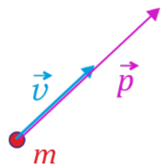
Dynamika hmotného bodu II: hybnost, energie, atd.

Zdálo by se, že po numerickém řešení pohybové rovnice už k dynamice hmotného bodu není co dodat. Máme-li zadanou sílu a počáteční podmínky, s pomocí počítače umíme vypočítat, jak se daný hmotný bod pohybuje. A to přece stačí, ne?

Ovšem, kdybychom takhle uvažovali, připravili bychom se o možnost získat na pohyb hmotného bodu hlubší náhled. A nesetkali bychom se s veličinami, které nám tento hlubší náhled umožní: s hybností, prací, energií a momentem hybnosti. Přitom právě tohle budou veličiny, které nás budou provázet všemi dalšími partiemi mechaniky – a jsou klíčové vlastně pro celou fyziku.

3.1 Hybnost



Vztah pro **hybnost** hmotného bodu bychom mohli jednoduše „vymyslet“: Hmotnost hmotného bodu je m, jeho rychlost $\vec{v}$. Jak jednoduše zkombinovat tyto dvě veličiny?[1] Nejjednodušší je prostě je vynásobit[2]:

$$\boxed{\vec{p} = m\vec{v}} \tag{3.1}$$

Hybnost má tedy stejný směr jako rychlost, míří ve směru pohybu. K čemu se tato veličina hodí?

Například s její pomocí můžeme lehce zapsat druhý Newtonův zákon $m\vec{a} = \vec{F}$. Je totiž $m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{d}{dt}\left(m\vec{v}\right) = \dfrac{d\vec{p}}{dt}$.[3] **Druhý Newtonův zákon** lze tedy psát jako[4] [5]

$$\boxed{\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}\ ,} \tag{3.2}$$

neboli, ve slovním vyjádření: **Časová změna hybnosti rovná se působící síle**.

Změna hybnosti a impuls síly

Vztah (3.2) říká, jak se mění hybnost „právě v daném okamžiku“. Podívejme se, jak se hybnost mění v delším časovém intervalu, řekněme mezi počátečním časem t_0 a koncovým časem t_k.[6] Nejprve si uvědomíme, jak se hybnost změní za krátký časový interval Δt. Platí

---

[1] Tedy veličinu skalární (m) a vektorovou ($\vec{v}$). Navíc veličinu, která pochází z kinematiky (rychlost) a veličinu, která je důležitá v dynamice (hmotnost). Vidíme, že hybnost propojuje kinematiku a dynamiku.

[2] Samozřejmě bychom si mohli vymyslet nějakou divokou kombinaci typu $m^{15}v^3\vec{v}$, ale ta by se nejspíš k ničemu rozumnému nehodila, zatímco $m\vec{v}$, jak si ukážeme, má rozumný význam.

[3] Při úpravě využíváme toho, že hmotnost je v klasické mechanice konstantní, $m = \text{konst.}$ (Neuvažujeme třeba těleso, z něhož by za pohybu odpadávaly kousky. Také neuvažujeme efekty speciální teorie relativity.)

[4] Stojí za zmínku, že v tomto tvaru (resp. ve tvaru $\dot{\vec{p}} = \vec{F}$) formuloval svůj zákon Isaac Newton.

[5] Ještě jedna poznámka: Zákon ve tvaru (3.2) platí i pro pohyb hmotného bodu podle speciální teorie relativity (STR); vztah $m\vec{a} = \vec{F}$ v STR neplatí.

[6] Rozdíl $t_k - t_0$ může být pár sekund, milisekund, minut nebo hodin, záleží na problému, který řešíme. Příkladem může být roztlačování auta nebo těžkého vozíku: Tlačíme silou $\vec{F}$ (která se může s časem měnit), auto nabírá rychlost, mění se tedy i jeho hybnost. Zajímá nás, jak se hybnost změní od začátku do konce.

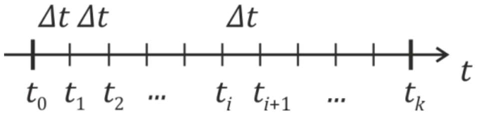
$$\Delta\vec{p} \doteq \frac{d\vec{p}}{dt}\,\Delta t = \vec{F}\,\Delta t \,.\text{[7] [8]} \tag{3.3}$$

Změnu hybnosti můžeme napsat konkrétněji jako $\Delta\vec{p} = \vec{p}\,(t+\Delta t) - \vec{p}\,(t)$, takže (3.3) dává

$$\vec{p}\,(t+\Delta t) - \vec{p}\,(t) \doteq \vec{F}(t)\,\Delta t \;. \tag{3.4}$$

Na pravé straně jsme již explicite napsali, že sílu bereme v čase *t*.[9] Změnu hybnosti jsme sice nevyjádřili přesně (ve vztahu je symbol přibližné rovnosti!), ale pro malé Δt bude zřejmě chyba malá.[10]

A co delší časový interval? Prostě ho rozdělíme na hodně malých intervalů Δt :



Bude tedy $t_1 = t_0 + \Delta t,\ t_2 = t_0 + 2\cdot\Delta t,\ \ldots,\ t_i = t_0 + i\cdot\Delta t$. Změnu hybnosti (3.4) teď napíšeme postupně pro všechny intervaly,

$$\begin{aligned}
\vec{p}\,(t_1) - \vec{p}\,(t_0) &\doteq \vec{F}(t_0)\,\Delta t \\
\vec{p}\,(t_2) - \vec{p}\,(t_1) &\doteq \vec{F}(t_1)\,\Delta t \\
\vec{p}\,(t_3) - \vec{p}\,(t_2) &\doteq \vec{F}(t_2)\,\Delta t \qquad . \\
&\cdots \\
\vec{p}\,(t_k) - \vec{p}\,(t_{k-1}) &\doteq \vec{F}(t_{k-1})\,\Delta t
\end{aligned} \tag{3.5}$$

---

a všechny řádky sečteme: $$\vec{p}\,(t_k) - \vec{p}\,(t_0) \doteq \vec{F}(t_0)\,\Delta t + \vec{F}(t_1)\,\Delta t + \ldots + \vec{F}(t_{k-1})\,\Delta t$$

Celková změna hybnosti tedy je:

$$\vec{p}\,(t_k) - \vec{p}\,(t_0) \doteq \sum_{i=0}^{k-1} \vec{F}(t_i)\,\Delta t \tag{3.6}$$

Rovnost je pořád ještě přibližná. Chybu ale zřejmě můžeme zmenšovat tím, že budeme zmenšovat Δt , tedy že budeme dělit daný časový interval na ještě více ještě kratších intervalů. Co dostaneme, je lépe vidět, pokud chvíli nebudeme pracovat s vektory, ale jen s jednou složkou hybnosti a síly.

Zapišme tedy jen *x*-ovou složku vztahu (3.6):

---

[7] Proč platí $\Delta\vec{p} \doteq \frac{d\vec{p}}{dt}\,\Delta t$, stručně ukazuje Dodatek 3.A.

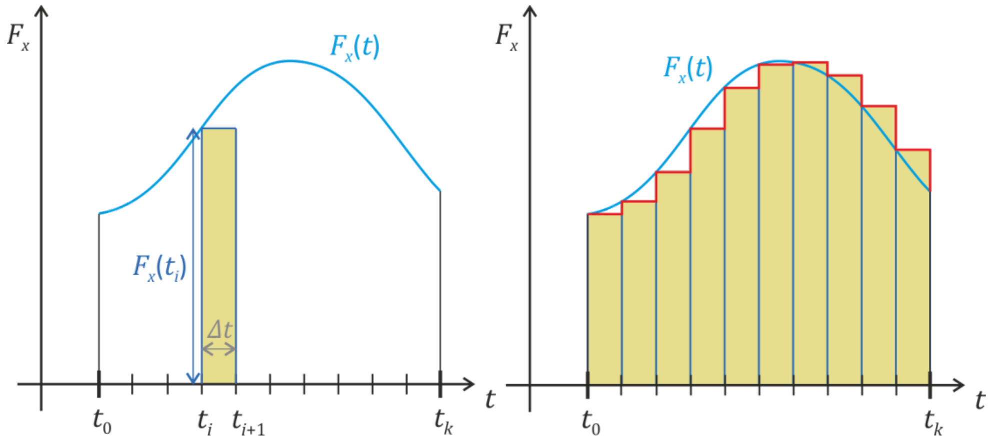
[8] Při odvození jsme již využili vztah (3.2).

[9] Mohli jsme ji též vzít v čase $t+\Delta t$ nebo v kterémkoli čase mezi t a $t+\Delta t$, např. v čase $t+\Delta t/2$. Pro naše další úvahy to však nebude podstatné.

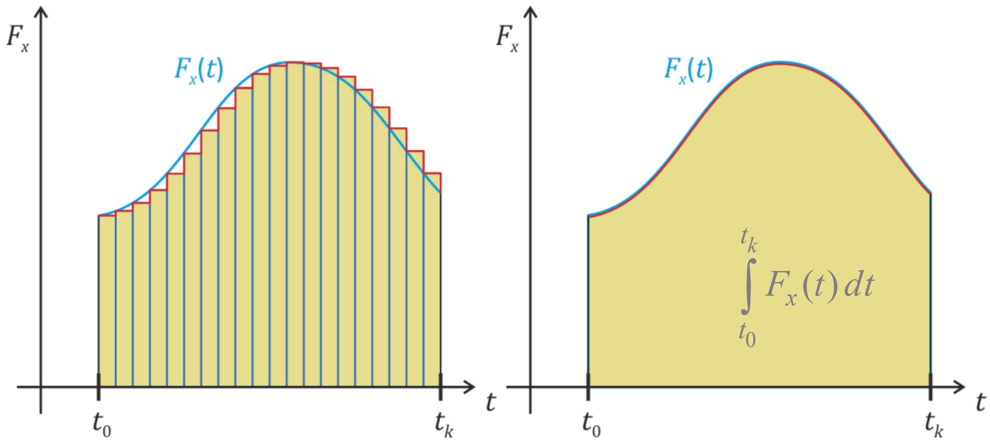
[10] Namítáte-li, že tohle je dost vágní vyjádření, máte pravdu. Jak velkou chybu zde děláme, záleží na konkrétní situaci. Jistě si můžeme vymyslet „patologické případy“, kdy vztah (3.4) selže; třeba případ, kdy v čase *t* je síla nulová a o nanosekundu později je 10 meganewtonů, ale tyto případy nebudeme uvažovat. (Naše další úvahy budou platit, například pokud bude síla spojitou funkcí času; tato podmínka by šla ještě zmírnit.) Fakticky nám zde půjde o to, abychom si vytvořili o vztahu mezi změnou hybnosti a silou rozumnou a názornou představu, zpřesňování podmínek, kdy co platí, necháme na matematice.

$$p_x(t_k) - p_x(t_0) \doteq \sum_{i=0}^{k-1} F_x(t_i)\,\Delta t \ . \tag{3.7}$$

Výrazu na pravé straně lze dát názornou geometrickou interpretaci. Nakreslíme si průběh síly v závislosti na čase. Z obrázku je vidět, že součin $F_x(t_i)\,\Delta t$ je roven ploše vybarveného obdélníka.[11] Suma $\sum_{i=0}^{k-1} F_x(t_i)\,\Delta t$ je tedy rovna ploše pod „zubatou křivkou" (na obrázku vpravo vyznačenou červeně), která aproximuje závislost $F_x(t)$.



Budeme-li zmenšovat Δt, bude naše červená křivka aproximovat závislost síly na čase stále lépe a lépe. Zmenšování Δt k nule je limitní proces, $\Delta t \to 0$. Červená křivka pak zřejmě „splyne" se závislostí síly na čase a plocha pod ní bude tedy plocha pod křivkou $F_x(t)$.



Tímto procesem jsme se od sumy, čili součtu „konečně mnoha konečně malých kousků", dostali k **určitému integrálu**.[12] [13]

[11] Jeho šířka je Δt a výška $F_x(t_i)$.

[12] Říci, že určitý integrál je součet „nekonečně mnoha nekonečně malých kousků" by samozřejmě bylo velmi nepřesné, ale jistou názornou představu nám to dá. Geometrický význam je takový, jaký jsme tu načrtli: plocha pod grafem funkce. Matematika samozřejmě určitý integrál zavádí mnohem rigorózněji; v tomto textu opět odkážeme na předmět *Úvod do matematických metod fyziky* (a samozřejmě na *Matematickou analýzu*).

[13] Některé vlastnosti určitého integrálu stručně shrnuje Dodatek 3.B.

Vidíme, že limitou $\Delta t \to 0$ přejde suma v integrál: $\sum_{i=0}^{k-1} F_x(t_i)\,\Delta t \;\xrightarrow{\Delta t \to 0}\; \int_{t_0}^{t_k} F_x(t)\,dt$. Současně se chyby ve vztahu (3.7) zmenšují k nule[14], takže dospíváme k výsledku

$$p_x(t_k) - p_x(t_0) = \int_{t_0}^{t_k} F_x(t)\,dt \; . \tag{3.8}$$

Totéž samozřejmě platí pro *y*-ovou a *z*-ovou složku. Ve vektorovém zápisu pak dostaneme:

$$\boxed{\vec{p}(t_k) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F}(t)\,dt \; .} \tag{3.9}$$

Integrálu na pravé straně říkáme **impuls síly**, takže získaný výsledek můžeme vyjádřit i slovně:

Změna hybnosti je rovna impulsu síly.[15]

Změna hybnosti – rychlejší odvození

Z druhého Newtonova zákona (3.2) můžeme výsledek (3.9) získat i mnohem přímočařeji, prostě integrací podle času:

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \qquad \Big/ \int_{t_0}^{t_k} dt \tag{3.10}$$

Integrací levé strany (3.10) dostaneme $\int_{t_0}^{t_k} \frac{d\vec{p}}{dt}\,dt = \left[\vec{p}(t)\right]_{t_0}^{t_k} = \vec{p}(t_k) - \vec{p}(t_0)$, tedy levou stranu (3.9).

Integrál pravé strany je přímo $\int_{t_0}^{t_k} \vec{F}(t)\,dt$, tedy pravá strana (3.9). A jsme s odvozením hotovi![16]

K čemu je to dobré

Z výsledku, který jsme dostali, je jasné, že chceme-li tělesu udělit nějakou hybnost, můžeme to udělat tak, že na něj působíme krátkou dobu velkou silou, nebo malou silou, ale dlouhou dobu. Příkladem

[14] Pokud není funkce $F_x(t)$ nějak „patologická“, jak už jsme to zmiňovali výše.

[15] Pokud by po nás někdo chtěl, o jakou hybnost jde a o jakou sílu, mohli bychom říci přesněji například: „Změna hybnosti hmotného bodu, na který působí vnější síly, se rovná impulsu síly počítaného z výslednice vnějších sil.“
V tomto textu budeme na mnoha místech používat spíše kratší vyjádření nejrůznějších vztahů, zákonů apod. Rozmyslete si přitom vždy sami, jak by šlo dané vyjádření zpřesnit či konkretizovat.

[16] Vidíme, že umíme-li pracovat s integrály, dostaneme výsledek doslova na dvou řádcích. Rozmyslete si sami – proč jsme jej tedy výše odvozovali skoro na třech stránkách?
(Uvědomte si, že jsme-li zaměřeni na vzdělávání, musíme zvládat jak rychlé formální obraty, tak názorné vysvětlení, jak pojmy a vztahy budovat a kde se berou. Navíc postup, kterým jsme prošli, nás dovedl k tomu, že určitý integrál „nespadl z nebe“, ale dostali jsme ho jako nezbytnou věc, když jsme chtěli přesně vypočítat změnu hybnosti.)

mohou být iontové motory některých kosmických sond. Mají sice malý tah, ale mohou pracovat velmi dlouho.

Výsledek, že změna hybnosti je impuls síly, můžeme využít i „naopak“, k výpočtu síly například při odrazu míčku od podlahy nebo kladiva od kovadliny[17] apod. Vypočíst ale můžeme jen průměrnou sílu při příslušném odrazu – i to ale stačí, abychom získali představu, jak velké síly při nárazech jsou.

