

Analytická řešení pohybu částic¹ a těles

V této kapitole se podrobněji podíváme na některé pohyby hmotných bodů v různých silových polích nebo obecně při působení vnějších sil. Pohyb hmotného bodu budeme počítat z druhého Newtonova zákona $m\vec{a} = \vec{F}$, tedy z diferenciální rovnice $m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$. Tuto rovnici známe už z kapitoly 2 (viz (2.8)) a víme, že se jí říká **pohybová rovnice**. V kapitole 2 jsme si vyzkoušeli, že pohybové rovnice lze řešit numericky, pomocí počítače. Numericky by šlo řešit i všechny problémy, které budeme popisovat níže. V této kapitole nám ale půjde o obecná **analytická** řešení, tedy řešení ve tvaru vzorců.

8.1 Nabitá částice v homogenním elektrickém nebo magnetickém poli

Jak se pohybuje nabitá částice, například elektron, iont nebo nabitá kulička, v elektrickém nebo magnetickém poli? V obecném případě nehomogenních polí je to trochu složitější, takže zatím zvládneme případ, kdy pole je homogenní a jde buď jen o elektrické, nebo jen o magnetické pole.

Nabitá částice v homogenním elektrickém poli

Uvažujme částici o hmotnosti m a náboji q v homogenním elektrickém poli² o intenzitě \vec{E} . Síla, kterou pole působí na částici, je $\vec{F} = q\vec{E}$. Rovnice pro pohyb částice je tedy

$$m \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = q\vec{E}. \quad (8.1)$$

Homogenní pole je konstantní, $\vec{E} = \text{konst.}$ ³ Pro co nejnázornější řešení je vhodné rovnici (8.1) přepsat pomocí rychlosti $\vec{v} = d\vec{r}/dt$:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E}. \quad (8.2)$$

Tuto rovnici můžeme jednoduše integrovat podle času⁴:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{q}{m} \vec{E} \quad \Big/ \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0 \quad (8.3)$$

a další integrací dostaneme

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \frac{q}{m} \vec{E} t + \vec{v}_0 \quad \Big/ \int dt \quad \Rightarrow \quad \vec{r} = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0. \quad (8.4)$$

¹ Termín „částice“ zde používáme jako synonymum pro hmotný bod. Může jít i o elementární částice, například v případě pohybu elektronu v elektrickém nebo magnetickém poli. Částice ovšem přitom chápeme v klasickém smyslu, nebereme v úvahu jejich kvantový charakter. (Můžeme si je tedy představovat jednoduše „jako malé kuličky“ – konec konců, o abstrakci a zanedbávání jsme se bavili už v první kapitole.)

² Přesněji: půjde o pole *elektrostatické*, takže jeho intenzita nebude záviset na čase. (Poznámka na okraj: Z Maxwellových rovnic plyne, že kdyby se elektrické pole s časem měnilo, muselo by být přítomno i magnetické pole. Takže pokud chceme pouze homogenní elektrické pole, nesmí se s časem měnit.)

³ Takže i působící síla je konstantní. Už z toho můžeme usoudit, že pohyb částice bude podobný, jako v případě šikmého vrhu v homogenním gravitačním poli, takže trajektorii částice bude zřejmě parabola. Teď to jen ještě odvodit řešením dané diferenciální rovnice...

⁴ Využíváme toho, že pravá strana je konstantní. Pokud vám přijde zvláštní, že integrujeme vektory, uvědomte si, že integraci (podobně jako derivaci) děláme po složkách.

Konstanty \vec{v}_0 a \vec{r}_0 určíme z počátečních podmínek. (Fakticky v tomto případě jde o rychlost a polohu částice v čase $t=0$.)

Pohyb můžeme samozřejmě řešit také ve složkách. V tom případě je výhodné zvolit soustavu souřadnic tak, že intenzita elektrického pole bude mít směr některé osy, například osy z . Pak je $\vec{E} = (0, 0, E)$. Rovnice (8.2) zapsané ve složkách pak jsou

$$\frac{dv_x}{dt} = 0, \quad \frac{dv_y}{dt} = 0, \quad \frac{dv_z}{dt} = \frac{q}{m} E \quad (8.5)$$

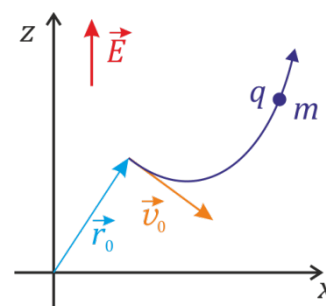
Odtud integrací podle času dostaneme, že

$$v_x = v_{0x}, \quad v_y = v_{0y}, \quad v_z = \frac{q}{m} E t + v_{0z} \quad (8.6)$$

Integrací (8.6) podle času pak dostaneme

$$\begin{aligned} x &= v_{0x} t + x_0, \\ y &= v_{0y} t + y_0, \\ z &= \frac{q}{2m} E t^2 + v_{0z} t + z_0 \end{aligned} \quad (8.7)$$

Vidíme, že jde opravdu o analogii šikmého vrhu v homogenním gravitačním poli⁵, trajektorii pohybu je parabola. (Viz obrázek vpravo, kde pro přehlednost nekreslíme osu y .)



Nabitá částice v homogenním magnetickém poli

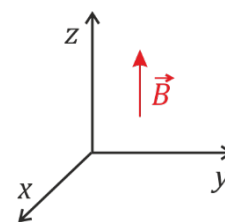
Na částici s nábojem q pohybující se rychlostí \vec{v} působí v magnetickém poli o magnetické indukci \vec{B} **Lorentzova síla**

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (8.8)$$

Pohybovou rovnici zapíšeme a budeme řešit ve složkách. Pro jednoduchost natočíme souřadnou soustavu tak, že magnetická indukce bude mít směr osy z , tj. $\vec{B} = (0, 0, B)$.

Vektorový součin v (8.8) pak bude

$$\begin{aligned} \vec{v} \times \vec{B} &= (v_x, v_y, v_z) \times (0, 0, B) = \\ &= (v_y B, -v_x B, 0) \end{aligned}$$



Pole předpokládáme homogenní, takže $B = \text{konst}$.

Pohybová rovnice $m \frac{d\vec{v}}{dt} = q \vec{v} \times \vec{B}$ tedy bude ve složkách

$$m \frac{dv_x}{dt} = q v_y B, \quad (8.9a)$$

$$m \frac{dv_y}{dt} = -q v_x B, \quad (8.9b)$$

⁵ Až na to, že zrychlení částic s různým poměrem q/m jsou samozřejmě různá.

$$m \frac{dv_z}{dt} = 0 . \quad (8.9c)$$

Řešení rovnice (8.9c) je jednoduché: $v_z = \text{konst.}$, takže pohyb ve směru osy z je rovnoměrný,

$$z = V_{z0} \cdot t + z_0 \quad (8.10)$$

Dvě zbývající pohybové rovnice (8.9a) a (8.9b) nejprve drobně upravíme vydělením hmotností:

$$\frac{dv_x}{dt} = \frac{qB}{m} v_y , \quad (8.11a)$$

$$\frac{dv_y}{dt} = -\frac{qB}{m} v_x , \quad (8.11b)$$

Tyto rovnice jsou provázané.⁶ Pro jejich řešení funguje hezký „trik“: Zderivujeme je podle času. Dostaneme

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} \quad (8.12a)$$

$$\frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\frac{qB}{m} \frac{dv_x}{dt} \quad (8.12b)$$

Do pravé strany (8.12a) dosadíme (8.11b):

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = \frac{qB}{m} \frac{dv_y}{dt} = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 v_x \quad (8.13)$$

Označíme

$$\frac{qB}{m} = \omega . \quad (8.14)$$

Rovnici (8.13) pak můžeme přepsat na tvar

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} + \omega^2 v_x = 0 . \quad (8.15)$$

Její řešení je:

$$v_x = V \cdot \sin(\omega t) ,^7 \quad (8.16)$$

V je konstanta, jejíž význam uvidíme za chvíli. Vztah pro v_y bychom mohli odvodit analogicky, jednodušší je však vyjít z (8.11a) a vyjádřit v_y jako⁸

$$v_y = \frac{m}{qB} \frac{dv_x}{dt} = \frac{1}{\omega} \frac{d}{dt} (V \cdot \sin(\omega t)) = V \cdot \cos(\omega t) . \quad (8.17)$$

Z výsledných složek rychlosti

⁶ Tj. v každé z nich se vyskytují obě neznámé funkce $v_x(t)$, $v_y(t)$.

⁷ Rovnici typu (8.15) už jsme potkali v kapitole 2, viz vztah (2.15). Podrobněji budeme tyto rovnice řešit dále. Řešení (8.16) není obecné, v obecném řešení by mohl být ještě fázový posun: $v_x = V \cdot \sin(\omega t + \varphi)$.

