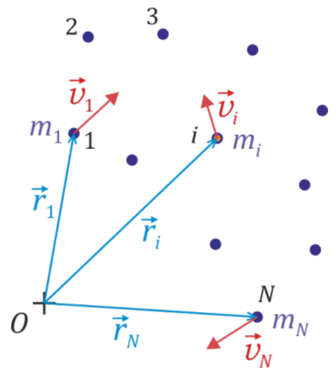
Soustava hmotných bodů

Poměrně dlouho jsme se věnovali kinematice a dynamice jednoho hmotného bodu. Na světě ovšem není jen jeden hmotný bod…

Přejděme tedy k více hmotným bodům. **Soustava hmotných bodů** je samozřejmě zase jen abstrakcí, tedy modelem toho, co existuje v přírodě. Ovšem modelem o něco bližším realitě. Soustavou hmotných bodů pro nás může být třeba Slunce a planety sluneční soustavy, dvě závaží spojená pružinou nebo provazem[1], nebo třeba všechny molekuly v kusu kamene nebo křídy (pokud se na ně díváme klasicky, nikoli jako na kvantové objekty).

Počet hmotných bodů v soustavě tedy může být 2, 3, osm nebo třeba 10^{26}. Budeme ho označovat symbolem N, jednotlivé hmotné body budeme číslovat indexem i (nebo j, k, atd.). Veličiny charakterizující hmotné body budou tytéž, jaké už známe:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{polohy:} & \vec{r}_i \\[2ex] \text{rychlosti:} & \vec{v}_i = \dot{\vec{r}}_i \\[2ex] \text{zrychlení:} & \vec{a}_i = \dot{\vec{v}}_i = \ddot{\vec{r}}_i \\[2ex] \text{hmotnosti:} & m_i \end{array}\right\} \quad i = 1,\ \dots,\ N$$



Budeme-li psát souřadnice vektorů pomocí indexů x, y, z, bude např. $\vec{r}_i = \left(x_i,\, y_i,\, z_i\right)$. Pokud bychom souřadnice psali pomocí indexů 1, 2, 3, bude ale potřeba odlišit indexy, které číslují souřadnice od indexů, které číslují hmotné body. V tom případě budeme index označující bod dávat do závorky, $\vec{r}_{(i)} = \left(x_{(i)1},\, x_{(i)2},\, x_{(i)3}\right)$.[2]

4.1 Hybnost, moment hybnosti a energie soustavy hmotných bodů

Hybnost i-tého hmotného bodu je $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i$. **Celková hybnost** soustavy hmotných bodů je dána součtem hybností jednotlivých bodů:

$$\boxed{\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\ .} \tag{4.1}$$

Samozřejmě, že hybnost soustavy hmotných bodů můžeme vyjádřit také jako $\vec{P} = m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 + \cdots + m_N\vec{v}_N = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_i$.

[1] Což má praktické uplatnění: dvě závaží spojená provazem se užívala jako vrhací zbraň pro lov zvěře, je známa pod názvem *bolaso*.

[2] Aby všechny indexy nebyly vpravo dole od písmene, mohli bychom psát i $\vec{r}_{(i)} = \left(x_1^{(i)},\, x_2^{(i)},\, x_3^{(i)}\right)$, z kontextu bude vždy jasné, oč jde. Budeme se snažit nezahltit tento text přemírou indexů, ale obecně se jejich požívání nevyhneme.

Moment hybnosti *i*-tého hmotného bodu je $\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i$, **celkový moment hybnosti** soustavy hmotných bodů je součtem

$$\boxed{\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i \ .} \tag{4.2}$$

Samozřejmě platí, že $\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \cdots + \vec{r}_N \times \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$.

Celkové $\vec{P}$ a $\vec{L}$ tedy dostáváme prostým součtem; říkáme, že hybnost i moment hybnosti jsou aditivní veličiny.[3]

Podobně je tomu v případě kinetické energie. Kinetická energie *i*-tého bodu je $\frac{1}{2} m_i v_i^2$, **celková kinetická energie** pak

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} m_1 v_1^2 + \tfrac{1}{2} m_2 v_2^2 + \cdots + \tfrac{1}{2} m_N v_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 \ .} \tag{4.3}$$

O něco složitější je to s potenciální energií. Potenciální energie *i*-tého hmotného bodu se skládá z více částí: energie bodu ve vnějším poli, označme ji V_i^E [4] a z energií vzájemné interakce tohoto bodu s ostatními body soustavy[5]. Potenciální energii vzájemného působení *i*-tého a *j*-tého hmotného bodu označíme V_{ij}. Celková potenciální energie *i*-tého hmotného bodu ve vnějším silovém poli a v poli všech ostatních hmotných bodů je $V_i = V_i^E + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{ij}$ [6]. Při výpočtu celkové potenciální energie ale musíme dát pozor, abychom energii vzájemné interakce bodů nezapočítali dvakrát. Správnou hodnotu dá vzorec[7]

$$\boxed{V = \sum_{i=1}^{N} V_i^E + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{ij} \ .} \tag{4.4}$$

[3] Pokud je takto definujeme, tedy pokud platí vztahy (4.1) a (4.2), mají rozumné vlastnosti při popisu fyzikálních dějů. Například kousek hozené křídy má hybnost $m\vec{v}$. Pokud by se za letu rozlomil na dva kousky o hmotnostech m_1 a m_2 (přičemž $m = m_1 + m_2$), je rozumné předpokládat, že celková hybnost (teď už soustavy dvou kousků) zůstala stejná, tedy $\vec{p} = m_1 \vec{v} + m_2 \vec{v}$. (Můžeme říci „odkud by se najednou nějaká dodatečná hybnost vzala. Nebo kam by se ztratila?“) Další aspekty toho, že se takto definovaná celková hybnost a moment hybnosti „chovají rozumně“, poznáme v dalších částech této kapitoly.

[4] „E“ jako *externí*. Příkladem může být energie třeba kamene ve vnějším gravitačním poli Země.

[5] Třeba kdyby mezi závažíčky byly nataženy pružinky. Dalším příkladem by mohla být interakce mezi molekulami (pokud je uvažujeme jako klasické kuličky) – mezimolekulárními silami se molekuly přitahují, pokud se vzdálí a naopak odpuzují, pokud jsou u sebe příliš blízko. Ještě jiným příkladem může být soustava Země-Měsíc, ty se gravitačně přitahují, čemuž odpovídá příslušná potenciální energie $-GM_Z M_M / r^2$.

[6] Tím, že v součtu je $j \neq i$, je dáno to, že v něm není člen V_{ii}, který by odpovídal energii působení bodu samotného na sebe. (Žádné takovéto působení opravdu v mechanice neznáme, bod sám sebe nikam „nestrká“ a neurychluje.)

[7] Rozmyslete si sami, že platí; napište si potenciální energii třeba v případě dvou hmotných bodů spojených pružinou, které jsou v homogenním gravitačním poli.

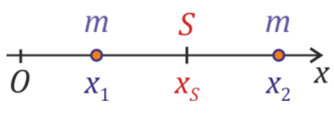
4.2 Hmotný střed

Hmotnému středu se často také říká **těžiště**. V dalším uvidíme, proč je to oprávněné a kdy naopak musíme mezi hmotným středem a těžištěm rozlišovat.

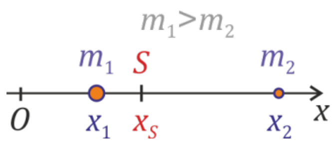
Jak dojít k pojmu hmotný střed

Definici hmotného středu bychom mohli prostě uvést; pojďme však raději tento pojem „vybudovat". Začneme jednorozměrným případem.

Pro dva hmotné body stejné hmotnosti, které jsou na ose *x*, je jasné, že jejich střed resp. „hmotný střed" bude uprostřed mezi nimi. Jsou-li x_1 a x_2 souřadnice daných bodů, bude tedy souřadnice středu jejich průměrem, tj. $x_S = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$.



Pokud ovšem bude například první bod hmotnější než druhý, měl by zřejmě bod, jemuž budeme říkat *hmotný střed*, blíže k tomuto prvnímu bodu. Toto vystihne tzv. *vážený průměr* souřadnic daných bodů:

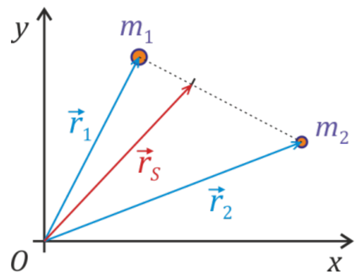


$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2} \ ,$$

ten se chová právě tak, jak potřebujeme. [8]

Výsledek můžeme přirozeně zobecnit na třírozměrný případ. Pro polohové vektory dostáváme

$$\vec{r}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \ . \qquad (4.5)$$



Můžeme si ověřit, že tento vzorec dává ve speciálních případech rozumné výsledky.[9]

Zobecnit tento vztah na libovolně velký počet hmotných bodů už není problém:

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}} \qquad (4.6)$$

A právě toto už je **definice hmotného středu soustavy hmotných bodů**.

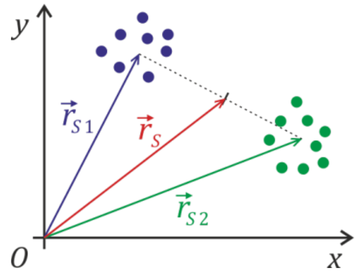
---

[8] Vyzkoušejte si, že pro $m_1 = m_2$ dostaneme předchozí případ; naopak pro $m_1 \gg m_2$ bude prakticky $x_S \doteq x_1$ apod.

[9] Opět, je-li jedna z hmotností mnohem větší než druhá, bude hmotný střed prakticky splývat s hmotnějším bodem. (Například hmotný střed soustavy Země a družice prakticky splývá s hmotným středem Země.)
Navíc lze ukázat, že hmotný střed vždy leží na přímce spojující dané dva body. Zkuste si toto dokázat sami.
(Nápověda: Přepište vztah pro polohu hmotného středu na tvar $\vec{r}_S = \vec{r}_1 + \dfrac{m_2}{m_1 + m_2}(\vec{r}_2 - \vec{r}_1)$.)

Poznamenejme, že vztah (4.6) platí i v případě, kdy nejde jen o hmotné body – například pokud by hmotnostmi m_1 a m_2 byly dva velké kameny blízko sebe.[10] Jak je to možné? Opravdu nemusíme sčítat přes všechny molekuly tvořící dané kameny?

Opravdu ne. Jestliže je v prvním „kamenu“, tj. v první skupině bodů, řekněme K hmotných bodů a ve druhé $N-K$ bodů, můžeme vztah (4.6) rozepsat jako



$$\vec{r}_S = \frac{\sum_{i=1}^{K} m_i\vec{r}_i + \sum_{i=K+1}^{N} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i + \sum_{i=K+1}^{N} m_i} \tag{4.7}$$

Přitom hmotný střed první skupiny hmotných bodů je $\vec{r}_{S1} = \dfrac{\sum_{i=1}^{K} m_i\vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{K} m_i}$. Odtud $\sum_{i=1}^{K} m_i\vec{r}_i = m_{S1}\vec{r}_{S1}$, kde

$m_{S1} = \sum_{i=1}^{K} m_i$ je celková hmotnost prvního kamene. Podobně pro druhý kámen je $\sum_{i=K+1}^{N} m_i\vec{r}_i = m_{S2}\vec{r}_{S2}$.

Ze (4.7) tedy dostáváme

$$\vec{r}_S = \frac{m_{S1}\vec{r}_{S1} + m_{S2}\vec{r}_{S2}}{m_{S1} + m_{S2}} \; , \tag{4.8}$$

tedy stejný vztah jako pro hmotný střed dvou hmotných bodů. Máme tedy recept, jak spočíst hmotný střed dvou třeba i dosti velkých těles, například tyčí. Stačí do vztahu (4.8) dosazovat na pravé straně polohy hmotných středů daných těles, a samozřejmě jejich hmotnosti.

Ze vztahu (4.6) pro hmotný střed plyne jeden okamžitý důsledek, který v následujících částech kapitoly několikrát využijeme. Vynásobíme-li (4.6) jmenovatelem výrazu na pravé straně, dostaneme

$$\boxed{\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right)\vec{r}_S = m\,\vec{r}_S \; ,} \tag{4.9}$$

kde

$$m = \sum_{i=1}^{N} m_i \tag{4.10}$$

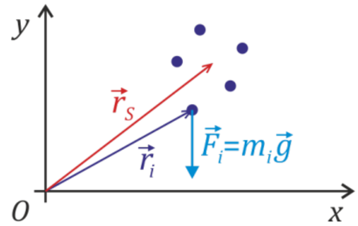
je celková hmotnost soustavy hmotných bodů.

