Kinematika a dynamika tuhého tělesa

Postupme v našem popisu světa zase o kousek blíž k realitě. Soustava hmotných bodů jistě vystihuje řadu situací lépe než jeden hmotný bod[1], ovšem přece jen – ve světě kolem nás vidíme především *tělesa*.[2] Pojďme se tedy věnovat tomu, jak mechanika popisuje tělesa.

Situaci si ovšem nejprve opět trochu zjednodušíme a zidealizujeme. Nebudeme zatím popisovat tělesa typu „gumových hadů“, plastových sáčků nebo gumiček do vlasů, tedy tělesa, která lze lehce ohýbat, natahovat a deformovat. Samozřejmě, každé těleso se při zatížení nějak deformuje[3], ale tyto deformace budeme zanedbávat.

V této kapitole tedy budeme popisovat tělesa, o nichž budeme předpokládat, že se nedeformují vůbec. Nazýváme je **tuhá tělesa**. Přirozeně, opět jde o model, idealizaci, o abstrakci – ale o idealizaci velmi užitečnou. Žádné absolutně tuhé těleso na světě sice neexistuje, ale chování řady reálných těles v mnoha situacích lze popisem pomocí tuhého tělesa velmi dobře vystihnout.[4]

5.1 Tuhá soustava hmotných bodů

V předchozí kapitole jsme zavedli spoustu důležitých veličin a vztahů pro soustavu hmotných bodů. Při přechodu k tuhému tělesu nám proto může být soustava hmotných bodů dobrým výchozím bodem. Ovšem musí jít o soustavu nějak „podobnou“ tuhému tělesu.[5]

V jakém smyslu může být soustava tuhému tělesu podobná? Skutečnost, že těleso je tuhé, můžeme vystihnout konstatováním, že

vzdálenosti mezi body tuhého tělesa se nemění.

A teď už je vhodná soustava hmotných bodů nasnadě. Budeme jí říkat tuhá soustava hmotných bodů.

Tuhá soustava hmotných bodů je soustava, v níž se vzdálenosti mezi jednotlivými hmotnými body nemění.[6]

Podívejme se teď, jak charakterizovat polohu takové soustavy bodů.

[1] Systém Země-Měsíc nebo dvě závaží spojená lankem prostě jedním hmotným bodem nepopíšeme.

[2] Stůl, židli, šroubovák, bochník chleba, notebook, dětskou káču… (Movitější běžně vidí třeba zlatou cihlu – ta by byla dobrým příkladem tuhého tělesa, ale pro většinu učitelů možná trochu vzdáleným každodennímu životu.)

[3] I pevný stůl se lehce prohne, když si na něj sedneme.

[4] Masivní stůl nebo silný šroubovák jsou dobrým příkladem. U bochníku chleba už popis pomocí tuhého tělesa nemusí vyhovovat, záleží na tom, jak velká síla působí (a jak je bochník čerstvý nebo zatvrdlý). Na velikosti sil ostatně záleží vždy: i odolný drahý notebook asi nevydrží, když ho přejede tank, i silný šroubovák se dá ohnout. Takovéto extrémnější situace zde nebudeme uvažovat.
Záleží samozřejmě i na tom, jak velkých deformací si všímáme. Pokud bychom byli schopni měřit prohnutí stolu o velikosti desítek nanometrů, tak asi zjistíme, že se prohnul, i když na něj položíme jen ten chleba nebo notebook. Když budeme popisovat předměty jako tuhá tělesa, tak to znamená, že jsme se rozhodli jejich deformace zanedbávat, že budou „pod naší rozlišovací schopností“.

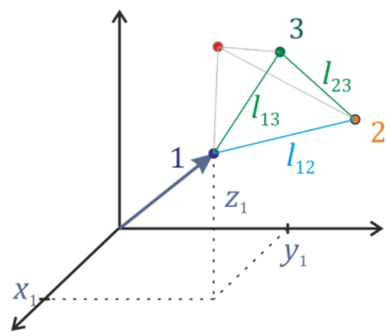
[5] Hrst malých oblázků hozených do prostoru nebo sluneční soustava by zjevně nebyly pro tuhé těleso dobrým výchozím modelem.

[6] Tj. nemění se ani nějak „samovolně“ s časem ani pod působením sil (jak vnějších sil působících na soustavu, tak sil mezi body soustavy). Je jasné, že opět jde o idealizaci, ale znovu o idealizaci užitečnou. Tuhou soustavu hmotných bodů si můžeme představit jako hmotné body spojené pevnými tyčkami, ale tyčkami, které mají zanedbatelnou hmotnost.

Stupně volnosti

Kolik čísel potřebujeme, abychom popsali polohu soustavy hmotných bodů? Tento počet [7] označujeme jako **počet stupňů volnosti.**

V případě obecné soustavy N hmotných bodů potřebujeme 3N čísel: (x_i, y_i, z_i) pro každý bod.[8] Pro tuhou soustavu hmotných bodů je to ale mnohem méně. Pojďme popisovat polohu hmotných bodů počínaje od prvního:

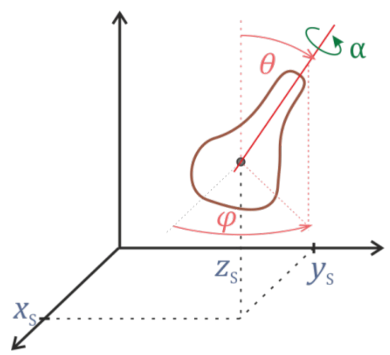


- Pro první hmotný bod potřebujeme **tři** čísla: x_1, y_1, z_1.
- Pro druhý hmotný bod by to byla tři čísla, ale ta nejsou nezávislá, musí splnit podmínku, že vzdálenost prvního a druhého bodu je pevně daná[9] – nezávisle tedy můžeme zadat jen **dvě** čísla.
- Pro třetí bod by to byla opět tři čísla, ale ta musí splňovat už dvě podmínky (třetí bod je pevně vzdálen od prvního i druhého bodu) – nezávislé je tedy už jen **jedno** číslo.
- Pro čtvrtý a další body už nemůžeme nezávisle zadat nic, jejich poloha je pevně určena vzdálenostmi od prvních třech bodů

Dohromady stačí určit 3 + 2 + 1 = 6 čísel. Jinými slovy,

tuhá soustava hmotných bodů má šest stupňů volnosti.

K počtu stupňů volnosti se můžeme dopočítat i jinak:



- Určíme polohu vybraného bodu tuhé soustavy hmotných bodů ev. tuhého tělesa. (Může jím být např. hmotný střed.) Na to potřebujeme **tři** čísla: x, y a z.
- Dále určíme směr, jaký má nějaká osa pevně spojená se soustavou bodů ev. s tělesem. Na to stačí už jen **dvě** čísla.[10]
- Jediné, co teď s tělesem resp. tuhou soustavou bodů můžeme udělat, je otočit ho o nějaký úhel[11] – to je poslední, už jen **jedno** číslo, kterým finálně zadáme polohu.

Dohromady opět 3 + 2 + 1, čili šest stupňů volnosti. Jasně vidíme, že pro tuhé těleso platí totéž, co pro tuhou soustavu hmotných bodů:

Tuhé těleso má šest stupňů volnosti.

[7] Tedy počet čísel resp. parametrů, které je nutno zadat, abychom jednoznačně určili polohu soustavy hmotných bodů.

[8] To znamená, že obecná soustava hmotných bodů má $3\,N$ stupňů volnosti.

[9] $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}=l_{12}$

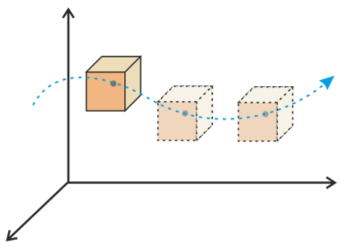
[10] Například polární souřadnice osy θ a φ. (Názorně si to můžeme představit na glóbusu: Směr osy procházející středem glóbusu určují zeměpisná šířka a zeměpisná délka.)

[11] Na obrázku jsme ho označili jako α, otočení jsme tam vyznačili spíše jen symbolicky.

Translační a rotační pohyb

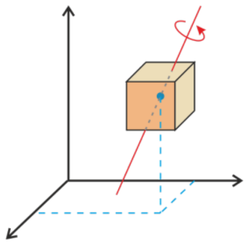
Obecný pohyb, ať už tuhé soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa, můžeme rozložit na dva druhy pohybu: translační (tedy posuvný) a rotační (tj. otáčivý).

Translační pohyb je takový, při němž osy spojené s tělesem nemění svůj směr.[12] Prostě a jednoduše řečeno, translační pohyb je takový, při kterém se těleso neotáčí. Jeho pohyb v tomto případě můžeme reprezentovat pohybem jediného bodu tělesa – můžeme si vybrat třeba hmotný střed. Vlastně tak těleso nahrazujeme jedním bodem, v němž si představujeme soustředěnou všechny jeho hmotnost. Kinematice a dynamice takového pohybu jsme se již věnovali v prvních třech kapitolách, takže vlastně „máme hotovo".



Rotační pohyb je pohyb, při němž je jeden bod tělesa pevný.[13] [14] To znamená, že rotace je vždy rotací kolem nějakého bodu.[15]

Rotační pohyb je právě tím, co je na kinematice a dynamice pohybu tuhých těles zajímavé. Obecný popis rotace těles je ovšem trochu náročnější záležitostí. My se v proto této kapitole omezíme na nejjednodušší situaci – na rotaci tělesa kolem osy, která je pevná jak v prostoru, tak vůči tělesu.



Nejdříve se ale podíváme, jak vůbec popsat rozložení látky v tuhém tělese a na to, jak pro tuhé těleso počítat veličiny jako celková hybnost, celkový moment hybnosti a další.

[12] Safra, takhle vyjádřeno to zní hrozně formálně. A to jsme ještě nedodali „…nemění svůj směr vůči soustavě, v níž pohyb popisujeme; soustavu přitom volíme inerciální."

[13] To znamená, že se tento bod nepohybuje v soustavě, v níž pracujeme – třeba vůči stolu, na němž děláme pokusy nebo vůči Zemi apod.

[14] Ještě upřesnění: Ten pevný bod nemusí být nutně bodem *uvnitř* tělesa. Třeba pneumatika se může otáčet kolem svého středu, kde ale žádný materiál pneumatiky není. (Jde ale o bod, od něhož mají body pneumatiky neměnné vzdálenosti, jako by k němu byly připevněny „pevnými nehmotnými tyčkami".)

[15] Matematicky se dá dokázat, že rotace kolem pevného bodu je v každém okamžiku rotací kolem nějaké osy – jenže ta osa se může pohybovat (tj. natáčet) jak v prostoru, tak vůči tělesu. Je vidět, že obecně není popis rotace tělesa úplně jednoduchou záležitostí. My se proto zde budeme věnovat jen jeho jednodušším aspektům.

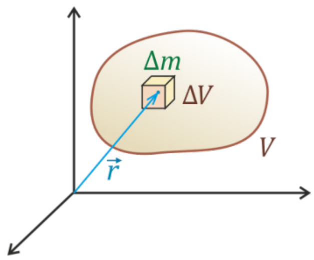
5.2 Od soustavy hmotných bodů k tuhému tělesu

Zatímco v soustavě hmotných bodů je hmotnost soustředěna do míst, kde se nacházejí jednotlivé body, v tuhém tělese si ji představujeme „spojitě rozprostřenou“ v celém objemu tělesa.[16]

Látka v tělese ovšem nemusí být rozprostřena všude stejně. Podobně, jako v soustavě hmotných bodů může být jeden bod těžší a jiný lehčí[17], může být i v tělese soustředěno na jednom místě víc hmoty[18] než na jiném. To znamená, že v různých místech může mít těleso různou hustotu.

Hustota

Zkušení učitelé tvrdí, že pojem „hustota“ patří na úrovni základní školy k těm obtížným a hůře pochopitelným. Je to zřejmě dáno tím, že slovo „hustý“ se v běžném životě používá k označení kvalit, které nemají s fyzikální veličinou hustota nic společného.[19]



Fyzikálně je hustota dána poměrem $\dfrac{\text{hmotnost}}{\text{objem}}$. Pro celé těleso takto určíme jeho průměrnou hustotu. Není-li těleso homogenní, můžeme se ptát, jaká je jeho hustota lokálně, v okolí nějakého bodu. Pokud si v okolí daného bodu „vyřízneme“ malý objem ΔV, jak to ukazuje obrázek, a hmotnost daného kousku materiálu je Δm, je průměrná hustota tohoto kousku látky

$$\bar{\rho}(\vec{r}) = \frac{\Delta m}{\Delta V}\,. \tag{5.1}$$

Chceme-li znát hustotu opravdu lokálně, „v daném bodě“, musíme zřejmě objem ΔV zmenšovat, teoreticky až k nule. Definici hustoty látky v daném bodě $\vec{r}$ bychom tedy formálně matematicky mohli zapsat jako

$$\rho(\vec{r}) = \lim_{\Delta V \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}\,. \tag{5.2}$$

Musíme si ovšem uvědomit, že zde nejde o limitu funkce jedné reálné proměnné, spíše zde symbolem limity označujeme zmenšování objemu ΔV tak, abychom se dostali „k jedinému bodu“.

---

[16] Volně bychom mohli říct, že je tam látka „rozmazána“. Znamená to, že v rámci této abstrakce ignorujeme skutečnou částicovou strukturu látek.