⁸ Při úpravě zde užíváme (8.14) a (8.16).

$$\begin{aligned}v_x &= V \cdot \sin(\omega t) \\v_y &= V \cdot \cos(\omega t)\end{aligned}\tag{8.18}$$

můžeme jednak získat velikost rychlosti v rovině xy : $v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt{V^2(\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} = V$. Odsud už vidíme, jaký je význam konstanty V .⁹

Ze složek rychlosti (8.18) integrací určíme závislost souřadnic na čase:

$$\begin{aligned}x &= \int v_x dt = \int V \cdot \sin(\omega t) dt = -\frac{V}{\omega} \cos(\omega t) \\y &= \int v_y dt = \int V \cdot \cos(\omega t) dt = \frac{V}{\omega} \sin(\omega t)\end{aligned}\tag{8.19}$$

Jak interpretovat tento výsledek?¹¹ Vztahy (8.19) jsou rovnicí kružnice¹², takže v průmětu do roviny xy jde o pohyb po kružnici. Že jde o kružnici, je jasně vidět, když spočteme

$$x^2 + y^2 = \left(\frac{V}{\omega}\right)^2 \cdot (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t)) = \left(\frac{V}{\omega}\right)^2.\tag{8.20}$$

$x^2 + y^2 = R^2$ je rovnice kružnice o poloměru R ; z (8.20) vidíme, že

$$R = \frac{V}{\omega} \Rightarrow V = R\omega,\tag{8.21}$$

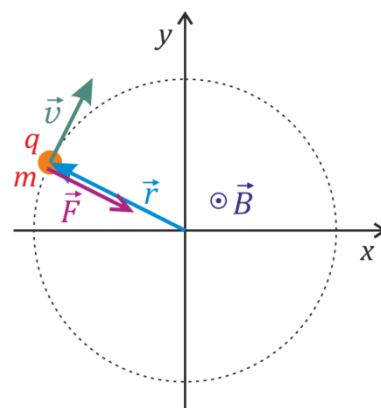
což je známý vztah pro rychlost rovnoměrného pohybu po kružnici. ω daná (8.14) je **úhlová rychlost pohybu**.

Je-li $v_z = 0$, pohybuje se částice po kružnici poloměru R ; z (8.21) a (8.14) pro poloměr dostáváme

$$R = \frac{mV}{qB}.\tag{8.22}$$

Situaci ukazuje obrázek vpravo. Je nakreslen pro případ $q > 0$; osa z a tedy i magnetická indukce \vec{B} míří „z papíru“ směrem k nám.¹³

Částice obíhá z našeho pohledu ve směru hodinových ručiček. (Jak by se pohybovala částice záporně nabitá?¹⁴)



⁹ Ano, je to rychlost v rovině xy (přesněji řečeno průmět rychlosti částice do roviny xy).

¹⁰ K oběma souřadnicím by šlo přičíst (integrační) konstanty, takže obecně (včetně případného fázového posunutí) je $x = -\frac{V}{\omega} \cos(\omega t + \varphi) + x_0$, $y = \frac{V}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + y_0$.

¹¹ Když nám něco vyjde řešením pohybových či jiných rovnic, měli bychom si vždy (po úlevném vydechnutí, že jsme věc matematicky vyřešili) položit otázku „Co to vlastně znamená?“, „Co nám výsledek říká o pohybu částic?“ (resp. obecně o situaci, o níž jde), „Jak získaný výsledek interpretovat?“.

¹² Jde o rovnici kružnice v parametrickém tvaru, $x = -R \cos(\varphi)$, $y = R \sin(\varphi)$.

¹³ Rozmyslete si, že Lorentzova síla opravdu směřuje do středu kružnice.

¹⁴ Ano, správně, proti směru hodinových ručiček (tedy v kladném smyslu). Načrtněte si sami situaci analogickou obrázku výše a rozmyslete si, jak z (8.19) v tomto případě vyjde pohyb v kladném smyslu. (Pomůže vám vztah (8.14).)

Malá odbočka: středoškolské odvození

Skutečnost, že se nabitá částice v homogenním magnetickém poli pohybuje po kružnici poloměru (8.22)¹⁵, můžeme odvodit i bez řešení diferenciálních rovnic, víceméně středoškolským postupem.

1) Víme, že síla působící na nabitou částici v magnetickém poli, je kolmá na její rychlost. To znamená, že nemění velikost rychlosti. Síla je také kolmá na magnetickou indukci \vec{B} ; nemění tedy složku rychlosti v směru rovnoběžném s \vec{B} . Pokud tedy v nějakém okamžiku je rychlost kolmá na \vec{B} , zůstane na \vec{B} kolmá i nadále – tato částice se tedy pohybuje v rovině kolmé na \vec{B} .

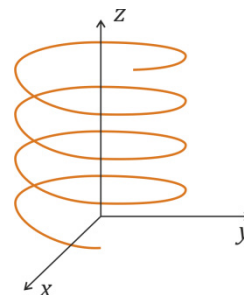
2) Když rychlost \vec{v} a magnetická indukce \vec{B} svírají pravý úhel (což je právě případ, který uvažujeme), je velikost síly na částici rovna $F = qvB$.¹⁶ V homogenním poli je $B = \text{konst.}$, takže velikost síly je konstantní. Křivka, po které se částice pohybuje, tedy bude „pořád stejně zakřivena“ – zjevně půjde o kružnici. Částice se po ní pohybuje stále stejnou rychlostí, jde tedy o rovnoměrný pohyb po kružnici.

3) Dostředivá síla, která působí na částici o hmotnosti m pohybující se rychlostí v po kružnici poloměru R má velikost $F = m v^2/R$. Dostředivou silou působící na částici, je ale právě Lorentzova síla velikosti $F = qvB$. Je tedy $m v^2/R = qvB$, z čehož jednoduchou úpravou dostáváme $R = mv/qB$.

A jak je to ve 3D

Dosud jsme se omezili na to, jaký je pohyb v rovině xy (při $v_z = 0$). Jaký je obecný třírozměrný pohyb?

Je to jednoduché. V průmětu do roviny xy zůstává vše stejné, pohyb popisují vztahy (8.19). Pohyb ve směru osy z je rovnoměrný, viz (8.10). Křivkou, po níž se pohybuje nabitá částice v homogenním magnetickém poli, je tedy **šroubovice**. Částice se po ní pohybuje konstantní rychlostí.



Závěrečné poznámky aneb k čemu to může být dobré

Vztah (8.22) by se nám hodil, kdybychom si chtěli stavět malý cyklotron nebo obecně kruhový urychlovač.¹⁷ Pro vyšší energie, a tedy rychlosti blíží se rychlosti světla, bychom ovšem museli počítat poloměr urychlovače nikoli podle klasické mechaniky, ale podle speciální teorie relativity.¹⁸

Z výsledku, který jsme získali, můžeme také usuzovat na obecné chování nabitých částic v magnetickém poli, i když není přesně homogenní: Částice se zřejmě nemohou „příliš pohybovat“ kolmo na magnetické indukční čáry a spíše se pohybují podél nich.¹⁹ Díky tomu jsou například nabitě částice přilétající k Zemi „zachyceny“ jejím magnetickým polem a pohybují se podél magnetických indukčních čar směrem k polárním oblastem (kde díky jejich interakci s molekulami vzduchu vyvolávají polární záře).

¹⁵ Když má rychlost kolmou na směr magnetické indukce.

¹⁶ Předpokládáme $q > 0$, jinak bychom zde museli psát $|q|$.

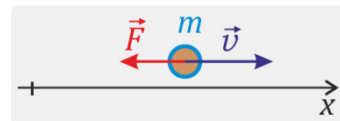
¹⁷ Něco mi napovídá, že toto možná není touhou úplně každého budoucího učitele fyziky, ale co kdyby. ©

¹⁸ Kupodivu se dramaticky neliší, jen musíme hmotnost nahradit relativistickou hmotností. Pro odvození zde ale odkážeme např. na přednášku Teorie relativity ve třetím ročníku.

¹⁹ S tím, že se kolem nich „obtěčejí“ podobně jako výše uvedená šroubovice.

8.2 Pohyb v odporujícím prostředí

Pokud se těleso pohybuje v nějakém prostředí²⁰, působí na něj síla proti směru jeho pohybu. Velikost síly závisí na rychlosti. V reálném případě může být závislost docela složitá. Často ji však lze, alespoň pro nějaký rozsah rychlostí, aproximovat závislostí jednodušší.



Při malých rychlostech bývá rozumnou aproximací pro sílu působící na kouli poloměru R pohybující se rychlostí v *Stokesova síla*. Její velikost je

$$F = 6\pi R\eta v, \quad (8.23)$$

Je tedy **přímo úměrná rychlosti**. Veličina η je *dynamická viskozita* daného prostředí; seznámíme se s ní dále v kapitole věnované hydrodynamice. (Stručnou informaci poskytnete také Dodatek A.)