[10] Nebo třeba Země a Měsíc.

Hmotný střed a těžiště

Všichni asi známe způsob, jak v praxi určit těžiště nějakého tělesa. Těleso zavěsíme a od bodu závěsu vedeme přímku svisle dolů.[11] Pak jej zavěsíme za jiný bod a opět vedeme přímku kolmo dolů. Obě přímky se protnou v jednom bodě – a to je právě těžiště. Pokud bychom těleso zavěsili v jakémkoli jiném bodě, vedla by svislice vždy do těžiště.

Zamysleli jste se někdy nad tím, jak je možné, že se ty svislice vždy protnou ve stejném bodě?[12] Jistě, je to proto, že těžiště vždy leží pod bodem závěsu. Ale proč tam leží?



Vychýlíme-li zavěšené těleso z rovnováhy, působí na něj moment síly, který se jej snaží do rovnováhy vrátit. Spočtěme tento moment.[13]

Předpokládáme, že těleso je **v homogenním gravitačním poli**. Na i-tý hmotný bod působí síla $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$. ($\vec{g}$ je gravitační zrychlení.)

Moment síly na i-tý hmotný bod je tedy $\vec{M}_i = \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{r}_i \times (m_i\vec{g})$.
Celkový moment síly na soustavu hmotných bodů je součtem:

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i\vec{g}) \tag{4.11}$$

Výraz na pravé straně můžeme upravit[14] :

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i\vec{g}) = \sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i \times \vec{g} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) \times \vec{g} = (m\,\vec{r}_S) \times \vec{g} = \vec{r}_S \times (m\vec{g}) \tag{4.12}$$

Kombinací (4.11) a (4.12) pak dostáváme výsledek

$$\boxed{\vec{M} = \vec{r}_S \times (m\vec{g}) \quad .} \tag{4.13}$$

To znamená, že

> celkový moment sil působící na soustavu hmotných bodů v homogenním gravitačním poli je stejný, jako by celková hmotnost soustavy byla soustředěna v jediném bodě – v hmotném středu soustavy.

Právě proto tento bod – hmotný střed – označujeme také jako **těžiště**. Moment gravitačních sil je stejný, jako by celková gravitační (resp. tíhová[15]) síla působila právě v těžišti.

[11] Třeba pomocí olovnice. Dobře se to dělá, pokud je těleso ploché, například když jde o vystřižený kus kartonu. Na něj můžeme svislici rovnou nakreslit.

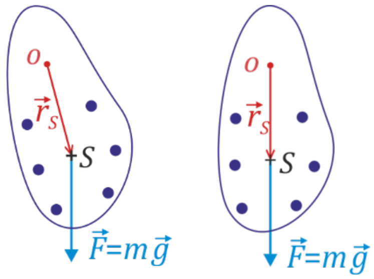
[12] Pokud by k tomu nebyl žádný fyzikální důvod, nemuselo by to tak být. Dokonce i v případě třírozměrného tělesa zavěšeného ve dvou různých bodech si můžeme představit, že by svislice byly mimoběžky a neprotnuly se vůbec. Tak jakým „zázrakem" se stane, že se reálně opravdu protnou?

[13] Těleso přitom budeme brát jako soustavu hmotných bodů.

[14] Využíváme toho, že: 1) u násobení skalárem je jedno, jestli se násobí první nebo druhý vektor ve vektorovém součinu, tedy že je $\vec{a} \times (k\vec{b}) = k\vec{a} \times \vec{b}$, dále že 2) $\vec{g}$ je stejné pro všechny body a 3) platí (4.9).

[15] Na tomto místě nerozlišujeme gravitační a tíhovou sílu. Blíže o tomto rozlišení viz kapitolu o neinerciálních soustavách.

Nyní už je jasné, proč je hmotný střed vždy pod bodem závěsu a tedy proč se svislé přímky vedené z bodu závěsu protínají právě v tomto jednom bodě. Pokud je hmotný střed S vychýlen do strany, působí na soustavu nenulový moment síly a ten ji vrací do rovnováhy. Jedině v případě, kdy je hmotný střed přesně pod bodem závěsu, je moment nulový a soustava resp. těleso je v rovnováze.



Ze vztahu (4.13) plyne ještě jedna vlastnost těžiště: **Pokud těleso zavěsíme právě v těžišti, pak moment sil na těleso působících bude nulový**. Jde nám totiž o moment sil vůči bodu závěsu, to znamená, že polohové vektory musí začínat právě v bodě závěsu – jinými slovy, že do bodu závěsu položíme počátek soustavy souřadnic. To znamená, že bude $\vec{r}_S = 0$.[16] Z (4.13) pak okamžitě plyne $\vec{M} = 0$.

> Těleso zavěšené v těžišti můžeme kolem bodu závěsu libovolně natočit a moment gravitačních sil na těleso působících[17] bude stále nulový. Tuto vlastnost bychom mohli vzít jako definici těžiště.

Hmotný střed, těžiště a potenciální energie

Skutečnost, že hmotný střed leží vždy pod bodem závěsu, lze odvodit i z potenciální energie. Celková potenciální energie soustavy hmotných bodů v homogenním gravitačním poli je (viz (4.4))

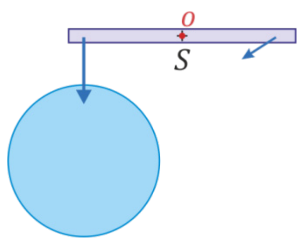
$$V = \sum_{i=1}^{N} m_i g z_i = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i z_i \right) g = (m z_S) g = m g z_S \quad ,^{18} \tag{4.14}$$

tedy stejná, jako kdyby celková hmotnost m soustavy byla soustředěna v těžišti.[19]

Těleso (resp. soustava hmotných bodů) je v rovnováze, když je jeho potenciální energie nejnižší. Ze (4.14) vidíme, že je to v případě, když je těžiště co nejníž. A to je právě v případě, kdy je pod bodem závěsu.

Kdy hmotný střed není těžiště

Odvodili jsme, že v homogenním gravitačním poli hmotný střed a těžiště jsou totožné. Ovšem pozor, **v nehomogenním gravitačním poli** tomu tak obecně není! Příkladem může být homogenní tyč. Její hmotný střed je evidentně v jejím středu. Ovšem kdyby tyč byla dlouhá třeba 15 tisíc kilometrů a podepřeli jsme ji v jejím hmotném středu, kus od zeměkoule, jak ukazuje obrázek, evidentně nebude v rovnováze. Část bližší k Zemi bude přitahována výrazně více než část vzdálenější. V tomto případě dokonce ani není příliš rozumné těžiště definovat – jeho poloha by závisela na tom, jak tyč natočíme.



[16] Rozmyslete si, že tomu tak je. Vektorem $\vec{r}_S$ v tomto případě fakticky určujeme polohu hmotného středu vůči hmotnému středu.
[17] V homogenním gravitačním poli. (Proč to zdůrazňujeme, uvidíme za chvíli.)
[18] Při úpravě jsme použili vztah (4.9), konkrétně jeho z-ovou složku.
[19] Jde o známý vztah mgh, kde výška h je rovna svislé souřadnici hmotného středu z_S.

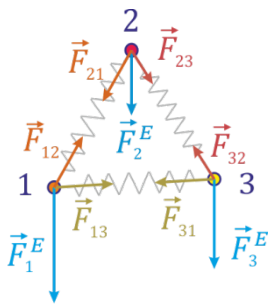
4.3 První věta impulsová

Celková hybnost soustavy hmotných bodů je dána vztahem (4.1), tedy $\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i$. Podívejme se, jak se tato hybnost mění s časem.[20] Na zjištění, jak se nějaká veličina mění s časem, přitom máme vhodný matematický nástroj – derivaci podle času:

$$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i \qquad \Big/ \frac{d}{dt} \tag{4.15}$$

Pravou stranu upravíme[21]:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \frac{d\vec{p}_i}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \ . \tag{4.16}$$



Síla $\vec{F}_i$ na i-tý hmotný bod se přitom skládá jednak ze síly $\vec{F}_i^E$, kterou na hmotný bod působí vnější silové pole[22] [23] a jednak ze sil $\vec{F}_{ij}$, jimiž na daný bod působí ostatní hmotné body.[24] Pro případ tří bodů to ukazuje obrázek.

Můžeme tedy psát

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \ ^{25} \tag{4.17}$$

Po dosazení (4.17) do (4.16) dostáváme

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N}\left(\vec{F}_i^E + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij}\right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^E}_{\vec{F}^E} + \sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \ . \tag{4.18}$$

První člen na pravé straně je součtem všech vnějších sil působících na soustavu – je to tedy **celková vnější síla působící na soustavu** a celkem přirozeně jsme ji označili jako $\vec{F}^E$.[26]

[20] O řadě veličin se můžeme leccos zajímavého dozvědět, když zkoumáme, jak se mění či nemění s časem.

[21] Využijeme přitom druhého Newtonova zákona: pro každý hmotný bod platí $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$.

[22] To „E" v symbolu $\vec{F}_i^E$ znamená „externí", ale není to žádná pevně daná symbolika, spíše jen naše dohoda, které se budeme v této kapitole držet. Chcete-li, používejte vlastní značení; podstatné je odlišit síly, které na soustavu působí „zvenku" od sil mezi jednotlivými body. (Vnější působení by nemuselo nutně být silové pole, mohli bychom do některých bodů „praštit" třeba rukou nebo kulečníkovým tágem.)

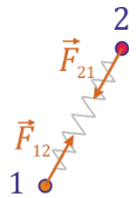
[23] V případě, kdy bychom do vzduchu vyhodili třeba několik závaží pospojovaných gumičkami (nebo výše zmíněné bolaso), může být vnějším polem gravitační pole Země. V případě soustavy Země-Měsíc by vnějším polem bylo gravitační pole Slunce.

[24] Říkáme jim **vnitřní** síly. V případě nabitých kuliček to mohou být elektrostatické síly, jimiž se kuličky přitahují nebo odpuzují. Pokud půjde o závaží spojená gumičkami či pružinkami, půjde o síly pružnosti těch pružin či gumiček.

[25] V součtu píšeme $j \neq i$, abychom vyloučili člen $\vec{F}_{ii}$, který by znamenal sílu, jíž hmotný bod působí sám na sebe. (Žádnou takovou silou na sebe hmotný bod samozřejmě nepůsobí.)

[26] Například v případě kamene v gravitačním poli Země (když jednotlivé molekuly bereme jako hmotné body), je $\vec{F}^E$ gravitační síla, kterou Země přitahuje kámen.

Jak je tomu s druhým členem, $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}$? Pro začátek je vhodné podívat se na co nejjednodušší případ, tedy na soustavu pouhých dvou hmotných bodů. V tom případě součty vypadají takto:



$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{2}\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12}+\vec{F}_{21}$$

Pro síly mezi hmotnými body ale platí princip akce a reakce: $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$. To znamená, že

$$\sum_{i=1}^{2}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{2}\vec{F}_{ij} = \vec{F}_{12}+\vec{F}_{21} = 0 \ . \tag{4.19}$$

Je-li hmotných bodů větší počet[27], pak se v součtu vynulují nejen síly mezi body 1 a 2, ale i ve všech ostatních dvojicích. To znamená, že pro libovolný počet bodů platí $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} = 0$. Ze vztahu (4.18) tedy dostáváme

$$\boxed{\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^{E}} \tag{4.20}$$

neboli:

Časová změna hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna celkové vnější síle působící na soustavu.

Tento výsledek je znám pod názvem **první věta impulsová**.[28] [29]

Zákon zachování hybnosti

Důležitý důsledek dostaneme v případě, kdy žádné vnější síly na soustavu hmotných bodů nepůsobí. Taková soustava se označuje jako **izolovaná soustava**.

Z (4.20) plyne pro $\vec{F}^{E} = 0$:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{P} = \text{konst.}} \tag{4.21}$$

Hybnost izolované soustavy hmotných bodů je konstantní.

Odvodili jsme **zákon zachování hybnosti.**

---

[27] Tři, čtyři nebo třeba 10^{26}.

[28] Proč „impulsová“? Již výše jsme uvedli, že hybnost se dříve označovala termínem „impuls“. Používá se též název věta o hybnosti soustavy hmotných bodů.

[29] Podle novějšího pravopisného úzu můžeme psát také se „z“: „první věta impulzová“. (Podle Internetové jazykové příručky Ústavu pro jazyk český jsou tvary „impuls“ a „impulz“ stylově rovnocenné.)