[17] Správně bychom měli říkat hmotnější a méně hmotný, ale snad zde méně formální jazyk nevadí a je nám jasné, oč jde. Konec konců, kdybychom danou problematiku vysvětlovali laikům, tak také budeme používat spíš termíny běžného jazyka; slovům „lehčí“ a „těžší“ každý porozumí. (Na druhou stranu je jasné, že dospět k používání přesnější terminologie má smysl. V beztížném stavu rozhodně nepoznáme hmotnější předmět tak, že by nám tlačil na ruku větší silou. V tomto textu záměrně používáme jak volnější jazyk a styl vyjadřování, tak přesnější formulace – s nadějí, že laskavého čtenáře neurazí ani jedna varianta.)

[18] Opět zde termín (tentokrát termín „hmota“) používáme v trochu vágním a nepřesném smyslu, tak jak se to v běžné řeči často děje. Příslovečný laskavý čtenář si samozřejmě může termíny „látka“, „hmota“ a „hmotnost“ a jejich souvislosti vyhledat v nějakém výkladovém slovníku. Precizovat zde v tomto učebním textu nějaký až filosofický výklad daných pojmů, když nám jde o zavedení známého pojmu hustota, by bylo trochu jako jít „s kanónem na vrabce“. (Pokud si to čtenáři tohoto textu vyžádají, třeba zde k tomuto tématu časem přidáme nějaký dodatek.)

[19] Když při vaření kaše „houstne“, tak se nezvětšuje její hustota, ale viskozita. Podobně když je med „hustý“, znamená to, že se hůře míchá, má tedy opět větší viskozitu. Na druhou stranu, v určitém období oblíbený výraz mladé generace „to je hustý“ neměl souvislost ani s hustotou ani s viskozitou…

Navíc zde opravdu pracujeme s (idealizovanou) představou, že látka je v tělese „spojitě rozmazána“. Kdybychom danou limitu prováděli ve skutečné látce, pak na rozměrech řádu 10^{-15} m bychom se dostali do situace, kdy bychom se buď strefili do vnitřku atomového jádra a naměřili bychom jadernou hustotu řádu 10^{17} kg/m^3 [20], nebo někam do elektronového obalu, kde by byla hustota mnohem menší, než hustota běžných látek[21]. Takto měřená hustota látky by se tedy v různých bodech lišila až o dvacet řádů, což je hodně daleko od naší představy „spojitě rozložené hmoty“. Reálně tedy, pokud nám jde o makroskopická tělesa, místo formální definice hustoty (5.2) pracujeme s průměrnou hustotou a objem ΔV volíme tak velký, aby zahrnoval „dostatečně velký kousek látky“, aby se neprojevovala částicová struktura.[22] A hustotu jako funkci polohy bereme „vyhlazenou“ či „vystředovanou“, aby šlo uvnitř tělesa o spojitou funkci.

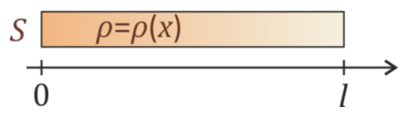
Pro další úvahy a odvození se nám bude hodit jasný důsledek definice hustoty (5.1):

$$\Delta m \doteq \rho(\vec{r})\,\Delta V \; .^{23} \tag{5.3}$$

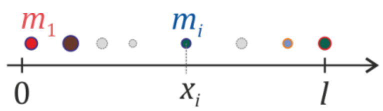
Jak pracovat se spojitým rozložením látky, aneb od součtů k integrálům

U soustavy hmotných bodů jsme uměli vypočítat nejrůznější veličiny pomocí součtu přes všechny body soustavy.[24] Jak tomu bude pro těleso, kde je látka rozložena spojitě?

Princip si odvodíme na příkladu.[25] Předpokládejme, že máme tyč délky l, v níž hustota materiálu závisí na tom, jak daleko jsme od jednoho konce.[26] Podél tyče budeme měřit souřadnici x, takže hustota bude funkcí této souřadnice: $\rho = \rho(x)$. Příčný průřez tyče bude S.



Jak spočítat například polohu hmotného středu tyče?[27] Kdyby šlo o soustavu hmotných bodů, které by byly rozloženy na ose x v místech x_i a měly hmotnosti m_i, pak bychom prostě použili známý vzorec pro souřadnici hmotného středu:



$$x_S = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_N x_N}{m} = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i x_i \tag{5.4}$$

kde m je celková hmotnost soustavy hmotných bodů.

[20] Uvádí se, že hustota je přibližně stejná pro všechna atomová jádra a činí asi $2{,}3\cdot 10^{17}$ kg/m^3.

[21] Většina hmotnosti atomu je totiž soustředěna v jádře. Nukleony jsou skoro 2000× těžší než elektrony a až na vodík je jich v jádře nejméně dvakrát víc než elektronů v obalu. Z toho můžeme odhadnout, že průměrná hustota v elektronovém obalu je více než o tři řády nižší než průměrná hustota látky.

[22] Čili reálně, aby obsahoval třeba několik desítek molekul.

[23] Hustotu látky zde již v souladu s předchozími úvahami chápeme jako spojitou (a „vyhlazenou“) funkci polohy, takže v tomto modelu se v limitě $\Delta V \to 0$ daná přibližná rovnost stane rovností přesnou.

[24] Šlo například o celkovou hmotnost, hybnost, moment hybnosti apod. Suma přes všechny body se vyskytovala i ve vztahu pro polohu hmotného středu.

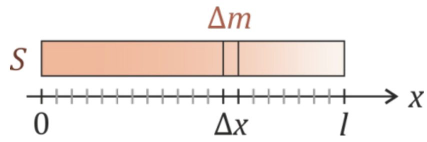
[25] A aby to bylo jednoduché, zvolíme jednorozměrný příklad.

[26] Tyč může být třeba ze slitiny, jejíž složení se mění, jak postupujeme podél tyče. Jiným příkladem by mohla být „štangle“ salámu, který by ve výrobně dělali tak, že na jednom konci by byl „uherák“ a plynule by přecházel třeba v gothajský salám na druhém konci. (Tohle určitě nikde nedělají, ale jako „praštěný příklad“ je to snad dostatečně názorné.)

[27] Pro homogenní tyč by byl samozřejmě uprostřed tyče, jenže naše tyč není homogenní.

Jak „vybudovat“ analogický vzorec pro tuhé těleso? Zkusme „rozsekat“ tyč na malé kousky délky Δx.[28] Objem kousku materiálu je $\Delta V = S\,\Delta x$, jeho hmotnost, viz (5.3),

$$\Delta m \doteq \rho(x)\,\Delta V = \rho(x)\,S\,\Delta x \qquad (5.5)$$



V analogii se vztahem (5.4) pro soustavu hmotných bodů tedy můžeme polohu hmotného středu určit jako[29]

$$x_S \doteq \frac{1}{m} \sum_{\substack{\text{"přes}\\ \text{všechny}\\ \text{kousky"}}} \left(\rho(x_{\text{kousku}})\,S\,\Delta x\right) x_{\text{kousku}} = \frac{1}{m} \sum_{\substack{\text{"přes}\\ \text{všechny}\\ \text{kousky"}}} \rho(x_{\text{kousku}})\,x_{\text{kousku}}\,S\,\Delta x \quad . \qquad (5.6)$$

Na každém kousku konečné délky ale ještě není hustota přesně konstantní, proto píšeme vzorec jako přibližný. Je ale jasné, jak ho zpřesníme: Tyč budeme krájet na stále tenčí a tenčí plátky, tedy budeme dělat limitu $\Delta x \to 0$. Jak už jsme to viděli výše, při tomto postupu přejde suma v integrál, takže výsledek bude

$$x_S = \frac{1}{m} \int_0^l \rho(x)\,x\,S\,dx \quad . \qquad (5.7)$$

Jak tento výsledek zobecnit na jiná tělesa než tyče?

Všimněme si, že v integrálu v (5.7) máme výraz $S\,dx$. Ten můžeme chápat jako „nekonečně malou“ analogii výrazu pro kousek objemu: $S\,\Delta x = \Delta V$. Je tedy přirozené označit $S\,dx = dV$ a chápat tak integrál v (5.7) jako integrál přes celý objem tyče: $\int_0^l \rho(x)\,x\,S\,dx = \int_{\text{přes objem tyče}} \rho(x)\,x\,dV$.

Dospěli jsme tedy k novému typu integrálu. Mohli bychom mu říkat „integrál přes objem“; ve skutečnosti se používá název **objemový integrál**.

V tuto chvíli pro nás není příliš podstatné, jak se objemový integrál spočte „technicky“, tedy jak vyčíslíme jeho hodnotu.[30] Podstatné je, abychom měli alespoň přibližnou názornou představu, že objemový integrál je „součet přes všechny kousky objemu tělesa“.[31]

Vztah (5.7) pro polohu hmotného středu tyče zapsaný pomocí objemového integrálu má tvar

$$x_S = \frac{1}{m} \int_V \rho(x)\,x\,dV \quad . \qquad (5.8)$$

Místo toho, abychom u integrálu psali „přes objem tyče“, napíše se prostě symbol objemu a míní se tím celé těleso. Z kontextu ovšem musí být jasné, o jaké těleso se jedná.

---

[28] Podobně jsme postupovali v kapitole 3 při odvozování impulsu síly. Tam jsme dělili na kousky časový interval, tady dělíme délku l. (Třeba „štangli“ salámu na jednotlivá kolečka.)

[29] Šedě vyznačená část vzorce odpovídá pořadí, v němž jsou jednotlivé členy ve vztahu (5.4), na konci je pořadí členů přehozeno, aby odpovídalo následující úpravě.

[30] Stručné informace o objemovém integrálu uvádí Dodatek 5.A; počítat objemové integrály se naučíte v předmětu *Matematické metody fyziky*, po matematické stránce si pojetí objemového integrálu upřesníte v matematické analýze.

[31] O něco přesněji: „součet hodnot nějaké funkce (závisející na místě) násobené kouskem objemu přes všechny kousky objemu tělesa“.

Získaný výsledek jde přirozeně zobecnit na libovolná tělesa. Ve vektorovém zápisu má pak vzorec pro polohu hmotného středu tvar:

$$\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \rho(\vec{r})\,\vec{r}\; dV \;. \tag{5.9}$$

A jak spočítat hmotnost tělesa? Stačí sečíst „kousky hmotnosti“ $\rho(\vec{r})\,\Delta V$, což provedeme objemovým integrálem

$$m = \int_V \rho(\vec{r})\, dV \;. \tag{5.10}$$

Obecně je tedy přechod od vztahů pro soustavu hmotných bodů ke vzorcům platným v případě tuhých těles jednoduchý: Místo sumy je integrál přes objem a místo hmotností jednotlivých bodů člen $\rho(\vec{r})\,dV$. Příklady:

Veličina	Soustava hmotných bodů	Těleso	Těleso (zkrácený zápis[32])
Hybnost	$\vec{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$	$\vec{P} = \int_V \rho(\vec{r})\, \vec{v}(\vec{r})\, dV$	$\vec{P} = \int_V \rho\, \vec{v}\, dV$
Moment hybnosti	$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times (m_i \vec{v}_i)$	$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times \left(\rho(\vec{r})\vec{v}(\vec{r})\right) dV$	$\vec{L} = \int_V \vec{r} \times (\rho \vec{v})\, dV$
Kinetická energie	$T = \sum_{i=1}^{N} \frac{1}{2} m_i v_i^2$	$T = \int_V \frac{1}{2} \rho(\vec{r})\, v^2(\vec{r})\, dV$	$T = \int_V \frac{1}{2} \rho\, v^2 dV$

Ve „zkráceném zápisu“ samozřejmě můžeme napsat i vztahy (5.9) a (5.10) pro polohu hmotného středu a celkovou hmotnost:

$$\boxed{\vec{r}_S = \frac{1}{m} \int_V \rho\, \vec{r}\; dV \;, \qquad m = \int_V \rho\, dV}$$

Poznámka: Občas se lze setkat i s dalším způsobem zápisu, kdy se místo $\rho\,dV$ v integrálu píše symbol dm,[33] ale ten v našem učebním textu nebudeme používat.

[32] „Zkrácený zápis“ není žádný oficiální název, jen naše momentální označení – prostě nevypisujeme u všech veličin jejich závislost na místě, ta je jasná z kontextu. Bez těch opakujících se závorek $(\vec{r})$ jsou vztahy přece jen přehlednější a lépe se pamatují.

[33] Například vztah pro hybnost tělesa má v tomto zápise tvar $\vec{P} = \int_m \vec{v}\; dm$, vztah pro hmotnost $m = \int_m dm$. Tento zápis může mít velmi dobrý matematický smysl (vzpomeňte si na něj, až budete v matematice brát Lebesgueův integrál), ale momentálně by pro nás asi byl příliš formální a ne úplně srozumitelný.
A při výpočtech nám v ničem nepomůže. Pokud se s ním setkáte, tak si jej prostě „přeložte“ tak, že místo dm budete psát $\rho\,dV$ a místo symbolu m pod integrálem (který značí, že máme projít veškerou hmotu tělesa) napište prostě V (které značí, že máme projít celý jeho objem).

5.3 Rovnováha tuhého tělesa

Než přejdeme k dynamice, tedy k pohybu tuhých těles, podívejme se na jejich statiku. Kdy je tuhé těleso v rovnováze?