Při pohybu tělesa²¹ ve vzduchu je ale většinou síla přímo úměrná **druhé mocnině rychlosti**. To vystihuje *Newtonův vztah*

$$F = \frac{1}{2} C S \rho v^2. \quad (8.24)$$

Zde ρ je hustota prostředí, S je průřez daného tělesa v rovině kolmé na směr rychlosti (pro kouli by to bylo πR^2) a C je koeficient závislý na tvaru tělesa²³. Závislost typu (8.24) se dá vcelku jednoduše odvodit, viz Dodatek A.

Jak se pohybuje těleso, když na něj působí odporová síla úměrná první nebo druhé mocnině rychlosti? Vyřešíme to pro případ jednorozměrného pohybu.

Odporová síla přímo úměrná rychlosti

Pohyb uvažujeme ve směru osy x , rychlost a síla mají složky jen do tohoto směru.²⁴ Odporová síla je

$$F_x = -k \cdot v_x, \quad (8.25)$$

Kde k je konstanta. Pohybová rovnice tedy je

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x. \quad (8.26)$$

Budeme ji řešit metodou separace proměnných (viz Dodatek B).²⁵

Rovnici (8.26) tedy upravíme následujícím způsobem:

²⁰ Ve vzduchu, ve vodě, v medu apod.

²¹ Například auta, parašutisty nebo hozeného míčku.

²² Jako Newtonův vztah resp. Newtonův zákon odporu se obvykle uvádí tento vzorec bez konstanty C (tedy pro případ $C = 1$).

²³ Že odpor závisí na tvaru tělesa, je asi zřejmé. Na těleso, které tvarem připomíná padák, zjevně působí větší odporová síla než na těleso „proudnicového tvaru“.

²⁴ $\vec{v} = (v_x, 0, 0)$, $\vec{F} = (F_x, 0, 0)$.

²⁵ Návod „ve stylu kuchařky“ jak to dělat, je jednoduchý: Vše, co se týká závisle proměnné (zde: rychlosti v_x), převedeme na jednu stranu rovnice, vše, co se týká nezávisle proměnné (zde: času t), na druhou. A to včetně diferencíálů! Samozřejmě, toto je třeba chápat spíše jako pomůcku pro zapamatování postupu; daná metoda řešení je podložena přesnými matematickými větami – podrobnosti se jistě dozvíte v příslušné přednášce z matematické analýzy.

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x \quad / \cdot \frac{dt}{m v_x} . \quad (8.27)$$

Výsledek pak zintegrujeme,

$$\frac{dv_x}{v_x} = -\frac{k}{m} dt \quad / \int . \quad (8.28)$$

a dostáváme

$$\int \frac{dv_x}{v_x} = - \int \frac{k}{m} dt . \quad (8.29)$$

Pravá strana dá $-\int \frac{k}{m} dt = -\frac{k}{m}t + \tilde{C}$, kde \tilde{C} je integrační konstanta. Levá strana (8.29) dá po zintegrování $\int \frac{dv_x}{v_x} = \ln|v_x|$.²⁶ Rovnice (8.29) tedy dává

$$\ln|v_x| = -\frac{k}{m}t + \tilde{C} \quad (8.30)$$

a po odlogaritmování²⁷:

$$|v_x| = e^{-\frac{k}{m}t + \tilde{C}} = e^{-\frac{k}{m}t} \cdot e^{\tilde{C}} = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} . \quad (8.31)$$

Absolutní hodnotu ve výsledku nemusíme psát²⁹, takže výsledný vztah pro rychlost je

$$v_x = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} . \quad (8.31)$$

Zderivováním podle času se můžeme přesvědčit, že (8.31) je opravdu řešením diferenciální rovnice (8.26).³⁰ Zbývá určit význam a hodnotu konstanty \tilde{C} .

Vztah (8.31) dává rychlost, \tilde{C} proto musí mít rozměr rychlosti, takže jde o nějakou rychlost. **Integrační konstanty obecně určujeme z počátečních podmínek.** Počáteční podmínka pro rychlost bude

$$v_x(0) = v_0 \quad (8.32)$$

Z (8.31) pro $t=0$ plyne $v_x(0) = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{k}{m} \cdot 0} = \tilde{C} \cdot 1 = \tilde{C}$. Porovnáním s (8.32) dostáváme $\tilde{C} = v_0$. Výsledný vztah pro rychlost je tedy

$$v_x = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t} , \quad (8.33)$$

kde v_0 je počáteční rychlost tělesa.

²⁶ Uvědomte si, že integrační konstantu už zde nemusíme psát, protože jsme ji napsali už na pravou stranu rovnice. (Dvě libovolné konstanty dají po sečtení resp. odečtení opět libovolnou konstantu.)

²⁷ To znamená, že na obě strany rovnice zapůsobíme exponenciální funkcí; potom uvážíme, že $\exp(\ln(|v_x|)) = |v_x|$.

²⁸ \tilde{C} byla libovolná konstanta, takže $e^{\tilde{C}}$ je také libovolná konstanta, označili jsme ji jako \tilde{C} .

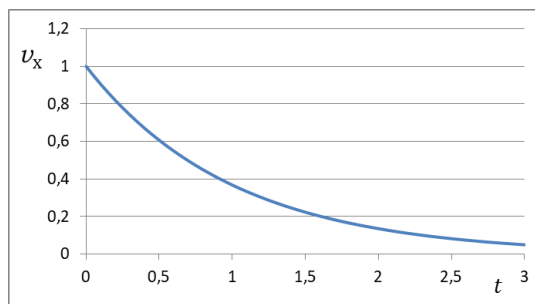
²⁹ Můžeme předpokládat, že $v_x > 0$; dále uvidíme, že výsledné řešení by fungovalo i pro záporné v_x .

³⁰ Vyzkoušejte si to! Ať vidíte, že uvedený postup nás skutečně dovedl ke správnému řešení.

Velikost rychlost tedy s časem exponenciálně klesá, jak to ukazuje obrázek.³¹

Časovou závislost souřadnice tělesa získáme integrací (8.33) podle času: $x = \int v_x dt$. Dostaneme

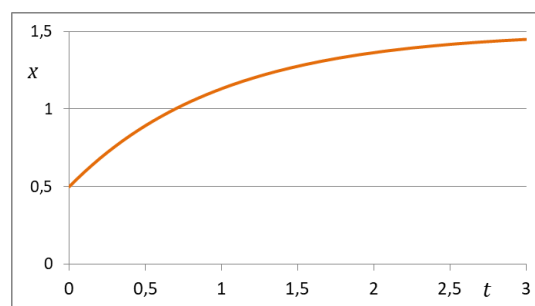
$$x = -v_0 \frac{m}{k} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \tilde{K}. \quad (8.34)$$



Integrační konstanta \tilde{K} musí mít rozměr délky. Ovšem pozor – *není* to počáteční poloha x_0 tělesa!³²

Když v (8.34) limitujeme $t \rightarrow \infty$, vidíme, že $\tilde{K} = \lim_{t \rightarrow \infty} x(t)$.³³

Typický průběh závislosti souřadnice na čase vidíme na obrázku. Souřadnice se s časem přibližuje určité koncové hodnotě.



Když působí ještě další síla...

Co když na kuličku působí ještě další síla, například když necháme kuličku padat v hustém oleji?³⁴ Pohybová rovnice pak bude mít tvar³⁵

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x + m g. \quad (8.35)$$

Upravíme ji na $\frac{dv_x}{dt} = -\frac{k}{m} \left(v_x - \frac{mg}{k} \right)$ a budeme řešit metodou separace proměnných:

$$\int \frac{dv_x}{v_x - \frac{mg}{k}} = - \int \frac{k}{m} dt = -\frac{k}{m} \cdot t + \tilde{C}. \quad (8.36)$$

Integrál na levé straně dá $\ln \left(v_x - \frac{mg}{k} \right)$ a po odlogaritmování dostáváme $\left| v_x - \frac{mg}{k} \right| = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$, takže

$$v_x = \tilde{C} \cdot e^{-\frac{k}{m}t} + \frac{mg}{k}. \quad (8.37)$$

³¹ Obrázek ukazuje charakteristický průběh časové závislosti $v_x(t)$, konkrétně průběh závislosti (8.33) pro $k/m = 1$ a počáteční rychlost $v_0 = 1$. (Všechny veličiny můžeme brát v jednotkách SI, jednotky na osách grafu nejsou uvedeny.)

³² Když do (8.34) dosadíme $t = 0$, dostaneme $x(0) = -v_0 \frac{m}{k} \cdot 1 + \tilde{K}$, takže $\tilde{K} = x_0 + v_0 \frac{m}{k}$.

³³ **Důležité ponaučení:** Integrační konstanta se **nemusí** rovnat počáteční hodnotě rychlosti nebo souřadnice. (V jednoduchých příkladech to tak leckdy vychází, ale obecně je vztah mezi počátečními hodnotami a integračními konstantami složitější.)

³⁴ Nebo třeba v medu. (Ten má velkou viskozitu, takže bude klást pohybu velký odpor. Ale ne abyste do medu házeli špinavou kuličku, to by byla škoda medu...)

³⁵ Osa x míří svisle dolů, gravitační zrychlení je g .