Zákon zachování hybnosti jsme zde odvodili z druhého Newtonova zákona a z třetího Newtonova zákona, tedy principu akce a reakce. Obecně ale fyzikové považují zákon zachování hybnosti za velice fundamentální princip, za něco, co je mnohem obecnější a základnější, než třeba Newtonovy zákony.[30] Zákon zachování hybnosti je opravdu principem, který platí i daleko za hranicemi klasické mechaniky.[31] A patří k věcem „na jejichž platnost fyzici přísahají“.[32]

Na souvislost principu akce a reakce bychom se mohli podívat i z druhé strany. To znamená, vzít zákon zachování hybnosti za něco, co je platné a potvrzované experimenty, a z něj pak vyvodit princip akce a reakce jako důsledek.[33]

Malá odbočka pro ty, kdo mají rádi formálnější důkazy

Výše jsme skutečnost, že se vnitřní síly mezi hmotnými body soustavy celkově vyruší, odvodili pro jednu dvojici bodů a pak jsme uvážili, že se takto vyruší pro všechny dvojice. To je sice korektní úvaha, matematičtěji zaměření čtenáři by však možná dali přednost formálnějšímu odvození, které by celkové vynulování vnitřních sil odvodilo naráz. Prosím, tady je:

Výraz $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij}$ přepíšeme jako součet dvou stejných členů a druhý z členů budeme upravovat:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\underbrace{\vec{F}_{ij}}_{-\vec{F}_{ji}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ji} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{N}\vec{F}_{lk} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{F}_{ij} = 0\end{aligned} \tag{4.22}$$

[30] Ve druhém ročníku se v *Teoretické mechanice* zmíníme o tom, jak zákony zachování souvisejí se symetriemi prostoru a času. Konkrétně zákon zachování hybnosti souvisí se symetrií vůči posunutí. Tedy, jednoduše (vágně a zjednodušeně) řečeno, s tím, že „fyzika je stejná na všech místech, tady, o deset metrů dál, o milión světelných let jinde“. Prozatím se ale takto hlubokým souvislostem věnovat nebudeme, raději se naučíme zákon zachování hybnosti používat.

[31] Třeba ve speciální teorii relativity nebo ve fyzice mikrosvěta.

[32] Tedy, ne že by někde byly tajné katakomby, kam by fyzikové za nocí a za svitu voskovic opravdu chodili přísahat na zákony zachování. Bylo by to pěkné, romantické a asi by se o tom dal napsat nějaký fantasy román nebo celá série (tento nápad dávám laskavým čtenářům se spisovatelskými ambicemi nezištně k dispozici), ale není tomu tak.
O platnosti zákonů zachování nás přesvědčuje celý dosavadní vývoj fyziky (byť třeba v obecné relativitě se musí s pojmem celková energie zacházet velmi opatrně). A například Wolfgang Pauli na základě svého přesvědčení o tom, že zachování energie a hybnosti musí platit i při beta-rozpadu předpověděl v roce 1931 neutrino. Tedy částici, kterou v té době vůbec nebylo možné detekovat.
Prohlásit, že v reakci se určitě vyskytuje nějaká další částice, i když ji nikdo nevidí a nedetekuje – to je hodně silné a odvážné tvrzení! A hodně silná předpověď vycházející ze zákonů zachování. Jak to dopadlo, víme: neutrino bylo experimentálně objeveno o čtvrt století později. Právě takovéto momenty vývoje fyziky v nás utvrzují přesvědčení, že zákony zachování jsou něčím opravdu základním, na co se můžeme spolehnout.

[33] Třeba sporem: Kdyby pro nějaké dva hmotné body neplatilo, že $\vec{F}_{21} = -\vec{F}_{12}$, byl by ve vztahu (4.18) nenulový příspěvek $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{12}$ a celková hybnost soustavy těchto dvou bodů by se s časem měnila. Kdyby tomu tak bylo, asi by se zjednodušila kosmonautika: kosmické sondy a lodi by nemusely mít raketové motory. Stačilo by, aby na sebe v kabině působily dané dva hmotné body, a celou raketu by to urychlovalo!
Připomínalo by to starou historku Barona Prášila, který podle svých slov kdysi zapadal do bažiny, ale vytáhl se z ní ven tak, že se tahal nahoru za vlastní cop. Podle všeho, co víme, ale tohle v přírodě nefunguje…

Úpravy se na první pohled mohou zdát složité, ale dají se zvládnout. Pro přehlednost byl druhý člen zvýrazněn barvou. Při první úpravě (tmavožlutého členu) používáme princip akce a reakce. Druhá úprava (od zeleného ke světle modrému členu) spočívá v záměně indexů: $i \to k,\ \ j \to l$. Třetí úprava (od světle modrého k fialovému členu) je opět záměnou indexů $k \to j,\ \ l \to i$.[34] Poslední úprava (od fialového k tmavočervenému členu) spočívá v přehození pořadí sumací. To můžeme udělat, protože fakticky sčítáme přes všechny možné kombinace indexů (vylučujeme jen ty, kde se oba indexy rovnají). A nakonec vidíme, že první a druhý člen jsou stejné, jen s opačným znaménkem…

I tento formální důkaz tedy ukazuje, že celkový součet všech vnitřních sil v soustavě (s libovolným počtem bodů) je nula.

Celková hybnost a pohyb hmotného středu

Zajímavý výsledek dostaneme derivací vztahu (4.9) podle času:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = m\,\vec{r}_S \qquad \Big/ \ \frac{d}{dt}$$

Dostaneme

$$\sum_{i=1}^{N} \underbrace{m_i \frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{m_i \vec{v}_i = \vec{p}_i} = m\,\frac{d\vec{r}_S}{dt} = m\vec{v}_S$$

Na levé straně je součet hybností všech bodů, tedy celková hybnost $\vec{P}$, viz (4.1). Je tedy

$$\boxed{\vec{P} = m\,\vec{v}_S\ .} \tag{4.23}$$

Celková hybnost soustavy hmotných bodů se rovná
celkové hmotnosti soustavy krát rychlost hmotného středu.

Po dosazení do první věty impulsové (4.20) pak dostaneme $\frac{d}{dt}\left(m\,\vec{v}_S\right) = \vec{F}^E$, čili

$$\boxed{m\,\frac{d\vec{v}_S}{dt} = \vec{F}^E\ .} \tag{4.24}$$

Můžeme říci, že pro pohyb hmotného středu soustavy hmotných bodů platí druhý Newtonův zákon.[35]

Pokud je soustava izolovaná, tedy $\vec{F}^E = 0$, je $\frac{d\vec{v}_S}{dt} = 0 \ \Rightarrow\ \vec{v}_S = \text{konst.}$, tj. její hmotný střed se pohybuje rovnoměrně přímočaře.

[34] Obě tyto úpravy jsme ve skutečnosti mohli dělat naráz, tedy zaměnit indexy *i* a *j*: $i \leftrightarrow j$. Bylo by to rychlejší a pro někoho snad i přehlednější. Protože ale tyto úpravy děláme poprvé, děláme je po malých krocích. (Až si na to zvyknete, budete je dělat bez problémů plynule a klidně i z hlavy.)

[35] Je tedy jasné, proč druhý Newtonův zákon můžeme používat třeba pro výpočet pohyby vrženého kamene nebo pohybu Země kolem Slunce. Fakticky jej můžeme využít i pro určení pohybu třeba tyče nebo kladiva pod působením vnějších sil: hmotný střed kladiva hozeného v homogenním gravitačním poli se bude pohybovat po parabole.

Změna hybnosti soustavy a impuls síly

Z první věty impulsové můžeme odvodit ještě jeden důsledek týkající se změny celkové hybnosti soustavy. Odvodit jej můžeme stejně, jako jsme to v kapitole 3.1 dělali pro jeden hmotný bod.

První větu impulsovou, tedy vztah (4.20) budeme integrovat podle času:

$$\frac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E \quad \Big/ \int_{t_0}^{t_k} dt \qquad (4.25)$$

Integrací levé strany dostaneme $\int_{t_0}^{t_k} \frac{d\vec{P}}{dt}\,dt = \left[\vec{P}(t)\right]_{t_0}^{t_k} = \vec{P}(t_k) - \vec{P}(t_0)$, takže z (4.25) vyjde

$$\vec{P}(t_k) - \vec{P}(t_0) = \int_{t_0}^{t_k} \vec{F}^E(t)\,dt\ . \qquad (4.26)$$

Formálně jde o stejný výsledek jako v případě jednoho hmotného bodu: celková změna hybnosti se rovná impulsu působící síly.[36]

Je-li rozdíl časů $\Delta t = t_k - t_0$ malý, síla se na intervalu $\langle t_0, t_k \rangle$ příliš nezmění a přibližně platí $\int_{t_0}^{t_k} \vec{F}^E(t)\,dt \doteq \vec{F}^E \Delta t$. Označíme-li změnu hybnosti jako $\Delta\vec{P} = \vec{P}(t_k) - \vec{P}(t_0)$, dostaneme ze (4.26):

$$\boxed{\Delta\vec{P} \doteq \vec{F}^E \Delta t\ .} \qquad (4.27)$$

[37]

Poznamenejme, že tento výsledek bychom mohli získat přímo z první věty impulsové, pokud bychom v ní derivaci aproximovali jako: $\frac{d\vec{P}}{dt} \doteq \frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t}$, tedy časovou změnu brali jako podíl malých konečných přírůstků. Takto zapsaná druhá věta impulsová by měla tvar

$$\frac{\Delta\vec{P}}{\Delta t} \doteq \vec{F}^E \qquad (4.28)$$

[38]

Odsud už vynásobením Δt dostáváme okamžitě (4.27).[39]

---

[36] V tomto případě celkové vnější síly, tedy součtu všech vnějších sil působících na soustavu.

[37] Jak je vyznačeno symbolem $\doteq$, jde o vztah přibližný, jeho přesnost však vzrůstá, když zmenšujeme Δt. Zcela přesný by byl v limitě $\Delta t \to 0$. Někdy se pro tento případ zapisuje pomocí diferenciálů jako $d\vec{P} = \vec{F}^E dt$. Mluvíme přitom o „infinitesimálních změnách“; volněji řečeno, chápeme tyto změny jako „nekonečně malé“. Pro podrobnější a přesnější diskusi diferenciálů a související problematiky odkazujeme na předměty *Úvod do matematických metod fyziky*, *Matematické metody fyziky* a samozřejmě na matematickou analýzu.

[38] V tomto tvaru bychom ji mohli prezentovat zájemcům z řad středoškoláků, kteří ještě neznají derivace. Pokud bychom na pravé straně brali $\vec{F}^E$ jako průměrnou sílu v daném časovém intervalu, byl by vztah dokonce přesný – viz výše vztah (3.11) na konci kapitoly 3.1.

[39] Poznamenejme ještě, že (4.27) se nám bude hodit na konci této kapitoly při „prakticky středoškolském“ odvození vztahů pro pohyb rakety.

4.4 Druhá věta impulsová

Druhá věta impulsová se týká **momentu hybnosti**, resp. toho, jak se mění s časem. Derivací momentu hybnosti podle času,

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i \qquad \Big/ \frac{d}{dt}$$

dostaneme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \frac{d}{dt}\left(\vec{r}_i \times \vec{p}_i\right) = \sum_{i=1}^{N} \left(\underbrace{\frac{d\vec{r}_i}{dt}}_{\vec{v}_i} \times \underbrace{\vec{p}_i}_{m_i\vec{v}_i} + \vec{r}_i \times \underbrace{\frac{d\vec{p}_i}{dt}}_{\vec{F}_i} \right) \tag{4.29}$$

První člen v závorce na pravé straně (vyznačený modře) je ale vektorovým součinem rovnoběžných vektorů; je proto roven nule: $\vec{v}_i \times \left(m_i \vec{v}_i\right) = 0$. V druhém členu (vyznačen zeleně) zase využijeme druhý Newtonův zákon $\frac{d\vec{p}_i}{dt} = \vec{F}_i$. Z (4.29) tedy dostáváme

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\vec{F}_i^{E} + \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right). \tag{4.30}$$

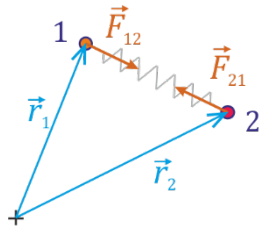
Zde jsme již dosadili za sílu $\vec{F}_i$ ze vztahu (4.17). Pravou stranu (4.30) dále upravíme:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \sum_{i=1}^{N} \underbrace{\vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E}}_{\vec{M}_i^{E}} + \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{F}_{ij} \right) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{E}}_{\vec{M}^{E}} + \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} . \tag{4.31}$$

První člen na pravé straně (označený tmavozeleně) je součtem momentů vnějších sil působících na jednotlivé body soustavy. Je to tedy **celkový moment vnějších sil**:

$$\vec{M}^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{M}_i^{E} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{E} \tag{4.32}$$

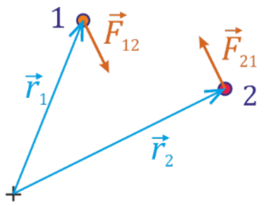
Druhý člen na pravé straně (4.31) (vyznačený hnědě) je celkový moment *vnitřních* sil soustavy.[40] Nejprve si jej pro jednoduchost opět vyjádříme jen pro soustavu dvou hmotných bodů. Při úpravě pak využijeme princip akce a reakce:



$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{2} \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{2} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} + \vec{r}_2 \times \underbrace{\vec{F}_{21}}_{-\vec{F}_{12}} = \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_{12} - \vec{r}_2 \times \vec{F}_{12} = \left(\vec{r}_1 - \vec{r}_2\right) \times \vec{F}_{12} \end{aligned} \tag{4.33}$$

Vidíme, že pokud využijeme jen princip akce a reakce ***nedostáváme automaticky nulu***.