Pro integrál na pravé straně (3.9) totiž platí $\int_{t_0}^{t_k} \vec{F}(t)\,dt = \vec{F}_{\text{průměrná}}\left(t_k - t_0\right)$. [18] Z (3.9) proto okamžitě dostáváme $\vec{F}_{\text{průměrná}} = \dfrac{\vec{p}(t_k)-\vec{p}(t_0)}{t_k - t_0}$, což můžeme zkráceně napsat jako

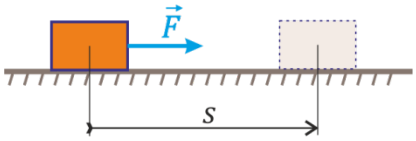
$$\boxed{\vec{F}_{\text{průměrná}} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}\,.^{19}} \tag{3.11}$$

Pokud je doba rázu velmi krátká (typicky když jsou oba předměty tvrdé, třeba v případě kladiva a kovadliny), je síla velká.

[17] Nebo, nedejbože, hlavy nepřipoutaného řidiče od čelního skla při prudkém zabrzdění nebo srážce.
[18] Fakticky se takto definuje průměrná síla. (Matematici by mluvili o *střední hodnotě* síly.)
[19] Tohle se dá lehce zapamatovat, fakticky to vypadá jako 2. Newtonův zákon, když místo derivace píšete $\dfrac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$.

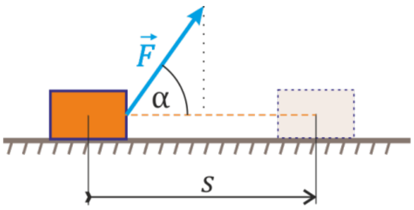
3.2 Práce

Termín „práce“ se v běžném životě užívá v řadě významů.[20] Fyzikální význam tohoto pojmu známe ze školy i ze zkušenosti: Táhneme-li těžkou bednu, pak míra našeho utahání je jistě větší pro těžší bednu případně pro bednu taženou po drsnější podložce – tedy je-li větší síla, kterou bednu táhneme – a také roste, když musíme bednu táhnout na delší vzdálenost. Je tedy rozumné definovat veličinu **práce** jako součin síly a dráhy:



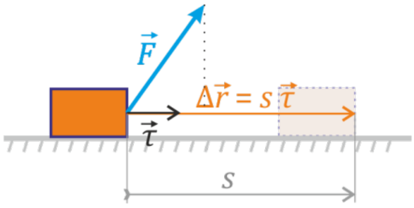
$$W = F \cdot s \quad {}^{21\ 22} \tag{3.12}$$

V práci se uplatňuje jen síla (resp. složka síly) do směru pohybu. Má-li síla jiný směr, musíme vzorec upravit na



$$W = F \cdot s \cdot \cos\alpha \ .^{23} \tag{3.13}$$

Tento vztah ještě upravíme do tvaru, který budeme moci za chvíli zobecnit. Zavedeme jednotkový vektor $\vec{\tau}$ mířící ve směru pohybu. Výraz $F \cos\alpha$ pak můžeme napsat pomocí skalárního součinu jako $F \cos\alpha = \vec{F} \cdot \vec{\tau}$. Práci tedy můžeme vyjádřit jako



$$W = \vec{F} \cdot \vec{\tau}\ s \ .$$

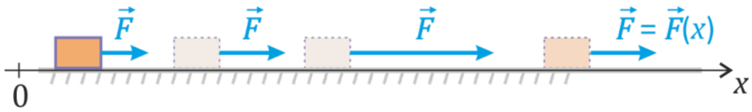
Tento výsledek ještě upravíme. Součin jednotkového vektoru $\vec{\tau}$ ve směru pohybu a délky posunutí s je totiž vektor posunutí, $\Delta\vec{r} = s\,\vec{\tau}$.

Celkově tedy dostáváme pro práci konstantní síly $\vec{F}$, která těleso posune o $\Delta\vec{r}$ výraz

$$W = \vec{F} \cdot \Delta\vec{r} \ . \tag{3.14}$$

Když síla není konstantní …

Co když ale síla není konstantní?[24] Podívejme se na situaci nejprve v jednorozměrném případě, tedy když se hmotný bod[25] pohybuje po přímce a síla míří ve směru pohybu (ale nemusí být konstantní).



[20] Česká Wikipedie jich uvádí asi sedm. Anglická Wikipedie je na tom, pro termín „work“, podobně. (Navíc připomíná asi dvacet písniček či hudebních děl s názvem „Work“. Ostatně i v češtině máme Píseň práce; mladší generace budou znát spíš Uhlířovo-Svěrákovo „Dělání“. Ale to už jsme od fyziky daleko.)

[21] Práci značíme symbolem W, zjevně z anglického „work“. Ve starších učebnicích se užívá symbol A (z německého Arbeit).

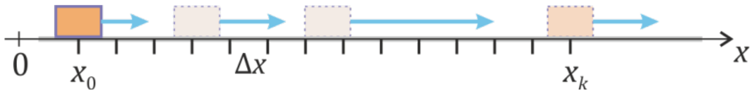
[22] Pozor, tento vzorec platí, jen když **síla je konstantní**. (Podobně tomu bude pro několik dalších, dokud neřekneme jinak.)

[23] $F \cdot \cos\alpha$ je průmět vektoru síly do směru pohybu.

[24] To se v praxi často stává. Představte si, že táhnete sáňky chvíli po ledu, pak v hlubším sněhu, pak třeba po škváře a pak zase po sněhu.

[25] Občas jsme zde už mluvili o bedně nebo o tělese, ale pořád na něj nahlížíme jako na hmotný bod.

Jak práci v tomto případě definovat a spočítat? Rozdělíme si celou dráhu na malé úseky o délce Δx. V rámci každého úseku se síla příliš nemění[26], můžeme ji proto považovat za (přibližně) konstantní.



Práce síly F na krátkém úseku Δx je (viz výše (3.12))

$$\Delta W = F \cdot \Delta x \quad ^{27} \tag{3.15}$$

a celkovou práci dostaneme sečtením přes všechny úseky dráhy. Pokud chceme výsledek zpřesnit, budeme dráhu dělit na kratší a kratší úseky – směřujeme tedy k limitě $\Delta x \to 0$.

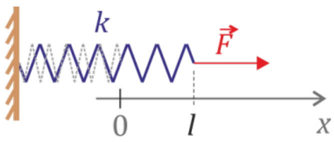
Nepřipomíná vám to něco? Jistě, stejný postup jsme prováděli v předchozí kapitolce, když jsme vyjadřovali impuls síly. Naše úvahy už tedy nemusíme podrobně opakovat a je nám jasné, že výsledkem bude integrál

$$W = \int_{x_0}^{x_k} F(x)\, dx \tag{3.16}$$

„Jak to funguje“ se podíváme na konkrétním příkladu.

Příklad 1: práce při natahování pružiny

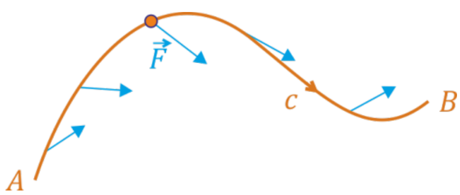
Pružinu tuhosti k natahujeme z neprotaženého stavu. Je-li protažení pružiny x, je síla, kterou ji natahujeme, rovna $F = k \cdot x$.[28] Celkem pružinu natáhneme o délku l. Práci, kterou přitom vykonáme, spočteme podle vztahu (3.16):



$$W = \int_0^l F(x)\, dx = \int_0^l k \cdot x\, dx = k \int_0^l x\, dx = k \left[\tfrac{1}{2} x^2 \right]_0^l = \tfrac{1}{2} k\, l^2 \tag{3.17}$$

A když trajektorií není přímka …

Co když se ale hmotný bod nepohybuje po přímce, co když je jeho trajektorií křivka? Možnou situaci ukazuje obrázek.[29] Křivku označujeme c, jde od počátečního bodu A do koncového bodu B. Vidíme, že i síla může mít v různých bodech různou velikost a různý směr.



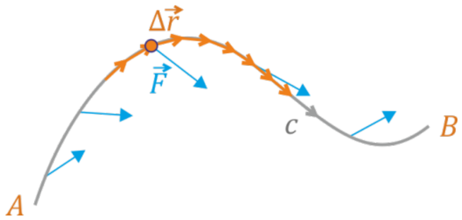
---

[26] Jako obvykle předpokládáme, že nenastávají nějaké „patologické situace“. (Tenhle předpoklad budeme používat i v dalších úvahách a už ho většinou ani nebudeme zmiňovat.) Matematik by samozřejmě řekl, že existuje spousta krásných příkladů, kdy naše úvaha selže. Třeba kdyby síla jako funkce x byla tzv. *Dirichletova funkce*. Ta se pro x racionální rovná 1 a pro x iracionální je rovna nule. Jistě, je to krásná funkce – ale takovéto chování u jakékoli reálné síly ve fyzice opravdu neočekáváme…

[27] Protože práce na malém kousku dráhy je malá, označujeme ji ΔW. Můžeme říci, že jde o „kousek práce“. Symbolem W (bez delty) budeme označovat celkovou práci.

[28] Tak je definována tuhost pružiny k. (Předpokládáme přitom, že při natahování pružiny platí Hookeův zákon, tedy že mezi silou a protažením platí přímá úměrnost.)

[29] Představte si třeba, že po takovéto dráze táhnete sáňky. (Obrázek ukazuje pohled shora.)



Postup, kterým jsme výše definovali a počítali práci, naštěstí můžeme lehce zobecnit a použít i nyní. Křivku prostě rozdělíme na malé úseky, na malá posunutí $\Delta\vec{r}$. Na každém úseku budeme považovat sílu za prakticky konstantní, takže příslušný kousek práce je[30]

$$\Delta W \doteq \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} \ .$$

Celková práce je součtem všech kousků,

$$W = \sum_{i=1}^{k} \vec{F}_{(i)}\cdot\Delta\vec{r}_{(i)} \ .$$

Podobně, jako jsme to dělali v případě přímé dráhy, nyní budeme délku posunutí limitovat k nule.[31] Výsledkem bude integrál

$$\boxed{W = \int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ .} \qquad (3.18)$$

Toto je obecný vztah pro práci síly $\vec{F}$ po křivce c. Můžeme ho považovat za obecnou definici mechanické práce; můžeme tedy říci:

Práce je integrál síly po dráze.

Matematická odbočka: křivkový integrál

S integrálem, který je ve vztahu (3.18), jsme se dosud nesetkali. Není to „normální“ integrál, tedy integrál $\int_a^b f(x)\,dx$, v němž proměnná x probíhá hodnoty od a do b, ale **křivkový integrál**[32]. V něm je proměnnou vektor, v našem případě polohový vektor $\vec{r}$, jehož koncový bod probíhá danou křivku c.

Jak počítat hodnoty křivkových integrálů „technicky“, se naučíte v dalších předmětech[33]. Zde nám zatím stačí, abychom měli základní představu typu

„jde o součet hodně mnoha hodně malých příspěvků přes všechny části křivky“

(v limitě, kdy délky těch částí křivky jdou k nule).

Ve stručné formě najdete některé základní informace o křivkovém integrálu v Dodatku 3.C. Pro následující příklad z něj budeme potřebovat jen jiné vyjádření vztahu (3.18):

$$W = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \left(\vec{F}\left(\vec{r}(\xi)\right)\cdot\frac{d\vec{r}}{d\xi} \right) d\xi \ . \qquad (3.19)$$

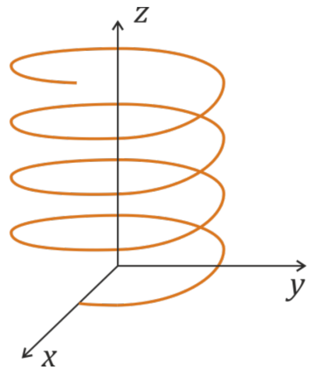
[30] Píšeme zde „rovná se přibližně“, právě proto, že síla obecně není ani na krátkém kousku dráhy přesně konstantní. Přesně budou naše rovnosti platit, až když budeme délku kousků limitovat k nule.

[31] Formálně bychom mohli psát $|\Delta\vec{r}| \to 0$.

[32] Přesněji řečeno, **křivkový integrál druhého druhu**. (S křivkovým integrálem prvního druhu se potkáme později.)

[33] Nejprve v *Matematických metodách fyziky* a pak v některých matematických předmětech.

Příklad 2: práce při zvedání závaží po šroubovici



Představte si, že nesete těžký kufr nahoru po kruhovém schodišti. Křivkou, která popisuje jeho pohyb, je šroubovice.[34] Její rovnice je[35]

$$\begin{aligned} x &= R\cos\varphi \\ y &= R\sin\varphi \\ z &= b\,\varphi \end{aligned} \tag{3.20}$$

Úhel φ zde hraje roli parametru.[36] Řekněme, že vystoupáte čtyři patra, tedy čtyři závity schodiště. To znamená, že úhel φ se bude měnit od 0 do 8π. Vztah (3.19) pro výpočet práce tedy bude konkrétně

$$W = \int_0^{8\pi} \left(\vec{F}\left(\vec{r}(\varphi)\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right) d\varphi \;. \tag{3.21}$$ [37]

Z (3.20) vypočteme

$$\frac{d\vec{r}}{d\varphi} = \left(\frac{dx}{d\varphi}, \frac{dy}{d\varphi}, \frac{dz}{d\varphi} \right) = \left(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, b\right).$$

Síla, kterou neseme kufr, je $\vec{F} = \left(0, 0, mg\right)$.[38] Skalární součin, který v integrálu potřebujeme, je tedy $\vec{F}\left(\vec{r}(\varphi)\right) \cdot \dfrac{d\vec{r}}{d\varphi} = \left(0, 0, mg\right)\cdot\left(-R\sin\varphi, R\cos\varphi, b\right) = mg\,b$. Dosazení do (3.21) dá

$$W = \int_0^{8\pi} \left(\vec{F}\left(\vec{r}(\varphi)\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{d\varphi} \right) d\varphi = \int_0^{8\pi} mgb\, d\varphi = mgb \cdot 8\pi \;. \tag{3.22}$$

Výsledek má jasnou fyzikální interpretaci: $8\pi\,b$ je výška schodiště, takže k vynesení kufru jsme museli vykonat práci $W = mgh$, kde $h = 8\pi\,b$.[39]

Podobným způsobem můžeme vypočítat práci i ve složitějších případech. Křivku vždy vyjádříme parametricky a příslušný křivkový integrál se nakonec převede na „obyčejný“ určitý integrál.

---

[34] Normálně bychom řekli, že schodiště je kruhové nebo spirálové. V matematice se ovšem pojem *spirála* používá pro rovinnou křivku, ta, s níž momentálně budeme pracovat, je *šroubovice*. Pokud vám vadí představa, že schody nejsou hladká křivka, představte si schody vyhlazené do „spirálové“ šikmé rampy.

[35] Jde o parametrické vyjádření křivky. Parametr b určuje, jak strmě šroubovice stoupá; jeden závit má výšku $2\pi\,b$. (V technické praxi se u šroubů toto nazývá stoupání závitu a bývá označováno symbolem P.)

[36] Výše ve vztahu (3.19) jsme pro obecný parametr užívali symbol ξ, teď je naším parametrem konkrétně φ.

[37] Všimněte si, že to už je „obyčejný“ určitý integrál, máme v něm jedinou proměnnou φ, přes kterou integrujeme.

[38] Pro jednoduchost předpokládáme, že kufr neseme pomalu, takže můžeme zanedbat dostředivou sílu, nutnou pro to, aby se kufr nepohyboval přímočaře. (Její započtení by nic nezměnilo, protože je kolmá na posunutí.) Označení parametrů je jasné: m je hmotnost, g tíhové zrychlení.

[39] Vidíte tu souvislost s potenciální energií? Za chvíli si jí všimneme blíž.

3.3 Konzervativní síly

Než se pustíme do zavádění potenciální energie, musíme si blíže charakterizovat síly, pro které budeme moci potenciální energii definovat. Používá se pro ně název **konzervativní síly**.

Hodně volně bychom mohli říci, že konzervativní síly jsou takové, které nám v nějakém smyslu umožňují „zakonzervovat“, tedy „schovat si“ práci. Například gravitační síla takto funguje v přečerpávací elektrárně Dlouhé stráně: čerpadla konají práci, když ženou vodu ze spodní do horní nádrže; později voda tekoucí dolů roztáčí turbíny a koná práci.[40]

Pojďme výše uvedenou kvalitativní představu doplnit matematickou definicí. Dokonce hned dvěma.