³⁶ Přesvědčte se, že (8.37) je řešením (8.35) nezávisle na znaménku $v_x - mg/k$.

Pro $t \rightarrow \infty$ se rychlost přibližuje konstantní hodnotě mg/k . Jak je to potom se silami působícími na kuličku?³⁷

Odporová síla přímo úměrná druhé mocnině rychlosti

Opět budeme předpokládat, že pohyb se děje jen ve směru osy x , a navíc, že $v_x > 0$. Odporová síla nyní je

$$F_x = -k \cdot v_x^2. \quad (8.38)$$

Pohybová rovnice je

$$m \frac{dv_x}{dt} = -k \cdot v_x^2, \quad (8.39)$$

řešit ji budeme opět metodou separace proměnných. Postupně dostáváme

$$\frac{dv_x}{v_x^2} = -\frac{k}{m} dt \quad / \quad \int. \quad (8.40)$$

$$\int \frac{dv_x}{v_x^2} = -\int \frac{k}{m} dt = -\frac{k}{m} \cdot t + \tilde{C}, \quad (8.41)$$

levá strana dá $\int \frac{dv_x}{v_x^2} = -\frac{1}{v_x}$ a po dosazení do (8.41) pak $-\frac{1}{v_x} = -\frac{k}{m} \cdot t + \tilde{C}$, čili

$$v_x = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t - \tilde{C}}. \quad (8.42)$$

Počáteční podmínka $v_x(0) = v_0$ dá po dosazení do $v_0 = \frac{1}{-\tilde{C}} \Rightarrow \tilde{C} = -\frac{1}{v_0}$. Pro rychlost pak

z (8.42) dostáváme $v_x = \frac{1}{\frac{k}{m} \cdot t + \frac{1}{v_0}}$, a po úpravě

$$v_x = \frac{v_0}{1 + \frac{k v_0}{m} \cdot t}. \quad (8.43)$$

Závislost souřadnice na čase odtud získáme integrací podle času:

$$x = \frac{m}{k} \ln \left(1 + \frac{k v_0}{m} \cdot t \right) + x_0. \quad (8.44)$$

V případě, kdy na těleso působí ještě další síla (např. gravitační, třeba při seskoku padákem), je řešení o něco složitější. Pro zájemce ho uvádí Dodatek C.

³⁷ Pohyb je už prakticky rovnoměrný, takže celková síla působící na kuličku musí být nulová. Přesvědčte se, že je tomu opravdu tak. Sami si také načrtněte závislost rychlosti na čase, vypočtěte časovou závislost souřadnice a načrtněte její graf.

³⁸ k je kladná konstanta, je tedy $F_x < 0$. Právě proto předpokládáme $v_x > 0$, aby síla mířila proti směru rychlosti.

8.3 Netlumený harmonický oscilátor

Prozkoumejme nyní, jak se pohybuje například malé těleso zavěšené na pružině. S tímto příkladem jsme se už setkali v kapitole 2. Nyní k síle pružiny přidáme i tlumení.

Začneme ale s netlumeným oscilátorem – a ukážeme si na něm způsob řešení, který budeme využívat i pro složitější případy.

Řešit budeme pohyb v jednorozměrném případě, jak to ukazuje obrázek vpravo.³⁹ Síla, kterou pružina působí na daný hmotný bod, je

$$F_x = -k \cdot x . \quad (8.45)$$

Zde k je tuhost pružiny a x jeho výchylka z rovnovážné polohy.

Když na hmotný bod nepůsobí odpor prostředí, ale jen pružina, je jeho pohybová rovnice

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x = -k \cdot x , \text{ a po úpravě } \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} \cdot x = 0 . \text{ Označíme-li}$$

$$\frac{k}{m} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \omega^2 , \quad (8.46)$$

bude mít pohybová rovnice tvar⁴¹

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 . \quad (8.47)$$

Rovnice (8.47) je **lineární⁴² diferenciální rovnice** (druhého řádu) **s konstantními koeficienty**. Matematika nás učí, že řešení takovýchto rovnic máme hledat ve tvaru

$$x = e^{\alpha t} . \quad (8.48)$$

α je konstanta, kterou musíme určit. Derivací (8.48) získáme $\dot{x} = \alpha e^{\alpha t}$, $\ddot{x} = \alpha^2 e^{\alpha t}$. Dosazení do (8.47) dá

$$\alpha^2 e^{\alpha t} + \omega^2 e^{\alpha t} = 0 \quad (8.49)$$

Když tuto rovnici zkrátíme faktorem $e^{\alpha t}$,⁴³ dostaneme $\alpha^2 + \omega^2 = 0$. Čili (8.48) bude řešením rovnice právě tehdy, když $\alpha^2 = -\omega^2$. Tato algebraická rovnice má dvě řešení,

$$\alpha_1 = i\omega, \quad \alpha_2 = -i\omega . \quad (8.50)$$

Tomu odpovídají dvě nezávislá řešení diferenciální rovnice (8.47):

$$x_1 = e^{i\omega t}, \quad x_2 = e^{-i\omega t} . \quad (8.51)$$

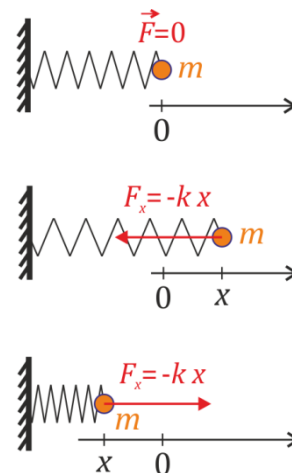
³⁹ Neuvažujeme přitom gravitaci, na těleso působí jen síla pružiny. (Těleso navíc bereme jako hmotný bod a hmotnost pružiny považujeme za zanedbatelně malou.) Jak řešit případ závaží skutečně zavěšeného na pružině, si ukážeme za chvíli.

⁴⁰ Zatím nevíme, jaký má ω význam, to časem zjistíme.

⁴¹ Druhou derivaci podle času budeme pro stručnost značit \ddot{x} místo $\frac{d^2x}{dt^2}$.

⁴² To znamená, že se v ní nevyskytují členy typu x^2 , x^3 , \dot{x}^2 , $x \cdot \dot{x}$ apod.

⁴³ Nebo vynásobíme $e^{-\alpha t}$.



Pohybovou rovnicí jsme vyřešili jednoduše a elegantně, ovšem za cenu toho, že řešení jsou komplexní.⁴⁴

Co znamená komplexní exponenciála a jak s ní pracovat, je stručně uvedeno v Dodatku D. Poučíme se tam, že řešení (8.51) můžeme vyjádřit pomocí reálných funkcí $\sin(\omega t)$ a $\cos(\omega t)$.⁴⁵

Řešení (8.51) ještě ale nejsou obecná řešení rovnice (8.47). Například můžeme kterékoli z nich vynásobit konstantou, tedy vzít

$$\tilde{x}_1(t) = C_1 e^{i\omega t}, \quad \tilde{x}_2(t) = C_2 e^{-i\omega t}. \quad (8.52)$$

Navíc můžete obě tato řešení sečíst. Výsledek, tj.

$$x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} \quad (8.53)$$

je také řešením rovnice (8.47), ve skutečnosti jde o její **obecné řešení**.⁴⁷

Poznámka: To, že násobky řešení jsou také řešeními rovnice a že součet řešení je také řešením, plyne z faktu, že daná diferenciální rovnice je lineární. (Zkuste si to sami dokázat.⁴⁸)

Ovšem řešení (8.53) jsou stále **komplexní**. A to je divné – taková řešení přece nemohou popisovat reálný pohyb hmotného bodu. Souřadnice x je přece reálná.⁴⁹

Takže musíme z obecného komplexního řešení nějak dostat řešení, které bude reálné. A ono to půjde!

Vyjádříme-li komplexní exponenciály pomocí sinů a kosinů, dostaneme z (8.53)

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = C_1 (\cos(\omega t) + i \sin(\omega t)) + C_2 (\cos(\omega t) - i \sin(\omega t)) = \\ &= \underbrace{(C_1 + C_2)}_{D_1} \cos(\omega t) + \underbrace{i(C_1 - C_2)}_{D_2} \sin(\omega t) \end{aligned} \quad (8.54)$$

Kombinace konstant C_1 a C_2 jsme zde označili D_1 a D_2 . A tyto nové konstanty můžeme brát jako reálné!⁵⁰ Takže už máme k dispozici **reálné řešení**

$$x(t) = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t) \quad (8.55)$$

⁴⁴ Inu, za eleganci se platí. ☺

⁴⁵ Sláva! Už vidíme, že se v řešení skrývá kmitavý pohyb, který očekáváme.

⁴⁶ Přesvědčte se, že když tyto výrazy dosadíte do (8.47), bude daná rovnice splněna – takže (8.52) jsou opravdu její řešení.

⁴⁷ Přesvědčte se, že (8.53) opravdu je řešením $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$!