[40] Zřejmě už, v analogii s odvozením první věty impulsové, očekáváme, že dá nulu.



Kdy by moment vnitřních sil mohl být nenulový? Například v situaci, kterou ukazuje obrázek vpravo. To znamená v případě, kdy by síly nebyly centrální.

Takovéto síly ovšem mezi hmotnými body v přírodě nenacházíme.[41]

K odvození toho, že celkový moment vnitřních sil dá nulu, tedy použijeme fakt, že síly mezi hmotnými body jsou **centrální**. To znamená, že

$$\vec{F}_{12} \sim (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\,,^{42} \quad \text{tj. } \vec{F}_{12} = k\,(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \tag{4.34}$$

Díky tomu je vektorový součin vektorů ve (4.33) nulový, $(\vec{r}_1 - \vec{r}_2)\times\vec{F}_{12} = 0$. Podobně se vyruší momenty sil pro všechny dvojice bodů, takže pro libovolné N platí $\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_{ij} = 0$. Ze (4.31) pak plyne

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E} \tag{4.35}$$

čili

Časová změna momentu hybnosti soustavy hmotných bodů je rovna celkovému momentu vnějších sil působící na soustavu.

A právě toto je **druhá věta impulsová**.[43]

Zákon zachování momentu hybnosti

Pro **izolovanou soustavu** již jednoduše dostaneme jako důsledek druhé věty impulsové další zákon zachování. Pro $\vec{M}^E = 0$ dostaneme z (4.35)

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{L} = \text{konst.}} \tag{4.36}$$

Moment hybnosti izolované soustavy hmotných bodů je konstantní.

To znamená, že platí **zákon zachování momentu hybnosti.**

---

[41] Takové síly by působily opravdu divně. Například „činka“, tj. dva hmotné body spojené tyčkou, mezi nimiž by působily necentrální síly, by se sama od sebe roztočila, a roztáčela by se stále rychleji. To by bylo pěkné pro perpetuum mobile (mít takovouto činku v autě místo motoru, ušetříte za benzín), ale příroda nám, podle všeho co víme, takovýto levný pohon nenabízí.

[42] Znakem $\sim$ zde značíme, že vektory jsou úměrné, tj. mají stejný směr. V geometrickém značení bychom mohli psát $\vec{F}_{12} \parallel (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$.

[43] Všimněte si podobnosti mezi první a druhou větou impulsovou.
V první větě impulsové jde o časovou změnu celkové **hybnosti** soustavy a o celkovou **vnější sílu**.
Ve druhé větě impulsové jde o časovou změnu celkového **momentu hybnosti** soustavy a o celkový **moment vnějších sil.**

Opět odbočka pro milovníky formálních důkazů

Pojďme opět odvodit, že $\sum\limits_{i=1}^{N}\sum\limits_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}=0$ i formálnějším postupem. V důkazu znovu rozdělíme výraz na dvě poloviny a druhou budeme upravovat:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij} &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\underbrace{\vec{F}_{ij}}_{-\vec{F}_{ji}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ji} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{N}\vec{r}_j\times\vec{F}_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_i\times\vec{F}_{ij}-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\vec{r}_j\times\vec{F}_{ij} = \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{N}\left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\times\vec{F}_{ij}=0 \qquad \ldots\text{protože } \left(\vec{r}_i-\vec{r}_j\right)\parallel\vec{F}_{ij}\end{aligned} \tag{4.37}$$

Úpravu jsme již provedli o něco rychleji než výše v případě (4.22); rovnou jsme zaměnili indexy *i* a *j* (při přechodu od modře zvýrazněného členu k zeleně zvýrazněnému). Důkaz jsme tedy provedli pro libovolný počet hmotných bodů.

Shrneme-li odvození první a druhé věty impulsové, vidíme, že jsme (kromě definice hybnosti a momentu hybnosti) v obou případech využili:

- Druhý Newtonův zákon
- Princip akce a reakce

Pro odvození druhé věty impulsové toto nestačilo a potřebovali jsme navíc:

- Centrálnost sil

Je dobré uvědomit si, že při odvozování impulsových vět jsme nikde nepotřebovali předpokládat, že síly jsou konzervativní! To znamená, že platnost **první a druhé věty impulsové *nezávisí* na tom, zda síly jsou nebo nejsou konzervativní**. Totéž platí pro zákony zachování hybnosti a momentu hybnosti izolované soustavy.[44]

V dalších částech této kapitoly se podíváme na aplikace zejména první věty impulsové a zákona zachování hybnosti. Druhou větu impulsovou pak využijeme v příští kapitole, kde půjde o tuhé těleso.

[44] To je rozdíl oproti zákonu zachování mechanické energie – ten platí, jen když všechny síly jsou konzervativní. Naopak zákon zachování hybnosti a zákon zachování momentu hybnosti platí, i když sílami uvnitř soustavy jsou třeba třecí síly.

4.5 Srážky

Srážkami zde míníme nikoli déšť či sníh, ale kolize dvou nebo více těles.[45] Srážky obecně dělíme na **pružné** a **nepružné**. V mechanice často vyšetřujeme idealizované případy, tedy srážky

- ideálně pružné

a

- ideálně nepružné.

Příkladem ideálně pružné srážky míčku třeba s podlahou by byl odraz, kdy míček, který pustíme z výšky třeba 1 metr, vyskočí po odrazu do výšky zase přesně 1 metr – a opakovaně bude skákat do stále stejné výšky.[46] Příkladem ideálně nepružné srážky by byl případ, kdy se míček vůbec neodrazí.[47]

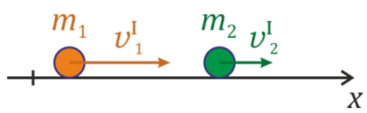
Skutečné srážky jsou většinou mezi těmito ideálními extrémy. Ideálně pružnou srážku v makrosvětě zřejmě neumíme udělat vůbec.[48] Ideálně nepružnou srážku realizovat lze – nastává třeba v případě, kdy se letící střela zaryje do nějakého objektu a zůstane v něm zaražena.[49]

Z uvedených příkladů je jasně vidět, že:

- při ideálně pružné srážce se zachovává hybnost a mechanická energie[50] [51];
- při ideálně nepružné srážce se zachovává pouze hybnost.[52]

V případě srážek obvykle platí, že neznáme detaily sil působících během srážky mezi tělesy. O srážce a jejím výsledku přesto můžeme leccos říci díky zákonům zachování. Ukážeme si to na dvou příkladech. V obou půjde o srážku dvou těles. Navíc, pro jednoduchost, v obou případech půjde o jednorozměrný pohyb.

Centrální ideálně pružná srážka



Zkoumejme ideálně pružnou srážku dvou koulí, které se pohybují ve směru osy x[53] a narazí do sebe centrálně – to znamená, že i po odrazu se budou pohybovat rovnoběžně s osou x [54]. Hmotnosti koulí značíme m_1 a m_2 Rychlosti koulí před srážkou označujeme $v^{\mathrm{I}}{}_1$ a $v^{\mathrm{I}}{}_2$. [55]

[45] V našem případě půjde o malá tělesa, která budeme pokládat za hmotné body. Nebudeme tedy popisovat složitější případy, kdy se třeba míč po necentrální srážce s kopačkou fotbalisty roztočí a získá „faleš“.

[46] V tomto příkladu jsme zanedbali odpor vzduchu; nebo si představte, že tento pokus děláme ve vakuu.

[47] … a se zvukem typu „plop“ zůstane rozplácnutý na podlaze.

[48] Ideálně pružné srážky ovšem nastávají v mikrosvětě, při srážkách elementárních částic. (Detaily a případná upřesnění tohoto tvrzení nechme pro tuto chvíli částicovým fyzikům.)

[49] Méně „militaristické“ příklady: Letící vidlička, která se zabodne do brambory. (Což zní stále ještě trochu nebezpečně.) Míček oblepený suchým zipem hozený na druhý takový míček nebo terč rovněž polepený suchým zipem. Nebo situace, kdy někomu skočíte na záda a chytnete se, abyste se neodrazili. Další příklady si jistě laskavý kreativní čtenář vymyslí sám…

[50] Míněno mechanická energie.

[51] Fakticky takto (zachováním hybnosti a mechanické energie) definujeme ideálně pružnou srážku.

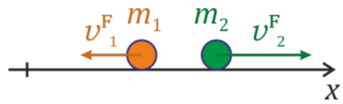
[52] Mechanická energie se ovšem nezachovává ani při obecné srážce; ideálně nepružnou srážku definujeme tak, že se při ní srážející se tělesa spojí a ani trochu se neodrazí, zůstanou při sobě.

[53] Nebo proti směru osy x, přesněji bychom tedy mohli říci, že jde o pohyb rovnoběžně s osou x.

[54] Tedy že se neodrazí nějak šikmo.

[55] Index „I“ nahoře u symbolu rychlosti znamená „iniciální“, tj. vyjadřuje, že jde o rychlosti před srážkou. Poznamenejme, že správnější by bylo psát $v^{\mathrm{I}}{}_{1x}$ a $v^{\mathrm{I}}{}_{2x}$, v zájmu jednoduchosti však zde index „x“ vynecháváme.

Rychlosti (přesněji: složky rychlostí) koulí po srážce označíme υ^{F}_1 a υ^{F}_2.[56]



Protože jde o ideálně pružnou srážku, platí při ní jak zákon zachování hybnosti, tak zákon zachování mechanické energie.[57] Ať už se během srážky děje cokoli, je tedy hybnost po srážce rovna hybnosti před srážkou,

$$m_1\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + m_2\upsilon^{\mathrm{I}}_2 \;=\; m_1\upsilon^{\mathrm{F}}_1 + m_2\upsilon^{\mathrm{F}}_2 \;, \tag{4.38}$$

a mechanická energie po srážce se rovná mechanické energii před srážkou[58],

$$\frac{1}{2}m_1\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_2\right)^2 \;=\; \frac{1}{2}m_1\left(\upsilon^{\mathrm{F}}_1\right)^2 + \frac{1}{2}m_2\left(\upsilon^{\mathrm{F}}_2\right)^2 \;. \tag{4.39}$$

Známe situaci před srážkou, tedy rychlosti υ^{I}_1 a υ^{I}_2.[59], chceme spočítat situaci po srážce, tedy neznámé rychlosti υ^{F}_1 a υ^{F}_2. Chceme-li určit dvě neznámé, potřebujeme dvě rovnice. Ty ale máme, jsou to rovnice (4.38) a (4.39).

Jediným problémem je, že v rovnici (4.39) jsou neznámé ve druhých mocninách. Pro řešení bude výhodné přepsat si (4.38) a (4.39) tak, že na jednu stranu dáme všechny členy vztahující se k prvnímu tělesu a na druhou stranu členy patřící k druhému tělesu. Hmotnosti již můžeme vytknout[60]. Dostaneme

$$m_1\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_1 - \upsilon^{\mathrm{F}}_1\right) \;=\; -m_2\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_2 - \upsilon^{\mathrm{F}}_2\right) \tag{4.40}$$

$$m_1\left(\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_1\right)^2 - \left(\upsilon^{\mathrm{F}}_1\right)^2\right) \;=\; -m_2\left(\left(\upsilon^{\mathrm{I}}_2\right)^2 - \left(\upsilon^{\mathrm{F}}_2\right)^2\right) \tag{4.41}$$

a vydělíme-li rovnici (4.41) rovnicí (4.40), vyjde velmi jednoduchý vztah

$$\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \upsilon^{\mathrm{F}}_1 \;=\; \upsilon^{\mathrm{I}}_2 + \upsilon^{\mathrm{F}}_2 \;. \tag{4.42}$$

Rovnice (4.38) a (4.42) už tvoří soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých. Chceme-li, můžeme je přepsat do trochu přehlednějšího tvaru, z něhož půjdou neznámé snadněji vypočítat:

$$\begin{aligned} m_1\upsilon^{\mathrm{F}}_1 + m_2\upsilon^{\mathrm{F}}_2 &= m_1\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + m_2\upsilon^{\mathrm{I}}_2 \\ \upsilon^{\mathrm{F}}_1 - \upsilon^{\mathrm{F}}_2 &= -\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \upsilon^{\mathrm{I}}_2 \end{aligned} \tag{4.43}$$

---

[56] Index „F“ zde znamená „finální“, tj. vyjadřuje, že jde o rychlosti po srážce. Opět by bylo správnější psát $\upsilon^{\mathrm{F}}_{1x}$ a $\upsilon^{\mathrm{F}}_{2x}$, ale to už by tu bylo trochu „přeindexováno“, takže index „*x*“ vynecháváme.

