \int a_x \, dt$ samozřejmě platí, ale když do něj dosadíme, dostaneme $v_x = -(k/m) \int x \, dt$ a nevíme, jak tento integrál spočítat. Rozhodně nemůžeme x „vytknout“ a napsat $\cancel{v_x = -(k/m) \int x \, dt = -(k/m) \cdot x \int 1 dt = -(k/m) \cdot x \cdot t}$!! (Raději jsem to tady hned škrtl; uvádím to zde proto, že takto chybný postup jsem už několikrát viděl, tak abychom si uvědomili, že ***takhle ne***!) Souřadnice x totiž závisí na čase, takže je $v_x = -(k/m) \int x(t) \, dt$, a abychom integrál mohli vypočítat, museli bychom tu závislost $x = x(t)$ znát. Ale to je přesně to, co neznáme a co chceme nakonec vypočítat!

[66] Takže to vypadá, že jsme v háji. Naštěstí tomu tak není, jen na výpočet pohybu musíme jít jinak.

[67] Nemusí jít jen o 2. Newtonův zákon. Obecně se jako **pohybové rovnice** nazývají rovnice určující **časový vývoj** nějakého fyzikálního systému. Příkladem může být *relativistická pohybová rovnice* určující pohyb částice podle speciální teorie relativity; tuto rovnici musíme užívat místo druhého Newtonova zákona, pokud rychlosti částic nejsou mnohem menší než rychlost světla. Stručně se o ní zmíníme v jedné z dalších kapitol, jinak budeme v celém tomto učebním textu pohyby hmotných bodů počítat podle pohybové rovnice klasické mechaniky, tedy podle (2.8).

Pohybovou rovnici samozřejmě můžeme zapsat ve složkách jako

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = F_x\,, \quad m\frac{d^2y}{dt^2} = F_y\,, \quad m\frac{d^2z}{dt^2} = F_z \quad , \tag{2.9}$$

Řešením jsou funkce $x = x(t),\;\; y = y(t),\;\; z = z(t)$ splňující dané rovnice.

V pohybové rovnici se vyskytují funkce a jejich derivace. Takovýmto rovnicím se v matematice říká **diferenciální rovnice**.[68]

Předchozí odstavce zatím asi vypadají dost obecně a abstraktně. Pojďme se na to, jak ze síly určit pohyb, podívat na konkrétním příkladu.

Příklad 3: hmotný bod na pružině

V případě hmotného bodu na pružině, uvedeném výše, má pohybová rovnice tvar

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\cdot x\ . \tag{2.10}$$

Chceme najít funkci $x = x(t)$ takovou, aby po dosazení do (2.10) se levá strana rovnala pravé[69]. Jak řešit podobné rovnice obecně, se naučíte v matematice.[70] My zde pro začátek budeme jen ilustrovat, že daná rovnice řešení má – dá se říci, že řešení prostě „uhodneme“ a ověříme, že opravdu rovnici (2.10) splňuje.

Přesněji řečeno, uhodneme tvar, který by řešení mohlo mít.[71] Fakticky vzato, opravdu můžeme odhadnout, jaký tvar bude řešení mít. Ze zkušenosti víme, že závaží pověšené na pružinu kmitá. Takže můžeme usoudit, že jeho pohyb by mohl být popsán funkcí

$$x(t) = A\cdot\sin\left(\omega t\right)\ .^{72} \tag{2.11}$$

Je opravdu řešením? Druhá derivace (2.11) dá $\frac{d^2x}{dt^2} = -A\omega^2\sin\left(\omega t\right)$[73]. Dosazením do (2.10) pak dostáváme

$$m\left(-A\omega^2\sin\left(\omega t\right)\right) = -k\cdot A\cdot\sin\left(\omega t\right)\ . \tag{2.12}$$

[68] Nemusíte se jich děsit, i když se s nimi možná potkáváte poprvé. Ve fyzice se s nimi budete potkávat docela často, je to velice užitečný nástroj. A mnoho fyzikálních zákonů bývá zapsáno právě ve formě diferenciálních rovnic. Velmi stručnou úvodní informaci o těchto rovnicích najdete v Dodatku 2.A této kapitoly; s použitím diferenciálních rovnic v mechanice se v tomto učebním textu budeme seznamovat průběžně (a dle možnosti nenásilně).

[69] A to pro všechny časy *t*.

[70] A pro potřeby fyzikálních výpočtů ještě dříve v předmětu *Matematické metody fyziky*.