Dvě definice

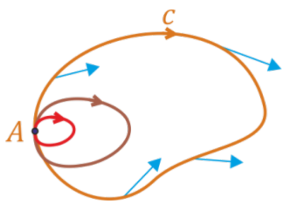
> Síla $\vec{F}(\vec{r})$ je konzervativní, jestliže křivkový integrál $\int_c \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$ nezávisí na křivce, ale jen na jejím počátečním a koncovém bodě.

To znamená, že máme-li dvě křivky c_1 a c_2 mezi stejnými body A a B, dá integrál ze síly po obou křivkách stejnou hodnotu.[41]

> Síla $\vec{F}(\vec{r})$ je konzervativní, jestliže její integrál po libovolné uzavřené křivce je roven nule, $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$. [42]

… jsou ekvivalentní

Dokážeme, že z první definice plyne druhá, tj. že integrál $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$ po libovolné uzavřené křivce.



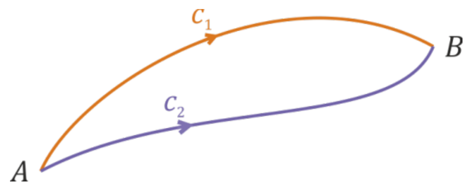
Na uzavřené křivce c zvolíme libovolný bod A, viz obrázek. Tento bod můžeme chápat jako počáteční a současně koncový bod. Když je síla konzervativní (podle první definice), nezáleží integrál na křivce, ale jen na počátečním a koncovém bodě – což je nyní bod A. Můžeme tedy místo původní křivky c brát křivky menší a menší, a hodnota integrálu zůstává stále stejná. Tak dospějeme až ke křivce nulové délky (tj. vůbec se nepohneme z bodu A); integrál přes křivku nulové délky je ale zjevně roven nule. To znamená, že i integrál přes původní křivku c je roven nule, $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$. Původní křivka mohla být libovolná – náš důkaz je u konce.

[40] Předem se omlouvám všem, jimž se ze slovního spojení „zakonzervovat práci“ ježí všechny vlasy. Tohle bylo řečeno opravdu hodně volně a nepřesně – raději to nikde ani neopakujte. ☺ Naštěstí to hned v dalším odstavci těžce zformalizujeme.

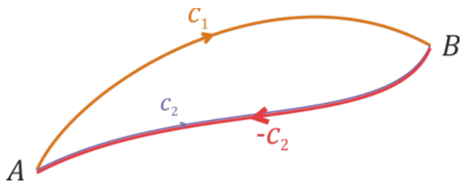
[41] Konkrétně například: Když budeme kufr vynášet z podchodu jednou po šikmé rampě a podruhé po schodech a pak půjdeme kus vodorovně a dojdeme na stejné místo, vykonáme v obou případech stejnou práci.

[42] Tedy jestliže s kufrem obejdeme určitou trasu a vrátíme se na výchozí místo, vykonáme celkově nulovou mechanickou práci. (Pozor, tím není řečeno, že se neunavíme – naše svaly samozřejmě spotřebovávají energii, jenže ta se nakonec mění v teplo.)
Poznámka k poznámce: „Mění se v teplo“ je zaužívané slovní spojení, které není přesné a dalo by se oprávněně kritizovat. Správně bychom měli říci „mění se v jiné formy energie“. Proč tomu tak je, a proč to není problém jen terminologický, ale na tomto místě nebudeme blíže diskutovat.

Dokažme nyní naopak, že z druhé definice plyne první. Uvažujme pevné koncové body A a B a mezi nimi dvě křivky c_1 a c_2, viz obrázek vpravo. Chceme dokázat, že integrál (ze síly $\vec{F}(\vec{r})$, která je konzervativní podle druhé definice) je po obou křivkách stejný, tedy že platí $\int\limits_{c_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int\limits_{c_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$.



Obě křivky ale dohromady tvoří uzavřenou křivku. Tedy, budou tvořit, pokud druhou křivku budeme procházet v opačném směru. (Viz obrázek vlevo, opačná křivka ke křivce c_2, tedy křivka $-c_2$, je na něm vyznačena červenou barvou.)



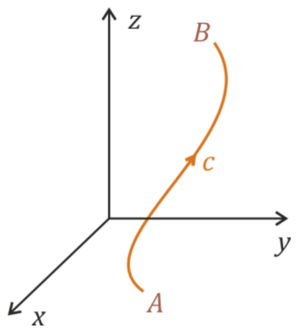
Integrál přes uzavřenou křivku je (podle druhé definice) nulový, $\oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = 0$. Ale tento integrál se skládá ze dvou částí, části přes křivku c_1 a části přes křivku $-c_2$, je tedy[43]

$$0 = \oint \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int\limits_{c_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \int\limits_{-c_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int\limits_{c_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} - \int\limits_{c_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \ .$$

Odtud už okamžitě vidíme, že $\int\limits_{c_1} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int\limits_{c_2} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r}$, což jsme chtěli dokázat.

Které síly jsou konzervativní

Konzervativní je řada sil, s nimiž v mechanice máme co do činění. Například **gravitační síla**. Jednoduše to dokážeme pro **homogenní gravitační pole**:



Zvolme soustavu souřadnic tak, že osa z míří svisle vzhůru. Pak gravitační síla má složky $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Hmotný bod o hmotnosti m budeme posouvat po nějaké obecné křivce c z bodu A do bodu B. Body křivky jsou dány polohovým vektorem $\vec{r} = (x, y, z)$, posunutí je $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$[44]. Je tedy $\vec{F}\cdot d\vec{r} = (0, 0, -mg)\cdot(dx, dy, dz) = -mg\, dz$.

Křivkový integrál

$$\int\limits_{c} \vec{F}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int\limits_{z_A}^{z_B} (-mg)\, dz = -mg\left[z\right]_{z_A}^{z_B} = -mg\left(z_B - z_A\right) \qquad (3.23)$$

tedy závisí jen na rozdílu výšek počátečního a koncového bodu, nikoli na tvaru křivky.[45]

Centrální gravitační pole dané Newtonovým gravitačním zákonem[46] je také konzervativní. Obecně to zde zatím dokazovat nebudeme, vrátíme se k tomu v další části kapitoly.

[43] Viz vlastnosti křivkového integrálu uvedené v Dodatku 3.C.

[44] Pro náš výpočet ani nebudeme muset psát parametrické vyjádření křivky.

[45] A samozřejmě, je-li křivka uzavřená, tj. $A \equiv B$, je $z_B - z_A = 0$ a integrál se rovná nule.

[46] Např. gravitační pole Země, pokud ji bereme jako kouli, v níž je hmota rozložena sféricky symetricky.

Elektrostatické síly dané Coulombovým zákonem jsou rovněž konzervativní.[47]

Konzervativní jsou také **síly pružnosti**. Pokud síla pružiny závisí jen na jejím natažení a opětovném zkrácení na původní délku, dá integrál ze síly nulu.[48]

Uvedené příklady by v nás možná mohly vzbudit dojem, že konzervativní jsou všechny „rozumné“ síly. Ale není tomu tak.

… a které jsou nekonzervativní

Důležitým případem **nekonzervativních sil** jsou **třecí síly** resp. obecně **odporové síly**. Je to vidět jak z „fyzikálního názoru“[49] tak z výše uvedených formálních definic. Táhneme-li nějaké těleso, ať už po drsné podložce nebo třeba v bazénu, kde voda působí odporovou silou[50], působí síla vždy proti směru pohybu. Skalární součin $\vec{F} \cdot d\vec{r}$ je tedy ve všech bodech křivky záporný – a když se vrátíme do výchozího bodu, musí být celkový součet těchto příspěvků také záporný, tedy $\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} < 0$.

Za konzervativní také nemůžeme označit síly, které nezávisí na poloze, ale **na rychlosti**. Příkladem je síla působící na nabitou částici nebo vodič s proudem v magnetickém poli.

Předchozí příklady nekonzervativních sil ukazovaly případy, kdy, volněji řečeno, „o práci přicházíme“: těleso strčené po podlaze se za chvíli zastaví, hozený lehký míček je odporem prostředí brzděn. Nekonzervativní síly ale mohou práci i „přinášet“. Například plachetnice je poháněna větrem; rotor větrné elektrárny je větrem (tj. pohybujícím se vzduchem) roztáčen; elektromotor pohání síla, působící na vodiče rotoru v magnetickém poli statoru…[51]

---

[47] Coulombův zákon má formálně stejný tvar jako Newtonův gravitační zákon, takže jakmile dokážeme konzervativnost sil pro Newtonův gravitační zákon, bude jasné, že konzervativní jsou i elektrostatické síly.

[48] Pro případ, kdy je síla přímo úměrná výchylce, by příslušný integrál byl $\int_{x_0}^{x_0} -k \cdot x\,dx = -k\left[x^2/2\right]_{x_0}^{x_0} =$
$= -\left(k/2\right)\left(x_0{}^2 - x_0{}^2\right) = 0$.

[49] Táhnete-li těžkou bednu po drsné podlaze, můžete vykonat hodně práce, ale rozhodně jste si tuto práci nikam neschovali ani „nezakonzervovali“.

[50] Kdybyste chtěli větší odpor, táhněte něco třeba v sudu s medem – ale škoda medu. ☺

[51] Je vidět, že bez nekonzervativních sil by svět byl docela nudný a necivilizovaný… A také nebezpečný, na žádném autě by nefungovaly brzdy. (Což by se dalo řešit tím, že by se při brzdění v autě natahovala nějaká pružina. Obecně se zdá, že by v nepřítomnosti nekonzervativních sil auta mohla jezdit jen na setrvačník nebo na klíček, tedy na nataženou pružinu. Horší by bylo, že by chybělo tření mezi koly a vozovkou; to by se možná dalo řešit nějakou zubačkou... Raději tyto úvahy už nebudeme rozvíjet, celé to začíná vypadat jako hodně divoká sci-fi.) Prostě, buďme rádi, že nekonzervativní síly jsou!

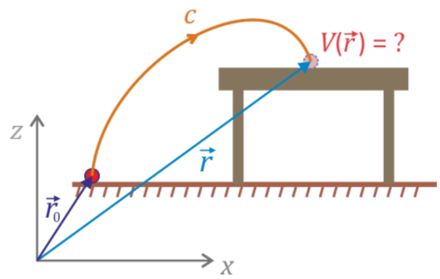
3.4 Potenciální energie

Podle slovníku cizích slov termín „potenciální“ znamená „možný, uskutečnitelný“. **Potenciální energie** by tedy byla, volně řečeno, energie, která může něco uskutečnit. Konkrétně a fyzikálně to znamená, že má-li něco potenciální energii, pak to ***může vykonat práci*.**

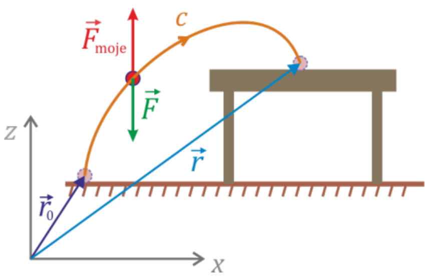
Zamýšlet bychom se jistě mohli i nad významem slova „**energie**“. To má mnoho významů i v běžném životě[52]. Ve školské fyzice se energie často definuje jako ***schopnost konat práci*** a víceméně od tohoto pojetí se budou odvíjet i naše odvození v dalším textu. Je ale dobré uvědomit si, že fyzikální význam pojmu energie je ve skutečnosti daleko širší.[53]

V češtině se také, zejména v základo- a středoškolské fyzice, pro potenciální energii užívá termín **polohová energie**. Typickým příkladem je polohová energie v homogenním gravitačním poli: zvednu-li závaží[54] ze země na stůl, má vyšší potenciální energii, než mělo na zemi. Při zvedání jsem konal práci – a právě o tuto práci se zvýšila potenciální energie závaží.

A teď už to jen formalizovat s použitím trošky matematiky. Hmotný bod přemisťujeme z výchozí pozice dané polohovým vektorem $\vec{r}_0$ do konečné pozice, kdy polohový vektor bude $\vec{r}$. Přemístění se děje po křivce c. (Pro zapsání integrálu bude užitečné označovat nějak polohový vektor odpovídající bodům křivky mezi počátečním a koncovým bodem; budeme ho značit $\vec{\tilde{r}}$.)



Při přemisťování hmotného bodu musíme vyrovnávat gravitační sílu $\vec{F}$. Když zvedám závaží (= hmotný bod), musím na něj tedy působit silou $\vec{F}_{\text{moje}}$, přitom zřejmě $\vec{F}_{\text{moje}} = -\vec{F}$. [55]



Práce, kterou při zvedání závaží vykonám, je dána integrálem

$$\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{\text{moje}}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} \;.$$

[52] Opět podle slovníku cizích slov: činorodost, ráznost, odhodlanost. (Vedle těchto rázných formulací část definice, která upomíná na fyziku, zní hodně formálně: „míra různých forem pohybu hmoty ve všech jejích vzájemných přeměnách“. Představíte si pod tímto strohým popisem nabitou baterii vašeho smartphonu, masu sněhu ve výšce před utržením laviny, vnitřek atomového reaktoru nebo aktivní galaktické jádro se superhmotnou černou dírou?)

[53] Energie patří k nejdůležitějším a nejzákladnějším fyzikálním veličinám a bylo by zřejmě těžké až nemožné snažit se ji obsáhnout jednou krátkou definicí. Spíše se s ní, s jejími formami a s tím, „jak funguje“ v různých systémech, budete ve fyzice postupně seznamovat. A zdaleka to nebude jen v mechanice.

Místo formálních definic tedy můžeme říci, že energie je veličina, která nám pomáhá chápat mnohé aspekty procesů ve všech oblastech fyziky. (A popustíme-li uzdu fyzikálnímu nadšení, můžeme dodat, že je fascinující a nádherné, že takováto základní veličina „přes celou fyziku“ vůbec existuje. Není přitom sama, podobně základní význam mají hybnost a moment hybnost.)

[54] Konkrétně třeba litrovou láhev s vodou, učebnici mechaniky nebo kufřík s miliónem dolarů. (Prostě běžné věci, které máte při studiu rozloženy kolem sebe na zemi. ☺)

[55] Předpokládáme přitom, že s hmotným bodem hýbeme tak pomalu, že všechny síly dané tím, že bychom hmotný bod zrychlovali nebo brzdili, jsou zanedbatelné. (Takový děj se někdy označuje jako *kvazistatický*, ale tenhle termín tu zmiňujeme jen pro úplnost, znalost mechaniky na něm nestojí.)

Potenciální energii tedy zřejmě můžeme definovat jako[56]

$$V(\vec{r}) = V_0 + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}_{\text{moje}}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \ . \tag{3.24}$$

Ve výsledném vztahu pro potenciální energii by ale samozřejmě neměla zbýt žádná „moje síla“. Měla by se tam vyskytovat jen síla příslušného silového pole (v našem případě gravitačního). S využitím toho, že $\vec{F}_{\text{moje}} = -\vec{F}$, jde ale (3.24) okamžitě upravit na konečný tvar

$$\boxed{V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} \ .} \tag{3.25}$$

Toto je obecný vztah, který můžeme vzít za definici potenciální energie.

Důležité upozornění:

Potenciální energie je definována jen pro konzervativní síly.

Je to vidět už z jejího definičního vztahu (3.25). Vyskytují se v něm počáteční bod $\vec{r}_0$ (odkud náš hmotný bod začínáme přemísťovat) a koncový bod $\vec{r}$ (v němž určujeme potenciální energii $V(\vec{r})$). Ale nikde není řečeno, po jaké křivce bod přemísťujeme! Kdyby síla nebyla konzervativní, vyšly by po různých křivkách různé hodnoty integrálu a tedy různé hodnoty potenciální energie. Definice (3.25) by pak byla nepoužitelná.

Takže pozor: například pro třecí síly, sílu, kterou na nás působí vítr, nebo sílu, kterou na vodič s proudem působí magnetické pole, žádnou potenciální energii zavést nemůžeme!

Ovšem, i pro konzervativní síly máme v určení $V(\vec{r})$ jistou libovůli.