Ovšem pozor: Je třeba si uvědomit, že všechny rychlosti, které se zde vyskytují, jsou ***x*-ové složky rychlosti** a jako takové mohou být kladné i záporné, podle toho, zda se koule pohybuje doprava, ve směru osy *x*, nebo doleva, proti směru osy *x*. (Jindy, pokud nepíšeme u rychlostí indexy *x*, *y* atd., jde o velikosti rychlostí – zde na chvíli tuto konvenci opouštíme. Pokud vám to dělá problémy, připište si do všech vztahů k rychlostem ještě symbol „*x*“.)

[57] Znamená to, že soustavu obou těles bereme jako izolovanou soustavu.

[58] Do mechanické energie započítáváme **jen kinetickou energii**. Protože soustavu srážejících se těles bereme jako izolovanou, není zde žádná potenciální energie ve vnějších polích. (Žádná vnější pole nejsou, resp. jejich působení během srážky bereme za zanedbatelné.) Pokud se týká vnitřních sil mezi našimi body (resp. tělesy), uvažujeme, že působí jen během srážky, tedy typicky velmi krátce. Před srážkou a po srážce nepůsobí nebo je jejich působení zanedbatelné. (Dvě srážející se kulečníkové koule se samozřejmě také vzájemně přitahují gravitační silou, ale ta je oproti silám působícím při srážce tak malá, že ji neuvažujeme.)

[59] A samozřejmě hmotnosti obou těles, m_1 a m_2, ty zůstávají stejné před srážkou a po srážce. (Neuvažujeme, že by se část materiálu z prvního tělesa přenesla na druhé.)

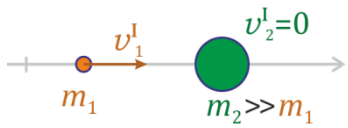
[60] A rovnici (4.39) samozřejmě vynásobíme dvěma.

Odtud už dostaneme[61] výsledek[62]

$$v^{\mathrm{F}}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_2$$
$$v^{\mathrm{F}}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_2 \qquad (4.44)$$

Podívejme se na některé **speciální případy**. Budeme při nich většinou uvažovat, že druhé těleso na začátku stojí, tj. $v^{\mathrm{I}}_2 = 0$.

1. Velmi lehké těleso naráží do těžkého

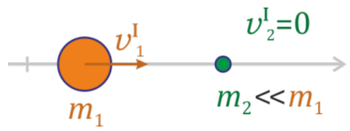


Je-li $v^{\mathrm{I}}_2 = 0$ a $m_1 \ll m_2$, plyne z (4.44)[63]

$$v^{\mathrm{F}}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 = -\frac{1-(m_1/m_2)}{1+(m_1/m_2)} v^{\mathrm{I}}_1 \doteq -v^{\mathrm{I}}_1$$
$$v^{\mathrm{F}}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 = \frac{2(m_1/m_2)}{1+(m_1/m_2)} v^{\mathrm{I}}_1 \doteq 0 \qquad (4.45)$$

To znamená, že těžší těleso se prakticky ani nepohne, zatímco lehčí těleso se odrazí do opačného směru a po odrazu se pohybuje stejně velkou rychlostí jako před srážkou. Příkladem může být odraz míče od stěny nebo odraz pingpongového míčku od stolu.[64]

2. Těžké těleso naráží do mnohem lehčího



Je-li $v^{\mathrm{I}}_2 = 0$ a $m_1 \gg m_2$, pak ze (4.44) dostáváme

$$v^{\mathrm{F}}_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 = \frac{1-(m_2/m_1)}{1+(m_2/m_1)} v^{\mathrm{I}}_1 \doteq v^{\mathrm{I}}_1$$
$$v^{\mathrm{F}}_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v^{\mathrm{I}}_1 = \frac{2}{1+(m_2/m_1)} v^{\mathrm{I}}_1 \doteq 2v^{\mathrm{I}}_1 \qquad (4.46)$$

První těleso tedy prakticky ani nezpomalí.[65] Zajímavé je, jak se po srážce chová druhé těleso. Bude se pohybovat dvakrát rychleji, než těleso, které do něj narazilo! Když třeba fotbalista kopne do stojícího míče, odkopne ho rychleji, než se pohybovala noha fotbalisty.[66]

---

[61] Třeba sčítací metodou: Druhou rovnici vynásobíme m_2 a obě rovnice sečteme…

[62] Všimněte si, že druhý řádek se liší od prvního jen záměnou indexů 1 a 2. To je logické – nikdo nám přece nemůže předepsat, kterou srážející se kouli označit jedničkou a kterou dvojkou.

[63] Při úpravě zanedbáváme podíl (m_1/m_2) oproti 1, protože je $(m_1/m_2) \ll 1$.

[64] Samozřejmě za předpokladu, že zanedbáme „ztráty energie“, tj. změnu mechanické energie na jiné formy energie.

[65] Pokud těžký kamion narazí na mouchu, opravdu ho to příliš nezpomalí. I když v tomto případě reálně asi nepůjde o ideálně pružnou srážku. Ale podobně tomu bude, pokud náklaďák narazí na pingpongový míček a v analogických případech.

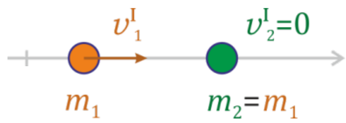
[66] Podobně, když do tenisového míčku narazí raketa nebo do golfového míčku golfová hůl. Pokud není hmotnost míčku zanedbatelná, nebude samozřejmě rychlost dvojnásobná, ve vztahu (4.46) vidíme i hodnotu před zanedbáním.

3. Obě tělesa jsou stejně těžká

Je-li $m_1 = m_2$, pak (4.44) dává[67]

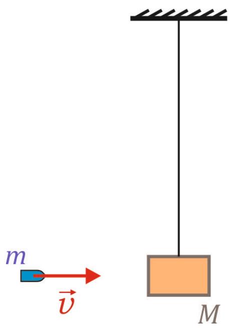
$$\begin{aligned} \upsilon^{\mathrm{F}}_1 &= \upsilon^{\mathrm{I}}_2 \\ \upsilon^{\mathrm{F}}_2 &= \upsilon^{\mathrm{I}}_1 \end{aligned} \tag{4.47}$$

To znamená, že tělesa si prostě vymění rychlosti. Pokud druhé těleso před srážkou stálo, $\upsilon^{\mathrm{I}}_2 = 0$, pak se první těleso po srážce zcela zastaví a pohybuje se pouze druhé těleso. Tento pokus si můžeme zkusit třeba se dvěma stejnými mincemi klouzajícími po hladkém stole. Podobně si předávají rychlost kuličky srážející se v „Newtonově houpačce“.[68] Každá kulička předává svou rychlost další kuličce, až nakonec odskočí ta poslední.



Pružné srážky mohou v některých případech vést k na první pohled překvapivým důsledkům. Jeden takový popíšeme v Dodatku 4.A.

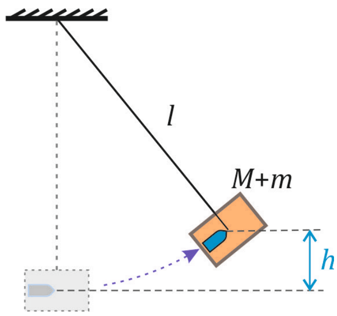
Balistické kyvadlo



Balistické kyvadlo slouží k určení rychlosti střely. Střela o hmotnosti m letící neznámou rychlostí υ se zaryje do kvádru o hmotnosti M, který visí na závěsu.

Kvádr se zarytou střelou samozřejmě vykývne do strany a tím také trochu do výšky. Při maximálním rozkyvu se dostane do výšky h nad svou původní polohu; viz obrázek vpravo dole.

Ze známých hmotností, známé délky závěsu l a výšky h, do níž kvádr vykývne, lze spočítat původní rychlost střely.



Na první pohled se může zdát, že to je velmi jednoduché. Střela měla před srážkou kinetickou energii $\frac{1}{2}m\upsilon^2$. Poté, co kvádr se zarytou střelou vykývne do výšky h, zvýší se jeho potenciální energie o $(M+m)gh$.[69] Takže stačí napsat, že se kinetická energie přeměnila na potenciální, $\frac{1}{2}m\upsilon^2 = (M+m)gh$, a odtud už plyne $\upsilon = \sqrt{\frac{M+m}{m}2gh}$. Jednoduché, že? Jenže ***úplně špatně***.

---

[67] Podrobnější výpočet: $\upsilon^{\mathrm{F}}_1 = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}\upsilon^{\mathrm{I}}_2 = \frac{m-m}{m+m}\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \frac{2m}{m+m}\upsilon^{\mathrm{I}}_2 = \upsilon^{\mathrm{I}}_2$,
$\upsilon^{\mathrm{F}}_2 = \frac{2m_1}{m_1+m_2}\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}\upsilon^{\mathrm{I}}_2 = \frac{2m}{m+m}\upsilon^{\mathrm{I}}_1 + \frac{m-m}{m+m}\upsilon^{\mathrm{I}}_2 = \upsilon^{\mathrm{I}}_1$.

[68] Hračka prodávaná v prodejnách se suvenýry a jim podobných. (Pokud ji náhodou neznáte pod tímto názvem, zeptejte se Googlu, na dotaz „Newtonova houpačka“ vrátí přes 14 tisíc odkazů a samozřejmě spoustu fotografií.

[69] Kinetickou energii v okamžiku maximální výchylky žádnou nemá, protože je v tomto okamžiku v klidu.

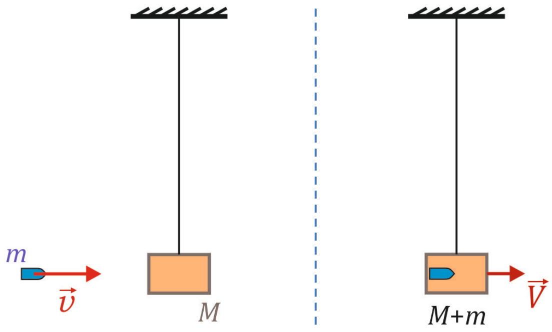
Pokud bychom výše uvedený vztah použili k výpočtu rychlosti střely při reálném pokusu[70], dostali bychom nerealisticky malou rychlost – například méně než deset metrů za sekundu.[71] Kde je chyba?

Chyba byla spoléhat na zákon zachování mechanické energie. Když se střela zavrtává do kvádru, drtí a deformuje materiál uvnitř, tento materiál i střela samotná se ohřívají – a na to se spotřebuje značné množství energie. Tato srážka je tedy **ideálně nepružná** a mechanická energie se při ní *nezachovává*.

Jak tedy problém vyřešit?

I při ideálně nepružné srážce se **zachovává hybnost**.

Hybnost střely před srážkou je $m\vec{v}$, hybnost kvádru se zarytou střelou po srážce je $(M+m)\vec{V}$; přitom $\vec{V}$ je rychlost kvádru se střelou po srážce. Situaci těsně po srážce ukazuje obrázek vpravo. Platí tedy

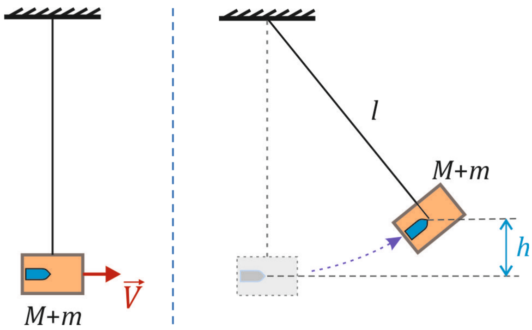


$$m\vec{v} = (M+m)\vec{V},$$

z čehož

$$\vec{V} = \frac{m}{M+m}\vec{v} \quad . \tag{4.48}$$

Po srážce už můžeme použít zákon zachování mechanické energie[72], tedy přeměnu kinetické energie na potenciální:



$$\tfrac{1}{2}(M+m)V^2 = (M+m)gh$$

Odsud plyne $V^2 = 2gh$ a po dosazení (4.48)

$$\left(\frac{m}{M+m}\right)^2 v^2 = 2gh, \text{ čili}$$

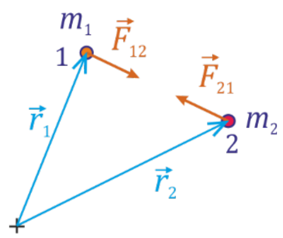
$$v = \frac{M+m}{m}\sqrt{2gh} \quad . \tag{4.49}$$

Ve skutečném pokusu se výška, do níž kyvadlo vykývne, počítá z toho, o kolik vykývne do strany. Tento výpočet a další komentáře k balistickému kyvadlu najdete v Dodatku 4.B.