⁴⁸ Náповěda: Dosadte do (8.47) $x(t) = A_1 x_1(t) + A_2 x_2(t)$, kde $x_1(t)$ a $x_2(t)$ jsou řešeními této rovnice, tj. splňují $\ddot{x}_1 + \omega^2 x_1 = 0$ a podobně pro x_2 . A uvidíte sami...

⁴⁹ Nebo snad kulička při svém kmitání na pružině mizí do nějakého „imaginárního rozměru“? (To zní sice až magicky, ale pro skutečnou kuličku nic takového nenastává.)

⁵⁰ Znamená to, že původní konstanty C_1 a C_2 byly komplexní, ale to nevadí, klidně mohly být. (Ve skutečnosti, aby D_1 a D_2 byly reálné, musely být C_1 a C_2 komplexně sdružené; rozmyslete si, že tohle je pravda.)

⁵¹ Na začátku jsme nevěděli, jaký má ω význam, teď už to víme: je to úhlová frekvence kmitů.

Toto řešení už perfektně vystihuje netlumené kmity kuličky na pružině. Ale možná bychom ho přece jen ještě rádi upravili do tvaru, v němž se nebudou sčítat siny a kosiny, například do tvaru

$$x(t) = A \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.56)$$

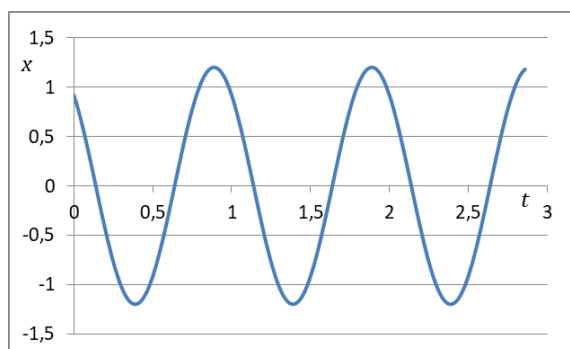
Při úpravě využijeme toho, že $\cos(\omega t + \varphi) = \cos(\omega t) \cos \varphi - \sin(\omega t) \sin \varphi$.⁵² Požadovaný tvar řešení (8.56) můžeme přepsat na

$$\begin{aligned} x(t) &= A \cos(\omega t + \varphi) = A \cos(\omega t) \cos \varphi - A \sin(\omega t) \sin \varphi = \\ &= \underbrace{A \cos \varphi}_{D_1} \cos(\omega t) + \underbrace{(-A \sin \varphi)}_{D_2} \sin(\omega t) \end{aligned}, \quad (8.57)$$

takže vidíme, že (8.55) a (8.57) popisují totéž řešení.⁵³

Řešení, které jsme dostali, obsahuje siny a kosiny, tedy funkce, kterým se někdy říká *harmonické*⁵⁴. Kmitavý pohyb, který dané řešení popisuje, se proto označuje za **harmonický** a objektům, které takto kmitají⁵⁵, říkáme **harmonické oscilátory**.

Příklad harmonických kmitů ukazuje obrázek vpravo.⁵⁶



Rovnice (8.47), tedy

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (8.58)$$

bývá označována jako **rovnice pro lineární harmonický oscilátor**.⁵⁷

Matematická „technika“, kterou jsme pro řešení této rovnice použili – tedy využít funkce, které mají komplexní hodnoty, a pak z nich dospět k reálnému řešení – je možná na první pohled překvapivá, ale

⁵² Používáme zde vzorec $\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$.

⁵³ Odvoďte si sami, že $A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, $\text{tg } \varphi = -D_2/D_1$

⁵⁴ Jako harmonická funkce se někdy označuje funkce typu $a \cdot \sin(bx + c) + d$. Ovšem pozor, název *harmonické funkce* se používá i v jiném významu; v matematické analýze se jím většinou označují funkce, které splňují tzv. Laplaceovu rovnici $\Delta f = 0$. Slovo „harmonický“ a jeho odvozeniny se asi líbí, takže při popisu kmitání resp. v akustice se setkáme s termínem „vyšší harmonické“, při popisu elektrického nebo gravitačního pole kolem nějakého tělesa se zase používají funkce dvou proměnných zvané „sférické harmoniky“. Nemusíte si s tím dělat hlavu, jen je dobře si uvědomit, že stejné nebo podobné názvy nemusí v různých oblastech znamenat stejné věci.

⁵⁵ Například zmíněná kulička na pružině, torzní kyvadlo nebo kmitavý obvod s cívkou a kondenzátorem, kterému se budete věnovat v přednášce z Elektřiny a magnetismu (v něm se samozřejmě nepohybuje nějaký hmotný bod nebo těleso, ale s časem se mění např. napětí na kondenzátoru).

⁵⁶ Jde o řešení (8.56) pro konkrétní hodnoty $A=1,2$ (např. metrů nebo cm, na svislé ose grafu neuvádíme jednotky), frekvenci $f=1$ Hz, tedy $\omega = 2\pi f \doteq 6,28 \text{ s}^{-1}$ a $\varphi=0,7$.

⁵⁷ Pozor, slovo **lineární** zde není proto, že jde o lineární diferenciální rovnici. Vyjadřuje to, že jde o jednorozměrný případ, tedy o pohyb jen v jednom směru, po určité přímce. Pokud by se hmotný bod mohl pohybovat ve třech směrech, ale byl např. pružnými silami vracen do rovnovážné polohy, šlo by od **prostorový harmonický oscilátor**.

velmi užitečná. A to natolik užitečná, že se ve fyzice používá velmi často. Fakticky fyzikové (ale také inženýři) k popisu kmitání většinou používají funkci $e^{i\omega t}$.⁵⁸

Jak se také dá přejít od komplexního řešení k reálnému

Reálné vyjádření kmitů lze z komplexního tvaru získat i „zkratkou“. Mějme komplexní řešení rovnice pro lineární harmonický oscilátor ve tvaru

$$\tilde{x}(t) = A \cdot e^{i\omega t} . \quad (8.59)$$

Amplituda A může být komplexní, takže ji můžeme vyjádřit ve tvaru

$$A = |A| \cdot e^{i\varphi} . \quad (8.60)$$

Po dosazení do (8.59) dostáváme

$$\tilde{x}(t) = |A| \cdot e^{i\varphi} \cdot e^{i\omega t} = |A| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}$$

a když odtud vezmeme jen reálnou část, vyjde

$$x(t) = \operatorname{Re}(\tilde{x}(t)) = \operatorname{Re}(|A| \cdot e^{i(\omega t + \varphi)}) = |A| \cdot \operatorname{Re}(e^{i(\omega t + \varphi)}) = |A| \cdot \cos(\omega t + \varphi) , \quad (8.61)$$

což už je řešení (8.56).

Poznámka:

V našem výkladu podrobněji nepřipomínáme vzájemný vztah **úhlové frekvence** ω , **frekvence** f a **periody** T , tedy vztahy

$$f = \frac{1}{T}, \quad \omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} , \quad (8.62)$$

z nichž plyne, že řešení (8.56) lze psát také jako

$$x(t) = A \cos(2\pi f t + \varphi) = A \cos\left(2\pi \frac{t}{T} + \varphi\right) . \quad (8.63)$$

Nevysvětlujeme zde ani to, že φ je fázové posunutí, jaký je jeho význam a že vhodnou změnou fázového posunutí můžeme dospět k tomu, že místo funkce kosinus bude v řešení sinus. Všechny tyto věci bereme jako známé ze středoškolské fyziky.⁶⁰

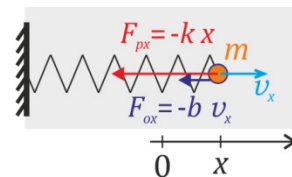
⁵⁸ Teď mluvíme o „vysokoškolské fyzice“ resp. fyzice jako vědě. Proto se s tímto vyjádřením budete potkávat i v dalších přednáškách, byť v „gymnaziální fyzice“ se neobjevuje (s výjimkou případných seminářů pro pokročilejší zájemce). Ovšem $e^{i\omega t}$ se například pro popis střídavých napětí a proudů užívá i na elektrotechnických průmyslovkách.

⁵⁹ Asi nemusíme připomínat, že jde o goniometrický tvar komplexního čísla, $|A|$ je velikost komplexního čísla A , φ jeho argument; oboje to jsou už reálná čísla. Nakreslete si to sami v Gaussově rovině, abyste to uměli někomu vysvětlit.

⁶⁰ V případě potřeby si je zopakujte a připomeňte, abyste je uměli vysvětlit.