Je-li v rovnováze, zjevně musí být v klidu. To znamená, že jeho hybnost i moment hybnosti musí být rovny nule. Tím pádem jsou rovny nule i jejich časové derivace – a podle první a druhé věty impulsové[34] tedy musí být rovny nule i celková vnější síla a celkový moment vnějších sil:

$$\text{Tuhé těleso je v rovnováze} \Rightarrow \begin{array}{l} \vec{P}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{P}}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{F}^E=0 \\ \vec{L}=0 \quad \Rightarrow \quad \dfrac{d\vec{L}}{dt}=0 \quad \Rightarrow \quad \vec{M}^E=0 \end{array} \tag{5.11}$$

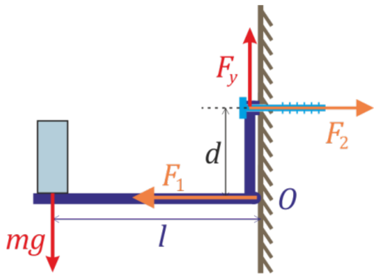
Naopak platí, že pokud jsou celková vnější síla a celkový moment vnějších sil rovny nule, nemění se[35] s časem hybnost a moment hybnosti tělesa. Jestliže tedy těleso bylo na začátku v klidu (a tedy mělo $\vec{P}=0$ a $\vec{L}=0$), v klidu i nadále zůstane. V tomto smyslu jsou podmínky

$$\boxed{\vec{F}^E=0, \quad \vec{M}^E=0} \tag{5.12}$$

pro rovnováhu tuhého tělesa nutné i postačující.

Příklad 1: Jak přišroubovat poličku

Představte si, že máte poličku, která se spodním koncem opírá o zeď a její horní konec je šroubem[36] přichycen ke zdi. Šroub je ve výšce d nad místem, kde se polička opírá o zeď. Ve vzdálenosti l od zdi je na poličce položen nějaký předmět, který ji tlačí dolů silou mg. (Hmotnost poličky zanedbáváme.) Jak velkou silou je šroub držící poličku vytrhován ze zdi?[37]



Z podmínky, že celková síla je nulová, plyne, že

$$-mg+F_y=0 \quad \Rightarrow \quad F_y=mg \qquad a \qquad -F_1+F_2=0 \quad \Rightarrow \quad F_1=F_2 \ .$$

Moment sil budeme počítat vůči bodu, v němž se polička opírá o zeď (v obrázku je to bod O). Zajímá nás přitom jen složka momentu mířící „ven z obrázku". Velikost této složky $\vec{M}$ je

$$mg\,l-F_2\,d=0 \ . \tag{5.13}$$

---

[34] První a druhou větu impulsovou jsme odvodili pro soustavu hmotných bodů, ale platí i pro tuhé těleso. (Na názorné úrovni nám to potvrdí úvaha, při níž bychom si tuhé těleso představili rozdělené na velmi mnoho velmi malých kousků, které by na sebe působily silami stejně, jako body v soustavě hmotných bodů.) První a druhou větu impulsovou budeme při práci s tuhým tělesem běžně využívat.

[35] Díky první a druhé větě impulsové.

[36] Resp. spíše alespoň dvěma šrouby ve stejné výšce; obrázek představuje řez poličkou.

[37] To je docela praktická úloha, jak potvrdí každý, komu někdy hmoždinka příliš nedržela ve zdi. Představte si, že na poličku dáte vzácnou čínskou vázu dynastie Ming. (Jak víme z literatury, to není úplně levná záležitost; a potvrdí to i internet. Teď jsem vygooglil, že nejdražší porcelánový pohárek dynastie Ming byl v roce 2014 vydražen za 36 milionů dolarů.) No dobrá, řekněme, že máte na poličce něco o trochu levnějšího, ale i kdyby to byl plyšák za 36 korun, stejně nechcete, aby se vám polička i s tímto skvostem zřítila.

Výsledek, který potřebujeme, dostaneme právě z podmínky, že moment vnějších sil na poličku působících je nulový. Z (5.13) okamžitě plyne

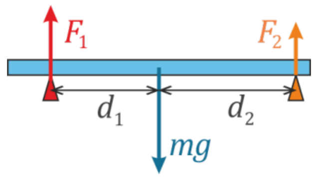
$$F_2 = mg\frac{l}{d} \tag{5.14}$$ [38]

Podobně můžete počítat dlouhou řadu dalších úloh týkajících se třeba žebříků opřených o zeď a dalších situací. Ovšem pozor, nemyslete si, že naznačeným postupem vyřešíte vše!

Varování: když rovnic není dost (aneb pozor na staticky neurčité úlohy)

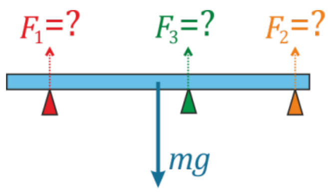
Podmínky rovnováhy (5.12) jsou soustavou dvou vektorových rovnic, tedy šesti rovnic pro složky sil. Je-li složek sil, které máme určit, víc, pak to z daných rovnic prostě nejde.[39]

Pokud problém, který řešíme, není třírozměrný, ale je omezen na dvě nebo třeba jen na jednu dimenzi, je počet rovnic ještě menší. Příkladem může být tyč, která je podepřená ve dvou bodech, jak ukazuje obrázek.



Pro určení sil F_1 a F_2 máme k dispozici dvě rovnice: pro celkovou složku síly ve svislém směru ($F_1 + F_2 - mg = 0$) a pro moment sil ($-d_1F_1 + d_2F_2 = 0$, když moment počítáme vůči středu tyče). Z těchto rovnic můžeme obě síly jednoznačně určit.[40]

Ovšem když stejnou tyč podepřeme ve třech bodech, situace se radikálně změní. Máme pouze dvě rovnice pro tři síly – takováto soustava nemá jednoznačné řešení.[41] Můžeme se o tom přesvědčit pokusem, když tyč zavěsíme na tři siloměry. Podle toho, jak o trochu zvedneme nebo snížíme závěsy siloměrů, ukážou různé hodnoty.



Inženýři takové problémy nazývají **staticky neurčité úlohy** – a ty výše uvedeným způsobem opravdu řešit nejdou.

Samozřejmě, ve skutečných konstrukcích například mostů nebo konstrukcích strojů se vždy zatížení nějak konkrétně rozloží. Takže ve skutečném světě každá taková úloha jednoznačné řešení má. Jak je to možné? Prostě proto, že reálné konstrukce nejsou tuhá tělesa! Například výše zmíněná tyč položená na tři podpěry se reálně o kousek prohne. Je tedy potřeba počítat s vlastnostmi materiálu tyče, s její tloušťkou, vzít v úvahu, zda jsou všechny podpěry ve stejné výšce apod. Již z této úvahy vidíme, že rovnic bude podstatně víc a že řešení takové úlohy bude výrazně složitější.[42]

---

[38] Vidíme, že by nebylo moc praktické mít svislý díl poličky hodně krátký a poličku samotnou velmi dlouhou, tedy mít $l \gg d$. Velká síla F_2 by mohla šroub ze zdi snadno vypáčit.

Uvědomte si, že tady jde opravdu o princip páky. Pokud naopak potřebujete ze dřeva vytáhnout zatvrzele držící hřebík, vezmete si právě dlouhé kleště štípačky a opřete jejich čelisti blízko hřebíku. (Vázy dynastie Ming a jiné cenné předměty asi předem raději odklidíte stranou.)

[39] Pro určení n neznámých potřebujeme n rovnic.

[40] Dotažení této úlohy do výsledných vztahů pro síly zde ponecháváme na laskavém čtenáři. (Schválně, zkuste to z hlavy. Jen tak pro legraci… ☺)

[41] Jinak řečeno, má nekonečný počet řešení.

[42] Zde na staticky neurčité úlohy upozorňujeme proto, abychom nepodlehli pocitu, že pomocí podmínek pro rovnováhu tuhých těles dokážeme řešit všechny statické problémy.

5.4 Otáčení tělesa kolem pevné osy

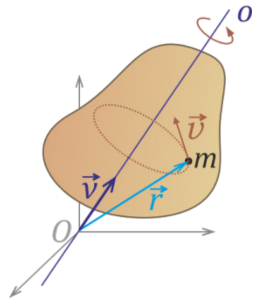
Uvažujme těleso, které se točí kolem nějaké osy.[43] Jak můžeme určit rychlost, s níž se pohybuje nějaký bod tělesa?[44]

Pokud jde o velikost rychlosti, je odpověď jednoduchá. Daný bod se pohybuje kruhovým pohybem. Úhlová rychlost pohybu je prostě úhlová rychlost ω otáčení tělesa, poloměr kružnice R je vzdálenost bodu od osy. Velikost rychlosti je dána známým vztahem $v = \omega R$.

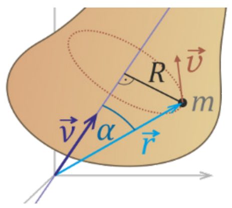
Nám ale půjde i o směr rychlosti bodu. Proto budeme muset situaci popsat podrobněji a také trochu zobecnit pojem úhlové rychlosti.

Úhlová rychlost

Těleso se otáčí kolem osy o . Směr osy budeme charakterizovat jednotkovým vektorem $\vec{\nu}$, jak to ukazuje obrázek.[45] Počátek soustavy souřadnic umístíme na osu; polohový vektor $\vec{r}$ ukazuje polohu „kousku tělesa“ o hmotnosti m . (Tento kousek si můžeme představit jako hmotný bod – v našem odvození budeme občas plynule přecházet mezi modelem tuhé soustavy hmotných bodů a tuhého tělesa.)



Jak ukazuje obrázek, daný bod se při otáčení tělesa pohybuje po kružnici. Velikost úhlové rychlosti otáčení budeme označovat ω .



Jaký je poloměr R kružnice, po níž daný bod obíhá, je vidět na podrobnějším obrázku vlevo. Z pravoúhlého trojúhelníku vyznačeného na obrázku je zřejmé, že $R = |\vec{r}|\sin\alpha$. Sinus úhlu α , který svírají vektory $\vec{\nu}$ a $\vec{r}$ můžeme vyjádřit pomocí jejich vektorového součinu. Platí tedy[46]:

$$R = |\vec{r}|\sin\alpha = |\vec{\nu}|\,|\vec{r}|\,\sin\alpha = |\vec{\nu}\times\vec{r}|$$

Velikost rychlosti našeho bodu je

$$v = \omega R = \omega|\vec{\nu}\times\vec{r}| = |\omega\vec{\nu}\times\vec{r}| \qquad (5.15)$$

Jaký směr má rychlost $\vec{v}$? Je kolmá jak na osu o (tedy na vektor $\vec{\nu}$), tak na polohový vektor $\vec{r}$. Ale přesně tímto směrem míří vektorový součin $\vec{\nu}\times\vec{r}$! To znamená, že můžeme psát $\vec{v} = \omega\vec{\nu}\times\vec{r}$.[47]

Teď už se přímo nabízí, definovat **vektor úhlové rychlosti** jako

$$\boxed{\vec{\omega} = \omega\vec{\nu}} \qquad (5.16)$$

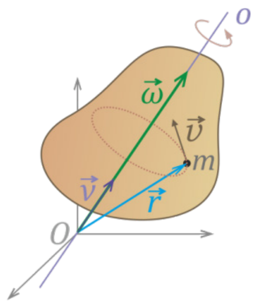
[43] Třeba dětskou káču, kolo od bicyklu nebo zeměkouli.

[44] Tedy třeba bod nakreslený na povrchu dětské káči (ale klidně i uvnitř ní), bod na pneumatice nebo „loukoti“ kola apod.

[45] Jen pro připomenutí: ν je řecké písmeno „ný“. (Tento symbol se pro vektor ve směru osy používá, tak proč bychom ho nepoužili i my.) Protože jde o jednotkový vektor, platí $|\vec{\nu}| = 1$. Orientace vektoru $\vec{\nu}$ odpovídá pravidlu pravé ruky: jestliže osu obejmeme pravou rukou tak, že prsty ukazují směr otáčení, palec ukazuje směr vektoru $\vec{\nu}$.

[46] Využíváme toho, že $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor.

[47] Snadno se přesvědčíme, že tento vztah dobře popisuje i orientaci vektoru rychlosti.



Úhlová rychlost tedy odteď pro nás bude vektorem. Směr tohoto vektoru udává směr osy otáčení[48], velikost udává velikost úhlové rychlosti: $\omega = |\vec{\omega}|$.

Rychlost bodu o polohovém vektoru $\vec{r}$ je (viz (5.15) a následující odstavec):

$$\boxed{\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}} \tag{5.17}$$

Polohový vektor přitom začíná v nějakém bodě na ose rotace.