[70] Například při měření rychlosti broku ze vzduchovky, což je často prováděný demonstrační experiment.
[71] Takové střele by utekl Usain Bolt a nejen on. Také by taková střela dostřelila jen pár metrů, než by dopadla na zem.
[72] Při vykývnutí kvádru už nepředpokládáme žádné ztráty mechanické energie.

4.6 Problém dvou těles

Uvažujme dvě tělesa, která na sebe působí přitažlivými silami – například dvě složky dvojhvězdy nebo systém Země – Měsíc.[73] Tělesa zde budeme brát jako hmotné body: bod 1 přitom přitahuje bod 2 silou $\vec{F}_{21}$, sám je bodem 2 přitahován silou $\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$. Žádné další síly zde nepůsobí. Speciálně to znamená, že zde nejsou žádné vnější síly působící na soustavu „zvenku“.[74]



Naším cílem je vyřešit, jak se obě tělesa (resp. hmotné body) pohybují. Tato úloha je známa pod názvem **problém dvou těles**.

V této kapitole problém dvou těles nevyřešíme do konce, ale *zjednodušíme*. Přesněji řečeno, rozložíme ho, resp. převedeme ho na dva jednodušší problémy.[75]

Pohyb každého z daných hmotných bodů je dán druhým Newtonovým zákonem:

$$\begin{aligned} m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} &= \vec{F}_{12} \\ m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} &= \vec{F}_{21} \end{aligned} \qquad (4.50)$$

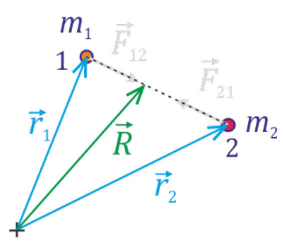
Toto tedy jsou ***pohybové rovnice*** naší soustavy hmotných bodů.[76]

Jek tyto rovnice řešit? Po chvíli úvah by nás mohlo napadnout je sečíst. Dostaneme

$$\underbrace{m_1 \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} + m_2 \frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2}}_{\frac{d^2}{dt^2}\left(m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2\right)} = \vec{F}_{12} + \underbrace{\vec{F}_{21}}_{-\vec{F}_{12}} = 0 \qquad (4.51)$$

Na pravé straně dostáváme nulu díky platnosti principu akce a reakce. Levá strana nám po úpravě připomíná část vztahu (4.5) pro polohu hmotného středu. Zavedeme tedy vektor $\vec{R}$ označující polohu hmotného středu:

$$\vec{R} = \frac{m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2}{m_1 + m_2} \qquad (4.52)$$



Ze (4.51) pak plyne[77]

$$\boxed{\frac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0} \qquad (4.53)$$

[73] Mohlo by jít taky o již výše zmíněné bolaso, dvě závaží spojená gumovým lankem apod. Obecně by síly mohly být i odpudivé, například v případě dvou nabitých těles stejného znaménka; my zde ale většinou budeme hovořit o dvou tělesech, která se přitahují.

[74] V terminologii, kterou jsme dříve zavedli, to znamená, že soustava je *izolovaná*.

[75] Pro případ těles přitahujících se podle Newtonova gravitačního zákona ho pak dořešíme v jedné z následujících kapitol.

[76] Jsou to dvě vektorové rovnice, tedy celkem šest rovnic pro šest souřadnic popisujících polohu obou bodů.

[77] Ze (4.52) je $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1 + m_2)\vec{R}$, takže (4.51) je $(m_1 + m_2)\dfrac{d^2\vec{R}}{dt^2} = 0$.

To znamená, že **hmotný střed soustavy se pohybuje rovnoměrně přímočaře**. Vidíme to již ze vztahu (4.53) [78]; také můžeme (4.53) dvakrát integrovat podle času a dostaneme $\vec{R}(t) = \vec{v}_0 t + \vec{R}_0$. [79]

Popravdě řečeno, tímto výsledkem nemusíme být nijak zvlášť překvapeni. Již výše jsme odvodili, že pro pohyb hmotného středu soustavy hmotných bodů platí rovnice (4.24), tedy $m\dfrac{d\vec{v}_S}{dt} = \vec{F}^E$. V našem případě jsou vnější síly nulové, $\vec{F}^E = 0$, takže rychlost hmotného středu musí být konstantní.

Víme tedy, jak se pohybuje hmotný střed soustavy. Ale jak se pohybují jednotlivé body? Nebo alespoň, jak se pohybují body vůči sobě navzájem?

Zatím jsme rovnice (4.50) sčítali; zkusme je nyní odečíst. Ale ještě předtím je vydělíme příslušnými hmotnostmi, tedy budeme odečítat rovnice

$$\frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2} = \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12}$$

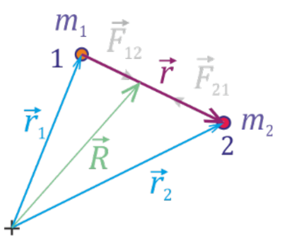
$$\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21}$$

Dostaneme (odečtením první rovnice od druhé):

$$\underbrace{\frac{d^2\vec{r}_2}{dt^2} - \frac{d^2\vec{r}_1}{dt^2}}_{\frac{d^2}{dt^2}(\vec{r}_2-\vec{r}_1)} = \frac{1}{m_2}\vec{F}_{21} - \frac{1}{m_1}\vec{F}_{12} = \left(\frac{1}{m_2}+\frac{1}{m_1}\right)\vec{F}_{21} \tag{4.54}$$

Teď se již nabízí označit rozdíl vektorů $\vec{r}_2 - \vec{r}_1$ zvláštním symbolem:

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \tag{4.55}$$



Jak ukazuje i obrázek, vektor $\vec{r}$ spojuje body 1 a 2. Právě časový vývoj vektoru $\vec{r}$, tj. $\vec{r} = \vec{r}(t)$, určuje, jak se oba body vzájemně pohybují. (Například, jak kolem sebe obíhají složky dvojhvězdy nebo jak Měsíc obíhá kolem Země.)

Pravá strana rovnice (4.54) naznačuje, že by bylo vhodné zavést ještě jednu veličinu. Bývá označována jako μ, definuje se vztahem

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \tag{4.56}$$

a nazývá se **redukovaná hmotnost**. Rovnici (4.54) teď jde zapsat jako $\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \dfrac{1}{\mu}\vec{F}_{21}$, tedy

$$\boxed{\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}_{21}\,.} \tag{4.57}$$

---

[78] Na levé straně (4.53) je zrychlení hmotného středu; vidíme, že je nulové.

[79] $\vec{v}_0$ a $\vec{R}_0$ jsou konstanty, které určíme z počátečních podmínek.

Rovnice (4.57) formálně vypadá jako druhý Newtonův zákon popisující pohyb hmotného bodu o hmotnosti μ pod vlivem síly $\vec{F}_{21}$. Vidíme, že jsme problém dvou těles převedli, resp. rozdělili na dva problémy:

1) na problém pohybu hmotného středu (ten byl jednoduše řešitelný) a
2) na problém pohybu (fiktivního) bodu o hmotnosti μ v silovém poli síly $\vec{F}_{21}$.

Celá situace možná bude o něco názornější, když půjde o dva body, které se přitahují gravitačně podle Newtonova gravitačního zákona:

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{m_1 m_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{4.58}$$

Z definice redukované hmotnosti (4.56) totiž plyne $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1}+\frac{1}{m_2} = \frac{m_1+m_2}{m_1 m_2}$, čili

$$\boxed{\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}} \tag{4.59}$$

Označíme-li navíc součet hmotností obou bodů

$$M = m_1 + m_2 \ ,$$

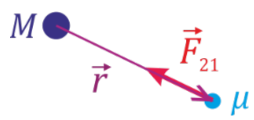
je $m_1 m_2 = M\mu$. Sílu (4.58), kterou se body přitahují, tedy můžeme přepsat na tvar

$$\vec{F}_{21} = -G\frac{M\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \tag{4.60}$$

a rovnici (4.57) pro pohyb fiktivního hmotného bodu na tvar

$$\mu\frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -G\frac{M\mu}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} \ . \tag{4.61}$$

To opravdu odpovídá pohybu hmotného bodu o hmotnosti μ přitahovaného nehybným silovým centrem o hmotnosti M. Vyřešíme-li tedy tento problém – **problém pohybu hmotného bodu v poli centrální síly** (kdy silové centrum je nehybné) – budeme mít vyřešen i problém dvou těles.



A jak z pohybu hmotného středu a z časového vývoje vektoru $\vec{r}$ určíme pohyb obou bodů 1 a 2? Snadno. Vztahy (4.52) a (4.55) prostě vezmeme jako soustavu dvou rovnic pro neznámé polohové vektory $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$.[80] Jejich řešením je[81]

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \ , \qquad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \ . \tag{4.62}$$

[80] Chceme-li mít neznámé na levých stranách, přepíšeme rovnice jako $m_1\vec{r}_1 + m_2\vec{r}_2 = (m_1+m_2)\vec{R}$ a $\vec{r}_2 - \vec{r}_1 = \vec{r}$.

[81] Aneb, jak se obvykle píše: „čtenář snadno nahlédne, že…“. Zde ale opravdu řešení necháváme na laskavém čtenáři, už proto, abychom nevnucovali konkrétní způsob, jak řešit soustavu dvou rovnic o dvou neznámých. ☺ Ostatně, i čtenář, kterého náhle posedla naprostá lenost a nechuť řešit soustavu dvou rovnic, se může dosazením přesvědčit, že (4.62) řešením opravdu jsou.

4.7 Pohyb rakety

Naše odvození týkající se pohybu rakety začneme úvahou a myšlenkovými pokusy. Jsme-li v klidu[82] a chceme se začít pohybovat, jak to děláme?

Stojíme-li na zemi, tak se prostě odstrčíme nohou od země. Pokud plaveme v bazénu, „odstrkáváme se“ rukama a nohama od vody. Ale co když bychom se vznášeli v kosmickém prostoru a neměli se od čeho odstrčit?[83]

Zřejmě jedinou možností je „odstrčit se“ od něčeho, co máme u sebe, prostě to odhodit. Kdybychom měli u sebe pytel brambor, odhazovali bychom jednotlivé brambory, stále jedním směrem. A vždy by nás to trochu „odšťouchlo“ do opačného směru, postupně bychom získávali rychlost.

Na přesně stejném principu funguje raketový pohon. Raketa ovšem neodhazuje brambory, ale výtokové plyny z raketových motorů. Pomocí naší „bramborové analogie“ však budeme moci lehce spočítat například tah raketových motorů, tedy sílu, jakou motory urychlují raketu. Základní odvození přitom může být na zcela středoškolské úrovni, bez derivací a integrálů.

Nejjednodušší odvození

Uvažujme raketu, která je v čase $t = 0$ v klidu, tedy má rychlost $v = 0$. Za krátký časový interval Δt její raketové motory spálí palivo o hmotnosti Δm a vyvrhnou je dozadu rychlostí v_r.[84] Raketa tím získá rychlost Δv. V našich úvahách budeme potřebovat ještě hmotnost rakety, označíme ji jako M.[85] Situace v čase 0 a v čase Δt ukazuje obrázek.

Na soustavu raketa + výtokové plyny nepůsobí žádné vnější síly, takže se musí zachovávat celková hybnost. Na začátku je hybnost nulová[86]. Na konci, v čase $t = \Delta t$, je hybnost (ve směru doprava na obrázku) $M\,\Delta v - \Delta m\, v_r$. Zákon zachování hybnosti tedy dává

$$0 = M\,\Delta v - \Delta m\, v_r \ , \tag{4.63}$$

čili

$$M\,\Delta v = \Delta m\, v_r \ . \tag{4.64}$$

[82] Samozřejmě, klid je jen relativní. Při našich úvahách nám proto půjde o klid nebo pohyb vůči nějaké zvolené inerciální soustavě. (Pro úvodní úvahy si myslete třeba soustavu spojenou s povrchem země.)