8.4 Tlumený harmonický oscilátor

Skutečný kmitavý pohyb například kuličky na pružině je ovšem vždy tlumený. Na kuličku kromě síly pružiny působí ještě odporová síla. Pro jednoduchost budeme předpokládat, že tato síla je přímo úměrná rychlosti, $F_{ox} = -b \cdot v_x$.⁶¹ Celková síla působící na kuličku je tedy



$$F_x = -k \cdot x - b \cdot v_x . \quad (8.64)$$

Pohybovou rovnicí

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - b \cdot v_x$$

upravíme na tvar

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \underbrace{\frac{b}{m}}_{\frac{2\delta}{m}} \cdot \frac{dx}{dt} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_0^2} \cdot x = 0 ,$$

kde jsme již naznačili, že kombinace konstant m , k a b označíme

$$\frac{k}{m} = \omega_0^2 , \quad \frac{b}{m} = 2\delta . \quad (8.65)$$

Výsledná diferenciální rovnice popisující pohyb je tedy

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0 . \quad (8.66)$$

Řešení budeme opět hledat ve tvaru

$$x = e^{\alpha t} . \quad (8.67)$$

Po dosazení do (8.66) dostáváme $\alpha^2 e^{\alpha t} + 2\delta \alpha e^{\alpha t} + \omega_0^2 e^{\alpha t} = 0$ a po zkrácení $e^{\alpha t}$ pak

$$\alpha^2 + 2\delta \alpha + \omega_0^2 = 0 . \quad (8.68)$$

Jde o kvadratickou rovnici, kde neznámou je α .

⁶¹ Reálně může být samozřejmě závislost odporové síly na rychlosti složitější, viz část 2 této kapitoly. Při malých rychlostech můžeme ale očekávat, že závislost odporové síly na rychlosti bude přibližně lineární. Hlavně ale, jak jsme řekli, závislost $F_{ox} = -b \cdot v_x$ používáme opravdu **pro jednoduchost**: Diferenciální rovnice popisující kmitání bude opět **lineární**, takže půjde jednoduše řešit.

Možná vás teď napadlo, zda není divné, vybrat si speciální situaci jen proto, že se nám lépe řeší. A třeba vám takový postup dokonce připomněl známou anekdotu o člověku, který ztratil klíče v temném koutě ulice, ale hledá je pod lampou, protože tam je líp vidět. ☺ Ale fyzika, a věda vůbec, takto často postupuje – než se snažit vyřešit co nejobecnější těžký problém, vybrat si na začátku jeho jednoduchou variantu, kterou zvládneme vyřešit. (Konec konců, o důležitosti zanedbávání jsme mluvili už v první kapitole.) Leckdy se přitom ukáže, že řešení toho jednoduchého úkolu je významné i prakticky. Tak je tomu ostatně i v případě tlumeného kmitání. Například při tlumení pohybu vířivými proudy je odporová síla skutečně přímo úměrná rychlosti. A kmity oscilačního obvodu s cívku, kondenzátorem a rezistorem (s nimiž se seznámíte v přednášce z Elektřiny a magnetismu) vystihuje také rovnice, v níž tlumení je přesně úměrné časové změně napětí – tedy rovnice zcela analogická té, kterou budeme řešit zde pro případ mechanických kmitů.

⁶² ω_0 by byla úhlová frekvence kmitání, kdyby nebylo tlumení. Faktor 2 před δ se nám v dalších výpočtech příhodně zkrátí. Připomeňme ještě, že všechny uvedené konstanty jsou kladné.

⁶³ Obecně se takováto algebraická rovnice nazývá *charakteristickou rovnicí* (příslušnou k dané rovnici diferenciální).

Rovnice (8.68), tedy $\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0$, má dvě řešení⁶⁴:

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} \quad (8.69)$$

Výraz pod odmocninou může být kladný, nulový nebo záporný. Podle toho se nám řešení rozpadne na tři případy:

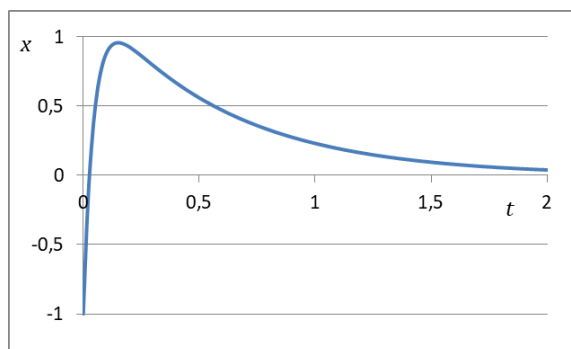
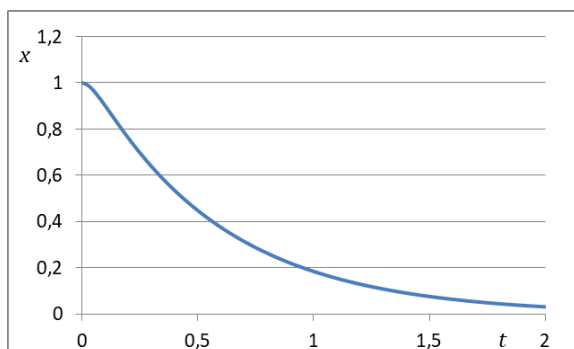
1) $\delta > \omega_0$, aperiodický případ

V tomto případě jsou α_1 i α_2 reálné konstanty, řešení $e^{\alpha_1 t}$ a $e^{\alpha_2 t}$ jsou tedy obě reálná. Obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$\begin{aligned} x(t) &= C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t} = \\ &= C_1 e^{(-\delta + \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} + C_2 e^{(-\delta - \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2})t} \end{aligned} \quad (8.70)$$

Navíc jsou jak α_1 i α_2 záporná⁶⁵, takže obě části řešení (8.70) jsou klesající funkce. Hodnoty konstant C_1 a C_2 určíme z počátečních podmínek.⁶⁶

Příklady, jak může vypadat pohyb v tomto případě, ukazují následující grafy.⁶⁷



Vidíme, že kulička v tomto případě může jednou překmitnout přes rovnovážnou polohu, ale rozhodně nepřekmitne víckrát.⁶⁸ Pohyb tedy není kmitavý, nemá žádnou periodu – proto tento případ nazýváme **aperiodický**.

⁶⁴ Diskriminant rovnice je $D = (2\delta)^2 - 4\omega_0^2 = 4(\delta^2 - \omega_0^2)$ a řešení tedy $\alpha_{1,2} = \frac{-2\delta \pm \sqrt{4(\delta^2 - \omega_0^2)}}{2}$. (A už je

jasné, proč bylo výhodné označit $b/m = 2\delta$.)

⁶⁵ Dokažte si, že to je pravda.

⁶⁶ To zde explicitně nepředvádíme – ale samozřejmě to musíme umět udělat. Vyzkoušejte si to, není to nic těžkého; např. dosazením $t = 0$ do (8.70) okamžitě dostáváme $C_1 + C_2 = x(0)$. Druhou rovnici pro C_1 a C_2 získáme z počáteční rychlosti, musíme jen nejdříve zderivovat (8.70) podle času.

⁶⁷ Jsou pro konkrétní hodnoty $\omega_0 = 6,28 \text{ s}^{-1}$ (stejná hodnota, jakou měla ω u netlumeného harmonického oscilátoru v předchozí části kapitoly), $\delta = 12 \text{ s}^{-1}$. Počáteční podmínky pro levý graf jsou $x_0 = 1$, $v_0 = 0$, pro pravý graf pak $x_0 = -1$, $v_0 = 50$. (Jednotky zde neuvádíme, může jít o základní jednotky SI, tedy délky v metrech a rychlost v m/s, nebo třeba o délky v cm a rychlosti v cm/s.)

⁶⁸ Složením dvou klesajících exponenciál nelze dosáhnout toho, aby přes polohu $x = 0$ přešla víckrát.

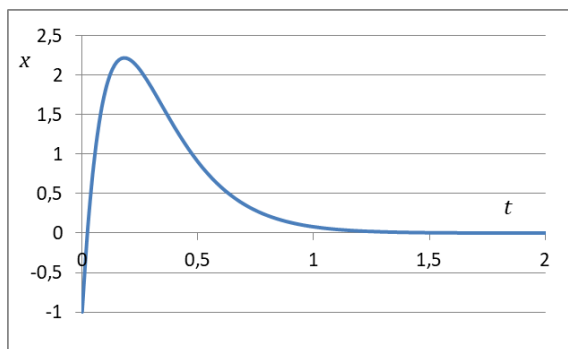
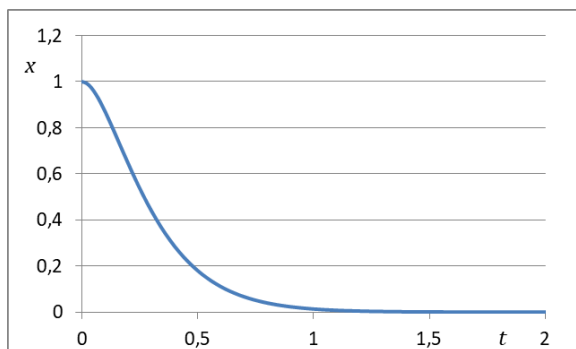
2) $\delta = \omega_0$, mezní aperiodický případ

V tomto případě se kořeny kvadratické rovnice rovnají, $\alpha_{1,2} = -\delta$. Matematika nás poučí, že v tomto speciálním případě jsou dvěma nezávislými řešeními funkce $e^{-\delta t}$ a $t \cdot e^{-\delta t}$.⁶⁹ Obecné řešení rovnice (8.66) tedy je

$$x(t) = C_1 e^{-\delta t} + C_2 t \cdot e^{-\delta t} = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\delta t} . \quad (8.71)$$

Obě části řešení jdou pro $t \rightarrow \infty$ k nule.⁷⁰

Jak ukazují následující grafy, kvalitativně vypadá pohyb v tomto případě analogicky jako v aperiodickém případě – také se pro velké časy souřadnice blíží k nule, také může kulička maximálně jednou překmitnout přes rovnovážnou polohu.⁷¹



Můžeme si ale všimnout, že v mezním aperiodickém případě se kulička nakonec k rovnovážné poloze přibližuje rychleji, než tomu bylo v obecném aperiodickém případě.⁷²

3) $\delta < \omega_0$, periodický případ

Uvidíme, že v tomto případě je tlumení už dostatečně malé, aby oscilátor mohl kmitat.⁷³ Pod odmocninou ve vztahu pro α (viz (8.69)) je nyní záporné číslo, takže α budou komplexní. Z (8.69) dostaneme

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{(-1) \cdot (\omega_0^2 - \delta^2)} = -\delta \pm i \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} .$$

Pro další výpočty označíme

$$\sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \omega , \quad (8.72)$$

takže

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm i \omega . \quad (8.73)$$

⁶⁹ Vyzkoušejte si, že to je pravda!