Moment hybnosti při rotaci kolem pevné osy

Veličina, která je pro charakteristiku rotace tělesa velmi užitečná, je moment hybnosti. Spočteme jej pro rotující tuhou soustavu hmotných bodů.[49]

Polohový vektor i-tého hmotného bodu budeme značit $\vec{r}_i$, jeho rychlost $\vec{v}_i$, hmotnost m_i. Rychlost tohoto bodu je $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, jeho hybnost $\vec{p}_i = m_i \vec{v}_i = m_i\, \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ a moment hybnosti tedy

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m_i\, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$$ [50]

Celkový moment hybnosti soustavy hmotných bodů je

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} \vec{L}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)\,, \tag{5.18}$$

což můžeme upravit[51] na

$$\vec{L} = \sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i \left[\vec{\omega}\underbrace{(\vec{r}_i \cdot \vec{r}_i)}_{r_i^2} - \vec{r}_i\,(\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right] = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{\nu}\, r_i^2 - \vec{r}_i\,(\vec{r}_i \cdot \vec{\nu}) \right) \tag{5.19}$$

Vidíme, že výsledek je docela složitý, proto se jím v této obecnosti teď nebudeme zabývat.[52] Místo toho prozkoumáme jednodušší věc – jaký je ***průmět momentu hybnosti do směru rotační osy***. Označíme ho třeba symbolem L_o.[53]

Protože jde o průmět do směru $\vec{\nu}$, dostaneme L_o násobením vektoru $\vec{L}$ jednotkovým vektorem $\vec{\nu}$:

$$\begin{aligned} L_o &= \vec{L} \cdot \vec{\nu} = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\vec{\nu}\, r_i^2 - \vec{r}_i\,(\vec{r}_i \cdot \vec{\nu}) \right) \cdot \vec{\nu} = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \left(\underbrace{(\vec{\nu} \cdot \vec{\nu})}_{1} r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\nu})\,(\vec{r}_i \cdot \vec{\nu}) \right) = \\ &= \omega \sum_{i=1}^{N} m_i \left(r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{\nu})^2 \right) \end{aligned} \tag{5.20}$$

[48] A také orientaci otáčení.

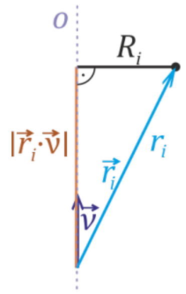
[49] Výpočet provádíme pro soustavu hmotných bodů čistě proto, že pro nás asi bude jednodušší a názornější mít ve výpočtech sumu přes všechny hmotné body než objemový integrál. (Jste-li už na objemové integrály zvyklí, proveďte si následující odvození přímo pro tuhé těleso, princip je samozřejmě naprosto stejný.)

[50] Výraz $\vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$ je tzv. **dvojný součin**; stručnou informaci o něm najdete v Dodatku 5.B.

[51] … využitím pravidla „bac mínus cab", viz Dodatek 5.B.

[52] Necháme si ho do druhého ročníku do předmětu *Teoretická mechanika*. (Povede na krásnou věc zvanou *tenzor setrvačnosti*, to si ale opravdu necháme až o ročník později.)

[53] Index „o" symbolizuje osu o. Také ho lze označit $L_{\vec{\nu}}$, protože jde o průmět do směru $\vec{\nu}$.



Výrazu $r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{v})^2$ na pravé straně (5.20) lze dát názorný geometrický smysl, viz obrázek vpravo.

$\vec{r}_i \cdot \vec{v}$ je totiž průmětem vektoru $\vec{r}_i$ do směru $\vec{v}$, takže úsečky délek $|\vec{r}_i \cdot \vec{v}|$, R_i a r_i tvoří pravoúhlý trojúhelník. Z Pythagorovy věty plyne, že

$$r_i^2 - (\vec{r}_i \cdot \vec{v})^2 = R_i^2 ,$$

kde, jak vidno z obrázku, R_i je vzdálenost bodu od osy o. Vztah (5.20) pro průmět momentu hybnosti do osy tedy můžeme zapsat velmi jednoduše:

$$L_o = \omega \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \tag{5.21}$$

Vidíme, že v součtu na pravé straně jsou jen věci týkající se samotného tělesa, tj. hmotností jeho bodů resp. částí, a jeho geometrie, tedy toho, jak daleko jsou dané body od osy.

Je tedy rozumné „celou tuto věc“ vážící se k tělesu a jeho polohy vůči ose rotace nějak označit a nazvat[54]. Označíme ji

$$\boxed{J_o = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2} \tag{5.22}$$

a budeme ji nazývat **moment setrvačnosti vzhledem k ose** o.

Průmět momentu hybnosti do směru osy je pak dán jednoduchým vztahem

$$\boxed{L_o = J_o \omega \ .} \tag{5.23}$$

[54] To je ostatně celkem běžný postup: část složitého vzorečku označit nějakým symbolem a pracovat dál s tímto symbolem, s touto veličinou. Vzoreček se tím většinou výrazně zjednoduší a zpřehlední.
Přitom, když se to dělá rozumně a s dostatečným vhledem, nelze tento postup označit za nějaký „podfuk“. Často to pomůže ve věcech se lépe vyznat, souhrnně popsat jejich vlastnosti a vystihnout jejich vlastnosti a chování na hlubší úrovni.
Popravdě řečeno, stejný přístup využíváme dnes a denně i v běžném životě. Když třeba v autě vybídneme řidiče začátečníka „přeřaď na trojku“, tak je to krátké, rychlé a je tomu rozumět. Kdybychom měli pokaždé vysvětlovat „sešlápni spojku, pravou rukou dej řadicí páku nejprve na neutrál a potom na trojku [a ještě vysvětlovat, kterým směrem má řadicí páku posunovat] a pak pusť spojku [případně vysvětlovat, co znamená pustit spojku]“, tak pojede s motorem vyjícím na dvojku ještě hezký kus cesty.
Zkrátka, nové názvy či pojmenování, resp. obecněji nové *koncepty* (ve fyzice může jít i o nové a veličiny) – jsou-li vhodně navržené – nám pomáhají o světě a dějích v něm mluvit a přemýšlet jednodušeji, přehledněji, s větším nadhledem a přispívají k lepšímu pochopení.

5.5 Moment setrvačnosti

Moment setrvačnosti tuhé soustavy hmotných bodů je dán vztahem (5.22). Pro tuhé těleso platí analogicky[55]

$$\boxed{J_o = \int_V \rho R^2 dV} \qquad (5.24)$$

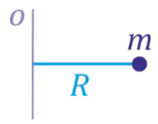
Při výpočtu momentu setrvačnosti konkrétních těles nemusíme vždy počítat objemový integrál jako trojný integrál, stačí když „složíme" celkový moment hybnosti z příspěvků jednotlivých částí tělesa.

Pojďme si tento postup ukázat na několika jednoduchých tělesech.

Momenty setrvačnosti vybraných těles

Ve všech dále uvedených případech půjde o tělesa homogenní; moment setrvačnosti budeme označovat prostě J.[56]

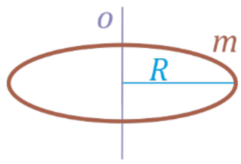
Hmotný bod



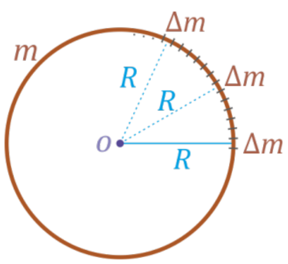
Jaký je moment setrvačnosti hmotného bodu o hmotnosti m, jehož vzdálenost od osy otáčení je R?[57] Ve vztahu (5.22) zbude jen jediný člen, což znamená, že bude

$$J = m R^2 . \qquad (5.25)$$

Tenká obruč



Teď nám půjde o moment setrvačnosti tenké obruče o poloměru R a celkové hmotnosti m. Z jakých příspěvků, tedy z jakých částí můžeme celkový moment setrvačnosti obruče složit? Na jaké části můžeme obruč (myšlenkově) rozdělit?



Obrázek vlevo ukazuje pohled ze směru osy o. Obruč rozdělíme na malé kousky o hmotnostech Δm. Vzdálenost všech kousků od osy otáčení je stejná; je to poloměr obruče R.[58] Kousky obruče můžeme považovat za hmotné body. Moment setrvačnosti každého kousku je tedy podle vztahu (5.25)

$$\Delta J = \Delta m R^2 .$$

Nyní už zbývá jen sečíst všechny příspěvky[59]:

$$J = \sum_{\substack{\text{přes všechny}\\ \text{kousky obruče}}} \Delta J = \sum_{\substack{\text{přes všechny}\\ \text{kousky obruče}}} \Delta m R^2 = \Big(\sum_{\substack{\text{přes všechny}\\ \text{kousky obruče}}} \Delta m \Big) R^2 = m R^2 \qquad (5.26)$$

---

[55] Podrobněji (s vyznačením závislosti na poloze) bychom psali $J_o = \int_V \rho(\vec{r}) R^2(\vec{r}) dV$.

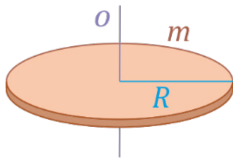
[56] Budeme vypouštět index o.

[57] Reálně může jít o malé těleso připevněné velmi lehkou tyčkou (tj. tyčkou zanedbatelné hmotnosti) k rotační ose.

[58] Na obrázku jsou vyznačeny jen některé kousky obruče a jen o některých je napsána jejich hmotnost.

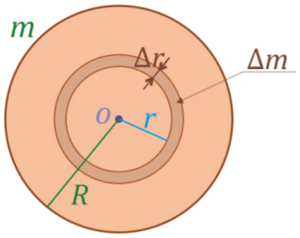
[59] A ze součtu vytknout společný činitel R^2 a sečíst hmotnosti všech kousků – což samozřejmě dá celkovou hmotnost obruče.

Tenký disk



Přejděme k něčemu nepatrně složitějšímu[60], a sice k homogennímu disku o poloměru R a celkové hmotnosti m. Tloušťku disku budeme zanedbávat.

Disk rozdělíme na části, jejichž momenty setrvačnosti už známe – na tenké obruče. Na obrázku vlevo je vyznačena jedna taková „obruč“ o poloměru r a šířce Δr. Obruč přitom volíme hodně tenkou, to znamená, že je $\Delta r \ll r$. Plocha obruče (nahlíženo shora, ze směru osy) je



$$\Delta S \doteq 2\pi r \Delta r \ .$$[61]

Hmotnost dané obruče je zřejmě $\Delta m = \frac{\Delta S}{S} m$, kde $S = \pi R^2$ je plocha celého disku.[62] Je tedy

$$\Delta m = \frac{2\pi r \Delta r}{\pi R^2} m = \frac{2m}{R^2} r \Delta r$$

a moment setrvačnosti obruče:

$$\Delta J = \Delta m \, r^2 = \frac{2m}{R^2} r^3 \Delta r$$

Celkový moment setrvačnosti disku získáme „poscítáním pře všechny obruče“, tedy integrací:

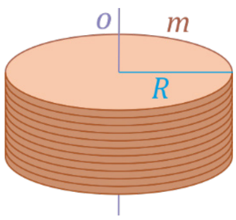
$$J = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{2m}{R^2} \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{2m}{R^2} \frac{R^4}{4} = \frac{1}{2} m R^2$$

Moment setrvačnosti tenkého homogenního disku je tedy

$$\boxed{J = \frac{1}{2} m R^2} \qquad (5.27)$$

Válec

Jak tomu bude s homogenním válcem o poloměru R, výšce h a celkové hmotnosti m? Válec můžeme rozřezat na tenké disky, každý o hmotnosti Δm. Moment setrvačnosti každého takového disku bude $\Delta J = \frac{1}{2} \Delta m R^2$. Celkový moment setrvačnosti získáme posčítáním přes všechny disky – ale protože R^2 je pro všechny disky stejné, můžeme je vytknout, a sčítáme tak vlastně hmotnosti Δm. Výsledkem je celková hmotnost válce m. Moment setrvačnosti válce je proto dán stejným vztahem (5.27) jako moment setrvačnosti disku.



---

[60] … kde už při výpočtu budeme muset integrovat.

[61] Jde o plochu mezikruží: $\Delta S = \pi(r+\Delta r)^2 - \pi r^2 = \pi(r^2 + 2r\Delta r + (\Delta r)^2) - \pi r^2 = 2\pi r \Delta r + \pi(\Delta r)^2 \doteq 2\pi r \Delta r$.
Člen $\pi(\Delta r)^2$ zanedbáváme oproti $2\pi r \Delta r$, protože $2\pi r\Delta r + \pi(\Delta r)^2 = 2\pi r \Delta r (1 + \frac{1}{2}\Delta r / r)$ a je $\Delta r / r \ll 1$.
Rychlejší, ale méně přesné odvození plochy: Délka „pásku“ (vnitřního obvodu mezikruží) je $2\pi r$, šířka tohoto pásku je Δr. Plochu spočteme stejně jako plochu obdélníka (i když tady je „zakroucený“) jako délka krát šířka, tedy $2\pi r \cdot \Delta r$. (Tato představa je názorná a dobře se pamatuje; pro tenké „proužky“ dává dobré výsledky.)

[62] Je to proto, že disk je homogenní; zkuste si rozmyslet, jak byste vztah pro Δm podrobně zdůvodnili někomu, komu by to nebylo zřejmé. (Můžete přitom vyjít z objemu obruče a z hustoty disku; tu spočtete z celkové hmotnosti a z celkového objemu disku.)

Koule

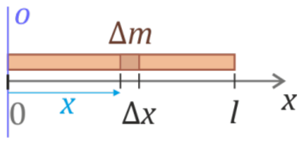
Pro moment setrvačnosti homogenní koule o poloměru R a celkové hmotnosti m zde uvedeme jenom výsledný vztah[63]:

$$\boxed{J = \frac{2}{5} m R^2} \tag{5.28}$$

Odvození najdete v Dodatku 5.C.