[71] Omlouvám se laskavému čtenáři, pokud mu nesedí formulace „uhádnout řešení“. Chcete-li, říkejte místo toho poněkud formálněji „hledejme řešení ve tvaru“ – nebo to prostě berte tak, že chytří matematikové už v minulosti spoustu diferenciálních rovnic vyřešili (což je pravda, je o tom řada tlustých knih), řekli nám, jaké je řešení, a my teď jenom „provedeme zkoušku“, tedy ověříme, že určitá konkrétní funkce opravdu je řešením.

[72] … nebo $x(t) = B\cdot\cos\left(\omega t\right)$, nebo $x(t) = A\cdot\sin\left(\omega t+\varphi\right)$, zatím ale zůstaneme u prvního nápadu.

[73] Toto už jsme výše počítali několikrát, proto zde příslušné úpravy nebudeme podrobně opakovat. Pokud jste se ale s derivacemi ještě „nesžili“, proveďte si podrobný výpočet – a dělejte to i nadále, dokud ty výpočty nebudete zvládat plynule a víceméně automaticky. Ono se to poddá…

Odtud už snadno dostáváme[74] $m \cdot \omega^2 = k$, čili

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \quad \Rightarrow \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \ . \tag{2.13}$$

To znamená, že

$$x(t) \ = \ A \cdot \sin\left(\omega t\right) \ , \ \text{kde} \ \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \tag{2.14}$$

je řešením diferenciální rovnice (2.10).[75]

Pozor, řešení, které jsme našli, *není jediné*. Můžete si vyzkoušet, že $x = \ B \cdot \cos\left(\omega t\right)$ také řeší rovnici (2.10). **Obecné řešení** můžeme zapsat ve tvaru $x = A \cdot \sin\left(\omega t\right) + B \cdot \cos\left(\omega t\right)$.[76] A a B jsou dvě nezávislé konstanty. Samotná diferenciální rovnice nám neřekne, jaké mají být jejich hodnoty – ty musíme určit z **počátečních podmínek**, stejně jako jsme to dělali v kapitole 1, části 1.6. Tohle platí obecně:

Pohyb hmotného bodu určíme řešením pohybové rovnice. Hodnoty neznámých konstant, které se při řešení objeví, určíme z počátečních podmínek $\vec{r}\,(0) = \vec{r}_0, \quad \vec{v}\,(0) = \vec{v}_0$.

Na závěr našeho příkladu poznamenejme, že výchozí rovnice (2.10) se s využitím (2.13) často přepisuje na tvar

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \ , \tag{2.15}$$

v tomto tvaru je známa jako **rovnice pro lineární harmonický oscilátor**.[77]

---

[74] Rychlé a trochu nepořádné odvození: V (2.12) zkrátíme obě strany A a $\sin(\omega t)$ (a vynásobíme –1). Možná a oprávněná námitka: pro některé časy *t* je $\sin(\omega t)$ rovno nule – tak jak jím můžeme krátit? Takže korektnější odvození: Převedeme všechny členy rovnice (2.12) na jednu stranu a vytkneme z nich A a $\sin(\omega t)$. Dostaneme $A \cdot \sin\left(\omega t\right) \cdot \left(m \ \omega^2 - k\right) = 0$. Aby toto platilo, musí být buď $A = 0$ (ale to je nezajímavé, to jsou kmity s nulovou amplitudou, čili hmotný bod je stále v klidu, takže žádné kmitání) nebo $\sin\left(\omega t\right) = 0$ (ale to nastává jen pro některé časy *t*, zatímco my chceme, aby rovnice platila pro všechny časy) – nebo konečně $m \ \omega^2 - k = 0$. Takže, pokud pomineme případ $A = 0$, právě $m \ \omega^2 = k$ je nutnou a postačující podmínkou k tomu, aby rovnice (2.12), a tedy i rovnice (2.10) byla splněna pro všechny časy.

[75] Zkuste si ho do rovnice dosadit, tedy opravdu provést zkoušku. Vyšlo? Tak vidíte, že diferenciální rovnice a jejich řešení nejsou (alespoň v principu) „zas tak hrozná věda“!

[76] Nebo též ve tvaru $x = A \cdot \sin\left(\omega t + \varphi\right)$.

[77] Ještě se s ní potkáme; ke kmitání se ostatně v klasické mechanice budeme vracet ještě několikrát.