[83] Představte si, že se třeba vznášíte uvnitř Mezinárodní kosmické stanice, nebo se vznášíte ve skafandru poblíž této stanice. V pozemských podmínkách si můžete představit, že jste na ledové ploše z tak hladkého a tvrdého ledu, že se od něj nejde odrazit, zaseknout do něj brusli ani nic podobného.

[84] v_r je tedy rychlost výtokových plynů vůči raketě. (Jinými slovy, jejich *relativní* rychlost vůči raketě. Proto jsme u této rychlosti užili symbol r. Jde ale jen o naše interní označení, např. ve skriptech doc. Havránka *Klasická mechanika I* se pro rychlost výtokových plynů užívá symbol u.)

[85] Přesněji řečeno, M bude hmotnost rakety v čase $t = \Delta t$. (Hmotnost rakety s časem klesá, právě o vyvržené výtokové plyny.)

[86] Raketa i část paliva později vyvrženého ve formě výtokových plynů jsou v klidu.

Vydělíme-li vztah (4.64) intervalem Δt,

$$M\,\Delta v = \Delta m\, v_r \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{\Delta t} \quad , \tag{4.65}$$

dostaneme

$$M\,\frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\, v_r \;. \tag{4.66}$$

Poměr $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ je ale zrychlení rakety. To znamená, že výsledek (4.66) můžeme psát jako

$$M\,a = \frac{\Delta m}{\Delta t}\, v_r \;. \tag{4.67}$$

Tento vztah má stejný tvar jako druhý Newtonův zákon. Člen na pravé straně tedy můžeme interpretovat jako sílu, která urychluje raketu, tedy jako **tah raketového motoru**:

$$\boxed{F_{\text{raket.motoru}} = \frac{\Delta m}{\Delta t}\, v_r \;.} \tag{4.68}$$

Vidíme, že tah raketového motoru je tím větší, čím více paliva se za sekundu spálí a vyvrhne tryskami motorů a také tím větší, čím větší je výtoková rychlost plynů.[87]

Obecnější odvození: Meščerského rovnice

Jak tomu je, když se raketa již pohybuje a navíc na ni působí nějaká vnější síla?

To, že se raketa již pohybuje nějakou rychlostí, na výsledku, který jsme odvodili, nic nemění.[88] (Potvrdí nám to i následující odvození.) Jak ale započítat působící vnější sílu? Buď ji k síle raketového motoru jednoduše přičteme[89], nebo celé odvození provedeme podrobněji.

Předpokládejme, že v nějakém čase t se raketa hmotnosti M i s „kouskem paliva“ o hmotnosti Δm (které následně spálí a vyvrhne) pohybuje rychlostí $\vec{v}$.[90] Na raketu působí také vnější síla $\vec{F}$. V čase „o kousek“ větším, tj. v čase $t+\Delta t$ se rychlost rakety změnila o $\Delta\vec{v}$, tedy na $\vec{v}+\Delta\vec{v}$; výtokové plyny mají rychlost $\vec{v}+\vec{v}_r$.[91] Situaci v obou časech ukazuje obrázek.

Pro odvození využijeme toho, že ***změna hybnosti rovná se impulsu působící síly***, viz (4.27).

---

[87] Δm je množství paliva spáleného a vyvrženého za dobu Δt, takže $\frac{\Delta m}{\Delta t}$ je rychlost spalování paliva (v jednotkách kg/s).

[88] Vždy totiž situaci můžeme popsat v inerciálním systému, v němž raketa v čase t právě stojí; zrychlení rakety a tah raketového motoru tedy budou stále dány vztahy (4.67) a (4.68).

[89] A z „fyzikálního názoru“ usoudíme, že „takhle to určitě bude správně“.

[90] Vztahy už budeme zapisovat ve vektorové formě.

[91] Připomeňme, že výtokové plyny mají rychlost $\vec{v}_r$ *vůči raketě*. Jejich rychlost v systému, v němž situaci popisujeme, tedy dostaneme složením rychlosti $\vec{v}_r$ a rychlosti rakety $\vec{v}$.

Celková hybnost v čase t je $M\vec{v}+\Delta m\vec{v}$; hybnost v čase $t+\Delta t$ je $M\left(\vec{v}+\Delta\vec{v}\right)+\Delta m\left(\vec{v}+\vec{v}_r\right)$. Změna hybnosti je tedy

$$\Delta\vec{P} = M\left(\vec{v}+\Delta\vec{v}\right)+\Delta m\left(\vec{v}+\vec{v}_r\right)-\left(M\vec{v}+\Delta m\vec{v}\right) = M\,\Delta\vec{v}+\Delta m\vec{v}_r \tag{4.69}$$

Tato změna se rovná impulsu síly $\vec{F}\,\Delta t$:

$$M\,\Delta\vec{v}+\Delta m\vec{v}_r = \vec{F}\,\Delta t\ ,^{92} \tag{4.70}$$

odkud po vydělení Δt dostaneme[93]

$$M\frac{\Delta\vec{v}}{\Delta t} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}_r+\vec{F}\ . \tag{4.71}$$

První člen na pravé straně zjevně představuje tah raketového motoru:

$$\vec{F}_{\text{raket.motoru}} = -\frac{\Delta m}{\Delta t}\,\vec{v}_r \tag{4.72}$$

Síla, kterou motor působí na raketu, má přirozeně opačný směr než je rychlost výtokových plynů vůči raketě.

Vztahy (4.71) a (4.72) ještě upravíme; budeme v nich uvádět *změnu hmotnosti rakety* ΔM.[94] Tato změna hmotnosti je $\Delta M=-\Delta m$.[95] Sílu raketového motoru tedy můžeme napsat jako $\vec{F}_{\text{raket.motoru}} = \dfrac{\Delta M}{\Delta t}\,\vec{v}_r$.[96]

Navíc ještě přejdeme k limitě $\Delta t\to 0$, tedy od podílů typu $\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}$ k derivacím $\dfrac{d\vec{v}}{dt}$ apod. Rovnice (4.71) pro pohyb rakety pak získá tvar

$$\boxed{M\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dM}{dt}\vec{v}_r+\vec{F}\ .} \tag{4.73}$$

V tomto tvaru je známa jako **Meščerského rovnice**.

Vnější síla $\vec{F}$ může být například gravitační síla, kterou musí raketa překonat, aby se vznesla. Tah raketového motoru je co do velikosti roven $\left|\dfrac{dM}{dt}\right|v_r$. Aby byl tah raketového motoru dostatečně velký, musí motor spotřebovat hodně paliva – viz následující příklad.

---

[92] Zde už pro stručnost nepíšeme symbol $\doteq$ zdůrazňující, že rovnost je jen přibližná. Nakonec totiž budeme limitovat $\Delta t\to 0$ a z přibližných rovností se stanou přesné.

[93] Tedy, po vydělení dostaneme $M\dfrac{\Delta\vec{v}}{\Delta t}+\dfrac{\Delta m}{\Delta t}\vec{v}_r = \vec{F}$, pak ještě musíme převést jeden člen na pravou stranu – ale takto jednoduché úpravy už v tomto textu postupně přestaneme explicite uvádět.

[94] Je $\Delta M = M(t+\Delta t)-M(t)$. Přitom $M(t)$ je hmotnost rakety v čase t, včetně paliva, které má v tuto chvíli v sobě.

[95] Když raketa vyvrhne výtokové plyny o hmotnosti Δm, její hmotnost se o tuto hodnotu zmenší.

[96] Stále samozřejmě platí, že síla působí v opačném směru, než kam míří $\vec{v}_r$; je to proto, že $\dfrac{\Delta M}{\Delta t}<0$.

Příklad 1: raketový batoh

Představte si, jak by bylo krásné, mít na zádech malý batoh, v něm raketový motor[97] a moci si volně poletovat, jak se nám zlíbí. Takovéto zařízení bylo skutečně vyvinuto.[98] Proč se tedy už běžně nepoužívá?

Spočtěme si, jakou by musel mít takový raketový batoh spotřebu paliva. Rychlost výtokových plynů u chemických raketových motorů je několik km/s.[99] Počítejme tedy pro náš raketový batoh třeba s rychlostí 3 km/s. Kolik musí spotřebovat paliva, aby nás zvedl? Řekněme, že i s batohem máme hmotnost 100 kg.[100] Raketový motor musí tedy vyvinout tah minimálně 1000 N, aby nás uzvedl. Z výše uvedeného vztahu (4.68) nebo dalších pro tah motoru je tedy jasné, že musí být $\frac{\Delta m}{\Delta t}\cdot 3000\ \mathrm{m/s} \geq 1000\ \mathrm{N} = 1000\ \mathrm{kg\cdot m/s^2}$, tj. $\frac{\Delta m}{\Delta t} \geq \frac{1}{3}\ \mathrm{kg/s}$. To znamená, že za 3 sekundy musí motor spálit 1 kg paliva, za 30 sekund 10 kg paliva… Zkrátka, dlouho si s takovým batohem nezalétáme.

Tento příklad nám pomáhá pochopit, proč rakety musí spotřebovávat tak enormní množství paliva. Omezená rychlost výtokových plynů se musí kompenzovat tím, že jich za sekundu vytéká značné množství.

Příklad 2: fotonová raketa

Tah raketového motoru je úměrný rychlosti výtokových plynů, resp. rychlosti čehokoli, co motor vymršťuje z rakety. Proč tedy nevyužít nejvyšší známou rychlost v přírodě – rychlost světla – a místo výtokových plynů nevymršťovat prostě fotony? To je ve zkratce princip (zatím hypotetické) fotonové rakety.

Což o to, rychlost „vymršťovaných fotonů“ je velká, asi $3\cdot 10^8$ m/s. Ovšem musíme vymršťovat dostatečnou hmotnost. Kdybychom chtěli tah jen 1000 N, jako v případě výše diskutovaného raketového batohu, muselo by být $\frac{\Delta m}{\Delta t} \geq \frac{1}{3}\cdot 10^{-5}\ \mathrm{kg/s}$. To není mnoho, jen něco přes tři miligramy za sekundu![101] Problém je v tom, že by muselo jít o 3 miligramy *fotonů*. A této hmotnosti podle Einsteinova vztahu $E = mc^2$ odpovídá energie asi $3\cdot 10^{11}$ J. Tato energie je přitom potřeba za sekundu; potřebný výkon by tedy byl $3\cdot 10^{11}$ W = 300 GW. To je výkon tří set temelínských jaderných bloků.[102] Už je nám tedy jasné, proč když si třeba i velmi silnou baterkou posvítíme pod nohy, nás to pozorovatelně nenadzvedává…

[97] Možná raději dva, s tryskami trochu dále od těla, abychom si nesežehli kalhoty. ☺

[98] Na internetu najdete odkazy na „raketový batoh“ případně „jetpack“. (Ovšem pozor, pod názvem jetpack najdete i konstrukci, v níž nejsou raketové motory, ale motory vrtulové, to je něco jiného, spíš takový „přerostlý dron“, ten by nelétal mimo atmosféru; skutečný raketový batoh s raketovým motorem ano.)

[99] Na internetu lze najít informace, že u velkých raketových motorů typu Saturn V je to až přes 4 km/s; u raket na pevná paliva jsou prý výtokové rychlosti do 2,5 km/s.

[100] Omlouvám se štíhlejším jedincům, ale jde jen o řádový odhad. (Určitě nevážíte i s batohem 10 kg, to by šlo o raketový batoh pro nějakého domácího mazlíčka.) Kdo jste hubenější, můžete zkrátka do batohu natankovat víc paliva…

[101] Také už se chystáte, že si doma postavíte fotonový raketový batoh?

[102] Ach jo. Tak ten fotonový raketový batoh stavět nebudeme… (Představte si ten účet za elektřinu! ☺)

Ciolkovského rovnice

Pokud se laik dočte, že rychlost výtokových plynů z raketových motorů je jen 4 km/s, může se podivit, jak může raketa dosáhnout první kosmické rychlosti (asi 8 km/s) a rychlostí vyšších, které jsou potřebné pro lety k Měsíci a k planetám.[103] Odpověď je vlastně jasná už z výše uvedených vztahů – Meščerského rovnice určuje zrychlení, a když bude zrychlený pohyb trvat dostatečně dlouho, může být výsledná rychlost i velmi vysoká. Pojďme se však na celý problém podívat podrobněji.