⁷⁰ Speciálně je $\lim_{t \rightarrow \infty} (t \cdot e^{-\delta t}) = 0$; jednoduše řečeno, $e^{-\delta t}$ jde pro velká t k nule rychleji, než roste t . (Fakticky rychleji než roste *libovolná mocnina* t , viz přednáška z matematické analýzy.)

⁷¹ Obrázek ukazuje pohyb pro stejné počáteční podmínky, jako tomu bylo u grafů na předchozí stránce.

⁷² Grafy prezentované zde to samozřejmě ilustrují pro konkrétní hodnoty parametrů, ale uvedené tvrzení platí obecně. Mezní aperiodický případ je důležitý z praktického hlediska pro co nejrychlejší tlumení výchylek.

⁷³ No konečně! Už to vypadalo, jako by snad nikdy kmitat neměl...

Dvě lineárně nezávislá řešení rovnice (8.66) tedy jsou $e^{(-\delta+i\omega)t}$ a $e^{(-\delta-i\omega)t}$. Obecné řešení tedy je

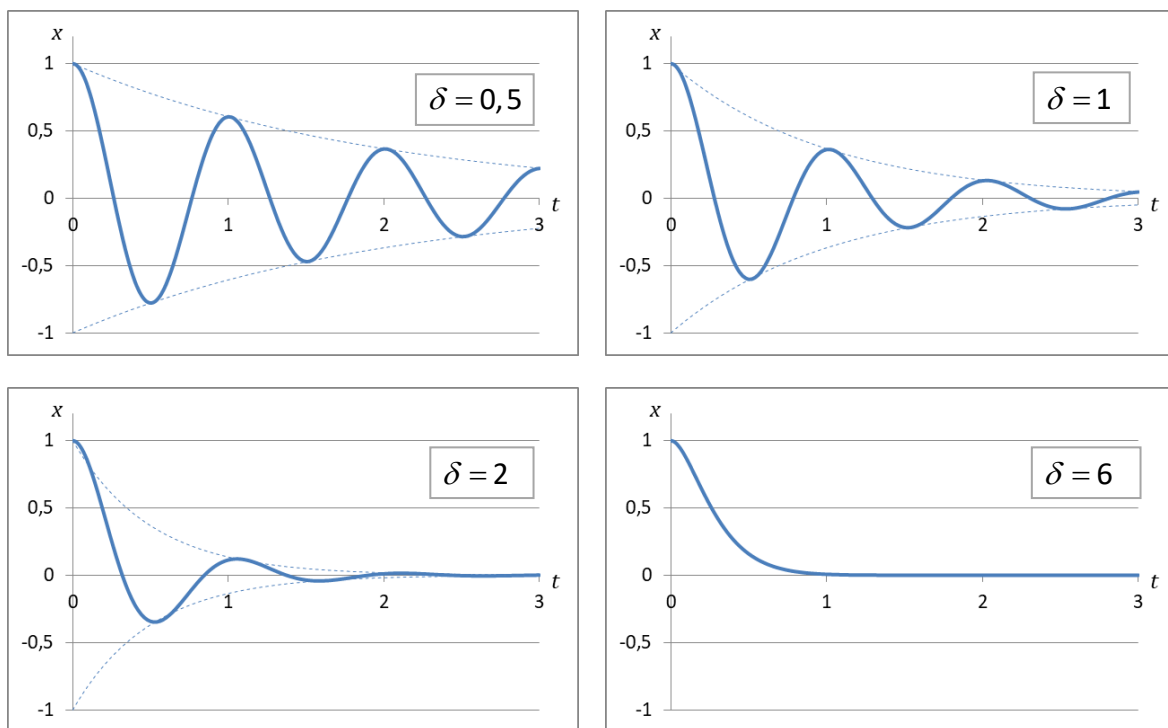
$$x(t) = C_1 e^{(-\delta+i\omega)t} + C_2 e^{(-\delta-i\omega)t} = e^{-\delta t} \cdot (C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}) \quad (8.74)$$

Porovnáním s (8.53) vidíme, že řešení vypadá stejně jako u netlumeného harmonického oscilátoru, jen je násobeno funkcí $e^{-\delta t}$. Stejným postupem jako v případě netlumených kmitů proto můžeme přejít od komplexního řešení k řešením, která obsahují jen reálné funkce:

$$x(t) = e^{-\delta t} \cdot (D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t)) \quad (8.75)$$

$$x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi). \quad (8.76)$$

Časovou závislost souřadnice v několika konkrétních případech ukazují následující grafy.⁷⁴



Jakých věcí si při porovnání grafů všimnete? (Zkuste se zamyslet sami, než se podíváte na poznámku pod čarou.⁷⁵)

Poznámka ke grafům: Pokud je budete kreslit od ruky, dejte pozor, ať se zmenšující se amplitudou nezkracujete periodu kmitů. (Ta je stále $T=2\pi/\omega = \text{konst.}$)

A poslední poznámka: Vidíme, že pro co nejrychlejší návrat do rovnovážné polohy se nemusíme přesně „strefit“ do mezního aperiodického případu, stačí mu být blízko.

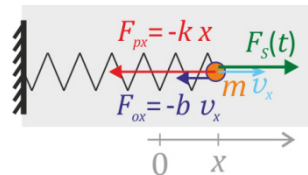
⁷⁴ Počáteční podmínky jsou $x_0 = 1$, $v_0 = 0$ (jednotky zde nepíšeme, viz poznámku výše u grafů k aperiodickému případu), parametry oscilátoru: hodnoty $\omega_0 = 6,28 \text{ s}^{-1}$ (tuto hodnotu necháváme stejnou pro všechny grafy), hodnoty δ jsou zapsány přímo v grafu (jednotka u nich není vypsaná, je s^{-1}). V grafech je čárkovaně vykreslena i klesající exponenciála $e^{-\delta t}$.

⁷⁵ Například: Při porovnání grafu s $\delta = 0,5$ a $\delta = 2$ si můžeme všimnout, že se opravdu se zvětšujícím tlumením poněkud prodlužuje perioda. Pohyb s tlumením $\delta = 6$ se už hodně přibližuje meznímu aperiodickému případu.

8.5 Buzené kmity a rezonance

Harmonický oscilátor můžeme rozkmitávat vnější silou. Spočteme, jak se bude oscilátor chovat v případě, že vnější síla je harmonická⁷⁶:

$$F_S(t) = F_{\max} \cos(\Omega t) . \quad (8.77)$$



Ω je úhlová frekvence vnější síly. (Říká se jí také *budící síla*.)

Pohybová rovnice buzeného oscilátoru tedy bude

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - b \cdot v_x + F_{\max} \cos(\Omega t) . \quad (8.78)$$

Výpočet si ulehčíme tím, že místo kosinů (a případně sinů) budeme (stejně jako v předchozích částech kapitoly) časovou závislost vyjadřovat pomocí funkce $e^{i\omega t}$. Vnější působící sílu tedy budeme psát $F_S(t) = F_{\max} e^{i\Omega t}$.