2.5 Jak určit pohyb pomocí počítače – aneb numerické řešení pohybových rovnic

Řešit pohybové rovnice „s tužkou a papírem“[78] je v některých případech jednoduché[79], jindy složitější[80] a někdy prakticky nemožné[81]. Ani v těchto případech však nemusíme rezignovat.

Pohyb hmotného bodu totiž nemusí být popsán jen vzorcem. Dobrou představu o pohybu nám může dát i tabulka, v níž budou polohy daného bodu v konkrétních časech – třeba po sekundách nebo po desetinách sekundy.[82] Z takové tabulky můžeme nakreslit graf, odpovídat na otázky, kde byl bod v nějakém čase apod.

Při tomto přístupu pracujeme s konkrétními číselnými hodnotami souřadnic (a složek rychlostí, zrychlení a sil) – mluvíme proto o **numerickém řešení pohybových rovnic**.[83]

Základní princip je velmi jednoduchý. Ukážeme si ho na příkladu jednorozměrného pohybu.

Zrychlení je derivace rychlosti: $a_x = \dfrac{dv_x}{dt}$. Derivace se ale přibližně rovná podílu přírůstků rychlosti a času: $\dfrac{dv_x}{dt} \approx \dfrac{\Delta v_x}{\Delta t} = \dfrac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$ [84]. To znamená, že $a_x \approx \dfrac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$. Po vynásobení Δt dostaneme

$$v_x(t+\Delta t) - v_x(t) \approx a_x \cdot \Delta t\,,$$

čili

$$v_x(t+\Delta t) \approx v_x(t) + a_x \cdot \Delta t\ . \qquad (2.16)$$

To znamená, že z hodnoty rychlosti v čase t (a ze známého zrychlení) získáme rychlost v čase $t+\Delta t$!! Sice jen přibližně, s určitou chybou (rovnost je jen přibližná), ale přece.

Podobně můžeme z rychlosti a známé souřadnice v čase t získat hodnotu souřadnice v čase $t+\Delta t$:

---

[78] Tedy tak, abychom dostali jako řešení nějaké obecné funkce; jinak řečeno, řešit příslušné diferenciální rovnice **analyticky**.

[79] … například pro šikmý vrh v homogenním gravitačním poli ve vakuu.

[80] … například pro pohyb planety v gravitačním poli Slunce.

[81] … například pro závaží kmitající na pružině, kde závislost síly na prodloužení není lineární, ale výrazně komplikovanější. Stačí, když jde o závaží na dostatečně natažené gumičce.

[82] Tedy tabulka typu:

t	x	y	z
0 s			
1s			
2s			
…			

[83] V souvislosti s tímto přístupem se používají i další termíny, jako **modelování** (nebo **počítačové modelování**) pohybu, ve výuce fyziky byl používán i termín ***dynamické modelování***. Místo o modelování se také někdy mluví o **simulacích**.

[84] Můžeme to vidět již z definice derivace: $\dfrac{dv_x}{dt} = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$. Pokud se funkce $v_x(t)$ „chová rozumně“ (fakticky stačí, že v daném bodě má derivaci), pak je zřejmě pro malé hodnoty Δt hodnota zlomku $\dfrac{v_x(t+\Delta t) - v_x(t)}{\Delta t}$ blízká limitní hodnotě $\dfrac{dv_x}{dt}$.

Rychlost je derivace souřadnice, $\upsilon_x = \dfrac{dx}{dt} \approx \dfrac{\Delta x}{\Delta t} = \dfrac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t}$. Odtud $x(t+\Delta t)-x(t) \doteq \upsilon_x \cdot \Delta t$, čili

$$x(t+\Delta t) \;\approx\; x(t)+\upsilon_x \cdot \Delta t\,. \tag{2.17}$$

Vztahy (2.16) a (2.17) dohromady dávají návod, jak ze souřadnice a rychlosti v určitém čase t získat souřadnici a rychlost v „následujícím“ čase $t+\Delta t$:

$$\begin{aligned} \upsilon_x(t+\Delta t) \;&\approx\; \upsilon_x(t)+\, a_x \cdot \Delta t \\ x(t+\Delta t) \;&\approx\; x(t)+\upsilon_x \cdot \Delta t \end{aligned} \tag{2.18}$$

Ze souřadnice a rychlosti v čase $t+\Delta t$ stejně získáme jejich hodnoty v čase $t+2\Delta t$, pak $t+3\Delta t$ atd. – prostě počítáme jejich hodnoty „krok po kroku“.[85]

Návod můžeme přepsat do podoby algoritmu resp. přímo počítačového programu:

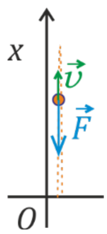
```
Cyklus (opakuje se)⁸⁶
  v := v + a·Δt
  x := x + v·Δt
  t := t + Δt
Konec cyklu
```

Tento výpočet lze zapsat vcelku v libovolném programovacím jazyce[87]. Můžeme ho také provést v Excelu, v něm pak lze jednoduše dostat graf závislosti např. *x* na *t*.