Potenciální energie je určena až na konstantu

Ve vztahu (3.25) pro potenciální energii můžeme libovolně zvolit výchozí bod $\vec{r}_0$, z něhož začínáme bod přemisťovat, a také konstantu V_0, tedy hodnotu energie v bodě $\vec{r}_0$.[57]

V našem příkladu se zvedáním závaží si mohu říci, že ho začnu zvedat ze země, ale mohl jsem také začít o patro níž, od hlavních dveří budovy, ode dna propasti Macocha nebo třeba od hladiny moře. A mohu si říci, jakou hodnotu potenciální energie v tomto místě má. Obecně tedy platí, že

potenciální energie je určena až na konstantu.

[56] Poznámka k symbolu pro označení potenciální energie:
Z fyziky na ZŠ a SŠ jsme zvyklí označovat potenciální energii symbolem E_{p}. Ve vysokoškolské fyzice (a v článcích ve vědeckých časopisech apod.) se pro potenciální energii většinou používá symbol V, tohoto značení se přidržíme i v našem učebním textu. (Obecně je značení veličin dáno historickým vývojem a co se vžilo, to se prostě používá. Jak už řekl klasik: „Můžete s tím nesouhlasit, můžete proti tomu protestovat, ale to je tak vše, co s tím můžete dělat.“)

[57] Dosadíme-li do (3.25) $\vec{r} = \vec{r}_0$, dostaneme $V(\vec{r}_0) = V_0$. To znamená, že potenciální energie našeho bodu v místě $\vec{r}_0$ je rovna právě V_0.

Jak se s takovouto neurčitostí dá žít? Snadno. Samotná hodnota potenciální energie totiž nemá žádný význam.

Fyzikální význam mají pouze rozdíly potenciální energie.

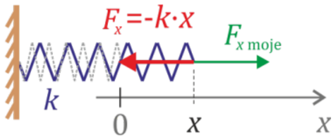
Rozdíly potenciální energie na volbě výchozího bodu a konstanty V_0 nezávisejí. [58] [59]

Při odvozování vztahů pro potenciální energii obvykle volíme výchozí bod a konstantu V_0 tak, aby výsledné vzorce byly co nejjednodušší. Ukáží to i následující příklady

Potenciální energie vybraných sil

Potenciální energie pružiny

Síla, kterou pružina působí na hmotný bod, je $F_x = -k \cdot x$, kde x je natažení pružiny. Síla a posunutí působí v téže přímce, takže $\vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x\, dx$. Vztah (3.25) tedy dává



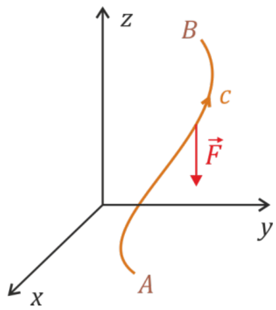
$$V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V_0 - \int_0^x (-k\,\tilde{x})\,d\tilde{x} = V_0 + k\left[\tilde{x}^2/2\right]_0^x = V_0 + \tfrac{1}{2} k\, x^2$$

Je přirozené vzít energii nenatažené pružiny jako nulovou, proto volíme $V_0 = 0$. Výsledný vztah pro energii pružiny je tedy

$$\boxed{V = \tfrac{1}{2} k\, x^2\ .} \qquad (3.26)$$

Potenciální energie v homogenním gravitačním poli

Fakticky jsme tuto situaci již popisovali výše, takže jen stručně: Síla působící na hmotný bod o hmotnosti m je $\vec{F} = (0, 0, -mg)$. Posunutí po křivce je $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, takže $\vec{F} \cdot d\vec{r} = (0, 0, -mg) \cdot (dx, dy, dz) = -mg\, dz$. Po dosazení do (3.25) dostáváme



$$V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = V_0 - \int_{z_A}^{z} (-mg)\, d\tilde{z} = V_0 + mg\left[\tilde{z}\right]_{z_A}^{z} = V_0 + mg\,(z - z_A) \, .$$

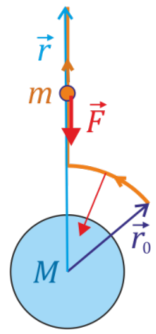
Označíme-li rozdíl svislých souřadnic $z - z_A \overset{\text{ozn}}{=} h$ (takže h je výška, o níž jsme hmotný bod zvedli), a zvolíme $V_0 = 0$, je výsledkem známý vztah

$$\boxed{V = mgh\ .} \qquad (3.27)$$

[58] Pokud je energie závaží na zemi 0 J a jeho energie na stole 10 J, je rozdíl 10 J. Jestliže zvolím V_0 = 1000 J, bude energie závaží na zemi 1000 J a energie na stole 1010 J. Rozdíl bude pořád 10 J – a to je to, co je fyzikálně důležité. Podobně kdybych zvolil výchozí bod na hladině moře.

[59] Samozřejmě, pro určení potenciální energie v různých bodech už musí být výchozí bod stejný a stejná musí být i konstanta V_0.

Potenciální energie ve sféricky symetrickém gravitačním poli



Jak naznačuje obrázek, může jít o potenciální energii v gravitačním poli Země.[60] Hmotnost Země označíme M, hmotnost hmotného bodu m, vzdálenost od středu Země, v níž chceme určit potenciální energii, budeme označovat r. Vzdálenost výchozího bodu označíme r_0. (A vzdálenost bodu na křivce, po níž se budeme pohybovat, budeme značit $\tilde{r}$.[61])

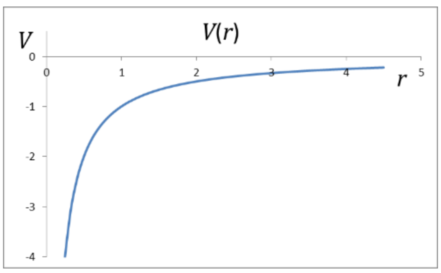
Gravitační síla je dána vztahem $\vec{F}\left(\vec{\tilde{r}}\right) = -G\dfrac{M\,m}{\tilde{r}^2}\,\dfrac{\vec{\tilde{r}}}{\tilde{r}}$.

Křivku, po které se budeme pohybovat od výchozího bodu (na obrázku je značena oranžově), zvolíme speciálně tak, že nejprve půjdeme po kruhovém oblouku $\tilde{r} = \text{konst.}$ V této části křivky je síla kolmá na posunutí, takže nekoná práci – tím pádem je příspěvek této části integrálu nulový. Pak se budeme od středu Země radiálně vzdalovat – tam mají posunutí a síla stejný směr (a opačnou orientaci). Vztah pro potenciální energii tedy dá

$$V\left(\vec{r}\right) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}\left(\vec{\tilde{r}}\right)\cdot d\vec{\tilde{r}} = V_0 - \int_{r_0}^{r}\left(-G\frac{M\,m}{\tilde{r}^2}\right)d\tilde{r} = V_0 + GM\,m\left[-\frac{1}{\tilde{r}}\right]_{r_0}^{r} = V_0 + G\frac{M\,m}{r_0} - G\frac{M\,m}{r}.$$

Konstanty většinou volíme tak, aby $V_0 + G\dfrac{M\,m}{r_0} = 0$. Výsledný vztah pro potenciální energii hmotného bodu v gravitačním poli jiného hmotného bodu (nebo třeba v gravitačním poli Země) je pak

$$\boxed{V = -G\frac{M\,m}{r}\ .} \qquad (3.28)$$



Průběh potenciální energie v závislosti na vzdálenosti schematicky ukazuje graf.

Nevadí, že je tato energie záporná? Nevadí. Podstatné jsou *rozdíly* potenciální energie v různých vzdálenostech. Jak vidíme i z grafu, s rostoucí vzdáleností potenciální energie roste.[62]

Je někde potenciální energie nulová?[63] Striktně matematicky vzato, není. Vidíme ale, že $V \to 0$ pro $r \to \infty$. To znamená potenciální energie je prakticky nulová v hodně velké vzdálenosti.

Ze vztahu (3.28) bychom tedy mohli třeba vypočítat, jakou energii bychom potřebovali, abychom ze Země unikli „do nekonečna“. Zkuste to![64]

---

[60] Tu pro náš případ považujeme za kouli, v níž je hmota rozložena sféricky symetricky. Vně takové koule je gravitační pole stejné jako gravitační pole hmotného bodu o hmotnosti Země.

[61] Podobné značení jsme už užívali výše. Jde o to, abychom rozlišili integrační proměnnou a mez integrálu.

[62] Stejně jako v homogenním gravitačním poli roste V s výškou.

[63] Tedy, jak se někdy říká, je někde **nulová hladina potenciální energie**?

[64] Takovýto „únik do nebes“ by se dal dělat třeba po nekonečně dlouhém žebříku vedoucím od severního pólu vzhůru. Což asi není moc realistické… Ale jak uvidíme později, z rozdílu energie na povrchu Země a v nekonečnu se dá jednoduše odvodit druhá kosmická rychlost.

Potenciální energie náboje v elektrostatickém poli druhého náboje

Jde o analogii k předchozímu případu. Náboj Q působí na náboj q podle Coulombova zákona silou

$$\vec{F} = k\,\frac{Q\,q}{\tilde{r}^2}\,\frac{\vec{\tilde{r}}}{\tilde{r}} \quad (3.29)$$

[65]

Stejným postupem jako výše bychom evidentně dostali

$$\boxed{V = k\,\frac{Q\,q}{r}\,.} \quad (3.30)$$

[66]

Potenciál (a zmínka o intenzitě pole)

S potenciální energií je úzce spojen pojem **potenciál**. Proč a jak ho zavádíme? Vyjděme z předchozí situace týkající se elektrostatiky.

Řekněme, že v počátku soustavy souřadnic máme náboj Q. A chceme v místě $\vec{r}$ charakterizovat elektrostatické pole – ale něčím jiným, než silou. Nabízí se možnost vyžít k tomu potenciální energii. Prostě dáme do místa $\vec{r}$ nějaký jiný náboj q, (říkejme mu třeba ***testovací náboj***), určíme jeho energii a řekneme, že ta charakterizuje pole v daném místě.

Ovšem pozor, jak vidno z (3.30), energie závisí na velikost testovacího náboje q! Desetkrát větší testovací náboj znamená desetkrát větší energii. A my chceme charakterizovat jen pole náboje Q.

Řešení se samozřejmě nabízí. Zavedeme veličinu

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{V(\vec{r})}{q} = k\,\frac{Q}{r}\,. \quad (3.31)$$

A právě to je elektrický potenciál bodového náboje Q (ve vzdálenosti r od tohoto náboje).

Podobně můžeme zavést **gravitační potenciál**. Tentokrát ale potenciální energii nedělíme nábojem, ale hmotností „testovací hmoty“ m. Ze vztahu (3.28) dostaneme pro potenciál hmotného bodu[67]

$$\varphi_G(\vec{r}) = \frac{V(\vec{r})}{m} = -G\,\frac{M}{r}\,. \quad (3.32)$$

Poznamenejme, že podobný vztah jako mezi potenciální energii a potenciálem je mezi silou a **intenzitou pole**. Například intenzitu elektrického pole definujeme jako

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\,. \quad (3.33)$$

Podobné to je pro intenzitu gravitačního pole; ještě se k tomu vrátíme.

---

[65] $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, kde ε_0 je permitivita vakua.

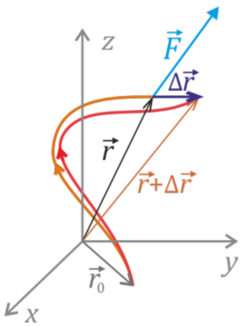
[66] Pravé strany vztahů (3.28) a (3.30) se liší znaménkem, ale to je pochopitelné. Dva hmotné body se přitahují, takže když jsou blíž, je jejich vzájemná potenciální energie nižší – abychom je dostali dál od sebe, musíme je od sebe odtlačovat, tedy musíme konat práci. Dva náboje stejného znaménka se naopak odpuzují; práci musíme konat, když je chceme dostat blíž k sobě. Pro kratší vzdálenost je tedy jejich potenciální energie (v případě $Q\,q > 0$) vyšší.

[67] Nebo koule se sféricky symetrickým rozložením hmoty – ovšem jen vně koule.

3.5 Jak z potenciální energie určit sílu

V předchozí části kapitoly jsme se naučili, jak ze známé síly spočíst potenciální energii. Nešlo by to také naopak, tedy ze známé potenciální energie určit sílu? Šlo – ale budeme k tomu potřebovat znát potenciální energii nejen v jednom bodě, ale i v jeho okolí.[68] [69]

Začneme tak, že určíme hodnotu potenciální energie ve dvou blízkých bodech, $\vec{r}$ a $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ (viz obrázek) podle vztahu (3.25):[70]



$$V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}}$$

$$V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} \tag{3.34}$$

Odečteme-li první řádek od druhého, dostaneme:

$$V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r}) = -\left(\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} \right) = -\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} \tag{3.35}$$

Rozdíl potenciálních energií je tedy dán integrálem podél „kousku křivky“ $\Delta\vec{r}$ (na obrázku výše vyznačeném fialově).[71]

Ještě jednodušeji můžeme k témuž výsledku dojít z fyzikálního náhledu: Rozdíl potenciálních energií ve dvou bodech je dán prací, kterou síla vykoná na dráze tyto body spojující. A integrál na pravé straně (3.35) je právě touto prací. (Rozmyslete si, proč je před ním znaménko mínus![72])

Kousek křivky $\Delta\vec{r}$ je ale krátký, takže síla $\vec{F}$ je na něm prakticky konstantní. Integrál na pravé straně se tedy prakticky rovná

$$\int_{\vec{r}}^{\vec{r}+\Delta\vec{r}} \vec{F}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} \doteq \vec{F}(\vec{r}) \cdot \Delta\vec{r} \ . \tag{3.36}$$

[68] Pokud bychom znali jen hodnotu $V(\vec{r})$ v jediném bodě, nic bychom z ní spočíst nemohli – už proto, že jak jsme viděli výše, význam mají jen *rozdíly* potenciální energie v různých bodech.
Ostatně – k určení potenciální energie nám také nestačilo znát sílu v jediném bodě, museli jsme ji znát podél celé křivky, podél níž se integrovalo.

[69] Když jsme potenciální energii dostali ze síly integrací, dokážeme odhadnout, jak asi určíme sílu z potenciální energie? (Správně, derivací…)

[70] Na obrázku je křivka směřující k $\vec{r}$ (podél níž integrujeme na prvním řádku (3.34)) vyznačena oranžově, křivka směřující k $\vec{r}+\Delta\vec{r}$, podél níž integrujeme na druhém řádku, červeně.

[71] Rozmyslete si, proč to tak je. Lze to vidět například z toho, že z téhož výchozího bodu $\vec{r}_0$ dospějí do téhož koncového bodu $\vec{r}+\Delta\vec{r}$ jak červená křivka, tak křivka vzniklá složením oranžové a fialového „kousku“.
A protože síla je konzervativní, musí se rovnat integrály po obou křivkách.

[72] Kdyby šlo o práci, kterou jsem vykonal já proti silám pole (např. při zvedání závaží z $\vec{r}$ do $\vec{r}+\Delta\vec{r}$), bylo by zde znaménko kladné. Ale síla pole má opačnou orientaci než „moje síla“, proto je znaménko mínus.
Nebo ještě jinak: Aby síla pole vykonala *kladnou práci*, musí potenciální energie *poklesnout*. (Příklady: klesající závaží v kyvadlových hodinách, voda padající na turbínu ve vodní elektrárně.)

