Základní pojmy a vztahy speciální teorie relativity

Tato kapitola bude velmi stručná, protože speciální teorii relativity (STR) je věnována samostatná přenáška ve třetím ročníku. Zmíníme zde proto jen několik věcí, které se budou hodit v některých partiích fyziky, které budete probírat do té doby. A na rozdíl od předchozích kapitol zde budeme řadu věcí pouze konstatovat bez odvozování; podrobnosti si opravdu necháme do samostatné přednášky. [1]

7.1 Relativistická kinematika

Slavný neúspěch: éterová teorie a Michelsonův pokus

V předchozí kapitole jsme se seznámili s klasickým principem relativity. Ten konstatuje, že *mechanickými* pokusy nelze od sebe rozlišit inerciální soustavy, tedy například najít nějakou význačnou resp. „nejlepší“. V druhé polovině 19. století ovšem fyzikové byli přesvědčeni, že inerciální soustavy by měly jít rozlišit *optickými* pokusy.

Bylo totiž už známo, že světlo je vlnění. A protože do té doby byly známé jen různé druhy vlnění v nějakém prostředí [2], bylo přirozené předpokládat, že i světlo je vlněním nějakého prostředí. Toto hypotetické prostředí dostalo i jméno: *éter* [3]. Protože světlo k nám přichází i od Slunce a hvězd, musel éter vyplňovat i meziplanetární a mezihvězdný prostor. Význačnou soustavou by pak byla tak, která by byla vůči éteru v klidu, tedy *soustava éteru*.

Šlo by optickými pokusy najít soustavu éteru? Mělo by to jít. V soustavě éteru se totiž světlo ve vakuu šíří všemi směry stejnou rychlostí.[4] Toto ale platí právě jen v soustavě éteru! V jiných soustavách (které se vůči soustavě éteru pohybují) se světlo mělo šířit v různých směrech různou rychlostí.[5] To znamená, že měřením rychlosti světla na Zemi v různých směrech mělo jít naměřit pohyb Země vůči soustavě éteru.

Vzhledem k tomu, že rychlost pohybu Země kolem Slunce je asi 30 km/s a rychlost světla asi $3{\cdot}10^5$ km/s, přesnost měření zdaleka nedostačovala ke změření očekávaného efektu.[6] Americký fyzik Albert Abraham Michelson ovšem navrhl velice chytrý experiment (jeho popis si necháme do zmíněného předmětu ve vyšším ročníku), který rychlost Země vůči éteru měl změřit. Ale ani první pokus

[1] Je mi líto, ale je tomu tak. Ale zase je to jedna z věcí, na které se můžete těšit ve vyšších ročnících… ☺
[2] Třeba zvuk je podélným vlněním ve vzduchu (a obecněji v plynech, kapalinách i pevných látkách); v pevných látkách se navíc šíří i příčné vlny.
[3] Také se někdy říkalo „světlonosný éter“. (Nemá nic společného s chemickými sloučeninami téhož jména; psaná podoba v chemii se ostatně liší: ether). Vlněním éteru bylo podle představ konce 19. století nejen světlo, ale veškeré elektromagnetické záření. V tomto smyslu přetrvává slovo „éter“ v jazyce dodnes: občas ještě lze zaslechnout, že „přijímáme signály z éteru“.
[4] Podobně, jako se v klidném vzduchu šíří všemi směry stejnou rychlostí zvuk.
[5] Tento výsledek nám dá už transformace rychlostí při Galileiho transformaci. Často se používá analogie s plavcem v proudu řeky. Proudící voda je analogií éteru: vůči ní plavec plave stejnou rychlostí, ať plave kterýmkoli směrem. Ovšem vůči břehu je rychlost plavce různá když plave po proudu, proti proudu nebo třeba kolmo na něj. (Břeh je soustavou, která se vůči vodě pohybuje.) Nebo si představte člun, který pluje po jezeře, všemi směry stejnou rychlostí, stejně jako světlo vůči éteru. Vůči autu, kterým jedeme po břehu jezera, ovšem rychlost člunu nebude stejná. (Když auto jede proti plavci, bude zjevně vzájemná rychlost vyšší.) Zkuste si sami vymyslet podobné situace, na nichž byste mohli tento efekt někomu vysvětlit.
[6] Problém je zejména v tom, že tehdejší metody měřily rychlost světla po uzavřené dráze (tedy „tam a zase zpátky“). I tato rychlost se liší v různých směrech, ale rozdíl je jen řádu $(v/c)^2$, v daném případě tedy řádu 10^{-8}.