Tyč (když osa prochází jejím koncem)

Mějme homogenní tenkou tyč délky l a hmotnosti m, která se otáčí kolem osy procházející koncem tyče. (Osa je přitom kolmá na tyč.) Moment setrvačnosti kousku tyče délky Δx, který je vzdálen x od osy je[64]



$$\Delta J = \Delta m\, x^2 = \left(\frac{m}{l}\Delta x\right) x^2 = \frac{m}{l} x^2 \Delta x$$

Celkový moment setrvačnosti dostaneme opět integrací,

$$J = \int_0^l \frac{m}{l} x^2\, dx = \frac{m}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{m}{l}\frac{l^3}{3} = \frac{m\, l^2}{3}$$

Výsledný moment setrvačnosti tyče tedy je

$$\boxed{J = \frac{1}{3} m\, l^2} \tag{5.29}$$

Tyč (když osa prochází jejím středem)

A co když se uvedená tyč otáčí kolem osy procházející jejím středem? Její moment setrvačnosti můžeme spočítat jako součet momentů setrvačností jejích dvou polovin: tedy tyčí délky $l/2$ a hmotnosti $m/2$.[65] Výsledek je

$$\boxed{J = \frac{1}{12} m\, l^2} \tag{5.30}$$

---

[63] Je zajímavé všimnout si, že ve vztazích pro moment setrvačnosti, které jsme dosud odvodili, je vždy mR^2 krát nějaká konstanta. Ta záleží na tvaru tělesa. Jiná by byla též pro nehomogenní tělesa. Například pokud by hustota poblíž středu koule byla větší, než poblíž jejího povrchu, byl by ve vztahu (5.28) koeficient o něco menší než 2/5. (Tak je tomu např. v případě zeměkoule.) Rozmyslete si, proč tato kvalitativní úvaha platí – tj. proč v tomto případě není koeficient naopak větší než 2/5.

[64] Zde už nezdůrazňujeme, že Δm je hmotnost daného kousku tyče a ta že je úměrná délce tohoto kousku.

[65] Tedy $J = 2\cdot\frac{1}{3}(m/2)\cdot(l/2)^2$.

5.6 Energie rotujícího tělesa

Když se tuhá soustava hmotných bodů otáčí kolem osy úhlovou rychlostí ω, pak hmotný bod, jehož vzdálenost od osy je R_i, se pohybuje rychlostí $v_i = \omega R_i$. Jeho kinetická energie je tedy[66]

$$\tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} m_i (\omega R_i)^2 = \tfrac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 .$$

Celková kinetická energie rotující soustavy hmotných bodů je dána součtem

$$T = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i v_i^2 = \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \omega^2 = \tfrac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} J \omega^2$$

Stejný výsledek platí i pro tuhé těleso.[67] Vidíme, že pro tuhou soustavu i pro tuhé těleso je jejich energie při otáčení kolem osy

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2} J \omega^2} \qquad (5.31)$$

Roztočený setrvačník může dodávat energii třeba dětskému autíčku[68], ale i něčemu „festovnějšímu". Například v tokamaku JET[69], potřebují ve špičkách příkon přes 1000 MW, a tolik jim anglická elektrická síť nedá. Tak tam mají dva setrvačníky, každý o průměru 9 m a hmotnosti 775 tun. Ty se „malými" elektromotory (o příkonu 8 MW) roztočí na 225 otáček za minutu. Každý setrvačník pak může dodat 3,75 GJ energie[70]; špičkový výkon je 400 MW. To není zrovna málo…

Je užitečné porovnat vztahy pro hybnost, moment hybnosti a kinetickou energii pro translační a rotační pohyb:

	hybnost, moment hybnosti	kinetická energie
translační pohyb	$\vec{P} = m\vec{v}$	$T = \tfrac{1}{2} m v^2$
rotační pohyb	$L = J\,\omega$	$T = \tfrac{1}{2} J \omega^2$

Je vidět, že roli, kterou hraje u translačního pohybu „obyčejná" rychlost, hraje u rotačního pohybu úhlová rychlost. Roli, kterou má u translačního pohybu hmotnost, hraje u rotačního pohybu moment setrvačnosti.[71]

---

[66] m_i je hmotnost daného hmotného bodu.

[67] Odvodili bychom ho podobně, sčítáním kinetických energií kousků tělesa:

$$T = \int_V \tfrac{1}{2} \rho v^2 dV = \tfrac{1}{2} \int_V \rho (R\omega)^2 dV = \tfrac{1}{2} \left(\int_V \rho R^2 dV \right) \omega^2 = \tfrac{1}{2} J \omega^2 .$$

[68] Jak si snad pamatujete z dětství, autíčko na setrvačník má mnohé výhody: dojede dál než autíčko bez setrvačníku a nepotřebuje baterie (a dokonce ani internet ☺). Navíc se dá rozebrat, a je tam vidět ten setrvačník i převod ozubenými kolečky. (Chápu, že srdce budoucí kosmetičky nad tím asi nezaplesá tolik jako srdce budoucího mechanika nebo strojaře, ale stejně je to krása – pro děti a nejen pro ně.)

[69] *Joint European Torus* v anglickém Culhamu.

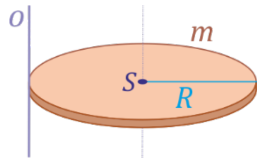
[70] Ověřte si, že to odpovídá vztahu (5.31). Neznáme sice přesné rozložení hmotnosti v setrvačníku, ale na webových stránkách tokamaku je napsáno, že většina hmotnosti setrvačníku je soustředěna na jeho obvodu.

[71] Navíc se díky uvedené analogii vztahy lépe pamatují.

5.7 Steinerova a Königova věta

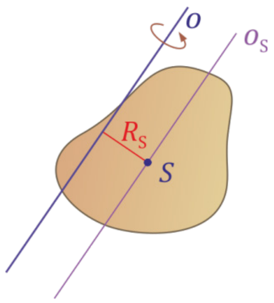
V této části kapitoly zjistíme, jak se dají moment setrvačnosti a energie pohybujícího se tělesa počítat v obecnějších případech, než jsme to uměli dosud.

Steinerova věta



Momenty setrvačnosti těles jsme dosud až na jedinou výjimku počítali vůči osám procházejícím středem tělesa. Co kdybychom ale chtěli spočíst moment setrvačnosti například vůči ose, která prochází okrajem disku nebo válce?

Naštěstí uvidíme, že stačí znát moment setrvačnosti vůči ose procházející hmotným středem – a budeme umět určit moment setrvačnosti vůči libovolné ose s ní rovnoběžné!

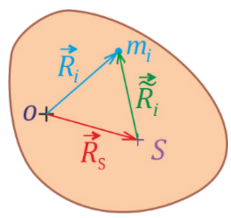


Vzdálenost obou os označíme R_S , moment setrvačnosti vůči ose procházející hmotným středem (osa o_S na obrázku) budeme značit J_S, moment setrvačnosti kolem osy o označíme prostě J.[72]

Moment setrvačnosti vzhledem k ose o je dán vztahem (5.22), tedy $J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$.[73] Moment setrvačnosti vzhledem k ose o_S bude

$$J_S = \sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{R}_i^2 , \tag{5.32}$$

kde $\tilde{R}_i$ je vzdálenost bodů od osy o_S. Vzájemnou polohu bodu a obou os lze dobře vidět při pohledu „shora“, ze směru daných os. Při tomto pohledu vlastně vidíme průmět do roviny kolmé na osy. Na obrázku jsou pozice vyznačeny vektory – jde o vektory kolmé k daným osám.[74] Vektorem je vyznačena i poloha hmotného středu S vůči ose o. Z obrázku je vidět, že pro dané vektory (tak jak jsme je definovali) platí



$$\vec{R}_i = \vec{R}_S + \vec{\tilde{R}}_i \quad . \tag{5.33}$$

Protože $R_i^2 = \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i$, můžeme vztah pro moment setrvačnosti vůči ose o napsat jako $J = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i$. Dosadíme do něj (5.33) a budeme dále upravovat:

$$\begin{aligned} J &= \sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i \cdot \vec{R}_i = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{R}_S + \vec{\tilde{R}}_i)\cdot(\vec{R}_S + \vec{\tilde{R}}_i) = \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{R}_S \cdot \vec{R}_S + 2\vec{R}_S \cdot \vec{\tilde{R}}_i + \vec{\tilde{R}}_i \cdot \vec{\tilde{R}}_i) = \\ &= \sum_{i=1}^{N} m_i (R_S^2 + 2\vec{R}_S \cdot \vec{\tilde{R}}_i + \tilde{R}_i^2) = \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i R_S^2}_{(1)} + \underbrace{2\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_S \cdot \vec{\tilde{R}}_i}_{(2)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{R}_i^2}_{(3)} \end{aligned} \tag{5.34}$$

[72] Chcete-li, značte ho jako J_o , ale zde už budeme šetřit písmenka…

[73] Výpočty budeme opět provádět pro tuhou soustavu hmotných bodů (sumy jsou pro nás asi stále ještě názornější než objemové integrály), výsledek samozřejmě bude platit i pro tuhé těleso.

[74] Značíme je velkými písmeny, abychom je odlišili od polohových vektorů. Fakticky jde o průměty polohových vektorů do roviny kolmé na osy.

Podívejme se na jednotlivé členy na pravé straně (5.34). První člen (vyznačený zelenou barvou a symbolem (1)) můžeme upravit jako[75]

$$\sum_{i=1}^{N} m_i R_S^{\,2} = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i\right) R_S^{\,2} = m\, R_S^{\,2} \,, \tag{5.35}$$

kde $m = \sum_{i=1}^{N} m_i$ je celková hmotnost soustavy hmotných bodů.

Třetí člen (označený (3) a modrou barvou) je momentem setrvačnosti J_S vzhledem k ose procházející hmotným středem, viz (5.32):

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \tilde{R}_i^{\,2} = J_S \tag{5.36}$$

Druhý člen (2) vypadá nejvíce komplikovaně[76], ale i s ním si poradíme. Můžeme z něj vytknout společný faktor $\vec{R}_S$, tedy přepsat (2) na tvar

$$2\sum_{i=1}^{N} m_i\, \vec{R}_S \cdot \vec{\tilde{R}}_i = 2\vec{R}_S \cdot \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\tilde{R}}_i}_{(*)} \tag{5.37}$$

Výraz (*) ovšem připomíná vztah pro polohu hmotného středu. Vskutku[77], poloha hmotného středu je $\vec{r}_S = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$, z čehož

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i = m\,\vec{r}_S \tag{5.38}$$

V našem případě máme průměty polohových vektorů do roviny kolmé na osy; pro tyto průměty musí platit totéž, co pro polohové vektory, tedy $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{R}_i = m\,\vec{R}_S$.[78] A ještě si musíme uvědomit, že ve vztahu (5.37) jde o „vektory s vlnkou“, tj. vektory, které vycházejí z bodu S (viz obrázek u vztahu (5.33)). Je tedy

$$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\tilde{R}}_i = m\,\vec{\tilde{R}}_S \tag{5.39}$$

Vektor $\vec{\tilde{R}}_S$ určuje polohu hmotného středu[79] – ovšem vůči kterému výchozímu bodu[80]? Přece vůči bodu, v němž začínají všechny vektory $\vec{\tilde{R}}_i$, tedy vůči bodu S! Můžeme říci, že vektor $\vec{\tilde{R}}_S$ určuje polohu hmotného středu vůči hmotnému středu. To znamená, že začíná i končí ve stejném bodě, jinými slovy, že je $\vec{\tilde{R}}_S = 0$. Z (5.39) pak plyne, že $\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\tilde{R}}_i = 0$ a z (5.37) potom, že celý člen (2) v (5.34) je roven nule![81]

[75] Obsahuje totiž faktor $R_S^{\,2}$ společný pro všechny body.

[76] Možná by se nám líbilo, kdyby zde vůbec nebyl nebo nějak zmizel… No, uvidíme.

[77] Poznámka úplně nefyzikální: Kdy jste naposledy řekli „vskutku“? A je to takové pěkné, trochu už starosvětsky znějící slovo. A na začátek této věty se fakt (=vskutku) hodí. ☺ (Pozn.: Tuto nefyzikální poznámku můžete úplně ignorovat. Raději sledujte, jak si poradíme s tím členem (2).)

[78] Tento vztah dostaneme průmětem (5.38) do roviny kolmé na osy.

[79] V průmětu do roviny kolmé na osy.

[80] Tj. kde začíná vektor $\vec{\tilde{R}}_S$?

[81] Tak přece! Hurá!

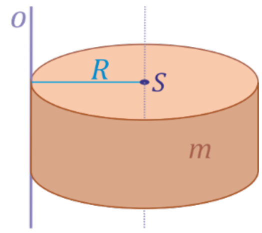
Ze vztahu (5.34) tedy dostáváme výsledek v jednoduchém a elegantním tvaru:

$$\boxed{J = m R_S^{\,2} + J_S} \tag{5.40}$$

Tento vztah je znám pod názvem **Steinerova věta**.