Chyba, kterou touto aproximací děláme, se zjevně bude zmenšovat, když budeme zmenšovat $\Delta\vec{r}$. Spojením (3.35) a (3.36) dostáváme

$$V\left(\vec{r}+\Delta\vec{r}\right)-V\left(\vec{r}\right) \doteq -\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} \ . \tag{3.37}$$

Teď už máme sílu $\vec{F}$ skoro spočtenou. Ovšem pozor, (3.37) nelze jednoduše vydělit $\Delta\vec{r}$.[73]

Využijeme toho, že vektor $\Delta\vec{r}$ je libovolný[74] a zvolíme ho ve tvaru $\Delta\vec{r} = \left(\Delta x, 0, 0\right)$. Vztah (3.37) pak bude mít tvar

$$V\left(\vec{r}+\left(\Delta x, 0, 0\right)\right)-V\left(\vec{r}\right) \doteq -\vec{F}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r} = -\left(F_x, F_y, F_z\right)\cdot\left(\Delta x, 0, 0\right) = -F_x\left(\vec{r}\right)\,\Delta x \ . \tag{3.38}$$

Ten již můžeme dělit Δx a dostaneme

$$F_x\left(\vec{r}\right) \doteq -\frac{V\left(\vec{r}+\left(\Delta x, 0, 0\right)\right)-V\left(\vec{r}\right)}{\Delta x} \ .$$

Výsledek možná bude o něco přehlednější, pokud potenciální energii zapíšeme explicite jako funkci proměnných x, y a z: $V\left(\vec{r}\right)=V\left(x,y,z\right)$[75]:

$$F_x\left(\vec{r}\right) \doteq -\frac{V\left(x+\Delta x, y, z\right)-V\left(x, y, z\right)}{\Delta x}$$

Pořád zde ale máme určitou nepřesnost danou tím, že Δx má konečnou délku[76]. Takže abychom sílu určili přesně, vezmeme limitu $\Delta x \to 0$:

$$F_x\left(\vec{r}\right) = -\lim_{\Delta x\to 0}\frac{V\left(x+\Delta x, y, z\right)-V\left(x, y, z\right)}{\Delta x} \tag{3.39}$$

Výraz na pravé straně (3.39) velmi silně připomíná definici derivace. Jenom zde nyní nemáme jedinou proměnnou *x*, ale tři proměnné *x*, *y*, *z*. Derivujeme přitom jen podle jedné proměnné, zde podle proměnné *x*. Volně bychom snad mohli říci, že derivujeme jenom „částečně“, tedy *parciálně*. Matematika opravdu této derivaci říká **parciální derivace**.

Parciální derivace podle x se značí symbolem $\frac{\partial}{\partial x}$, parciální derivace podle y symbolem $\frac{\partial}{\partial y}$, atd.

Stručnou informaci o parciálních derivacích podává Dodatek 3.D.[77]

Vztah pro výpočet x-ové složky síly tedy můžeme psát jako

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} \ . \tag{3.40}$$

[73] Prostě proto, že vektorem se dělit nedá. Musíme na to jít „opatrněji“.

[74] Berme ho sice jako velmi krátký, ale má libovolný směr a můžeme měnit i jeho délku.

[75] V tomto duchu samozřejmě také zapíšeme $V\left(\vec{r}+(\Delta x,0,0)\right)=V\left(x+\Delta x, y, z\right)$.

[76] … a síla na intervalu $\left\langle x, x+\Delta x\right\rangle$ není přesně konstantní.

[77] Pokud se s parciálními derivacemi setkáváte poprvé, vězte, že se jich nemusíte bát. Parciální derivace podle *x* je prostě derivace „podle písmenka *x*“, všechna ostatní písmena v derivovaném výrazu (tedy i *y* a *z*) bereme jako konstantní.

Naprosto stejně bychom získali vztah pro další složky síly; ty budou dány parciálními derivacemi podle y a z. Celkově tedy platí

$$\boxed{\left.\begin{aligned} F_x &= -\frac{\partial V}{\partial x} \\ F_y &= -\frac{\partial V}{\partial y} \\ F_z &= -\frac{\partial V}{\partial z} \end{aligned}\right\} \quad \vec{F} = -\left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)} \tag{3.41}$$

Výraz na pravé straně (3.41) se vyskytuje tak často, že pro něj matematika zavedla zvláštní označení a symbol. Říká se mu **gradient**, symbol je grad. Obecně je gradient skalární funkce $f(x, y, z)$ definován jako $\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right)$. Další informace viz Dodatek 3.D.

Pomocí gradientu můžeme sílu z potenciální energie vyjádřit jednoduchým vztahem

$$\boxed{\vec{F} = -\operatorname{grad} V} \text{ [78]} \tag{3.42}$$

Že to funguje, si ukážeme na několika příkladech.

Příklad 3: pružina

Potenciální energie pružiny je (viz (3.26)) $V = \frac{1}{2} k x^2$. V tomto případě máme jedinou proměnnou, takže ani nemusíme užívat parciální derivaci, prostě je $F_x = -\frac{dV}{dx} = -\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2} k x^2\right) = -\frac{1}{2} k \cdot 2x = -kx$ … tedy tak, jak očekáváme.

Příklad 4: hmotný bod v homogenním gravitačním poli

Potenciální energie bodu v homogenním gravitačním poli je (viz (3.27), jen místo h teď píšeme svislou souřadnici z): $V = mgz$. Její parciální derivace jsou

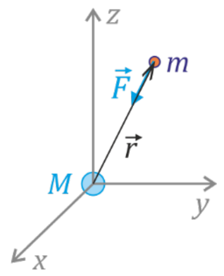
$$\frac{\partial V}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(mgz) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(mgz) = 0, \quad \frac{\partial V}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z}(mgz) = mg \text{ .[79]}$$

Je tedy $\operatorname{grad} V = (0, 0, mg)$. Z (3.42) resp. (3.41)pak dostáváme $\vec{F} = -\operatorname{grad} V = (0, 0, -mg)$, tedy správnou hodnotu síly.

[78] Jde opravdu jen o zkrácený zápis. Je $\operatorname{grad} V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z}\right)$, takže (3.42) je přesně totéž, co (3.41).

[79] Připomeňme, že při derivaci podle x nebo podle y chápeme z jako konstantu.

Příklad 5: hmotný bod v centrálním gravitačním poli



Potenciální energie je (viz (3.28)) $V = -G\dfrac{M\,m}{r}$. Soustavu souřadnic zvolíme tak, jak ukazuje obrázek. Vzdálenost bodů je $r = |\vec{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

Vektor síly budeme počítat po složkách. Je $F_x = -\dfrac{\partial V}{\partial x}$ a po dosazení:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(-G\frac{M\,m}{r}\right) = GMm\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = GMm\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2}\right) =$$

$$= GMm\left(-\tfrac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3/2}\cdot 2x\right) = -GMm\frac{x}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{3/2}} = -GM\,m\frac{x}{r^3} = -G\frac{M\,m}{r^2}\,\frac{x}{r}$$

Podobně vyjde $F_y = -\dfrac{\partial V}{\partial y} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\,\dfrac{y}{r}$ a $F_z = -\dfrac{\partial V}{\partial z} = -G\dfrac{M\,m}{r^2}\,\dfrac{z}{r}$, takže celkově

$$\vec{F} = \left(F_x, F_y, F_z\right) = -G\frac{M\,m}{r^2}\left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = -G\frac{M\,m}{r^2}\,\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{3.43}$$

Vyšla nám tedy síla podle Newtonova gravitačního zákona. Pozor: Právě teď jsme dokázali, že **gravitační síla popsaná Newtonovým gravitačním zákonem je konzervativní**.

Má totiž potenciální energii – a práce síly mezi dvěma body je rovna rozdílu potenciálních energií, tedy nezáleží na křivce.[80]

[80] Laskavý čtenář znalejší matematiky si může tento spíše jen „lehce nahozený" důkaz precizovat tím, že bude uvažovat křivkový integrál $\int_A^B (\mathrm{grad}\,V)\cdot d\vec{r}$ a ukáže, že nezáleží na křivce mezi body A a B. Ještě laskavější a ještě matematicky znalejší čtenář může uvažovat integrál po uzavřené křivce $\oint (\mathrm{grad}\,V)\cdot d\vec{r}$, pomocí Stokesovy věty ho převést na plošný integrál z $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V$ a jeho nulovost už je pak zřejmá, protože $\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,V = 0$.
(Pokud vám jde z toho hlava kolem, nezoufejte, na to si zvyknete a příslušné znalosti časem zvládnete. Tady to uvádíme spíš na ukázku, že věci se dají dokazovat různě…)

3.6 Kinetická energie

Zamysleli jste se někdy nad tím, proč je kinetická energie třeba hozeného kamene rovna $\frac{1}{2}mv^2$? Proč to není třeba $\frac{1}{15}mv^2$ nebo $25m^6v^3$? [81] V této části kapitoly si odvodíme, proč to tak je. Nejdřív se ale podíváme, jaký je výkon síly působící na hmotný bod.

Výkon síly

Výkon je práce dělená časem, po který se vykonávala:

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} \quad ^{82} \tag{3.44}$$

Práce síly $\vec{F}$ po malé dráze $\Delta\vec{r}$ je ovšem $\Delta W = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r}$, takže vztah pro výkon můžeme upravit na

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{\vec{F}\cdot\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t} = \vec{F}\cdot\vec{v} \qquad \text{(v limitě } \Delta t \to 0\text{)} .$$

Po provedení limity tedy dostáváme výsledek

$$\boxed{P = \vec{F}\cdot\vec{v}} \tag{3.45}$$

Pro konzervativní síly můžeme výkon vyjádřit ještě jinak, pomocí změn potenciální energie. Práce, kterou síla vykoná při přesunu bodu z místa $\vec{r}$ do $\vec{r}+\Delta\vec{r}$, je rovna poklesu potenciální energie:

$$\Delta W = V(\vec{r}) - V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) \tag{3.46}$$

Výkon je tedy

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = \frac{V(\vec{r}) - V(\vec{r}+\Delta\vec{r})}{\Delta t} = -\frac{V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r})}{\Delta t} .$$

Po provedení limity $\Delta t \to 0$ dostáváme na pravé straně derivaci: $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{V(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - V(\vec{r})}{\Delta t} = .$

$= \lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{V(\vec{r}(t+\Delta t)) - V(\vec{r}(t))}{\Delta t} = \frac{dV}{dt}$. Je tedy

$$\boxed{P = -\frac{dV}{dt}} \tag{3.47}$$

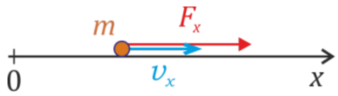
Tento vztah má vcelku jasnou fyzikální interpretaci: Výkon je tím vyšší, čím rychleji klesá potenciální energie. (Pomalu klesající závaží v kyvadlových hodinách dává hodinovému stroji malý výkon, masa vody proudící z přehrady na turbínu poskytuje mnoho megawattů.)

---

[81] No dobrá, členy typu m^6 ve výrazu pro energii nemají co dělat, to by nevycházelo rozměrově, ale o koeficientu před mv^2 rozměrová analýza nic říct nemůže.

[82] To je samozřejmě **průměrný výkon** za časový interval Δt, pokud budeme chtít spočíst **okamžitý výkon**, (což za chvíli budeme potřebovat), uděláme limitu $\Delta t \to 0$.

Kinetická energie – odvození v jednorozměrném případě



Teď už můžeme odvodit vztah pro kinetickou energii. Pro jednoduchost začneme jednorozměrným případem, tedy hmotným bodem pohybujícím se podél osy x. (Rovněž o síle předpokládáme, že má pouze x-ovou složku.)

Východiskem nám bude druhý Newtonův zákon $m\vec{a} = \vec{F}$, zapíšeme jej ve tvaru:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \ . \tag{3.48}$$

Jak odtud dostat něco, co souvisí s energií? S energií souvisí výkon – a ten zde dostaneme, když (3.48) vynásobíme rychlostí:

$$m\frac{dv_x}{dt} = F_x \qquad \Big/ \cdot v_x \ . \tag{3.49}$$

Po úpravách[83] dostáváme

$$m\, v_x \frac{dv_x}{dt} = F_x \cdot v_x = P = -\frac{dV}{dt} \quad , \tag{3.50}$$

tedy vztah, kde na pravé straně je derivace potenciální energie. Pokud se nám podaří upravit levou stranu také na derivaci něčeho podle času, budeme mít vyhráno. Taková úprava ale je možná; je totiž $v_x \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^{\ 2}\right)$.[84] Hmotnost pak „vtáhneme do derivace“[85] a z (3.50) vyjde

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m v_x^{\ 2}\right) = -\frac{dV}{dt} \quad , \tag{3.51}$$

a po převedení členu dV/dt z pravé strany na levou a sloučení obou členů do jedné derivace pak konečně

$$\frac{d}{dt}\left(\tfrac{1}{2}m v_x^{\ 2} + V\right) = 0 \ . \tag{3.52}$$

Máme zde součet výrazu $\frac{1}{2}m v_x^{\ 2}$ s potenciální energií. Jasně se tedy nabízí interpretovat tento člen také jako energii – tedy zavést **kinetickou energii**[86]

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}m v_x^{\ 2} \ .} \tag{3.53}$$

---

[83] Za použití vztahů (3.45) a (3.47).

[84] Můžeme to ukázat hned dvěma způsoby.

Jedním je derivovat podle času $\left(v_x(t)\right)^2$ jako složenou funkci: $\frac{d}{dt}\left(v_x(t)\right)^2 = 2v_x \frac{dv_x}{dt}$.

Druhou možností je derivovat součin $v_x \cdot v_x$: $\frac{d}{dt}\left(v_x^{\ 2}\right) = \frac{d}{dt}\left(v_x \cdot v_x\right) = \frac{dv_x}{dt}\cdot v_x + v_x \cdot \frac{dv_x}{dt} = 2v_x \frac{dv_x}{dt}$.

Pak už stačí výsledek jen vydělit dvěma…

[85] Je to konstanta, takže $m\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v_x^{\ 2}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}m v_x^{\ 2}\right)$.

[86] V češtině, zejména ve školské fyzice, ji říkáme též **pohybová energie** a značíme ji obvykle E_k. Označení symbolem T se užívá ve vysokoškolské fyzice, vědeckých článcích apod. a přidržíme se ho i my. Symboly T a V pro kinetickou a potenciální energii prý zavedl Joseph-Louis Lagrange ve svém slavném díle *Mécanique analytique* v roce 1788. Uvádí se, že symbol T pochází z francouzského slova „travail“ (=práce).

Kinetická energie – odvození v třírozměrném případě

Prakticky stejně můžeme kinetickou energii odvodit i ve třírozměrném případě. Vyjdeme opět z pohybové rovnice, tedy z 2. Newtonova zákona ve tvaru

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \ . \tag{3.54}$$

Vynásobíme jej (skalárně) rychlostí a upravíme levou i pravou stranu:

$$\underbrace{m\,\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}}_{=\frac{1}{2}m\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v})} = \vec{F}\cdot\vec{v} = P = -\frac{dV}{dt} \ . \tag{3.55}$$

[87]

Levá strana je $\frac{1}{2}m\,\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right)$, takže (3.55) dává $\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = -\frac{dV}{dt}$, čili

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mv^2 + V\right) = 0 \ . \tag{3.56}$$

Je tedy přirozené i ve třírozměrném případě zavést kinetickou energii vztahem

$$\boxed{T = \frac{1}{2}mv^2 \ .} \tag{3.57}$$

Vztah (3.56) je tedy vlastně $\frac{d}{dt}(T+V) = 0$. To nás přímo vybízí k tomu, abychom jejich součet

$$\boxed{E = T + V} \tag{3.58}$$

označili za **celkovou mechanickou energii** hmotného bodu. Vztah (3.56) má pak tvar

$$\frac{dE}{dt} = 0 \ ,$$

Z čehož okamžitě plyne

$$\boxed{E = \text{konst.} \ ,} \tag{3.59}$$

což je **zákon zachování mechanické energie**.

Důležité upozornění:

Mechanická energie se zachovává, jen když jsou všechny síly konzervativní.[88]

---

[87] Při úpravě levé strany používáme opět vztah pro derivaci součinu: $\frac{d}{dt}(\vec{v}\cdot\vec{v}) = \frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$.
(Vztah pro derivaci součinu platí i pro funkce, které jsou vektory. Můžete se o tom přesvědčit, když si skalární součin rozepíšete pomocí složek vektorů.)

[88] Zákon jsme odvodili za předpokladu, že síly mají potenciální energii (což platí, právě když jsou konzervativní). Fyzikálně je to také jasné: Pokud v nějakém ději hraje roli tření, *mechanická* energie se nezachovává.

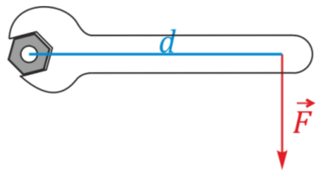
3.7 Moment hybnosti

Hybnost a energie, jimž jsme se věnovali výše, jsou dvě velice důležité fyzikální veličiny. Stejně důležitá je ale ještě jedna: **moment hybnosti**.

Věnujme se ale nejdříve chvíli jiné veličině, asi o něco známější[89], která má ve svém názvu také moment: momentu síly.