v r. 1881, ani vylepšená verze v r. 1887 (spolu s E. W. Morleym) a ostatně ani všechny další pokusy tohoto typu prováděné později nedaly pozitivní výsledek: pohyb Země vůči éteru se nepodařilo naměřit.

Jde asi o jeden z nejslavnějších negativních výsledků v dějinách fyziky.[7] Fyzikové se samozřejmě snažili pozorovaný výsledek vysvětlit a přizpůsobit éterovou teorii tak, aby s ním byla v souladu. Ale až Albert Einstein měl odvahu přijít se zcela novým přístupem: nesnažit se zachránit éterovou teorii, ale vyjít z toho, že žádná význačná soustava éteru zřejmě neexistuje a podívat se, jaké to má důsledky.[8]

Výchozí principy STR

Speciální teorie relativity se zakládá na dvou základních principech: speciálním principu relativity a principu konstantní rychlosti světla.

Speciální princip relativity lze formulovat velmi stručně:

Všechny inerciální systémy jsou rovnoprávné.[9]

A to jak z hlediska pokusů, tak z hlediska fyzikálních zákonů. Formulace s důrazem na pokusy může znít:

Libovolný stejně připravený pokus dá ve všech inerciálních soustavách stejné výsledky.[10]

Formulace s důrazem na fyzikální zákony pak:

Libovolný fyzikální zákon má ve všech inerciálních systémech stejný tvar.

Vidíme, že že jde o princip vemi podobný klasickému principu relativity, jen se zde už neomezujeme na mechanické pokusy a zákony klasické mechaniky – speciální princip relativity mluví o ***všech*** pokusech a ***všech*** fyzikálních zákonech.[11]

Princip konstantní rychlosti světla zní:

Světlo se ve vakuu šíří ve všech inerciálních systémech stejnou rychlostí.[12]

Tento princip přirozeně vysvětluje výsledek Michelsonova pokusu. Oba výchozí principy vypadají poměrně „nevinně“; pojďme se však podívat na jejich důsledky.

---

[7] Když se vám nepovede nějaký pokus v praktiku (nebo ve třídě, až budete učit), tak se o něm zřejmě nebude s uznáním psát ještě po více než 130 letech. ☺ V Michelsonově případě ovšem nešlo o to, že by se mu pokus nepovedl – on se povedl, jen příroda se chovala jinak, než si fyzikové podle éterové teorie představovali.

[8] Albert Einstein přitom zřejmě nevycházel přímo z výsledků Michelsonova pokusu, ale spíše reagoval na práce fyziků, kteří se jej snažili vysvětlit. Později ovšem roli Michelsonova pokusu na cestě k STR výrazně ocenil. Dnes se při výkladech STR obvykle bere tento pokus jako důležité východisko.

[9] Nebo jinak řešeno: **Žádný inerciální systém není privilegován**.

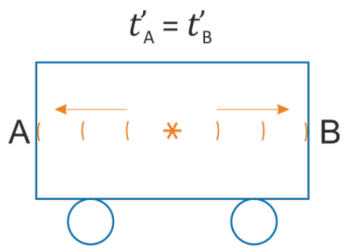
[10] To znamená, že: **Žádným fyzikálním pokusem nelze od sebe inerciální soustavy rozlišit**.

[11] To je odvaha, že? Je povzbuzující, že za více než století, které uplynulo od jeho formulace v roce 1905, se neobjevily pokusy a zákony, které by byly se s tímto principem v rozporu. (Nepočítáme přitom se zobecněním a upřesněním, které provedla obecná teorie relativity, která platnost STR vymezuje na tzv. lokální inerciální systémy.)