Příklad 2: Moment setrvačnosti homogenního válce vůči ose procházející po jeho povrchu

Moment setrvačnosti válce vůči ose procházející hmotným středem je (viz (5.27)) $J_S = \dfrac{1}{2} m R^2$. Moment setrvačnosti vůči ose o (viz obrázek) je podle Steinerovy věty



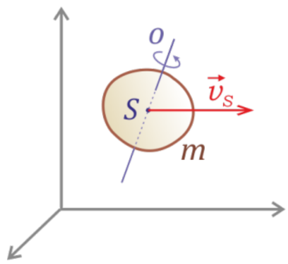
$$J = m R_S^{\,2} + J_S = m R_S^{\,2} + \tfrac{1}{2} m R_S^{\,2} = \tfrac{3}{2} m R_S^{\,2} \tag{5.41}$$

Tento moment setrvačnosti se uplatňuje, například když se válec valí po podložce; v tomto případě se v daném okamžiku otáčí kolem přímky, v níž se dotýká podložky.

Königova věta

Výše jsme odvodili vztah (5.31) pro energii tělesa rotujícího kolem dané osy: $T = \frac{1}{2} J \omega^2$. Co když ale těleso rotuje a současně se pohybuje v nějakém směru?[82] Jaká je jeho celková kinetická energie?

Kupodivu výsledný vztah bude docela jednoduchý. Potřebujeme pro něj znát rychlost pohybu hmotného středu tělesa (budeme ji označovat υ_S) a jeho moment setrvačnosti vůči ose otáčení procházející hmotným středem (ten v souladu s výše zavedeným značením bude označen J_S). Úhlová rychlost otáčení bude ω. Hmotnost tělesa značíme m.



Kinetickou energii budeme opět počítat pro tuhou soustavu hmotných bodů. Rychlost i-tého bodu bude dána součtem jeho rychlosti díky rotaci, $\vec{\upsilon}_{i\ \mathrm{rot.}} = \vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i$, viz (5.17) [83] a rychlosti hmotného středu $\vec{\upsilon}_S$:

$$\vec{\upsilon}_i = \vec{\upsilon}_S + \vec{\upsilon}_{i\ \mathrm{rot.}} = \vec{\upsilon}_S + \vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i \tag{5.42}$$

Celková kinetická energie soustavy hmotných bodů je

$$T = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \upsilon_i^{\,2} = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i \vec{\upsilon}_i \cdot \vec{\upsilon}_i = \sum_{i=1}^{N} \tfrac{1}{2} m_i (\vec{\upsilon}_S + \vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i) \cdot (\vec{\upsilon}_S + \vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i) = \tag{5.43}$$

$$= \tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \Big(\vec{\upsilon}_S \cdot \vec{\upsilon}_S + 2 \vec{\upsilon}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i) + (\vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i) \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i) \Big) = \underbrace{\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i \upsilon_S^{\,2}}_{(1)} + \underbrace{\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{\upsilon}_S \cdot (\vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i)}_{(2)} + \underbrace{\tfrac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} m_i (\vec{\omega} \times \vec{\tilde{r}}_i)^2}_{(3)}$$

V prvním členu na pravé straně vytkneme $\upsilon_S^{\,2}$ a dostaneme $\frac{1}{2} m \upsilon_S^{\,2}$. Třetí člen je kinetická energie odpovídající rotaci. Jednoduše je to vidět, když do (5.43) dosadíme $\upsilon_S = 0$; v tom případě těleso

[82] To znamená, že se pohybuje současně translačním a rotačním pohybem.

[83] Pozor! Polohové vektory teď bereme vůči hmotnému středu S. (Vztah (5.17) platí, když počátek vektorů je na ose rotace.) Proto, v souladu se značením užitým v odvození Steinerovy věty, značíme polohové vektory s vlnkou.

rotuje kolem nehybného bodu S a v (5.43) zbude právě jen třetí člen. Vzorec pro kinetickou energii rotujícího tělesa ale už známe (viz (5.31)), takže člen (3) v (5.43) můžeme psát jako

$$\tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i)^2 = \tfrac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} J\,\omega^2 \ . \tag{5.44}$$

Druhý člen v (5.43)[84] můžeme upravit tím, že vytkneme faktory, které jsou pro všechny body stejné[85]:

$$\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{v}_S\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \vec{v}_S\cdot\sum_{i=1}^{N} m_i(\vec{\omega}\times\vec{r}_i) = \vec{v}_S\cdot\left(\vec{\omega}\times\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i\right) \tag{5.45}$$

Ovšem $\sum_{i=1}^{N} m_i\vec{r}_i = m\vec{r}_S = 0$, protože $\vec{r}_S = 0$.[86] To znamená, že celý člen (2) v (5.43) je roven nule.

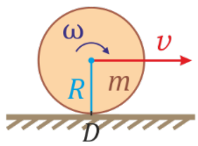
Kinetická energie tuhého tělesa, které koná jak translační, tak rotační pohyb, je tedy

$$\boxed{T = \tfrac{1}{2}m v_S^{\,2} + \tfrac{1}{2}J\,\omega^2} \tag{5.46}$$

Tento výsledek se nazývá **Königova věta**.

Příklad 3: Kinetická energie valícího se válce

Jaká je kinetická energie homogenního válce, který se valí po podložce, jak to ukazuje obrázek? Předpokládáme, že se válec valí bez prokluzování. To znamená, že mezi rychlostí pohybu válce v a úhlovou rychlostí ω platí vztah $v = R\omega$. Rychlost pohybu hmotného středu válce je přímo rychlost v, moment setrvačnosti válce vůči ose válce je $J = \tfrac{1}{2}mR^2$. Dosazení do Königovy věty (5.46) dává



$$T = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}J\,\omega^2 = \tfrac{1}{2}mv^2 + \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{R}\right)^2 = \frac{3}{4}mv^2 \ . \tag{5.47}$$

Jiným způsobem můžeme tento výsledek odvodit ze Steinerovy věty. Při valení se totiž válec v každém okamžiku otáčí kolem přímky, v níž se dotýká podložky. (Na obrázku je dotek vyznačen bodem D.) Moment setrvačnosti vzhledem k této přímce je $J_D = \frac{3}{2}m\,R_S^{\,2}$, viz (5.41). Kinetická energie je tedy $T = \tfrac{1}{2}J_D\,\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}m\,R^2\,\omega^2 = \frac{3}{4}m\,(R\omega)^2 = \frac{3}{4}mv^2$.

Vidíme, že kinetickou energii při valení můžeme vypočítat buď z Königovy, nebo ze Steinerovy věty.[87]

Výsledek, který jsme odvodili, můžeme využít například při určení, jak rychle se valí válec po nakloněné rovině. Ukáže to následující příklad.

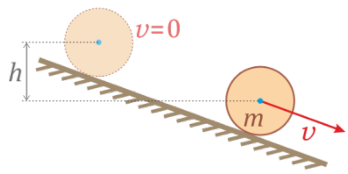
[84] Zase je takový komplikovanější… Bylo by pěkné, kdyby také vyšel roven nule, že?

[85] Na přednášce ze studentských řad zazněl výstižný popis, jak to udělat: „všechno, kde není i [míněno index i], vytkneme!“.

[86] Jde opět o „polohu hmotného středu vůči hmotnému středu“- viz diskuse v odstavci za vztahem (5.39).

[87] Jenom pozor, abyste někdy např. ve stresu nepoužili obě věty naráz, tedy nedosadili do Königovy věty moment setrvačnosti vůči jiné ose, než té, která prochází hmotným středem. To by dalo nesmysl.

Příklad 4: Válec, obruč a jojo, které se valí po nakloněné rovině



Představte si válec na nakloněné rovině. Na začátku bude jeho rychlost nulová. Jakou rychlost válec dosáhne, když jeho těžiště klesne o výšku h ?[88]

Řešení je jednoduché. Potenciální energie poklesne o mgh a tento pokles se přemění na kinetickou energii $\frac{3}{4}mv^2$, viz předchozí příklad. Je tedy $mgh = \frac{3}{4}mv^2$. Odtud

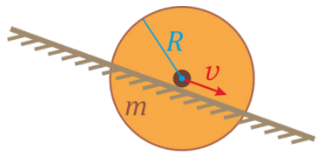
$$v_{\text{válce}} = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \tag{5.48}$$

To je sice menší rychlost, než kdyby za námi bez tření klouzal kvádr (bylo by $v_{\text{kvádru}} = \sqrt{2gh}$), ale přece jen, nemohlo by se jiné těleso valit ještě pomaleji?

Mohlo, příkladem takového tělesa je obruč.[89] Její moment setrvačnosti je $J = mR^2$, takže kinetická energie při valení je $T = mv^2$.[90] Z přeměny potenciální energie na kinetickou ($mgh = mv^2$) pak vyjde

$$v_{\text{obruče}} = \sqrt{gh} \ . \tag{5.49}$$

Mohlo by se něco valit ještě pomaleji? Mohlo, ale části tělesa by musely přesahovat podložku. Příkladem je jojo.[91] Představte si, že nakloněnou rovinou jsou kolejničky, po nichž se valí tenká osička (její poloměr označíme r); ze strany jsou k osičce připevněny kotouče o velkém poloměru R, tedy o velkém momentu setrvačnosti $J = \frac{1}{2}mR^2$.[92] Kinetická energie je pak



$T = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}mR^2\right)\left(\frac{v}{r}\right)^2 = \frac{1}{2}m\left(1 + \frac{R^2}{2r^2}\right)v^2$

. Ze zákona zachování energie pak rychlost joja vypočteme jako

$$v_{\text{jojo}} = \sqrt{2gh\frac{2r^2}{R^2 + 2r^2}} \doteq \frac{2r}{R}\sqrt{gh} \ . \tag{5.50}$$

Stejně tak je tomu v případě, kdy osička joja visí na provázku, který je na ni namotán.

---

[88] To by mohla být navýsost praktická otázka, pokud na vás nějaký zlotřilec pustí po šikmé silnici třeba válec z parního válce. Stačíte utéct? (Drsnější varianta otázky je „jak dlouho mu vydržíte utíkat?“. Neřešme teď, že nejlepší by bylo prostě uhnout stranou, to by nebyl tak napínavý thriller…)

[89] Ta má co nejvíc materiálu co nejdále od osy, takže její moment setrvačnosti je větší.

[90] Odvoďte si, že je tomu tak.

[91] Jo, je.

[92] m je hmotnost obou kotoučů dohromady, proto je $J = \frac{1}{2}mR^2$ celkový moment setrvačnosti obou kotoučů. Moment setrvačnosti osičky zanedbáváme, její hmotnost také.

5.8 Rovnice pro pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy

Tuhé těleso otáčející se kolem pevné osy může být třeba kladka nebo kyvadlo hodin.[93] Pojďme se podívat, jak se takové těleso pohybuje – tedy jak se roztáčí, brzdí či kýve – pod vlivem vnějších sil.

Odvození rovnice pro pohyb tělesa kolem pevné osy

Rovnici popisující pohyb tuhého tělesa kolem pevné osy[94] odvodíme z druhé věty impulsové:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \tag{5.51}$$

Budeme přitom brát jen složku momentu hybnosti a momentu síly do směru osy, označíme je L_o a M_o.[95] Fakticky to znamená, že vztah (5.51) vynásobíme jednotkovým vektorem $\vec{\nu}$. Dostaneme

$$\frac{dL_o}{dt} = M_o \ . \tag{5.52}$$

Moment hybnosti do směru osy ovšem umíme vyjádřit pomocí momentu setrvačnosti: $L_o = J_o \, \omega$. Dosazením do (5.52) dostaneme $\frac{d}{dt}\left(J_o \, \omega\right) = M_o$ a po vytknutí J_o [96] pak finálně

$$\boxed{J_o \frac{d\omega}{dt} = M_o \ .} \tag{5.53}$$

Člen $\frac{d\omega}{dt}$ na levé straně je úhlové zrychlení, někdy bývá označováno symbolem ε . Zapíšeme-li rovnici (5.53) s využitím tohoto symbolu, má tvar $J\,\varepsilon = M$ [97], který připomíná druhý Newtonův zákon. Opět vidíme, že analogií k hmotnosti je pro rotační pohyb moment setrvačnosti J a analogií k síle moment síly M .

Z rovnice (5.53) můžeme například určit, jak se roztáčí kladka, pokud na ni působí zadaný moment síly.[98] My si zde spočteme, jak se pohybuje fyzické kyvadlo.

---

[93] A samozřejmě cokoli od miniaturních koleček v mechanických hodinkách po rotor turbíny.

[94] Také bychom mohli mluvit o rovnici pro otáčení tuhého tělesa kolem pevné osy. „Pevná osa" přitom znamená, že je zafixovaná v tělese i v prostoru (v nějaké konstrukci kolem). Osa má tedy stálý směr, těleso se kolem ní může bez tření otáčet.

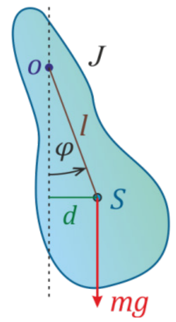
[95] Je $L_o = \vec{L} \cdot \vec{\nu}$ a $M_o = \vec{M} \cdot \vec{\nu}$, kde $\vec{\nu}$ je jednotkový vektor ve směru osy.

[96] Těleso je tuhé a osa je vůči němu i vůči prostoru pevná, takže moment setrvačnosti J_o je konstantní.

[97] Pro jednoduchost už nepíšeme index vyznačující osu otáčení, že jde o rotaci kolem pevné osy, je jasné z kontextu.

[98] Tento příklad necháme na iniciativě laskavého čtenáře. (A na cvičení k přednášce.)