V principu se můžeme obejít zcela bez počítače a výpočet provádět „ručně“. Je to docela ilustrativní; pojďme si proto pro začátek takovýto výpočet zkusit. Zvolíme si přitom velmi jednoduchý příklad, u něhož známe analytické řešení: vrh svislý vzhůru.

Příklad 4: vrh svislý vzhůru: numerické řešení

Budeme uvažovat hmotný bod (nebo třeba malý kámen) vržený vzhůru počáteční rychlostí υ_0. Souřadnici směřující vzhůru označíme x, házet budeme z počátku soustavy souřadnic, takže počáteční hodnota souřadnice bude $x(0)=0$. Zanedbáme odpor vzduchu (nebo budeme házet ve vakuu), gravitační pole bereme jako homogenní, takže jedinou silou na kámen působící je $\vec{F} = m\vec{g}$, tedy složka síly je $F_x = -m \cdot g$. Z druhého Newtonova zákona je zrychlení samozřejmě $a_x = F_x / m = -g$.[88]



[85] °Poznamenejme, že v (2.18) jsme psali ještě symbol přibližné rovnosti, dále už budeme např. $\upsilon_x(t)+a_x \cdot \Delta t$ brát prostě jako hodnotu rychlosti spočtenou pro čas *t*+Δ*t*, s tím, že víme, že to je s určitou malou chybou.

[86] Výpočet zde zapisujeme spíše symbolicky, ne v konkrétním programovacím jazyce. Symbol := má význam *dosazení do proměnné*, takže např. pokud konstanta `Δt` má hodnoty 0,1 a proměnná `t` hodnotu 0, pak zápis `t := t + Δt` znamená „vezmi hodnotu `t` a hodnotu `Δt`, sečti je a výsledek dosaď do proměnné `t`“. Po provedení této operace má tedy proměnná `t` novou hodnotu 1,1. Násobení zde označujeme tečkou · , v programovacích jazycích se většinou užívá symbol * (hvězdička).

[87] V Pascalu, Basicu, C, Pythonu… doplňte dle libosti; snad jedinou podmínkou je, aby uměly pracovat s reálnými čísly.

[88] To vypadá bláznivě, z gravitačního zrychlení počítat sílu a z té zase zpátky zrychlení – ale až budeme chtít přidat právě třeba odpor vzduchu, přidáme jen další člen do výrazu pro sílu. Proto už výpočet začínáme takto obecněji.

Hodnotu časového kroku zvolíme pro jednoduchost $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$. Hodnotu tíhového zrychlení budeme brát $g = 10\,\mathrm{m/s^2}$. Hodnotu počáteční rychlosti zvolíme dost velkou, konkrétně $\upsilon_0 = 30\,\mathrm{m/s}$.[89]

A už si můžeme nakreslit tabulku, do níž budeme zapisovat hodnoty našeho modelování svislého vrhu:

t	a_x	υ_x	x
0	-10	30	0
1	-10	20	20
…	…	…	…

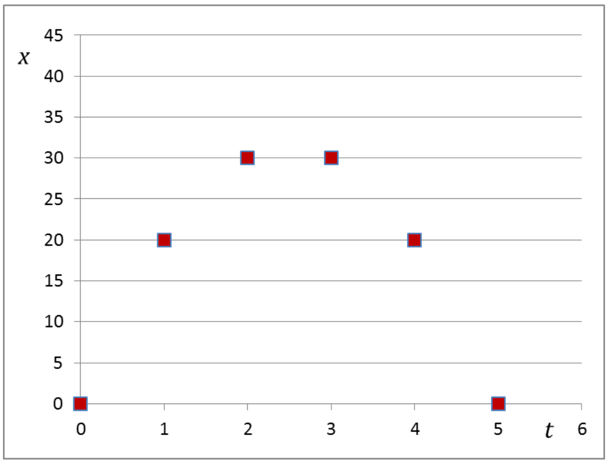
Hodnoty veličin zde píšeme bez jednotek. V prvním řádku (pod záhlavím) jsou počáteční hodnoty v čase $t = 0\,\mathrm{s}$; u zrychlení nejde o počáteční hodnotu, ale o hodnotu spočtenou ze síly[90]. V druhém řádku tabulky, pro následující čas $t + \Delta t = 1\,\mathrm{s}$, už se hodnoty počítají. Zrychlení je stále rovno –10 (m/s^2), rychlost je „stará rychlost" (o řádek výše, tedy 30 (m/s)) plus $a_x \cdot \Delta t$, tedy +(-10)·1, tj. 30-10 = 20 (m/s).