Uvažujme raketu o počáteční hmotnosti M_0, která se na počátku (v nějakém čase t_0) pohybuje rychlostí υ_0. Na raketu přitom nepůsobí žádná vnější síla, $\vec{F}=0$. Ze vztahu (4.70) pro změnu hybnosti, $M\,\Delta\vec{\upsilon}+\Delta m\,\vec{\upsilon}_r = \vec{F}\,\Delta t$, tedy plyne $M\,\Delta\vec{\upsilon}=-\Delta m\,\vec{\upsilon}_r$ a odtud dále[104]

$$M\,\Delta\vec{\upsilon}=\Delta M\,\vec{\upsilon}_r\ . \tag{4.74}$$

Děje-li se pohyb rakety ve směru osy *x*, je $\vec{\upsilon}=(\upsilon,0,0)$ a $\vec{\upsilon}_r=(-\upsilon_r,0,0)$, takže pro *x*-ovou složku rychlosti rakety je

$$M\,\Delta\upsilon=-\Delta M\,\upsilon_r\ . \tag{4.75}$$

Odtud plyne, že přírůstek rychlosti rakety při malé změně hmotnosti ΔM je

$$\Delta\upsilon=-\upsilon_r\,\frac{\Delta M}{M}\ . \tag{4.76}$$

Letí-li raketa déle, je nutné všechny příspěvky sečíst, a to v limitě „nekonečně malých příspěvků“. Podobně, jako už jsme to dělali dříve u jiných veličin, vede takový součet k určitému integrálu:

$$\underbrace{\int_{\upsilon_0}^{\upsilon_k} d\upsilon}_{[\upsilon]_{\upsilon_0}^{\upsilon_k}=\upsilon_k-\upsilon_0} = -\upsilon_r\int_{M_0}^{M_k}\frac{dM}{M} = -\upsilon_r\left[\ln M\right]_{M_0}^{M_k} = -\upsilon_r\left(\ln M_k-\ln M_0\right)\ . \tag{4.77}$$

Po snadné úpravě pak dostaneme výsledek

$$\boxed{\upsilon_k-\upsilon_0=\ \upsilon_r\,\ln\frac{M_0}{M_k}\ .} \tag{4.78}$$

známý jako **Ciolkovského rovnice.**

Zde υ_k je koncová rychlost a M_k koncová hmotnost rakety. Je vidět, že raketa může dosáhnout rychlosti i několikanásobně převyšující rychlost výtokových plynů υ_r - ovšem tento poměr se musí „dohnat“ faktorem $\ln\left(M_0/M_k\right)$. A právě kvůli tomu musí při startu naprostou většinu hmotnosti rakety tvořit palivo.[105]

[103] Takovéto dotazy lze najít na internetu.
[104] Protože $\Delta M=-\Delta m$.
[105] Má-li být $\upsilon_k-\upsilon_0$ dvakrát větší než υ_r, musí být $M_0/M_k=e^2\doteq 7{,}4$. V praxi se samozřejmě používají vícestupňové rakety, ovšem při startu ze Země zase působí gravitační síla… - do těchto aspektů kosmických letů ovšem v našem textu už nepůjdeme.

Shrnutí

Celkové veličiny pro soustavu hmotných bodů:

Celková hybnost: $\vec{P} = \vec{p}_1 + \vec{p}_2 + \cdots + \vec{p}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$

Celkový moment hybnosti: $\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \cdots + \vec{L}_N = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{p}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$

Celková kinetická energie: $T = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 + \cdots + \frac{1}{2} m_N v_N^2 = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$

Celková potenciální energie: $V = \sum_{i=1}^{N} V_i^E + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} V_{ij}$

Hmotný střed: $\vec{r}_S = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2 + \ldots + m_N \vec{r}_N}{m_1 + m_2 + \ldots + m_N} = \dfrac{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}$

Těžiště: v homogenním gravitačním poli je: $\vec{M} = \vec{r}_S \times (m\vec{g})$, $V = m g z_S$, kde $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$

První věta impulsová: $\dfrac{d\vec{P}}{dt} = \vec{F}^E$ **Zákon zachování hybnosti** (pro izol. soustavu): $\vec{P} = \text{konst.}$

Druhá věta impulsová: $\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}^E$ **Zákon zachování momentu hybnosti** (pro izol.s.): $\vec{L} = \text{konst.}$

Srážky:

Ideálně pružné: Zachovává se hybnost a mechanická energie. (Příklad: centrální pružná srážka dvou koulí.)

Ideálně nepružné: Obě tělesa se spojí, zachovává se jen hybnost. (Příklad: balistické kyvadlo)

Problém dvou těles:

Převede se na dva problémy: pohyb hmotného středu $\vec{R} = \dfrac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2}$ (je rovnoměrný přímočarý) a vzájemný pohyb obou bodů, $\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1$; ten je stejný jako pohyb bodu s redukovanou hmotností $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ v poli nehybného silového centra.

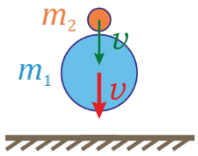
Pohyb rakety:

$M \dfrac{d\vec{v}}{dt} = \dfrac{dM}{dt} \vec{v}_r + \vec{F}$ (Meščerského rovnice), tah raketového motoru je $\left| \dfrac{dM}{dt} \right| v_r$

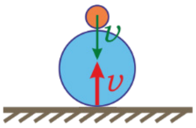
$v_k - v_0 = v_r \ln \dfrac{M_0}{M_k}$ (Ciolkovského rovnice)

Dodatek 4.A: Dva míčky na sobě se odrážejí od země

Následující experiment bývá k vidění v některých science centrech, ale můžeme ho udělat i doma na stole. Potřebujeme dva míčky, jeden těžší, třeba „hopík“, a jeden lehčí, například pingpongový míček.[106] Lehčí míček dáme nad těžší a oba míčky pustíme, tak aby padaly na pevnou vodorovnou překážku, třeba právě na stůl. Po odrazu vidíme, že horní míček odskočí do výrazně větší výšky, než ze které padal.[107] Jak je to možné?



Popis srážky si rozdělíme na dvě části. Předpokládejme, že nejprve dopadne na stůl dolní míček, odrazí se a pak teprve do něj shora narazí horní míček.[108]



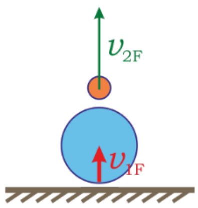
Po odrazu dolního míčku od stolu tedy situace vypadá tak, jak ukazuje obrázek vlevo. Dolní míček se pohybuje nahoru stejnou rychlostí, jakou dopadl na stůl[109]. Na něj shora dopadá horní míček. Ze vztahů (4.44) pro ideálně pružnou srážku dostaneme pro rychlost horního míčku po odrazu [110]

$$v_2^{\mathrm{F}} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v_1^{\mathrm{I}} + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} v_2^{\mathrm{I}} = \frac{2m_1}{m_1+m_2} v + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2} (-v) = \frac{3m_1-m_2}{m_1+m_2} v \; . \tag{4.A.1}$$

Pro $m_1 \gg m_2$ pak dostáváme výslednou rychlost horního míčku

$$v_2^{\mathrm{F}} \doteq 3\,v \; . \tag{4.A.2}$$

To znamená, že horní míček (ten lehčí) je nakonec „vymrštěn“ nahoru rychlostí až třikrát vyšší, než byla rychlost jeho dopadu.[111] [112] Třikrát vyšší počáteční rychlost při vrhu svislém vzhůru přitom znamená *devětkrát* větší výšku, do které vyletí.



Reálně samozřejmě odrazy nejsou ideálně pružné, horní míček nemá zanedbatelně malou hmotnost apod. – ovšem i tak může vyletět značně vysoko. A my teď už chápeme, proč.

[106] Je vhodné, když je první míček výrazně těžší než druhý.

[107] V science centrech mívají míčky resp. koule na vodící tyčce, která zajišťuje, že jsou prakticky přesně nad sebou. Horní koule pak leckdy vyletí až ke stropu. Pokud pokus provedeme s míčky položenými na sobě, ne vždy se povede – někdy je horní míček příliš vychýlen a odskočí spíš do strany. Ale pokud jsou míčky dost přesně nad sebou, opravdu ten horní vyskočí vysoko.

[108] Představujeme si tedy, že mezi dolním a horním míčkem je malá mezera. U reálných těles samozřejmě budou detaily srážky složitější, srážejícími se míčky nebo koulemi se bude šířit deformační vlna atd. Nám zde ale jde o co nejjednodušší model celého děje – a rozložení srážky na dvě dílčí srážky jako takový jednoduchý model dobře funguje.

[109] Srážku míčku se stolem bereme jako dokonale pružnou.

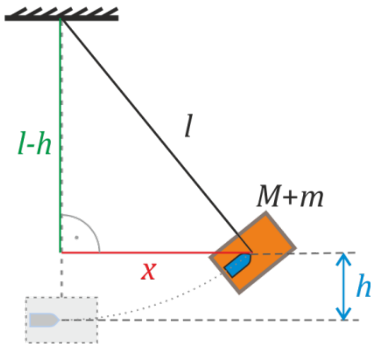
[110] Kladný směr osy bereme směrem vzhůru, proto je počáteční složka rychlosti horního míčku (míčku 2) záporná, $v_2^I = -v$

[111] Podívejte se na situaci z pozice dolního míčku: ten horní proti němu letí rychlostí $2v$. Protože je velmi lehký, odrazí se od spodního míče a po odrazu se vůči němu bude vzdalovat zase rychlostí $2v$. (Je to, jako by se srazil se stěnou.) A protože dolní míč se pohybuje nahoru rychlostí v vůči stolu, je rychlost horního míčku vůči stolu $v + 2v = 3v$.

[112] Pokud hmotnost horního míčku není zcela zanedbatelná, je samozřejmě jeho výsledná rychlost o něco nižší, dostaneme ji z (4.A.1). Například pro poměr hmotností 1:10 je výsledná rychlost $v_2^{\mathrm{F}} \doteq 2{,}6\,v$.

Dodatek 4.B: Ještě k balistickému kyvadlu

Při skutečném pokusu s balistickým kyvadlem je obvykle výška, o níž kyvadlo stoupne, příliš malá a těžko by se měřila. Měříme proto posun kyvadla ve vodorovném směru, na obrázku je označen jako x. V pravoúhlém trojúhelníku vyznačeném na obrázku platí Pythagorova věta



$$l^2 = (l-h)^2 + x^2 \ .$$

Při další úpravě využijeme toho, že $h \ll l$:

$$l^2 = (l-h)^2 + x^2 = l^2 - 2lh + h^2 + x^2 \doteq l^2 - 2lh + x^2$$

Odtud $h \doteq \dfrac{x^2}{2l}$. Po dosazení do (4.49) dostáváme nakonec pro rychlost střely výsledek

$$\upsilon = \frac{M+m}{m}\, x \sqrt{\frac{g}{l}} \ .^{113} \qquad (4.B.1)$$

Je zajímavé, podívat se, jaká část původní kinetické energie střely zůstává ve formě mechanické energie a jaká se „ztratí" na deformaci kvádru, zahřátí materiálu atd.

Ze vztahu $\vec{V} = \dfrac{m}{M+m}\vec{\upsilon}$ [114] plyne, že kinetická energie kvádru po srážce je

$$\tfrac{1}{2}(M+m)\,V^2 = \tfrac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\,\upsilon\right)^2 = \frac{m}{M+m}\ \tfrac{1}{2}m\upsilon^2$$

Poměr $\dfrac{m}{M+m}$ je ovšem obvykle velmi malý, takže naprostá většina původní kinetické energie střely se promění na jiné formy energie, než mechanickou.[115]

[113] Při pokusu v posluchárně F1 má balistické kyvadlo parametry $M = 625$ g, $l = 3{,}8$ m, hmotnost broku je $m = 0{,}5$ g a kyvadlo vykývne do strany asi o $x \doteq 9\ \mathrm{cm} = 0{,}09\ \mathrm{m}$. Z (4.B.1) pak vychází rychlost broku asi $180\ \mathrm{m/s}$.

[114] Jde o vztah (4.43) odvozený ze zákona zachování hybnosti při srážce.

[115] S trochou nadsázky můžeme říci, že drtivá většina původní mechanické energie se spotřebuje na drcení materiálu kvádru. Při konkrétním pokusu, jehož parametry byly uvedeny v poznámce výše, se na jiné formy energie přemění přes 99,9 % původní energie! Tedy méně než promile původní energie se nakonec využije na zvednutí kvádru o výšku h. Je tedy jasné, proč je výpočet, který by vyšel z předpokladu „počáteční kinetická energie střely se rovná přírůstku potenciální energie balistického kyvadla" tak špatný (přímo „drtivě špatný"). Nepočítá se ztrátami, které jsou v tomto případě přes 99,9 %.