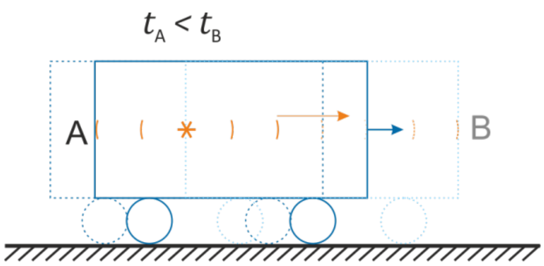
[12] Někdy se ještě explicite dodává: nezávisle na směru a nezávisle na pohybu zdroje.

Důsledek výchozích principů: čas není jeden

Představme si myšlenkový experiment.[13] Uvažujme vagón, který je v klidu vůči nějaké inerciální soustavě.[14] Uprostřed vagónu vyšleme v určitý okamžik světelné signály (záblesky) k přední a zadní stěně. Oba světelné signály se vzhledem k vagónu pohybují rychlostí světla; než dopadnou na přední a zadní stěnu vagónu, urazí stejnou dráhu, takže je jasné, že cestovaly stejně dlouho. Protože vyrazily ve stejný okamžik, je jasné, že na přední a zadní stranu dopadnou ve stejný čas, takže $t'_{\mathrm{A}} = t'_{\mathrm{B}}$. Vidíme tedy, že v soustavě vagónu nastanou události[15] A a B ve stejný čas t'.



Jak je tomu v soustavě S spojené s kolejemi, po nichž vagón jede rovnoměrně přímočaře? Jde opět o soustavu inerciální, takže i vůči ní se světlo pohybuje všemi směry stejnou rychlostí. Zadní stěna vagónu jde „naproti“ světelnému signálu, který se pohybuje vzad (doleva), přední stěna vagónu naopak „utíká“ signálu, který se pohybuje vpřed. Je tedy jasné, že když signál dopadne na zadní stěnu (událost A), signál pohybující se vpřed ještě zdaleka není u přední stěny (událost B), viz obrázek. To znamená, že v systému kolejí je $t_{\mathrm{A}} < t_{\mathrm{B}}$, takže události A a B nastaly v *různých* časech *t*.[16]



To znamená, že **události, které jsou současné v jednom inerciálním systému, nejsou obecně současné v jiném inerciálním systému**[17]. Čili:

V různých inerciálních systémech je obecně různý čas.

To znamená, že nelze zavést jeden společný čas pro všechny inerciální systémy. Při transformaci z jedné inerciální soustavy do druhé tedy nestačí transformovat jen prostorové souřadnice, musí se transformovat i čas.

[13] Myšlenkové experimenty se při výkladu teorie relativity a jejích důsledků používají velmi často. (Při nich totiž klidně můžeme uvažovat raketu nebo vagón pohybující se třeba polovinou rychlosti světla. Demonstrovat to v učebně s reálným modelem vagónu, by asi nezvládl ani Superman. A kdyby ano, těžko bychom názorně viděli výsledky; takový vagónek by učebnou prosvištěl za pár desítek nanosekund…)

[14] Tuto soustavu označíme S', časy v této soustavě budeme značit t'.

[15] V teorii relativity se termínem *událost* označuje něco, co se stalo na určitém místě v určitém čase. Událostí tedy není jen přistání člověka na Měsíci, pád vlády, první detekce gravitačních vln nebo skandál nějaké celebrity (☺), ale třeba vyslání nebo přijetí signálu. V našem myšlenkovém pokusu jsme jako událost A označili dopad světelného signálu na zadní stěnu, událost B je dopad signálu pohybujícího se vpřed na přední stěnu.

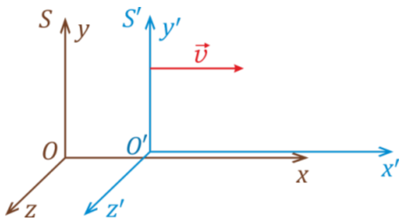
[16] Pro skutečný vagón na skutečných kolejích je ovšem časový rozdíl nepatrný, i kdyby šlo o sebemodernější rychlovlak. Kdyby vagón jel polovinou rychlosti světla, byl by už rozdíl výrazný. V populárních výkladech se často v myšlenkových pokusech mluví právě o vagónech; začal s tím při popularizaci své teorie již sám Einstein. (Prý snad proto, že před těmi zhruba sto lety byl vlak pro širokou veřejnost synonymem rychlého dopravního prostředku.)