Podobně nová hodnota[91] souřadnice x je rovna staré hodnotě (tj. 0 m) plus $\upsilon_x \cdot \Delta t$, tedy 0+20 = 20 (metrů). Přitom hodnotu rychlosti bereme už v novém čase.[92]

Naprosto stejně pak vypočteme hodnoty v dalších řádcích tabulky:

t	a_x	υ_x	x
0	-10	30	0
1	-10	20	20
2	-10	10	30
3	-10	0	30
4	-10	-10	20
5	-10	-20	0

Výsledek můžeme vynést do grafu. Z tabulky i grafu vidíme, že náš výpočet dává maximální výšku vrhu 30 m a čas, kdy bod dopadne, 5 s.



Tento výsledek můžeme porovnat s výsledky analytického výpočtu, protože svislý vrh samozřejmě můžeme vypočítat s tužkou a papírem. Výšku svislého vrhu můžeme jednoduše určit například ze zákona zachování mechanické energie, vyjde 45 metrů.[93] To je o 50 % víc, než nám vyšlo numerickým výpočtem. ☺☹

[89] Pro hod z ruky je to samozřejmě nerealisticky vysoká hodnota, ale když už jsme zvolili $\Delta t = 1\,\mathrm{s}$ (aby se nám jednoduše počítalo), potřebujeme rychlost takovou, aby kámen letěl alespoň několik sekund.

[90] V našem případě o konstantu rovnou až na znaménko tíhovému zrychlení.

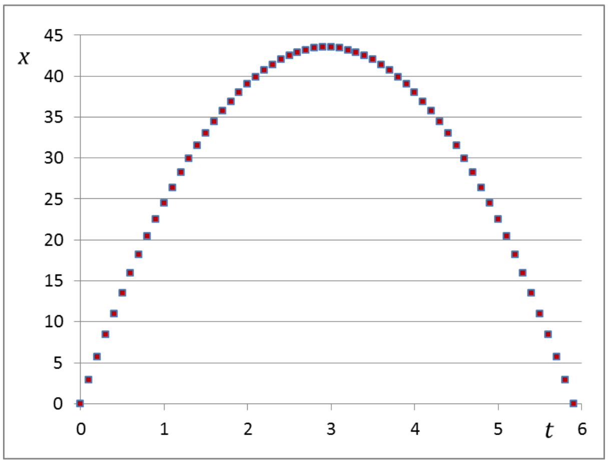
[91] Tj. hodnota v „novém" čase $t = 1\,\mathrm{s}$.

[92] Mohli bychom také brát hodnotu υ_x ve starém čase nebo vzít průměr hodnot ve starém a novém čase. Podrobnější rozbor numerického výpočtu (který zde dělat nebudeme) však ukazuje, že vzít hodnotu rychlosti v novém čase je často vhodnější. (Přesnější výsledky dává například pro energii hmotného bodu určenou ze spočtených hodnot polohy a rychlosti.)

[93] Kinetická energie $\frac{1}{2} m \upsilon_0^{\,2}$, kterou udělíme kamenu na začátku pohybu, se ve vrcholu celá přemění na potenciální energii mgh . Odtud pro maximální výšku vrhu dostaneme $h = \upsilon_0^{\,2} / (2g) = (900/20)\ \mathrm{m}$.

To není bůhvíjaká přesnost. Ovšem náš časový krok byl velmi hrubý. Takže se nabízí jasná možnost, jak přesnost zvýšit: zmenšit časový krok Δt. Provádět výpočet „ručně“ už by bylo únavné, takže nám pomůže počítač.