Fyzické kyvadlo



Fyzické kyvadlo je libovolný předmět zavěšený tak, že se může otáčet kolem vodorovné osy.[99] Může to být třeba kyvadlo starých hodin, nebo kyj, který si loupežník pověsí na stěnu jeskyně.[100]

Některé parametry kyvadla a jeho polohy ukazuje obrázek. Vzdálenost hmotného středu od osy otáčení značíme l, síla, kterou Země přitahuje kyvadlo, je mg, výchylka kyvadla ze svislého směru je φ.[101] Moment setrvačnosti vůči ose o značíme prostě J.

Pro odvození rovnice pro pohyb kyvadla vyjdeme z rovnice (5.53)[102]:

$$J\frac{d\omega}{dt} = M \tag{5.54}$$

Na pravé straně potřebujeme znát moment síly. Vystačíme zde se středoškolským vzorcem „rameno krát síla“; je tedy $|M| = d\,F = l\sin\varphi\, mg$. Musíme ovšem dát pozor na znaménko. Jednoduchá úvaha[103] nás přesvědčí, že je

$$M = -l\sin\varphi\, mg \tag{5.55}$$

Protože úhlová rychlost je $\omega = \dfrac{d\varphi}{dt}$, bude levá strana (5.54) rovna $J\dfrac{d\omega}{dt} = J\dfrac{d}{dt}\left(\dfrac{d\varphi}{dt}\right) = J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2}$.

Výsledná rovnice pro pohyb kyvadla tedy je $J\dfrac{d^2\varphi}{dt^2} = -l\sin\varphi\, mg$, čili

$$\boxed{\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0\ .} \tag{5.56}$$

Poznamenejme, že často se tato rovnice zapisuje ve tvaru, kdy derivace podle času se značí tečkami nad veličinou. Jde samozřejmě jen o jiný způsob zápisu, přesto ho tu pro úplnost uvedeme[104]:

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\sin\varphi = 0\ .$$

[99] Tedy, ona by osa mohla být i šikmá, ale tím zde situaci nebudeme komplikovat.

[100] V případě toho kyje bude náš model asi jen hodně přibližný. Budeme totiž uvažovat, že se kyvadlo kolem osy otáčí bez tření. (Zrovna tohle asi při zavěšení na stěnu jeskyně nebude moc pravda; také by kyj nesměl do ničeho narážet, šoupat se po stěně jeskyně apod.)

[101] Úhel měříme samozřejmě v radiánech. (Nevím, jestli to tak dělají loupežníci, ale mladý Lotrando díky svému vzdělání možná radiány znal…)

[102] Už zde explicite nepíšeme indexy vyznačující osu o; „šetříme písmenka“.

[103] Úhel φ bereme kladný, když je kyvadlo vychýleno doprava, podobně úhlovou rychlost bereme >0, když se kyvadlo otáčí v kladném smyslu (tj. proti směru hodinových ručiček). Jak je vidět z obrázku, moment gravitační síly působící na kyvadlo *brzdí* pohyb směrem doprava (a snaží se vrátit kyvadlo zpět k rovnovážné poloze). Aby v rovnici (5.54) opravdu pohyb brzdil, tj. aby pro $\varphi > 0$ bylo $\dfrac{d\omega}{dt} < 0$, musí být v (5.55) opravdu mínus.

Pokud bychom vše opravdu počítali „poctivě“ pomocí vektorů, správné znaménko samozřejmě vyjde automaticky.

[104] Čistě proto, abyste se „nezděsili“, když na něj někde narazíte, že jde o něco jiného. Nejde, je to jen jiný zápis.

Jak rovnici pro pohyb kyvadla řešit, to už je „jiná povídka" – a je to fakticky stejné jako u rovnice pro matematické kyvadlo. Pro malé rozkyvy ($|\varphi| \ll 1$)využijeme aproximaci $\sin\varphi \doteq \varphi$; rovnice pak získá tvar

$$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J}\varphi = 0 \tag{5.57}$$

Rovnice tedy má tvar $\ddot{\varphi} + \tilde{\omega}^2\varphi = 0$, kde $\tilde{\omega}^2 = \frac{mgl}{J}$.[105] O téhle rovnici už z druhé a třetí kapitoly víme, že má řešení $\varphi = \varphi_{\max}\cos\left(\tilde{\omega}t + \alpha\right)$ – tedy že jde o harmonické kmitání.

Z uvedeného je jasné, že úhlová frekvence kmitů kyvadla (při malých rozkyvech) je

$$\boxed{\tilde{\omega} = \sqrt{\frac{mgl}{J}}\ .} \tag{5.58}$$

Odpovídající perioda kmitů je

$$T_{\text{fyzického kyvadla}} = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\tilde{\omega}} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}} \tag{5.59}$$

Speciálním případem je matematické kyvadlo. Jde o hmotný bod ve vzdálenosti l od osy (resp. bodu závěsu); jeho moment setrvačnosti je $J = ml^2$; po dosazení do (5.59) tedy dostáváme pro periodu malých kmitů matematického kyvadla známý vzorec

$$T_{\text{matem.kyvadla}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \tag{5.60}$$

Fyzické a matematické kyvadlo experimentálně

Zda uvedené vztahy platí pro skutečná kyvadla, lze to ověřovat i jednoduchými pokusy. Například lze změřit periodu kmitů tyče zavěšené na jednom konci[106] a porovnat ji s periodou stejně dlouhého matematického kyvadla[107]. Poměr period obou kyvadel teoreticky vychází roven $\sqrt{2/3} \doteq 0{,}816$ a pokusem lze ověřit, že v rámci přesnosti měření je tomu opravdu tak.[108]

.

[105] Úhlovou frekvenci kmitů zde označujeme $\tilde{\omega}$, abychom ji odlišili od úhlové rychlosti pohybu kyvadla ω. ($\omega = \dot{\varphi}$, zatímco $\tilde{\omega} = 2\pi f = 2\pi/T$, kde T je perioda kmitů kyvadla.)

[106] Moment setrvačnosti tyče je $J = \frac{1}{3}ml^2$, takže z (5.59) vychází perioda $2\pi\sqrt{\frac{2}{3}\frac{l}{g}}$. (Pozor, ve jmenovateli v (5.59) musíme za délku dosazovat $l/2$ - potřebujeme tam dosadit vzdálenost hmotného středu od osy, a ta je $l/2$. Symbolem l teď označujeme délku tyče, ale v (5.59) znamenal něco jiného – pardon, je jasné, že to je trochu zmatečné, ale trénujme se, že značení se občas mění. Zkrátka si s tím poradíme podle hesla „inteligent zvládne chaos". ☺)

[107] To můžeme realizovat pomocí větší matičky zavěšené na niti.

[108] Na přednášce nám měření vyšlo s přesností lepší než 1 %.

5.9 Proč nespadne roztočený setrvačník

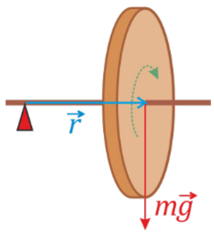
Když se dětská káča netočí, tak se na špičce samozřejmě neudrží a padne na bok. Když ji ale roztočíme, drží se vzpřímeně, jen se její osa mírně otáčí.[109]

Podobně je tomu, když podržíme roztočený setrvačník za osu mimo hmotný střed. Také „nespadne“, jeho osa zůstane vodorovná, jen se otáčí do strany. Jak je to možné?

Odpověď nám dá druhá věta impulsová.

Pro rychle se točící setrvačník má jeho moment hybnosti $\vec{L}$ prakticky směr osy.[110] Jak se s časem mění směr osy tedy poznáme z toho, jak se s časem mění směr $\vec{L}$. Ale právě to nám říká druhá věta impulsová! Časová změna $\vec{L}$ je dána momentem síly:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} \quad . \tag{5.61}$$



A kam míří moment síly? Nikoli dolů, ve směru gravitační síly!

Je $\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}$, čili moment síly míří *kolmo* na směr $\vec{F}$, tedy **vodorovně**.

To znamená, že koncový bod vektoru $\vec{L}$ se s časem posouvá ve vodorovném směru – a stejně se tedy otáčí i osa setrvačníku.[111]

---

[109] Jako by opisovala plášť kužele.

[110] Jak je tomu přesněji, to nebudeme řešit v této přednášce; zčásti to nastíníme v druhém ročníku v přednášce *Teoretická mechanika*. Prozatím nám stačí, když si představíme roztočený setrvačník ve tvaru obruče, počátek polohových vektorů zvolíme ve středu obruče a uvědomíme si, kam míří vektory $m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i$. Zkuste si to namalovat nebo nějak znázornit v prostoru – uvidíte, že míří ve směru osy.

[111] To, že setrvačník nespadne, tedy není žádná magie – je to fyzika!

Shrnutí

Tuhá soustava hmotných bodů i tuhé těleso mají šest **stupňů volnosti**.

Pohyb tuhého tělesa (a tuhé soustavy hmotných bodů) lze složit z pohybu **translačního** a **rotačního**.

Celkové veličiny se pro tuhé těleso počítají jako objemové integrály, např. $m = \int_V \rho \, dV$, $\vec{P} = \int_V \rho \, \vec{v} \, dV$.

Otáčení tělesa kolem osy:

$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ ... rychlost bodu, $\vec{r}$ začíná na ose otáčení, $\vec{\omega} = \omega \vec{\nu}$ je úhlová rychlost

$L_o = J_o \, \omega$ ... moment hybnosti do směru osy o

$J_o = \sum_{i=1}^{N} m_i R_i^2$ ev. $J_o = \int_V \rho R^2 \, dV$ ... moment setrvačnosti vzhledem k ose
(R_i ev. R je vzdálenost od osy)

Momenty setrvačnosti (homogenních) **těles**:

bod, obruč: $J = m R^2$, disk, válec: $J = \frac{1}{2} m R^2$, koule: $J = \frac{2}{5} m R^2$

tyč (osa na konci): $J = \frac{1}{3} m R^2$, tyč (osa uprostřed): $J = \frac{1}{12} m R^2$

Kinetická energie rotujícího tělesa:

$$T = \frac{1}{2} J_o \, \omega^2$$

Steinerova věta:

$J = m R_S^2 + J_S$ (moment setrvačnosti vůči ose rovnoběžné s osou procházející hmotným středem S; R_S je vzdálenost obou os, J_S moment setrvačnosti vůči ose procházející S)

Königova věta:

$T = \frac{1}{2} m v_S^2 + \frac{1}{2} J_S \, \omega^2$ (kinetická energie tělesa, které koná současně translační a rotační pohyb)

Rovnice pro otáčení tělesa kolem pevné osy:

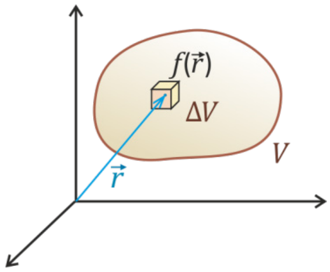
$$J \frac{d\omega}{dt} = M$$

Fyzické kyvadlo:

$\ddot{\varphi} + \frac{mgl}{J} \sin\varphi = 0$ ... rovnice pro pohyb kyvadla; pro malé výchylky se aproximuje $\sin\varphi \doteq \varphi$

$\omega = \sqrt{\frac{mgl}{J}}$ ... úhlová frekvence kmitů při malých výchylkách, perioda kmitů je $2\pi \sqrt{\frac{J}{mgl}}$

Dodatek 5.A: Objemový integrál

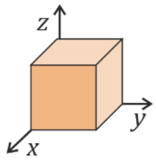


Objemový integrál,

$$\int_V f(\vec{r})\, dV \,, \tag{5.A.1}$$

je, názorně řečeno, součet všech příspěvků $f(\vec{r})\Delta V$ přes všechny části objemu tělesa; vektor $\vec{r}$ tedy při integraci probíhá všemi body vnitřku tělesa.[112]

Při výpočtu konkrétních integrálů v kartézských souřadnicích si můžeme dané kousky představit jako krychličky resp. velmi malé kvádry o hranách $\Delta x, \Delta y$ a Δz, objem takového kvádru je $\Delta V = \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$. „Elementární objem“ dV [113] si analogicky můžeme rozepsat jako $dV = dx\, dy\, dz$ a objemový integrál počítat jako tzv. *trojný integrál*.

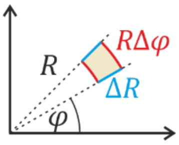


Příklad: Objemový integrál z funkce $f(\vec{r}) = f(x,y,z) = x \cdot y^2$ přes krychli o délce hrany 1:

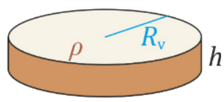
$$\int_V f(\vec{r})\, dV = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \big(\int_0^1 x \cdot y^2\, dx \big)\, dy \Big)\, dz = \int_0^1 \Big(\int_0^1 \big(\left[\tfrac{1}{2} x^2 \cdot y^2 \right]_0^1 \big)\, dy \Big)\, dz =$$

$$= \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Big(\int_0^1 y^2\, dy \Big)\, dz = \tfrac{1}{2} \int_0^1 \Big(\left[\tfrac{1}{3} y^3 \right]_0^1 \Big)\, dz = \tfrac{1}{6} \int_0^1 1\, dz = \tfrac{1}{6} \left[z \right]_0^1 = \tfrac{1}{6}$$

Objemový integrál nemusíme počítat jen v kartézských souřadnicích, ale například i ve válcových souřadnicích R, φ, z. Element objemu je pak „kvádřík“ o hranách $\Delta R, R\Delta\varphi$ a Δz.[114] (Obrázek ukazuje „obdélníček“, tedy průřez „kvádříku“ v rovině $z = \text{konst.}$) Element objemu, který zapíšeme do objemového integrálu, je tedy $dV = dR\, R d\varphi\, dz$.