Moment síly

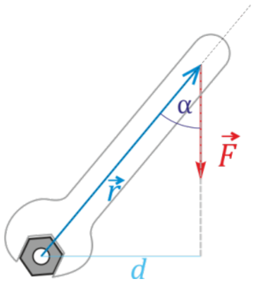
Praktickou představu máme asi všichni. Když potřebujeme utáhnout nějaký šroub nebo povolit vzdorující uzávěr zavařovací sklenice, vezmeme si na pomoc delší páku. Je to právě proto, abychom stejnou silou dosáhli většího momentu síly.



Pokud je síla F kolmá na spojnici působiště síly s osou otáčení, jak to ukazuje obrázek, je moment síly

$$M = d \cdot F \ , \tag{3.60}$$

kde d je rameno síly. Takto to známe z fyziky pro střední školy. Pokud má síla jiný směr, jak to vidíme na obrázku vlevo, je rameno rovno $d = r \cdot \sin\alpha$; přitom $r = |\vec{r}|$, kde $\vec{r}$ je vektor spojující osu otáčení s místem působiště síly a α je úhel mezi oběma vektory.[90] Velikost momentu síly tedy je



$$M = r \sin\alpha\, F = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\alpha \tag{3.61}$$

Tento výsledek můžeme ještě přepsat do stručnějšího tvaru využitím vektorového součinu vektorů[91]. Je totiž $|\vec{r} \times \vec{F}| = |\vec{r}||\vec{F}| \sin\alpha$, takže velikost momentu síly je prostě

$$M = |\vec{r} \times \vec{F}| \ .$$

Odtud je už jen krůček dalšímu zobecnění: definovat moment síly jako vektor

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} \ .} \tag{3.62}$$

Takto se moment síly definuje ve vysokoškolské fyzice. Je to vektor kolmý na oba vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$; velikost tohoto vektoru je velikost momentu, jak jsme ji dosud znali (tedy daná vztahem (3.60) resp. (3.61)).

Podobně jako moment síly můžeme definovat i momenty dalších veličin – třeba právě moment hybnosti.

[89] Alespoň ve školské fyzice a v technické praxi.

[90] Přesněji řečeno, na obrázku je úhel α mezi vektory $(-\vec{r})$ a $\vec{F}$; úhel mezi vektory $\vec{r}$ a $\vec{F}$ je $\pi - \alpha$, ovšem protože $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$, je jedno, který z úhlů vezmeme: $d = r \cdot \sin(\pi - \alpha) = r \cdot \sin\alpha$.

[91] Vlastnosti vektorového součinu stručně připomíná Dodatek 3.E.

Moment hybnosti

Moment hybnosti částice o hmotnosti m pohybující rychlostí $\vec{v}$ (tedy s hybností $\vec{p} = m\vec{v}$), jejíž poloha je určena polohovým vektorem $\vec{r}$ je

$$\boxed{\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\ ,} \tag{3.63}$$

tedy
$$\vec{L} = \vec{r} \times (m\vec{v})\ . \tag{3.64}$$

K čemu je dobrá takto definovaná veličina?[92] O fyzikálních veličinách se často něco dozvíme, když se zeptáme, jak se mění s časem.[93] Zkusme z tohoto hlediska „prozkoumat" moment hybnosti.

Na zkoumání, jak rychle se něco mění s časem, máme matematický nástroj: derivaci podle času. Zderivujme tedy vztah (3.63) podle času. Dostaneme $\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right)$, pravou stranu pak můžeme dále upravovat:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r} \times \vec{p}\right) = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} = \underbrace{\vec{v} \times (m\vec{v})}_{0} + \vec{r} \times \vec{F} = \vec{M}\ ^{94} \tag{3.65}$$

Vidíme tedy, že

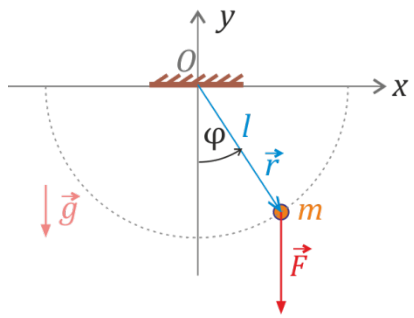
$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}\ ,} \tag{3.66}$$

neboli:

Časová změna momentu hybnosti se rovná momentu působící síly.

Jak to funguje, ukáže příklad.

Příklad 6: matematické kyvadlo



Matematické kyvadlo je hmotný bod kývající se na nehmotném vlákně – reálně tedy malé těleso kývající se na vlákně zanedbatelné hmotnosti. Kývá se přitom v jedné rovině.[95] Naší úlohou bude najít rovnici, která popisuje jeho pohyb. To lze dělat různě, my si ukážeme způsob využívající právě moment hybnosti.

Soustavu souřadnic zvolíme tak, jak ukazuje obrázek: počátek v bodě závěsu kyvadla, osu x vodorovně, osu y svisle vzhůru. Úhel mezi závěsem a svislou osou označíme φ, jednoznačně určuje okamžitou polohu kyvadla. Délka závěsu je l. Gravitační síla působí svisle dolů, má tedy složky $\vec{F} = \left(0, -mg, 0\right)$.

---

[92] Nadefinovat si totiž můžeme, co je nám libo, kombinací hmotnosti, rychlosti a polohového vektoru by se našlo nesčetně. Ale jenom veličiny, které mají nějaké zajímavé vlastnosti, poskytnou nám nový pohled nebo hlubší vhled do řešených problémů, mají šanci se uchytit. Moment hybnosti se ale rozhodně uchytil!

[93] Tj. zda se mění a jak rychle, a naopak, kdy se nemění.

[94] Při úpravách jsme využili toho, že vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je roven nule; dále jsme použili 2. Newtonův zákon $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$.

[95] Jinak by šlo o tzv. kónické kyvadlo.

Složky polohového vektoru jsou (viz obrázek)

$$x = l\sin\varphi,\;\; y = -l\cos\varphi,\;\; z = 0 \tag{3.67}$$

Derivací podle času z nich určíme složky rychlosti[96]

$$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = l\cos\varphi\frac{d\varphi}{dt},\;\; \dot{y} \equiv \frac{dy}{dt} = l\sin\varphi\frac{d\varphi}{dt},\;\; \dot{z} \equiv \frac{dz}{dt} = 0 \tag{3.68}$$

Pro určení momentu hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, si napíšeme vektory $\vec{r}$ a $\vec{p} = m\vec{v}$:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= \left(\;\; l\sin\varphi,\quad -l\cos\varphi,\;\; 0\right) \\ \vec{p} &= \left(ml\cos\varphi\,\dot{\varphi},\;\; ml\sin\varphi\,\dot{\varphi},\;\; 0\right) \end{aligned} \tag{3.69}$$

Odtud

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \left(0, 0, ml^2\dot{\varphi}\right) \text{ [97]} \tag{3.70}$$

Moment síly je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F} = \left(l\sin\varphi, -l\cos\varphi, 0\right) \times \left(0, -mg, 0\right) = \left(0, 0, -mgl\sin\varphi\right)$.[98] Vidíme, že jediná nenulová složka vztahu (3.66), tj. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ je *z*-ová, $\frac{dL_z}{dt} = M_z$, tedy po dosazení:

$$\frac{d}{dt}\left(ml^2\dot{\varphi}\right) = -mgl\sin\varphi\;. \tag{3.71}$$

Odtud po další úpravě dostáváme

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\sin\varphi\,.} \tag{3.72}$$

Toto je pohybová rovnice matematického kyvadla, vyšla nám přímo ze vztahu (3.66) pro změnu momentu hybnosti s časem.

Řešit tuto rovnici pro velké rozkyvy by bylo složité. Pro malé výchylky, kdy $|\varphi \ll 1|$, můžeme aproximovat funkci sinus jako $\sin\varphi \doteq \varphi$. Rovnice (3.72) pak přejde na rovnici $\frac{d^2\varphi}{dt^2} = -\frac{g}{l}\varphi$, jejíž řešení je podstatně jednodušší. Už jsme ho vlastně dělali v předchozí kapitole v příkladu 3 (kmity na pružině). Proto zde už jen stručně napíšeme, že řešení má tvar $\varphi = \varphi_{\max}\cos\left(\omega t + \alpha\right)$, kde úhlová frekvence kmitů je $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ a $\varphi_{\max}$ je amplituda kmitů.[99]

---

[96] Souřadnice přitom derivujeme jako složené funkce, protože $x = l\sin\varphi(t),\;\; y = l\cos\varphi(t)$.

[97] Vidíme, že *z*-ová složka momentu hybnosti je kladná pro $\dot{\varphi} > 0$. To odpovídá, protože *z*-ová osa na obrázku míří „z papíru k nám"; pokud pravou ruku položíme na obrázek tak, aby palec ukazoval do směru osy *z*, prsty ukazují směr rotace, v našem případě „doprava nahoru", jak tomu opravdu je, když se φ zvětšuje.

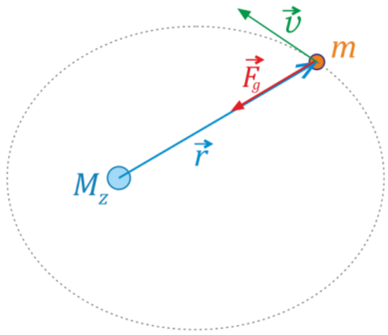
[98] Vektorový součin se vám možná bude lépe počítat, když si pro přehlednost opět napíšete vektory nad sebe.

[99] Zkuste si dosadit do rovnice, že jde opravdu o řešení. (Pozn.: Hodnoty α a $\varphi_{\max}$ určíme z poč. podmínek.)

3.8 Aplikace: Pohyb v poli centrální síly (zejména v gravitačním poli)

Pojmy a vztahy, s nimiž jsme se blíže seznámili v této kapitole, nám mohou pomoci řešit důležitý problém: Jak se pohybuje těleso, například družice, v gravitačním poli jiného tělesa, například Země?

Situaci ukazuje obrázek. Poloha družice je určena polohovým vektorem $\vec{r}$, jeho počátek je ve středu Země. Hmotnost družice je m, její rychlost $\vec{v}$. Hmotnost Země je M_z. Protože je mnohem větší než hmotnost družice $m \ll M_z$, budeme Zemi (resp. její střed) považovat za nehybné centrum.[100]



Sílu působící na družici určuje Newtonův gravitační zákon[101]:

$$\vec{F}_g = -G \frac{M_z m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}$$ [102]

Okamžitě vidíme, že moment této síly je nulový. Je to vidět už z obrázku: rameno síly je zjevně nulové. Formálně to můžeme dokázat výpočtem momentu síly: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}_g = \vec{r} \times \left(-G \frac{M_z m}{r^2} \frac{\vec{r}}{r} \right) = -G \frac{M_z m}{r^3} \left(\vec{r} \times \vec{r} \right) = 0$. [103]

Ze vztahu $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$ pak plyne, že $\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{L} = \text{konst.}$ To znamená, že

při pohybu hmotného bodu v poli centrální síly se moment hybnosti zachovává.

Odtud můžeme odvodit dva podstatné důsledky.

1) Protože $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, jsou na sebe vektory $\vec{L}$ a $\vec{r}$ *kolmé*. A když vektor $\vec{L}$ je konstantní, musí se koncový bod vektoru $\vec{r}$ pohybovat v jedné rovině (kolmé na $\vec{L}$)[104]. To znamená, že **pohyb družice se děje v rovině.** [105] [106]

2) Druhý důsledek se týká plochy, kterou opisuje polohový vektor.[107] Fakticky půjde o druhý Keplerův zákon.

---

[100] To znamená, že budeme problém řešit v soustavě spojené se středem Země. Osy naší soustavy přitom budou v klidu vůči vzdáleným hvězdám (soustava se netočí spolu se Zemí), takže ji budeme brát jako inerciální soustavu. Malé zrychlení dané obíháním Země kolem Slunce zde zanedbáme.

[101] Už výše jsme připomínali, že pole vně koule, v níž je hmota rozložena sféricky symetricky, je stejné jako pole hmotného bodu ve středu koule. (Drobné odchylky gravitačního pole Země od tohoto modelu zde také zanedbáváme.)

[102] Jde tedy o sílu směřující do centra Země, proto nese tato část kapitoly název Pohyb v poli centrální síly.

[103] Protože vektorový součin dvou rovnoběžných vektorů je roven nule.

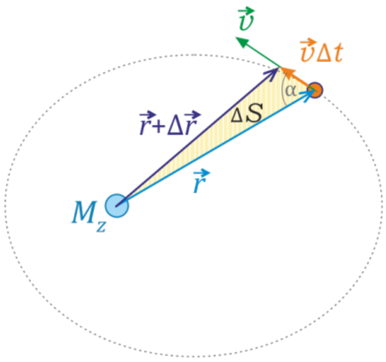
[104] Například pokud by vektor $\vec{L}$ měl směr osy *z*, bude se pohyb dít jen v rovině *xy*. (Ve složkách bude $\vec{L} = (0, 0, L_z)$ a $\vec{r} = (x, y, 0)$.)

[105] V této rovině leží i silové centrum, v našem případě střed Země.

[106] Popravdě řečeno, tohle není nijak zvlášť překvapující (ani z hlediska zdravého rozumu): Jestliže se družice pohybovala v nějaké rovině, třeba v rovině *xy*, není zde žádná síla (žádná příčina), která by ji přiměla tuto rovinu opustit.

[107] Polohový vektor se v tomto kontextu také označuje jako **průvodič** dané družice.

Druhý Keplerův zákon



Podívejme se, kam se posune polohový vektor za čas Δt a jakou plochu ΔS přitom opíše.

Situaci ukazuje obrázek. Posunutí vektoru $\vec{r}$ je $\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t$. Plocha vybarveného trojúhelníka je[108] [109]

$$\Delta S = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\Delta\vec{r}\right| = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right|\Delta t$$

Po vydělení Δt dostáváme

$$\frac{\Delta S}{\Delta t} = \tfrac{1}{2}\left|\vec{r}\times\vec{v}\right| = \frac{\left|\vec{r}\times\vec{p}\right|}{2m} = \frac{\left|\vec{L}\right|}{2m} = \text{konst.} \tag{3.73}$$

Jaký je význam veličiny $\dfrac{\Delta S}{\Delta t}$? Určuje, jak rychle se mění plocha, opsaná průvodičem, s časem. Je to tedy **plošná rychlost**.[110] Získaný výsledek (3.73) můžeme vyjádřit konstatováním:

> Plošná rychlost průvodiče je při pohybu hmotného bodu v centrálním silovém poli konstantní.[111]

Pokud tento výsledek aplikujeme na pohyb planet kolem Slunce, můžeme ho vyslovit ve tvaru

Plocha opsaná průvodičem planety za stejné časové intervaly je stejná.

… a vidíme, že jsme opravdu odvodili **druhý Keplerův zákon**.[112]

První Keplerův zákon

„Planety obíhají po eliptických drahách, v jejichž ohnisku je Slunce."

I tento zákon Kepler vyvodil z astronomických pozorování. Tvar trajektorie planet a dalších těles v gravitačním poli Slunce také odvodíme – ale analytické odvození[113] si necháme až do jedné z dalších kapitol.[114] Pohyb hmotného bodu v centrálním gravitačním poli ale můžeme vcelku jednoduše spočítat numericky – příslušný algoritmus je uveden v Dodatku 3.F.

---

[108] Můžeme ji spočítat podle školského vzorečku „základna krát výška lomeno dvěma", přičemž základna je $|\vec{r}|$ a výška $|\Delta\vec{r}|\cdot\sin\alpha$. Díky vlastnostem vektorového součinu je $|\vec{r}|\cdot|\Delta\vec{r}|\cdot\sin\alpha = |\vec{r}\times\Delta\vec{r}|$.

[109] Plocha trojúhelníka se samozřejmě nepatrně liší od plochy, kterou opíše průvodič, protože koncový bod vektoru $\vec{r}$ se pohybuje po křivce, nikoli po přímce. Ovšem tato chyba (resp. její relativní velikost vůči ΔS) jde k nule v limitě $\Delta t \to 0$, kterou budeme provádět.