[17] Současnost tedy není absolutní, stejná pro všechny inerciální systémy; v této souvislosti se používá termín *relativita současnosti*.

Lorentzova transformace

Ve speciální teorii relativity nemůže platit Galileiho transformace. Jednak se při ní netransformuje čas a jednak z ní plyne, že rychlosti se skládají „algebraicky“: Například když ve vlaku jedoucím rychlostí 15 km/h běží někdo dopředu rychlostí 30 km/h [18], pohybuje se vůči kolejím rychlostí 45 km/h. Takže když bychom v raketě, která by se pohybovala rychlostí 150 tisíc km/s (třeba vůči Slunci), vyslali od zádi ke špičce světelný signál, pohybující se vzhledem k raketě samozřejmě rychlostí 300 tisíc km/s, očekávali bychom[19], že se ten signál vůči Slunci bude pohybovat rychlostí 450 tisíc km/s. Jenže on se vůči Slunci bude pohybovat zase rychlostí 300 tisíc km/s! [20]

Správnou transformací je **Lorentzova transformace**. Uvedeme ji tu bez odvození, a jen pro případ, který jsme uvažovali již v předchozí kapitole. (Osy obou systémů S a S' jsou rovnoběžné, osy x a x' splývají, systém S' se pohybuje ve směru osy x rychlostí v a v čase t=0 splývaly počátky obou systémů. V tomto případě mluvíme o **speciální Lorentzově transformaci**.)



Speciální Lorentzova transformace má tvar[21]:

$$
\begin{array}{ll}
x' = \dfrac{x - v\cdot t}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} & x = \dfrac{x' + v\cdot t'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} \\
y' = y & y = y' \\
z' = z & z = z' \\
t' = \dfrac{t - \dfrac{v}{c^2}\cdot x}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} & t = \dfrac{t' + \dfrac{v}{c^2}\cdot x'}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}
\end{array}
\tag{7.1}
$$

Konstanta c je rychlost světla, c = 299 792 458 m/s ≐ $3\cdot 10^8$ m/s. Je vidět, že musí být v < c, aby vztahy měly smysl. Jinými slovy: **inerciální systémy se navzájem nemohou pohybovat rychlostí světla nebo vyšší**.

[18] Hm, to znamená uběhnout stovku za 12 sekund… Pro autora těchto řádek jednoznačně jen myšlenkový pokus, pro některé z vás asi něco, co se dá zvládnout.
[19] podle Galileiho transformace a podle toho, na co jsme zvyklí z běžného života
[20] v souladu s principem konstantní rychlosti světla
[21] V levém sloupci je Lorentzova transformace z S do S', v pravém sloupci **inverzní Lorentzova transformace** z S' do S.

Transformace rychlosti

Z Lorentzovy transformace lze odvodit **transformaci rychlostí**[22]:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}} \quad \text{a analogicky pro } u_z . \tag{7.2}$$

Inverzní transformace je

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1 + \frac{u'_x \upsilon}{c^2}}, \quad u_y = \frac{u'_y \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 + \frac{u'_x \upsilon}{c^2}} . \tag{7.3}$$

(Levý vztah můžeme označit za vztah pro *skládání rychlostí*. Zkuste do něj dosadit $u'_x = c$. Co vám vyjde jako u_x ? [23])

Z Lorentzovy transformace lze také odvodit vztahy pro dva známé důsledky:

Kontrakce délek (vztahuje se na délku tyče ve směru rychlosti $\vec{\upsilon}$):

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{7.4}$$

Zde l_0 je délka tyče v soustavě, v níž je tyč v klidu (tzv. *klidová délka*), l je délka tyče v soustavě, vůči níž se tyč pohybuje rychlostí υ.

Dilatace času:

$$t = \tau \Big/ \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{7.5}$$

Zde τ je doba, kterou naměří pohybující se hodiny (tzv. *vlastní čas*)[24] a t je příslušná doba v soustavě, vůči níž se hodiny pohybují rychlostí υ.