Tabulku už zde prezentovat nebudeme[94], představu o výsledku dobře poskytne graf. Vidíme z něj, že maximální výška vrhu se už výrazně blíží hodnotě 45 metrů, kterou jsme dostali z analytického výpočtu. Pro $\Delta t = 1\ \mathrm{s}$ byla chyba 15 m; pro $\Delta t = 0{,}1\ \mathrm{s}$ je chyba jen 1,5 m, tedy desetkrát menší. Pokud bychom provedli výpočet s krokem $\Delta t = 0{,}01\ \mathrm{s}$, byla by chyba už jen 15 cm, při kroku $\Delta t = 1\ \mathrm{ms}$ pak jen 1,5 cm. Desetkrát menší časový krok znamená desetkrát menší chybu.

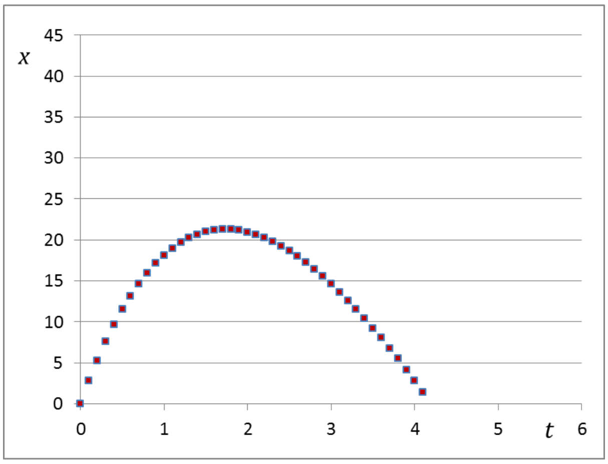


Toto chování chyby v závislosti na časovém kroku je charakteristické pro numerickou metodu, kterou jsme použili. (Je známa pod názvem **Eulerova metoda**.) Tato metoda má výhodu v tom, že je velmi názorná, z metod pro numerické řešení diferenciálních rovnic je evidentně nejjednodušší – ale samozřejmě to není poslední slovo numerické matematiky![95]

Řešit jen úlohu, jejíž výsledek už známe, ale není moc zajímavé. Zkusme náš problém přiblížit realitě a řešit **svislý vrh s odporem prostředí**.

Pro jednoduchost budeme uvažovat odporovou sílu úměrnou rychlosti, $F_{x\ \mathrm{odpor}} = -b \cdot v_x$.[96] Celková síla působící na hmotný bod bude $F_x = -m \cdot g - b \cdot v_x$. Z ní pak zrychlení je $a_x = F_x / m$; zbytek algoritmu pak zůstává stejný. Celkově je cyklus výpočtu:

```
Cyklus
   F := -g·m-b·v
   a := F/m
   v := v + a·Δt
   x := x + v·Δt
   t := t +Δt
Konec cyklu
```



Výsledek výpočtu (pro hodnotu b = 0,5) ukazuje obrázek vpravo. Je vidět, že se výrazně snížila maximální výška vrhu a při pádu zpět je rychlost menší, než byla na začátku vrhu.[97]

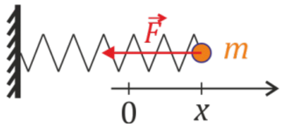
Podobně bychom mohli počítat pohyb v případě, kdy by odporová síla byla úměrná druhé mocnině rychlosti, vše by zůstalo stejné, změnil by se jen výraz pro sílu na $F_x = -m \cdot g - b \cdot |v_x| \cdot v_x$.

94 Padesát devět řádků by nám zbytečně zabíralo prostor.
95 Například pro Rungeho-Kuttovu metodu 4. řádu platí, že když jsme dostatečně blízko přesného řešení a desetkrát zmenšíme krok, klesne chyba ***desetitisíckrát***!
96 Takováto síla odpovídá pohybu v kapalině. Ve vzduchu je odporová síla úměrná spíše druhé mocnině rychlosti, jak upravit algoritmus pro tento případ naznačíme za chvíli.
97 Není divu, odpor prostředí kamenu ubírá mechanickou energii.