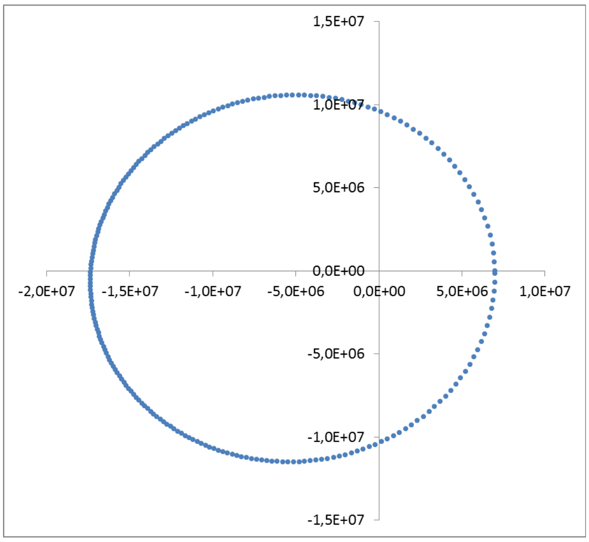
[110] Pro konečné Δt by šlo samozřejmě o průměrnou plošnou rychlost. Okamžitou plošnou rychlost dostaneme limitou $\Delta t \to 0$.

[111] Ani nemusíme specifikovat, že jde o gravitační pole. V odvození jsme nikde nepotřebovali vědět, jak síla závisí na vzdálenosti, podstatný byl směr síly.

[112] Kepler jej vyvodil z pozorování pohybu planet, my jsme jej dostali jako důsledek základních zákonů klasické mechaniky.

[113] Tedy odvození „s tužkou a papírem" resp. „s křídou a tabulí".

[114] Přece jen jde o odvození trochu delší, tak s ním počkáme, až si trochu procvičíme mozek na jednodušších příkladech. (Ale zvládneme ho, nebojte!)



Jak může vypadat výsledek numerického výpočtu, ukazuje obrázek. Střed Země je v počátku soustavy souřadnic, její poloměr není na obrázku vyznačen.[115] Konkrétně jde o pohyb družice, jejíž počáteční vzdálenost od středu Země je 7 000 km a počáteční rychlost 9 km/s. Graf vlastně ilustruje první Keplerův zákon – ovšem jestli je trajektorií opravdu přesně elipsa, z něj těžko dokážeme, na to opravdu musíme počkat na analytický výpočet.

Ze zobrazených poloh družice (jsou zobrazeny s časovým krokem 1 minuta) kvalitativně vidíme i důsledek druhého Keplerova zákona: V blízkosti silového centra se družice pohybuje rychleji, dál od centra pomaleji.[116]

Příslušný excelovský soubor je v doplňujících materiálech. Pokud v parametrech změníte počáteční rychlost, tvar trajektorie se změní: při vyšší rychlosti bude elipsa protáhlejší a protáhlejší a nakonec se družice k Zemi už nevrátí, trajektorií bude hyperbola.

Poznamenejme ještě, že pro platnost prvního Keplerova zákona je podstatné, že síla klesá se vzdáleností jako $1/r^2$. Pokud v numerickém výpočtu změníte ve vzorci pro sílu závislost na vzdálenosti třeba na $1/r^{2,1}$, uvidíte, že trajektorií ani nebude uzavřená křivka.

Třetí Keplerův zákon

Třetí Keplerův zákon popisuje závislost mezi vzdáleností planety od Slunce a dobou jejího oběhu.[117] Mohli bychom ho ilustrovat pomocí výsledků našeho numerického modelu.[118] Jeho analytické odvození v obecném případě si také necháme na později. Stojí ale za to, připomenout si, jak ho lze odvodit ve speciálním případě, kdy se planety pohybují po kruhových drahách.[119]

Je-li poloměr dráhy planety R a její úhlová rychlost ω, je dostředivé zrychlení $R\omega^2$. Dostředivá síla je tedy $F = mR\omega^2$. Touto dostředivou silou je gravitační síla, kterou planetu přitahuje Slunce[120]. Její velikost je $F = G\dfrac{M_S m}{R^2}$, kde M_S je hmotnost Slunce. Je tedy $mR\omega^2 = G\dfrac{M_S m}{R^2}$. Odtud po

[115] Obrázek je kopií grafu v Excelu, v němž byl proveden numerický výpočet, nic do něj není přidáno.

[116] Rozmyslete si, že toto opravdu z druhého Keplerova zákona plyne.

[117] Přesněji řečeno, mezi hlavní poloosou elipsy, po níž se planeta pohybuje, a periodou oběhu.

[118] Takto by šlo jeho platnost ilustrovat třeba zájemcům na úrovni střední školy.

[119] V tomto případě jde v zásadě také o středoškolské odvození.

[120] Upozornění: Jednou z chybných představ, které se občas vyskytnou, je představa, že dostředivá síla je jakási zvláštní síla, která se v dané situaci vyskytuje „navíc“ vůči gravitační síle. Ve skutečnosti dostředivá síla musí být způsobena nějakým reálným fyzikálním působením. V případě závaží, které uvážeme na provázek a točíme s ním nad hlavou, je to síla, kterou na závaží působí provázek. (Pokud je vám bližší poněkud razantnější příklad, tak si představte středověký řemdih: ostnatá koule na řetězu připevněném na tyči. Praktickému provedení bych se ve škole raději vyhnul – ale dostředivou silou je opět síla, kterou na kouli působí řetěz.) V případě planety obíhající kolem Slunce je dostředivou silou gravitační síla, jíž Slunce přitahuje planetu.

úpravě: $\omega^2 = G\dfrac{M_S}{R^3}$. Ovšem úhlová rychlost souvisí s periodou oběhu T [121] podle vztahu $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$.

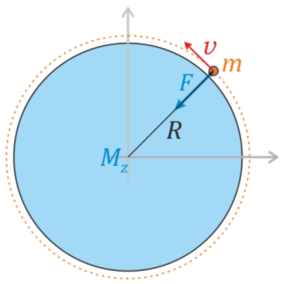
Po dosazení je tedy $\dfrac{4\pi^2}{T^2} = G\dfrac{M_S}{R^3}$ a odtud

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_S} R^3 \ . \tag{3.74}$$

To znamená, že *druhá mocnina oběžné doby je úměrná třetí mocnině poloměru dráhy* – což je právě to, co pro kruhové dráhy tvrdí třetí Keplerův zákon.[122] [123]

První kosmická rychlost

Když už jsme se dotkli pohybů družic Země, pojďme si připomenout jednoduché odvození dvou rychlostí, které se u pohybu družic zmiňují: první a druhé kosmické rychlosti.



První kosmická rychlost je rychlost, jakou se musí družice pohybovat, aby se udržela na kruhové dráze s poloměrem, který je roven poloměru Země R.[124]

Dostředivou sílu při kruhovém pohybu teď vyjádříme jako $F = m\dfrac{\upsilon^2}{R}$.

Dostředivá síla je realizována gravitační silou $F = G\dfrac{M_Z m}{R^2}$. Je tedy $m\dfrac{\upsilon^2}{R} = G\dfrac{M_Z m}{R^2}$ a odtud: $\upsilon^2 = G\dfrac{M_Z}{R}$, takže první kosmická rychlost je

$$\boxed{\upsilon_1 = \sqrt{\frac{GM_Z}{R}}\ .} \tag{3.75}$$

Dosadíme-li hodnoty příslušných veličin (viz Dodatek 3.G), je $\upsilon_1 \doteq \sqrt{\dfrac{6,67\cdot 10^{-11}\cdot 5,97\cdot 10^{24}}{6,378\cdot 10^6}}\ \mathrm{m/s} \doteq$

$\doteq 7,9\cdot 10^3\ \mathrm{m/s}$. **První kosmická rychlost je tedy asi 7,9 km/s**.

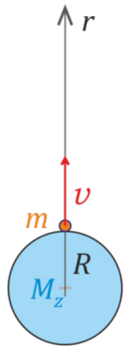
---

[121] Pardon, tady T neznačí kinetickou energii, ale periodu oběhu. (Z kontextu naštěstí poznáme, oč jde.)
[122] V případě eliptických drah je druhá mocnina periody úměrná třetí mocnině hlavní poloosy dráhy.
[123] Terminologická poznámka:
Správným termínem pro označení křivky, po níž se hmotný bod pohybuje, je *trajektorie*. Termín *dráha* má sloužit k označení délky trajektorie, kterou hmotný bod urazil. Ovšem v astronomii se běžně používá termín „dráha planety" a myslí se tím trajektorie. Proto jej v tomto významu používáme i zde.
A ještě obecnější terminologická poznámka:
Fyzika je přesná věda a to s sebou nese i potřebu precizace termínů, definic apod. Ovšem když fyzikové diskutují mezi sebou, velmi často používají termíny volněji, takže by to jazykový purista mohl snadno zkritizovat. Ovšem fyzikové z kontextu vědí, oč jde a v případě potřeby samozřejmě umí věci popsat a definovat přesněji, tak jak je to nezbytné. Takže i fyzik může říci, že elektron se v magnetickém poli pohybuje po zakřivené dráze – a všem dalším fyzikům bude jasné, oč jde. V tomto duchu se proto ani na těchto stránkách, pokud nehrozí nedorozumění, občas nevyhýbáme poněkud volnějšímu používání termínů.
[124] Prakticky to znamená, aby nespadla, když se pohybuje na nízké oběžné dráze.

Druhá kosmická rychlost

Druhá kosmická rychlost je rychlost, s jakou se těleso (např. kosmická sonda) musí pohybovat, aby se úplně odpoutalo z gravitačního pole Země. Přitom jde o rychlost ve výchozím bodě, který je na povrchu Země.

Formálně to znamená rychlost, jakou musíme na povrchu Země udělit hmotnému bodu, aby se vzdálil do nekonečna[125]. Určit tuto rychlost jde jednoduše ze zákona zachování energie.



Na povrchu Země, kde $r = R$, je potenciální energie bodu $V = -G\dfrac{M_Z\, m}{R}$, viz (3.28).

Kinetická energie je $T = \frac{1}{2} m v^2$, takže celková energie je

$$E = \tfrac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_Z\, m}{R} \,. \tag{3.76}$$

Bod má dolétnout do nekonečna; jeho potenciální energie tam bude nulová.[126] Kinetická energie tam bude také nulová.[127] To znamená, že pro to, aby se vržený bod „právě dostal do nekonečna“, je jeho celková energie nulová, $E = 0$. Kombinací s (3.76) dostáváme

$$\tfrac{1}{2} m v^2 - G\frac{M_Z\, m}{R} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v^2 = \frac{2GM_Z}{R} \,,$$

takže druhá kosmická rychlost je

$$\boxed{v_2 = \sqrt{\frac{2GM_Z}{R}} \,.} \tag{3.77}$$

Vidíme, že je $\sqrt{2}$ -krát vyšší než první kosmická rychlost. Po dosazení konkrétních hodnot vychází, že **druhá kosmická rychlost je asi 11,2 km/s**.

… a výše uvedeným optimistickým konstatováním se rozloučíme s kinematikou a dynamikou jednoho hmotného bodu. Zabralo nám to sice dost času, ale zase jsme se seznámili se spoustou věcí, jak z fyziky, tak z matematiky a jejího využití ve fyzice, které dále budeme využívat. Třeba hned v příští kapitole, kde hmotných bodů přibude.

---

[125] Fakticky to znamená hodně, hodně daleko.

[126] Je totiž $\lim\limits_{r\to\infty} V(r) = \lim\limits_{r\to\infty}\left(-G\dfrac{M_Z\, m}{r}\right) = 0 \cdot$

[127] Záporná být nemůže. A kdyby byla větší než nula, znamenalo by to, že jsme hmotný bod hodili zbytečně velkou počáteční rychlostí – že bychom mohli hodit o něco pomaleji a hmotný bod by do nekonečna stejně ještě dolétl. A my hledáme nejmenší možnou počáteční rychlost, při které se hmotný bod ještě do nekonečna dostane a nespadne zpět na Zem.

Shrnutí

Hybnost: $\vec{p} = m\vec{v}$, 2. Newtonův zákon: $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$

Změna hybnosti se rovná impulsu síly: $\vec{p}(t_k) - \vec{p}(t_0) = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F}(t)\,dt$

Práce: $W = \int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$

Konzervativní síly: $\int_c \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ závisí jen na počátečním a koncovém bodě $\Leftrightarrow$ $\oint \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} = 0$

Nekonzervativní síly: např. tření.

Potenciální energie: $V(\vec{r}) = V_0 - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r}$ ... určena až na konstantu, význam mají rozdíly V

Potenciální energie je určena jen pro konzervativní síly.

Spec. případy: $V = \frac{1}{2} k x^2$, $V = mgh$, $V = -G \dfrac{Mm}{r}$, $V = k \dfrac{Qq}{r}$

(pružina, homogenní a centrální gravitační pole, elektrostatické pole bod. náboje)

Výpočet **síly z potenciální energie**: $\vec{F} = -\operatorname{grad} V = -\left(\dfrac{\partial V}{\partial x}, \dfrac{\partial V}{\partial y}, \dfrac{\partial V}{\partial z} \right)$

Výkon: $P = \dfrac{\Delta W}{\Delta t} = \vec{F} \cdot \vec{v}$, pro konzervativní síly: $P = -\dfrac{dV}{dt}$

Kinetická energie: $T = \frac{1}{2} m v^2$

Celková mechanická energie: $E = T + V$

Zákon zachování mechanické energie: $E = \text{konst.}$ (platí, když jsou všechny síly konzervativní)

Moment síly: $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$

Moment hybnosti: $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Časová změna momentu hybnosti se rovná momentu působící síly: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}$

2. Keplerův zákon: $\dfrac{\Delta S}{\Delta t} = \text{konst.} \left(= \dfrac{|\vec{L}|}{2m} \right)$ (plochy opsané průvodičem planety za stejné doby jsou stejné)

3. Keplerův zákon (pro kruhový pohyb): $T^2 \sim R^3$

Kosmické rychlosti:

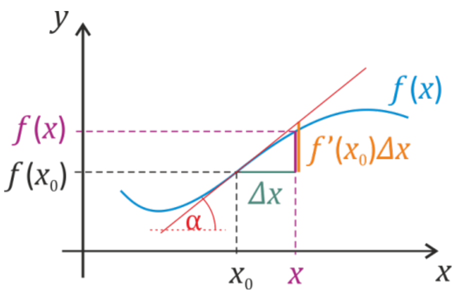
První: $v_1 = \sqrt{\dfrac{GM_Z}{R_Z}} \doteq 7{,}9 \text{ km/s}$ Druhá: $v_2 = \sqrt{\dfrac{2GM_Z}{R_Z}} \doteq 11{,}2 \text{ km/s}$

Dodatek 3.A: Přírůstek funkce

Je-li $f(x)$ funkce, která je v okolí nějakého bodu x_0 spojitá a má tam derivaci, platí pro x blízké x_0

$$f(x) \doteq f(x_0) + \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \cdot (x - x_0) \ . \qquad (3.A.1)$$

Proč tomu tak je, ukazuje obrázek. Výraz na pravé straně (3.A.1) je rovnicí přímky (na obrázku vyznačené červeně). Jde o *tečnu* ke grafu funkce v bodě x_0.[128] Aproximace (3.A.1) tedy znamená, že funkci v okolí bodu x_0 aproximujeme její tečnou.



Platnost vztahu (3.A.1) jsme výše uvedenou úvahou jen naznačili. V matematice se dá samozřejmě dokázat rigorózně. Fakticky jde o začátek *Taylorova rozvoje funkce*. Z něj plyne, že chyba, kterou aproximací (3.A.1) děláme, je typicky úměrná $(x - x_0)^2$.

Označíme-li přírůstek funkce $f(x) - f(x_0) \overset{\text{ozn}}{=} \Delta f$ a přírůstek souřadnice $x - x_0 = \Delta x$, můžeme vztah (3.A.1) zapsat stručněji jako

$$\Delta f \doteq \left.\frac{df}{dx}\right|_{x_0} \cdot \Delta x \ . \qquad (3.A.2)$$

Podobně platí pro přírůstek vektorové funkce $\vec{a} = \vec{a}(x)$:

$$\Delta \vec{a} = \vec{a}(x) - \vec{a}(x_0) \doteq \left.\frac{d\vec{a}}{dx}\right|_{x_0} \Delta x \ . \qquad (3.A.3)$$

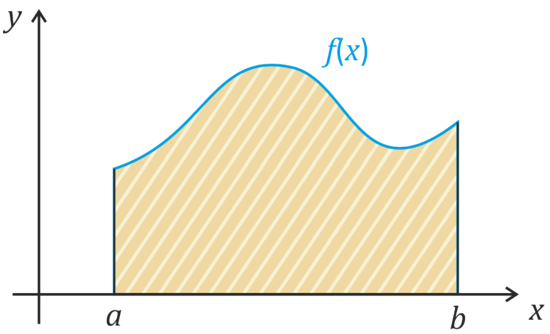
Fakticky tento vztah vyjadřuje tři vztahy zapsané ve složkách:

$$\Delta a_x = a_x(x) - a_x(x_0) \doteq \left.\frac{da_x}{dx}\right|_{x_0} \Delta x , \quad \Delta a_y = a_y(x) - a_y(x_0) \doteq \left.\frac{da_y}{dx}\right|_{x_0} \Delta x , \quad \cdots \ .$$

[128] Přesněji: v bodě $\left(x_0, f(x_0)\right)$.