Detailnější diskusi relativistické kinematiky a jejích důsledků si necháme do specializované přednášky a představíme si ještě několik vztahů z relativistické dynamiky.

[22] Odvození by se dělalo podobným způsobem, jako v předchozí kapitole odvození z Galileiho transformace.
[23] Vyjde $u_x = c$. Jde o situaci zmíněnou výše, kdy v letící raketě vyšleme světelný signál dopředu.
[24] Je to tedy délka časového intervalu v soustavě, v níž jsou hodiny v klidu.

7.2 Relativistická dynamika

Vztahy relativistické dynamiky už zde představíme opravdu jen stručně.

Relativistická hmotnost

Jako **klidovou hmotnost** m_0 označujeme hmotnost částice[25] měřenou v soustavě, kde je tato částice v klidu.[26] Pokud se částice vůči inerciální soustavě S pohybuje rychlostí $\vec{u}$ [27], pak její hmotnost naměřená v S je

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{7.6}$$

Této hmotnosti říkáme **relativistická hmotnost**.[28]

Některé částice, například foton, mají klidovou hmotnost nulovou. Toto můžeme brát do jisté míry za formalitu, protože foton nelze zastavit, abychom jeho klidovou hmotnost změřili. Na druhou stranu řada vztahů relativistické dynamiky platí i pro fotony, pokud do nich dosadíme $m_0 = 0$.

Relativistická hybnost

Hybnost částice pohybující se rychlostí $\vec{u}$ je

$$\vec{p} = m\,\vec{u} = \frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad . \tag{7.7}$$

Pro fotony platí $\vec{p} = m\,\vec{u}$; výraz na pravé straně (7.7) ovšem samozřejmě nemůžeme použít.[29]

Relativistická pohybová rovnice

Pozor! Pohybová rovnice částice v STR **není** $\cancel{m\,\vec{a} = \vec{F}}$, a to ani, kdybychom za *m* dosadili relativistickou hmotnost. Správná pohybová rovnice je

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}, \quad \text{čili} \quad \frac{d}{dt}\left(m\,\vec{u}\right) = \vec{F}, \quad \text{čili (pro částice s } m_0 \neq 0\text{)}: \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} \quad . \tag{7.8}$$

[25] Nemusí jít o elementární částici. Ve speciální teorii relativity se termínem „částice“ označuje totéž, co jsme v klasické mechanice nazývali „hmotný bod“.

[26] Pro elementární částice jde o jednu ze základních charakteristik částice.

[27] Pro rychlost částice volíme symbol $\vec{u}$. (Symbol v rezervujeme pro vzájemnou rychlost inerciálních systémů.) V řadě vztahů se samozřejmě objeví velikost rychlosti $u = |\vec{u}|$.

[28] Sluší se poznamenat, že fyzikové z oboru částicové fyziky většinou relativistickou hmotnost nezavádějí a „vystačí si“ s klidovou hmotností. Ovšem například elektrony obíhající v látce kolem atomových jader přispívají k celkové hmotnosti látky právě svou relativistickou, a nikoli klidovou hmotností. Již kvůli tomu a podobným efektům má proto smysl relativistickou hmotnost zavádět.

[29] Šlo by o výraz „nula děleno nulou“.

Ekvivalence hmotnosti a energie

Mezi energií a relativistickou hmotností částice platí slavný vztah

$$\boxed{E = mc^2 .} \tag{7.9}$$

Jde opravdu o **ekvivalenci** hmotnosti a energie.[30]

Částice nebo těleso, které jsou v inerciálním systému S v klidu, mají v tomto systému hmotnost rovnou klidové hmotnosti m_0. Ze (7.9) plyne, že v tomto systému mají energii

$$E_0 = m_0 c^2 . \tag{7.10}$$

Této energii říkáme **klidová energie**.

Klidová energie i malého kousku látky je ohromná. Ze vztahu (7.10) plyne, že 1 gram libovolné látky ukrývá energii $9 \cdot 10^{15}$ J. (!)