Abychom nezůstali jen u vrhů, přidáme ještě jeden příklad:

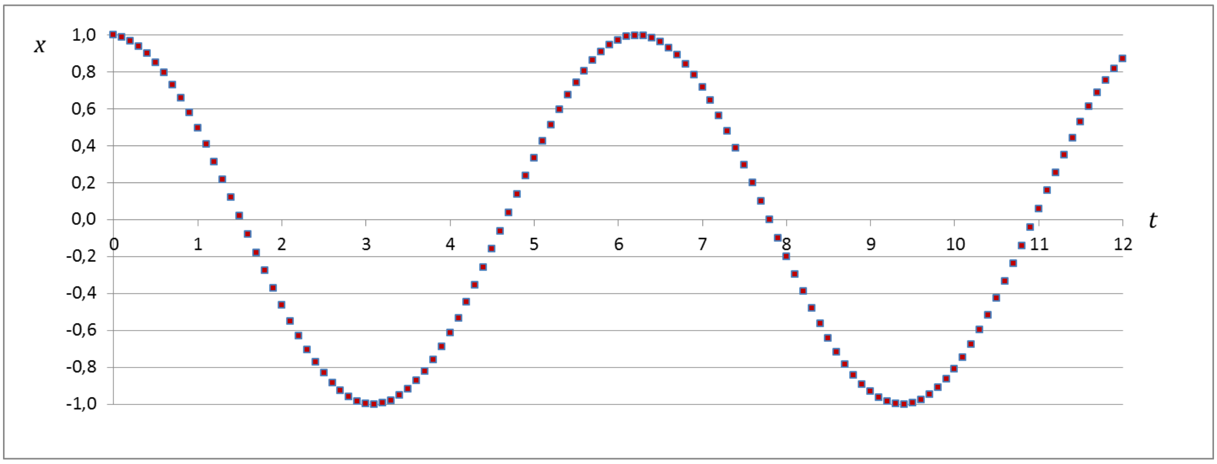
Příklad 5: harmonické kmity (numerické řešení)

Zkusme numericky vyřešit příklad, který jsme výše řešili analyticky: pohyb hmotného bodu na pružině. Vlastně toho v našem algoritmu nemusíme moc měnit, jen vztah pro sílu. Cyklus výpočtu tedy bude:




```
Cyklus
   F := -k·x
   a := F/m
   v := v + a·Δt
   x := x + v·Δt
   t := t +Δt
Konec cyklu
```

A to je vše! Výsledek (pro $m=1$, $k=1$, nulovou počáteční rychlost a počáteční výchylku $x(0)=1$) ukazuje graf:



Opravdu vyšel průběh, který vypadá jako funkce $x = B\cdot\cos(\omega t)$, kde $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}} = 1\ \mathrm{s}^{-1}$. Pokud bychom chtěli přidat tlumení resp. odpor prostředí, stačí k síle opět přidat člen $F_{x\ \mathrm{odpor}} = -b\cdot v_x$.

Napadá vás teď otázka, proč vlastně všechny problémy klasické mechaniky neřešíme numericky na počítači? Schválně, rozmyslete si, jak by se na ni dalo odpovědět.[98]

Pro naše seznamování s mechanikou bude navíc důležitý ještě jeden aspekt: Kdybychom odteď vše řešili jen numericky a nestarali se o nic dalšího, ochudili bychom se o seznámení s řadou zajímavých fyzikálních veličin, jako hybnost, moment hybnosti a energie – a to by byla škoda. S jejich pomocí totiž často získáme do fyzikálních problémů výrazně hlubší vhled.

[98] Asi nejpodstatnější je skutečnost, že numerický výpočet poskytne výsledek vždy jen pro jedny zadané počáteční podmínky. Naproti tomu analytické řešení (kdy výsledek je kombinace známých funkcí) nám dá představu o chování řešení pro široký rozsah počátečních hodnot.

Shrnutí

Volný hmotný bod je hmotný bod, na který nepůsobí žádné síly.

Inerciální systém je systém, v němž se libovolný volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře (tedy v němž platí 1. Newtonův zákon).

1. Newtonův zákon: Volný hmotný bod se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Moderní formulace: Existuje inerciální systém.

2. Newtonův zákon: $m\vec{a} = \vec{F}$

Vlastnosti pravých sil:

- **Princip superpozice**: $\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \ldots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i$
- **Princip akce a reakce**: $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$
- **Centrálnost sil**: $\vec{F}_{12} \sim \vec{r}$, kde $\vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r}_2$
- … a v řadě případů **závislost jen na vzdálenosti**: $\left|\vec{F}_{12}\right| = f(r)$, kde $r = \left|\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right|$

Příklady:

- Gravitační síla (**Newtonův gravitační zákon**): $\vec{F}_g = -G\dfrac{m_1 m_2}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$
- Elektrostatická síla (**Coulombův zákon**): $\vec{F}_e = k\dfrac{Q_1 Q_2}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$, kde $k = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Síla z pohybu: $\vec{F} = m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2}$

Pohyb ze síly: řešením **pohybové rovnice** $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$, tj. $m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F_x$, $m\dfrac{d^2y}{dt^2} = F_y$, …

integrační konstanty se určí z **počátečních podmínek** $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$, $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$

Numerické řešení pohybové rovnice: krok po kroku (princip řešení: Eulerova metoda).