Příklad: Výpočet hmotnosti homogenního válce o poloměru R_v, výšce h a hustotě ρ:



$$\int_V \rho\, dV = \int_0^h \Big(\int_0^{R_v} \big(\int_0^{2\pi} \rho \cdot R\, d\varphi \big)\, dR \Big)\, dz = \rho \int_0^h \Big(\int_0^{R_v} \left[\varphi \right]_0^{2\pi} R dR \Big)\, dz =$$

$$= 2\pi\rho \int_0^h \Big(\int_0^{R_v} R dR \Big)\, dz = 2\pi\rho \int_0^h \Big(\left[\tfrac{1}{2} R^2 \right]_0^{R_v} \Big)\, dz = \pi\rho R_v{}^2 \int_0^h 1\, dz = \pi R_v{}^2 h \rho$$

Výsledek samozřejmě vyšel podle očekávání (tj. objem válce krát hustota).

Objemový integrál můžeme počítat i z vektorové funkce; počítáme ho po složkách:

$$\int_V \vec{a}(\vec{r})\, dV = \left(\int_V a_x(\vec{r})\, dV,\ \int_V a_y(\vec{r})\, dV,\ \int_V a_z(\vec{r})\, dV \right), \tag{5.A.2}$$

---

[112] Můžeme si představit, že těleso myšlenkově rozřežeme na malé kousky a posčítáme příspěvky od těchto kousků. Integrál dá tento postup v limitě, kdy kousky budeme zmenšovat tak, že objem každého kousku půjde k nule.

[113] Tedy symbol dV, který se vyskytuje v objemovém integrálu (5.A.1).

[114] Pravda, on to není tak úplně kvádr, boční stěny má zakulacené, ale pro $\Delta\varphi \to 0$ se kvádru limitně blíží.

Dodatek 5.B: Dvojný součin

Dvojný součin $\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c})$ je součin tří vektorů, výsledkem je opět vektor. Vypočítat se dá přesně tak, jak naznačuje jeho zápis: nejprve vektorově vynásobíme vektory $\vec{b}$ a $\vec{c}$, výsledek $\vec{b}\times\vec{c}$ pak zleva vektorově vynásobíme vektorem $\vec{a}$.

Pro dvojný součin platí jednoduché a snadno zapamatovatelné pravidlo[115]. Je

$$\boxed{\vec{a}\times(\vec{b}\times\vec{c}) = \vec{b}\,(\vec{a}\cdot\vec{c}) - \vec{c}\,(\vec{a}\cdot\vec{b})} \tag{5.B.1}$$

Pokud jej chcete dokázat, stačí rozepsat příslušné součiny po složkách.[116]

[115] Generace studentů si ho pamatují jako pravidlo „bac mínus cab“.

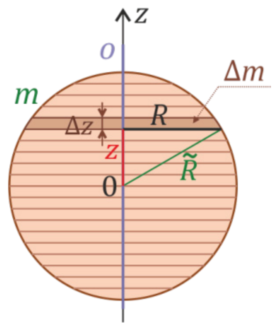
[116] Je to malinko zdlouhavé, ale vyjde to. Stručná ukázka, jak to lze udělat pro z-ovou složku dvojného součinu:

$$\left[\vec{a}\times\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)\right]_z = a_x\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_y - a_y\left(\vec{b}\times\vec{c}\right)_x = a_x\left(b_z c_x - b_x c_z\right) - a_y\left(b_y c_z - b_z c_y\right) =$$
$$= a_x b_z c_x - a_x b_x c_z - a_y b_y c_z + a_y b_z c_y = b_z\left(a_x c_x + a_y c_y\right) - c_z\left(a_x b_x + a_y b_y\right) =$$
$$= b_z\left(a_x c_x + a_y c_y\right) + b_z a_z c_z - c_z\left(a_x b_x + a_y b_y\right) - c_z a_z b_z =$$
$$= b_z\left(a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z\right) - c_z\left(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z\right) = b_z\left(\vec{a}\cdot\vec{c}\right) - c_z\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)$$

(Pozn.: Člen vyznačený šedou barvou je tam přidaný, jednou s + a jednou s –, takže nezmění výsledek.)
Pro x-ovou a y-ovou složku dostaneme výsledek buď analogickým výpočtem, nebo prostě cyklickou záměnou indexů: $x \to y$, $y \to z$, $z \to x$.
Pohodlněji se tento výsledek dokazuje, pokud vektorové součiny zapíšeme pomocí tzv. *Levi-Civitova symbolu* – ale pro naše potřeby teď tento formalismus není nutný. Zmiňujeme ho zde jen proto, aby bylo jasné, že to jde dokázat i chytřeji.

Dodatek 5.C: Moment setrvačnosti homogenní koule

Odvození „rozřezáním na disky“



Mějme homogenní kouli o poloměru $\tilde{R}$ a hmotnosti m. Koule se otáčí kolem osy o procházející středem koule. Jaký je moment setrvačnosti koule?

Kouli si můžeme představit rozřezánu na tenké disky, jak to ukazuje obrázek. Řežeme rovinami $z = \text{konst.}$; osu z přitom volíme ve směru osy o, počátek je ve středu koule.

Poloměr disku, jehož z-ová souřadnice je rovna z, je[117]

$$R = \sqrt{\tilde{R}^2 - z^2}$$

Hmotnost tohoto disku je

$$\Delta m \doteq \pi R^2 \Delta z \, \rho \ ,$$

kde ρ je hustota koule:

$$\rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi \tilde{R}^3} \tag{5.C.1}$$

Moment setrvačnosti daného disku je

$$\begin{aligned} \Delta J &\doteq \tfrac{1}{2}\Delta m \, R^2 = \tfrac{1}{2}\pi R^2 \Delta z \rho R^2 = \tfrac{1}{2}\pi \rho R^4 \Delta z = \\ &= \tfrac{1}{2}\pi \rho (\tilde{R}^2 - z^2)^2 \Delta z = \tfrac{1}{2}\pi \rho (\tilde{R}^4 - 2\tilde{R}^2 z^2 + z^4) \Delta z \end{aligned} \tag{5.C.2}$$

Moment setrvačnosti koule získáme sečtením všech těchto příspěvků, tedy integrací

$$\begin{aligned} J &= \int_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}} \tfrac{1}{2}\pi \rho \left(\tilde{R}^4 - 2\tilde{R}^2 z^2 + z^4\right) dz = \tfrac{1}{2}\pi \rho \int_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}} \left(\tilde{R}^4 - 2\tilde{R}^2 z^2 + z^4\right) dz = \\ &= \tfrac{1}{2}\pi \rho \left[\tilde{R}^4 z - \tfrac{2}{3}\tilde{R}^2 z^3 + \tfrac{1}{5} z^5\right]_{-\tilde{R}}^{\tilde{R}} = \tfrac{1}{2}\pi \rho \cdot 2 \cdot \left(\tilde{R}^4 \tilde{R} - \tfrac{2}{3}\tilde{R}^2 \tilde{R}^3 + \tfrac{1}{5}\tilde{R}^5\right) = \\ &= \pi \rho \cdot \tilde{R}^5 \cdot \left(1 - \tfrac{2}{3} + \tfrac{1}{5}\right) = \pi \cdot \frac{m}{\frac{4}{3}\pi \tilde{R}^3} \cdot \tilde{R}^5 \cdot \frac{15-10+3}{15} = \frac{m}{\frac{4}{3}} \cdot \tilde{R}^2 \cdot \frac{8}{15} = \frac{2}{5} m \tilde{R}^2 \end{aligned}$$

Při úpravách jsme už dosadili za hustotu ze vztahu (5.C.1).

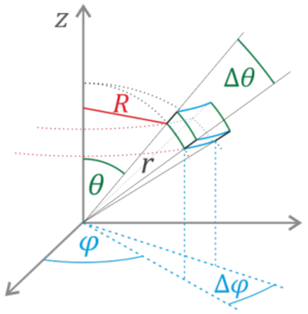
Označíme-li poloměr koule už prostě R (bez vlnovky), vidíme, že výsledek je

$$\boxed{J = \tfrac{2}{5} m R^2} \tag{5.C.3}$$

Stejný výsledek můžeme dostat i přímým výpočtem podle vztahu $J = \int_V \rho R^2 dV$, kdy objemový integrál počítáme jako třírozměrný integrál.

[117] Je to zřejmé z obrázku a z Pythagorovy věty.

Odvození pomocí třírozměrného integrálu ve sférických souřadnicích



Element objemu ve sférických souřadnicích je malý „kvádřík“ s délkami stran Δr [118], $r\,\Delta\theta$ [119] a $r\sin\theta\,\Delta\varphi$ [120]. Náš „kvádřík“ má sice některé strany mírně zakřivené, ale jsou-li délky stran mnohem menší než r, můžeme vliv tohoto zakřivení zanedbat.[121]

Objem „kvádříku“ je $\Delta V = \Delta r \cdot r\Delta\theta \cdot r\sin\theta\,\Delta\varphi = r^2 \sin\theta\,\Delta r\,\Delta\theta\,\Delta\varphi$. V objemovém integrálu budeme proto za dV psát $dV = r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$. Integrovat budeme přes všechny tři souřadnice r, θ a φ, půjde tedy o **trojný integrál**. V našem případě z něj však nakonec vyjde prostě součin tří integrálů přes jednotlivé proměnné.

Ještě je třeba si uvědomit, „odkud kam budeme integrovat“, tedy jaké jsou integrační meze pro jednotlivé proměnné. Je to jednoduché, musíme „projít“ celý objem koule. To znamená, že r se musí měnit od nuly do $\tilde{R}$ (tedy do poloměru koule), θ od nuly do π a φ od nuly do 2π.

A jaký výraz resp. jakou funkci budeme integrovat? Jak vidno ze vztahu $J = \int_V \rho R^2 dV$, bude to součin ρR^2, kde R je vzdálenost od osy rotace, což je osa z; je tedy $R = r\sin\theta$.

Integrál vyjadřující moment setrvačnosti koule tedy zapíšeme a následně budeme upravovat takto:

$$J = \int_V \rho R^2 dV = \int_0^{\tilde{R}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \rho (r\sin\theta)^2 r^2 \sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi = \rho \int_0^{\tilde{R}}\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} r^4 \sin^3\theta\; dr\, d\theta\, d\varphi =$$
$$= \rho \int_0^{\tilde{R}} r^4 dr \int_0^{\pi} \sin^3\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi = \rho \left[\tfrac{1}{5} r^5\right]_0^{\tilde{R}} \left(\int_0^{\pi} (1-\cos^2\theta)\sin\theta\, d\theta \right) \left[\varphi\right]_0^{2\pi} = \qquad (5.C.4)^{122}$$
$$= \rho \tfrac{1}{5}\tilde{R}^5 \left(\int_{-1}^{1} (1-x^2)\, dx \right) 2\pi = 2\pi\rho \tfrac{1}{5}\tilde{R}^5 \underbrace{\left[x - \tfrac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1}}_{\frac{4}{3}} = \underbrace{\tfrac{4}{3}\pi\tilde{R}^3\rho}_{m}\, \tfrac{2}{5}\tilde{R}^2 = \tfrac{2}{5} m\tilde{R}^2$$

Dostali jsme, samozřejmě, stejný výsledek, jako (5.C.3)

[118] Představte si na Zemi nebo na glóbusu stranu o délce Δr v radiálním směru, tedy ve směru kolmo na povrch Země nebo glóbusu.

[119] Tuto stranu si představte ve směru poledníku – jde vlastně o malý kruhový oblouk, jehož poloměr je r (poloměr Země či glóbusu) a úhel $\Delta\theta$ (tj. „rozdíl zeměpisných šířek“, samozřejmě v radiánech).

[120] Strana ve směru rovnoběžky, opět malý kruhový oblouk. Poloměr rovnoběžky je $r\sin\theta$, úhel $\Delta\varphi$ („rozdíl zeměpisných délek“, opět v radiánech).

[121] Navíc při integrování se vlastně element objemu bere jako infinitesimální, takže z veškerých přibližných vztahů nakonec budou přesné, jako tomu bylo už v řadě dřívějších výpočtů a odvození.

[122] Pro někoho bude možná zápis trojného integrálu přehlednější ve tvaru, kdy jde explicite o „tři integrály v sobě“: $\int_0^{\tilde{R}} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} \rho r^4 \sin^3\theta \;\; d\varphi \right) d\theta \right\} dr = \rho \int_0^{\tilde{R}} \left\{ \int_0^{\pi} \left(\int_0^{2\pi} d\varphi \right) \sin^3\theta\, d\theta \right\} r^4 dr = \rho \int_0^{\tilde{R}} \left\{ \int_0^{\pi} 2\pi \sin^3\theta\, d\theta \right\} r^4 dr = \ldots$

(Zbytek výpočtu necháváme laskavému čtenáři jako jednoduché cvičení, jde ostatně o stejné obraty, jako v (5.C.4).)