Na druhou stranu ze (7.10) plyne, že pokud látce dodáme energii – například když ji zahřejeme – vzroste i její hmotnost. Ovšem vzhledem k velikosti faktoru c^2 je zvýšení hmotnosti nepatrné a v běžných situacích neměřitelné.[31]

Z výše uvedených vzorců můžeme odvodit ještě velmi užitečný vztah spojující energii částice, její hybnost a klidovou energii resp. klidovou hmotnost.

Ze (7.6) plyne $m_0 = m \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}$. Po vynásobení c^2 a umocnění na druhou dostáváme

$$m_0^2 c^4 = m^2 c^4 \cdot \left(1 - \frac{u^2}{c^2}\right) = \underbrace{m^2 c^4}_{E^2} - (\underbrace{mu}_{p})^2 c^2 = E^2 - p^2 c^2 .$$

Protože $m_0^2 c^4 = E_0^2$, lze daný výsledek zapsat ve tvaru

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^2 \tag{7.11}$$.[32]

Jinou možností, jak zapsat tento výsledek, je

$$\boxed{E^2 = p^2 c^2 + m_0^2 c^4} \tag{7.12}$$

Pro foton, protože v jeho případě je $m_0 = 0$, plyne ze (7.12) vztah mezi jeho energií a hybností:

$$E = pc .$$

[30] Cokoli má hmotnost, má také příslušnou energii a naopak.
[31] Zkuste si sami spočítat, o kolik se zvýší hmotnost kilogramového ocelového závaží, když ho zahřejete z nuly na sto stupňů Celsia.
[32] Kombinace členů z energie a hybnosti na levé straně (7.11) je tedy stejná ve všech inerciálních systémech, nemění se při transformaci z jednoho inerciálního systému do jiného. Říkáme, že jde o *invariant*. (Ale pokud vám toto konstatování zní příliš krypticky, tak ho zatím ignorujte...)

Shrnutí

Výchozí principy STR

Speciální princip relativity: Všechny inerciální systémy jsou rovnoprávné (z hlediska všech pokusů a všech fyzikálních zákonů).

Princip konstantní rychlosti světla: Světlo se ve vakuu šíří ve všech inerciálních systémech stejnou rychlostí.

(Důsledek výchozích principů: Čas není ve všech inerciálních systémech stejný.)

Relativistická kinematika

Lorentzova transformace (speciální)**:**

$$x' = \frac{x - \upsilon \cdot t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2} \cdot x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Inverzní Lorentzova transformace má přehozené čárkované a nečárkované veličiny a opačné znaménko před rychlostí v čitateli (tedy $x = \left(x' + \upsilon \cdot t'\right) \big/ \sqrt{1 - \upsilon^2 / c^2}$, atd.).

Transformace rychlostí:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}, \quad u'_y = \frac{u_y \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}$$

Transformace u_z je analogická jako pro u_y. V inverzní transformaci jsou přehozené čárkované a nečárkované veličiny a je opačné znaménko před rychlostí υ.

Kontrakce délek:

$$l = l_0 \cdot \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Dilatace času:

$$t = \tau \Big/ \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$$

Relativistická dynamika

Relativistická hmotnost:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Relativistická hybnost:

$$\vec{p} = m \vec{u} = \frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}$$

Klidová hmotnost m_0 je měřena v soustavě, vůči níž je částice v klidu.

Pro foton je $m_0 = 0$, relativistická hybnost fotonu je nenulová. Hybnost fotonu je $\vec{p} = m \vec{u}$.

Relativistická pohybová rovnice: $\frac{d}{dt}\left(m \vec{u}\right) = \vec{F}$ (pozor, obecně m nejde vytknout)

Ekvivalence hmotnosti a energie:

$$E = m c^2$$

Klidová energie:

$$E_0 = m_0 c^2$$

Vztah mezi energií, hybností a klidovou energií resp. klidovou hmotností:

$$E^2 - p^2 c^2 = E_0^{\,2} \qquad \text{resp.} \qquad E^2 = p^2 c^2 + m_0^{\,2} c^4$$

Vztah platí i pro částice s nulovou klidovou hmotností, např. pro foton. Je pro ně $E = p c$.

K této kapitole zatím není žádný dodatek.[33]

[33] Laskavý čtenář si nějaký může dopsat sám…