Příklad: Harmonické kmity (kulička na pružině)

Konstanty:	Počáteční podmínky:	Cyklus:

`m := 1`
`k := 1`
`Δt:= 0,01`
	`x := x0`
	`v := v0`
	`t := 0`
		`F := -k·x`
		`a := F/m`
		`v := v + a·Δt`
		`x := x + v·Δt`
		`t := t + Δt`

Dodatek 2.A: Diferenciální rovnice (jemný nástin úvodu do úplných základů)

Diferenciální rovnice je rovnice, v níž se vyskytuje neznámá funkce $y(x)$ a její derivace $y'(x)$, případně druhá derivace $y''(x)$ apod. Podle maximálního řádu derivací v rovnici mluvíme o diferenciálních rovnicích prvního řádu, druhého řádu, atd.

Řešením diferenciální rovnice je funkce $y = y(x)$, kterou když do rovnice dosadíme, je tato splněna.

Příklady:

- $y' = x$ – diferenciální rovnice prvního řádu, řešením je $y = \frac{1}{2}x^2 + C$ [99]
- $y' = y$ – diferenciální rovnice prvního řádu, řešením je $y = A \cdot e^x$ [100]
- $y'' + y = 0$ – diferenciální rovnice druhého řádu, řešením je například $y = A \cdot \sin(x)$ [101] [102]

Z příkladů (a poznámky pod čarou) vidíme, že řešení diferenciální rovnice prvního řádu obsahuje jednu nezávislou konstantu, řešení diferenciální rovnice druhého řádu pak dvě nezávislé konstanty.[103]

Jak řešit diferenciální rovnice se naučíte v matematice.[104] Zatím, na začátku klasické mechaniky, nám bude stačit, abychom se jich zbytečně nebáli. Konec konců, když máme nějakou diferenciální rovnici a někdo nám řekne, jaké má řešení, vždycky ho můžeme zderivovat[105] a ověřit, že je opravdu řešením.

Pokud jde o **pohybové rovnice** – tedy o rovnice, které nám dá 2. Newtonův zákon, když do něj dosadíme konkrétní vyjádření pro sílu – jsou to diferenciální rovnice druhého řádu. Jen místo podle *x* v nich samozřejmě derivujeme podle času.

Příklady:

- $m\ddot{x} = F = \text{konst.}$ – popisuje pohyb pod vlivem konstantní síly, řešením je $x = \frac{1}{2}\left(F/m\right)^2 t^2 + \upsilon_0 t + x_0$
- $m\ddot{x} = -k \cdot x$ – závaží na pružině, řešením je $x = A \cdot \cos(\omega t + \varphi)$ (harmonické kmity)

---

[99] *C* je libovolná konstanta. Když řešení zderivujeme, dostaneme $y' = \left(\frac{1}{2}x^2 + C\right)' = \frac{1}{2}\left(x^2\right) = \frac{1}{2} \cdot 2x = x$, takže rovnice je opravdu splněna.

[100] *A* je opět libovolná konstanta. Zkuste si dané řešení zderivovat, že opravdu vyjde $y' = y$.

[101] Je totiž $y' = A \cdot \cos(x)$ a odtud $y'' = -A \cdot \sin(x)$, takže $y'' + y = -A \cdot \sin(x) + A \cdot \sin(x) = 0$.

[102] Tohle ale není jediné možné řešení, druhé řešení je $y = B \cdot \cos(x)$. (Zkuste si ověřit, že je opravdu řešením.) Obecné řešení je $y = A \cdot \sin(x) + B \cdot \cos(x)$. (Ověřte.)

[103] Tohle platí obecně; ve fyzice však většinou nepotřebujeme rovnice vyššího než druhého řádu.

[104] Řešení těch rovnic, které budete ve fyzice v začátcích nejvíce potřebovat, pak v předmětu *Matematické metody fyziky*.

[105] To řešení, ne toho, kdo ho říká. ☺