Dodatek 3.B: Určitý integrál

Určitý integrál je v matematice definován různými způsoby.[129] Pro funkci jedné reálné proměnné, $f(x)$, která je spojitá (a nezáporná) na intervalu $\langle a,b\rangle$ všechny dávají hodnotu, která je rovna ploše pod grafem funkce.



Označuje se podobným symbolem jako neurčitý integrál:

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

Zatímco výsledkem neurčitého integrálu je funkce (tzv. *primitivní funkce*), výsledkem určitého integrálu je číslo.

Výpočet určitého integrálu z neurčitého

Je-li $\mathcal{F}(x)$ primitivní funkce k $f(x)$, tj. $\mathcal{F}(x)=\int f(x)\,dx$, pak platí

$$\int_a^b f(x)\,dx = \left[\mathcal{F}(x)\right]_a^b = \mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a) \quad .^{130} \qquad (3.B.1)$$

Pomocí tohoto vztahu také nejčastěji v jednoduchých případech určitý integrál počítáme.

Poznámky

Už z názorné geometrické interpretace uvedené výše je zřejmé, že platí $\int_a^c f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx$.

(Je to vidět pro $a<b<c$ [131], vztah platí i obecněji.)

Pokud je funkce na některé části intervalu záporná, příslušnou plochu pod osou x od celkové plochy odečítáme.

[129] Nesou jména slavných matematiků, např. Riemannův integrál nebo Lebesgueův integrál.

[130] Tento vztah bývá nazýván *Newtonův vzorec.* Zápis $\left[\mathcal{F}(x)\right]_a^b$ je jen zkratkou pro rozdíl $\mathcal{F}(b)-\mathcal{F}(a)$.

[131] Jde o sčítání ploch pod křivkami, zkuste si nakreslit příslušný obrázek.)

Dodatek 3.C: Křivkový integrál druhého druhu

Jsou-li na nějaké křivce c dány hodnoty vektorové funkce $\vec{a}(\vec{r})$, pak **křivkový integrál druhého druhu** podél této křivky,

$$\int_c \vec{a}(\vec{r})\cdot d\vec{r} \tag{3.C.1}$$

je, názorně řečeno, součtem příspěvků $\vec{a}(\vec{r})\cdot\Delta\vec{r}$ přes všechny části křivky.[132]

Často je křivka c zadána parametricky jako

$$\vec{r}=\vec{r}(\xi), \tag{3.C.2}$$

tj. $x=x(\xi),\ y=y(\xi),\ z=z(\xi)$, kde ξ je parametr[133] jdoucí od ξ_A do ξ_B. Přitom $\vec{r}_A=\vec{r}(\xi_A)$ je počáteční bod křivky, $\vec{r}_B=\vec{r}(\xi_B)$ je koncový bod křivky.[134]

Křivkový integrál podél křivky c lze pak vyjádřit jako

$$\int_c \vec{a}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = \int_{\xi_A}^{\xi_B}\left(\vec{a}\big(\vec{r}(\xi)\big)\cdot\frac{d\vec{r}}{d\xi}\right)d\xi \quad ^{135} \tag{3.C.3}$$

Poznámka k orientaci křivky:

Křivka c musí být **orientovaná**, tedy musí být jasný směr, jímž ji procházíme.[136]

Opačně orientovanou křivku označujeme symbolem $-c$ (procházíme ji v opačném směru). Platí

$$\int_{-c}\vec{a}(\vec{r})\cdot d\vec{r} = -\int_c \vec{a}(\vec{r})\cdot d\vec{r}\ .\quad ^{137} \tag{3.C.4}$$

Poznámka ke značení:

Křivkový integrál po uzavřené křivce označujeme kroužkem kolem symbolu integrálu, tedy $\oint \vec{a}\cdot d\vec{r}$.

---

[132] V limitě, kdy křivku dělíme na víc a víc dílů a délka každého dílku jde k nule.

[133] Zde je označen řeckým písmenem „ksí“, jak se to často dělává; můžeme samozřejmě použít i jiný symbol.

[134] Příklad: $\vec{r}=(R\cos\varphi, R\sin\varphi, 0)$; $\varphi_A=0$, $\varphi_B=\pi$ popisuje půlkružnici o poloměru *R* (a středu v počátku soustavy souřadnic), počáteční bod je $(R,0,0)$, koncový bod $(-R,0,0)$.

[135] Názorně si lze představit, že $\Delta\vec{r} \doteq \frac{d\vec{r}}{d\xi}\Delta\xi$, takže pod integrálem v pravé části (3.C.3) opravdu „sčítáme kousky“ $\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$.

[136] Samozřejmě, od počátečního do koncového bodu.

[137] Je to jasné i z názorného pohledu: Při procházení opačným směrem se změní $\Delta\vec{r}$ na $-\Delta\vec{r}$ a skalární součin $\vec{a}\cdot\Delta\vec{r}$ tedy změní znaménko.
Toto chování odpovídá i fyzikálnímu náhledu v případě práce jako křivkového integrálu: Když táhneme závaží nahoru, konáme práci ($W > 0$), když závaží klesá, práci nám vrací, my ji přijímáme – což formálně vyjádříme tak, že konáme práci *zápornou*, $W < 0$.

Dodatek 3.D: Parciální derivace, gradient

V tomto dodatku stručně shrnujeme několik věcí týkajících se parciálních derivací.[138]

Je-li f funkce tří proměnných: $f = f(x, y, z)$, pak **parciální derivaci** f **podle** x definujeme jako

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y, z) - f(x, y, z)}{\Delta x} \tag{3.D.1}$$

Podobně je $\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y, z) - f(x, y, z)}{\Delta y}$ a $\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(x, y, z+\Delta z) - f(x, y, z)}{\Delta z}$.

Prakticky při výpočtu znamená parciální derivace jednoduše „derivovat podle příslušného písmenka" a ostatní brát jako konstanty.

Příklad: Je-li $f = f(x, y, z) = x \cdot y^2 + 5z$, je $\frac{\partial f}{\partial x} = y^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x \cdot 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 5$.

Přírůstek funkce f při malých změnách souřadnic je [139] [140]

$$\Delta f = f\left(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z\right) - f(x, y, z) \doteq \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial f}{\partial z}\Delta z \tag{3.D.2}$$

Gradient skalární funkce $f = f(x, y, z)$ je vektor[141]

$$\operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right). \tag{3.D.3}$$

Složky gradientu určují, jak rychle roste funkce f ve směrech rovnoběžných s osami x, y, z.

Přírůstek funkce můžeme vyjádřit pomocí gradientu (kombinací (3.D.2) a (3.D.3)) jako

$$\Delta f \doteq \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \cdot \left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = (\operatorname{grad} f) \cdot \Delta \vec{r}\,. \tag{3.D.4}$$

Odsud je vidět, že pro danou délku $|\Delta \vec{r}|$ je přírůstek funkce největší, když je posun $\Delta \vec{r}$ rovnoběžný s $\operatorname{grad} f$. To znamená, že **gradient určuje směr, v němž funkce roste nejrychleji**.

Naopak, je-li posun $\Delta \vec{r}$ tečný k ploše, na níž je funkce f konstantní (tj. při posunu o $\Delta \vec{r}$ se hodnota funkce nemění, je $\Delta f = 0$, plyne z (3.D.4) $(\operatorname{grad} f) \cdot \Delta \vec{r} = 0$. Odtud vidíme, že **gradient je kolmý na plochu, na níž je $f = \mathbf{konst.}$**

---

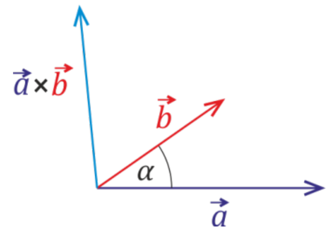
[138] Pro podrobnosti, zejména pokud se týká odvozování, odkazujeme na předmět *Matematické metody fyziky*.

[139] Jde o jednoduché zobecnění vztahu (3.A.2) z Dodatku 3.A pro případ více proměnných.

[140] Poznámka pro pokročilejší čtenáře: symbolem Δf zde značíme přírůstek funkce, ne to, že by na ni působil Laplaceův operátor. (Poznámka pro ostatní: Nevíte-li, co to je Laplaceův operátor, nic si z toho nedělejte, potřebovat ho budete až v druhém semestru, v *Elektřině a magnetismu*.)

[141] Přesněji: vektorová funkce.

Dodatek 3.E: Vektorový součin



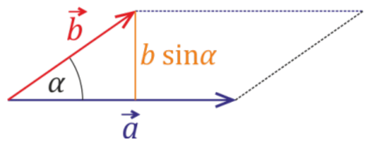
Vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor $\vec{a}\times\vec{b}$, který:

- Je kolmý k oběma vektorům: $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{a}$, $\vec{a}\times\vec{b}\perp\vec{b}$
- Má velikost $\boxed{\left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = a\,b\sin\alpha}$,

  kde α je úhel sevřený vektory $\vec{a}$ a $\vec{b}$
- Jeho orientace je daná pravidlem pravé ruky: Jestliže prsty pravé ruky směřují od konce vektoru $\vec{a}$ ke konci vektoru $\vec{b}$, pak palec ukazuje směr vektoru $\vec{a}\times\vec{b}$.

Vlastnosti:

- Vektorový součin dvou stejných nebo rovnoběžných vektorů je roven nule.[142]
- Vektorový součin je *antikomutativní*, tj. $\vec{a}\times\vec{b} = -\vec{b}\times\vec{a}$. [143]
- Velikost vektorového součinu je rovna ploše rovnoběžníku tvořeného z vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$.



Mají-li vektory v kartézských souřadnicích složky $\vec{a} = \left(a_x, a_y, a_z\right)$, $\vec{b} = \left(b_x, b_y, b_z\right)$, pak vektorový součin má složky

$$\vec{a}\times\vec{b} = \left(a_y b_z - a_z b_y,\; a_z b_x - a_x b_z,\; a_x b_y - a_y b_x\right). \tag{3.E.1}$$

Stačí si pamatovat vztah třeba pro *x*-ovou složku, ostatní dostaneme cyklickou záměnou. Funguje také následující pomůcka, jak si pamatovat, které složky vektorů se mají navzájem násobit:

Vektory napíšeme pod sebe, zakryjeme vždy sloupec odpovídající složce, kterou chceme počítat a násobíme „křížem“:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = \left(a_x,\; a_y,\; a_z\right) \\ \vec{b} = \left(b_x,\; b_y,\; b_z\right) \end{array} \quad \Rightarrow \quad \left(\vec{a}\times\vec{b}\right)_z = a_x b_y - a_y b_x$$

Jedno násobení je „s plusem“, druhé „s minusem“. Pozor jen u *y*-ové složky vektorového součinu, tam by bezmyšlenkovitá aplikace uvedeného pravidla dala špatné znaménko. Lze si pomoci tak, že první sloupec (první složky vektorů) si přepíšeme ještě jednou doprava a násobíme:

$$\begin{array}{l} \vec{a} = \left(a_x,\; a_y,\; a_z\right)\, a_x, \\ \vec{b} = \left(b_x,\; b_y,\; b_z\right)\, b_x \end{array}$$

[142] $\left|\vec{a}\times\vec{a}\right| = a\,a\sin 0 = 0$

[143] Takže pozor: Na rozdíl od skalárního součinu u vektorového součinu **záleží na pořadí** vektorů, které násobíme.

Dodatek 3.F: Modelování pohybu hmotného bodu v centrálním gravitačním poli

Numerický výpočet pohybu hmotného bodu, na nějž působí gravitační síla (směřující do silového centra), je jednoduchým zobecněním toho, co už známe z kapitoly 2. Tam šlo o jednorozměrný pohyb a ze souřadnice a rychlosti v určitém čase t jsme určovali souřadnici a rychlost v „následujícím" čase $t+\Delta t$:

$$\upsilon_x(t+\Delta t) \doteq \upsilon_x(t) + a_x \cdot \Delta t$$
$$x(t+\Delta t) \doteq x(t) + \upsilon_x \cdot \Delta t$$

Ve dvourozměrném případě jsou příslušné vztahy stejné pro souřadnice x i y:

$$\upsilon_x(t+\Delta t) \doteq \upsilon_x(t) + a_x \cdot \Delta t$$
$$\upsilon_y(t+\Delta t) \doteq \upsilon_y(t) + a_y \cdot \Delta t$$
$$x(t+\Delta t) \doteq x(t) + \upsilon_x \cdot \Delta t$$
$$y(t+\Delta t) \doteq y(t) + \upsilon_y \cdot \Delta t$$

Návod v podobě algoritmu resp. přímo počítačového programu je pak:

```
Cyklus (opakuje se)
  vx := vx + ax·Δt
  vy := vy + ay·Δt
  x := x + vx·Δt
  y := y + vy·Δt
  t := t + Δt
Konec cyklu
```

Samozřejmě v každém kroku cyklu musíme určit složky zrychlení ze složek síly ($a_x = F_x / m$, $a_y = F_y / m$); síla je přitom dána Newtonovým gravitačním zákonem.

Konkrétní postup výpočtu v Excelu je součástí doplňujících materiálů.

Dodatek 3.G: Vybrané jednotky a hodnoty konstant a veličin

V celém textu používáme jednotky SI, pokud není řečeno jinak. Pro připomenutí zde shrneme některé jednotky a hodnoty veličin, na které jsme v kinematice a dynamice hmotného bodu narazili.

Jednotky

Veličina	Jednotka	Další jednotky, pozn.	Převodní vztahy
délka	m	km, mm, μm, nm, pm, fm, AU, ly, pc	1 AU ≐ $1{,}496\cdot10^{11}$ m ≐ $150\cdot10^{6}$ km 1 ly ≐ $0{,}946\cdot10^{16}$ m ≐ 10^{16} m 1 pc ≐ $3{,}086\cdot10^{16}$ m ≐ $3\cdot10^{16}$ m
čas	s	hodina, den, rok	1 den = 86 400 s
rychlost	m/s	km/h	1 m/s = 3,6 km/h
zrychlení	m/s^2	(někdy se užívají násobky g)	
hmotnost	kg	g, mg, μg, …	
síla	N = kg·m/ s^2		
hybnost	kg·m/s		
práce, energie	J = N·m = kg·m^2/ s^2	eV (a keV, MeV, GeV, TeV)	1 eV ≐ $1{,}602\cdot10^{-19}$ J
výkon	W = J/s = kg·m^2/ s^3	(a mW, kW, MW, GW,…)	
moment síly	kg·m^2/ s^2	(pozor, rozměr je stejný jako u energie, ale nevyjadřuje se v joulech)	
moment hybnosti	kg·m^2/s		

Fyzikální konstanty

Konstanta	Značka	Hodnota
rychlost světla	c	299 792 458 m/s ≐ $3\cdot10^{8}$ m/s
gravitační konstanta	G (ve světě) κ (v českých učebnicích)	$6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m^2/kg^2 ≐ $0{,}67\cdot10^{-10}$ N·m^2/kg^2
normální tíhové zrychlení	g	9,80665 m/s^2 ≐ 9,81 m/s^2 ≐ 10 m/s^2
permitivita vakua	ε_0	$8{,}854\cdot10^{-12}$ F/m , $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \doteq 9\times10^{9}\ \mathrm{Nm^2/C^2}$

Další užitečné hodnoty

Název	Značka	Hodnota
poloměr Země	R_Z	6 378 km ≐ $6\cdot10^{6}$ m
hmotnost Země	M_Z	$5{,}97\cdot10^{24}$ kg ≐ $6\cdot10^{24}$ kg
hmotnost Slunce	$M_\odot$	$1{,}989\cdot10^{30}$ kg ≐ $2\cdot10^{30}$ kg