Stejně jako v případě tlumeného oscilátoru v části 8.4 označíme $k/m = \omega_0^2$, $b/m = 2\delta$ a navíc $F_{\max}/m = S$.⁷⁷ Diferenciální rovnice pro buzené oscilace pak bude mít tvar (srovnejte (8.66))

$$\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = S e^{i\Omega t} . \quad (8.79)$$

Matematika nás poučí, že obecné řešení takovéto rovnice⁷⁸ dostaneme jako součet **partikulárního řešení** dané rovnice a obecného řešení stejné rovnice, ale s nulovou pravou stranou. Rovnice s nulovou pravou stranou je ale rovnice (8.66), takže její řešení už známe.⁷⁹ *Partikulární řešení* je nějaké řešení, které po dosazení do levé strany rovnice dá její pravou stranu. Může jít skutečně o jakékoli řešení, takže si můžeme vybrat to nejjednodušší. V našem případě budeme partikulární řešení hledat ve tvaru⁸⁰

$$x(t) = A e^{i\Omega t} . \quad (8.80)$$

Po dosazení do (8.79) dostaneme $-\Omega^2 A e^{i\Omega t} + 2\delta i\Omega A e^{i\Omega t} + \omega_0^2 A e^{i\Omega t} = S e^{i\Omega t}$ a odtud

$$A = \frac{S}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i 2\delta\Omega} . \quad (8.81)$$

Amplituda A vychází komplexní. Můžeme ji rozepsat v goniometrickém tvaru jako

$$A = |A| e^{i\varphi} \quad (8.82)$$

Vztah (8.80) pak dává

$$x(t) = |A| e^{i\varphi} \cdot e^{i\Omega t} = |A| \cdot e^{i(\Omega t + \varphi)} . \quad (8.83)$$

⁷⁶ V tomto případě bude odezva oscilátoru na vnější sílu nejjednodušší, takže to zvládneme spočítat.

(Pro složitější průběh vnější síly bychom mohli její průběh poskládat z řady harmonických průběhů, ale to by nás zavedlo k Fourierově analýze průběhů funkcí, do toho se zde pouštět nebudeme.)

⁷⁷ S budeme brát jako kladné reálné číslo.

⁷⁸ Jde opět o lineární diferenciální rovnici s konstantními koeficienty.

⁷⁹ Věnovali jsme mu celou část 8.4 této kapitoly. Podstatné bude, že všechna tato řešení s časem jdou k nule.

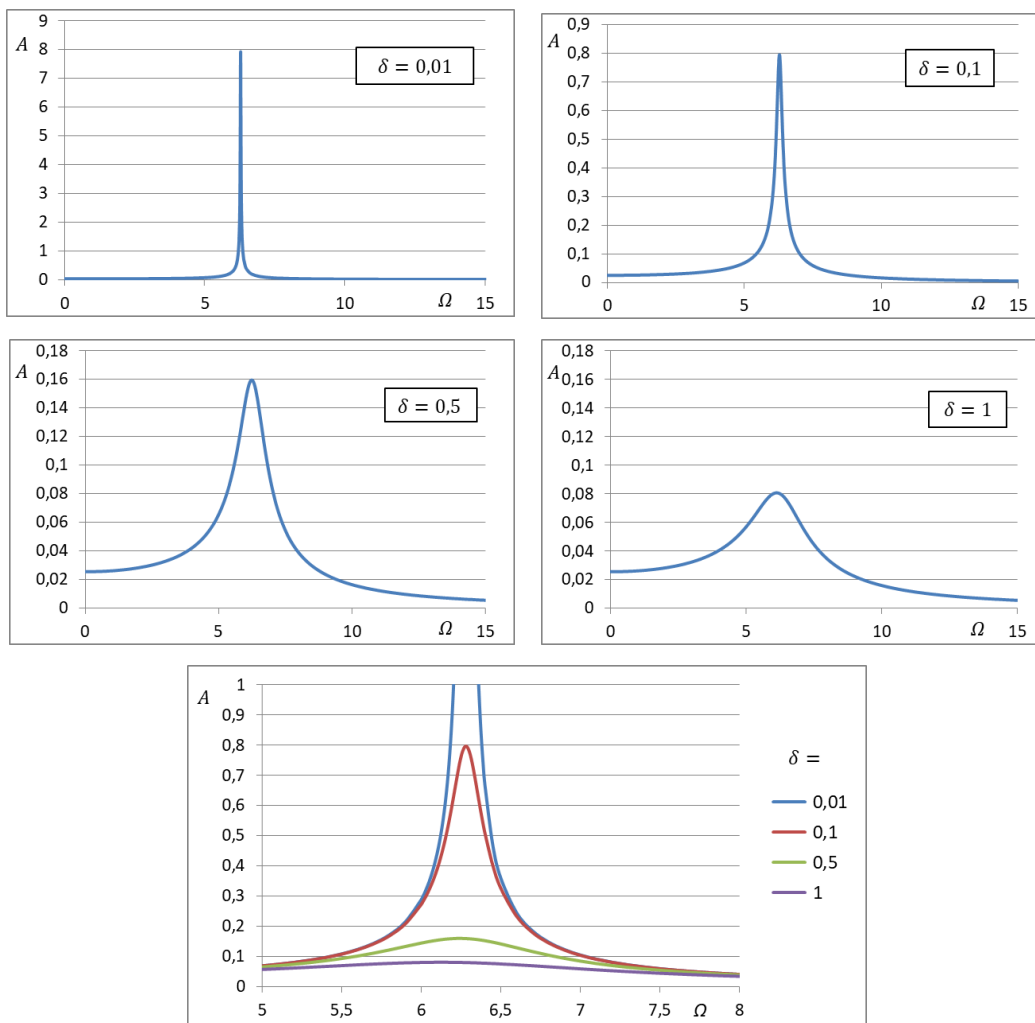
⁸⁰ Je vlastně docela logické zvolit tento tvar – jestliže budící síla má úhlovou frekvenci Ω , je rozumné předpokládat, že řešení nebo alespoň jeho část budou mít tutéž frekvenci.

Amplituda buzených kmitů

Z (8.83) vidíme, že $|A|$ je (reálná) amplituda kmitů a φ jejich fázové posunutí.⁸¹ Abychom spočetli amplitudu kmitů, musíme tedy vzít absolutní hodnotu (8.81):

$$|A| = \frac{|S|}{|\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega|} = \frac{S}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (8.84)$$

Závislost amplitudy na budící frekvenci zobrazená v grafu se nazývá **rezonanční křivka**. Příklady pro různá tlumení ukazují následující grafy.⁸³



Všimněte si, že při větším tlumení se rezonanční křivka „zploštuje“: její maximum je nižší a není tak výrazné. Při menším tlumení (nižším δ) je rezonanční maximum „ostřejší“.⁸⁴ Grafy také ilustrují jednu kvantitativní závislost: maximální amplituda je (alespoň přibližně) nepřímo úměrná tlumení δ .

⁸¹ Pokud to nevidíte, zkuste z (8.83) vzít reálnou část. Dostanete $x(t) = |A| \cos(\Omega t + \varphi)$. Už je to jasnější?

⁸² Připomeňme, že S je kladné reálné číslo, je tedy $S = |S|$. Co snad připomínat nemusíme, je výpočet absolutní hodnoty komplexního čísla, $|a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2}$. (Pozor, občas se stane, že u složitějších výrazů, jako je (8.84), má někdo tendenci dávat před b^2 i druhou mocninu imaginární jedničky, $i^2 = -1$. To nedělejte, to je špatně!)

⁸³ Stejně jako u předchozích grafů je i zde $\omega_0 = 6,28 \text{ s}^{-1}$, u hodnot δ není v grafech uvedena jednotka, je s^{-1} . Amplituda je na svislé ose grafů značena jen symbolem A , ve skutečnosti se do grafů vynášejí hodnoty $|A|/S$

Frekvenci, při níž je amplituda největší, nazýváme **rezonanční frekvence**. Určíme ji tím, že najdeme maximum funkce (8.84), nezávisle proměnnou je přitom Ω . Fakticky pro nalezení maxima stačí najít minimum funkce $(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2$.⁸⁵ Hledáme je pomocí první derivace, ta se v bodě, kde je extrém, musí rovnat nule⁸⁶:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{d\Omega} \left((\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2 \right) = 2(\omega_0^2 - \Omega^2) \cdot (-2\Omega) + 4\delta^2 \cdot 2\Omega = \\ &= 4\Omega \cdot (\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2) \end{aligned} \quad (8.85)$$

Extrémy jsou tedy v bodech, pro něž $\Omega = 0$ (ale ten nás nezajímá⁸⁷) nebo $\Omega^2 - \omega_0^2 + 2\delta^2 = 0$. Odtud pro rezonanční frekvenci dostáváme

$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2} . \quad (8.86)$$

S rostoucím tlumením se tedy rezonanční frekvence poněkud snižuje.⁸⁸

Fáze buzených kmitů

Amplitudu buzených kmitů tedy umíme spočítat. Jak je s fází kmitů?

Půjde nám o fázové posunutí výchylky vůči budící síle. Časový průběh budící síly je $F(t) \sim S \cdot e^{i\Omega t}$ ⁸⁹, časový průběh výchylky $x(t) = A \cdot e^{i\Omega t} = |A| \cdot e^{i(\Omega t + \varphi)}$. Fázové posunutí výchylky oproti síle je tedy φ , čili argument komplexní amplitudy $A = |A| e^{i\varphi}$.

Určíme ho ze vztahu (8.81). Ten můžeme přepsat na $|A| e^{i\varphi} = \frac{|S|}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega}$, a po úpravě na

$$\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega = |S/A| e^{-i\varphi} = |S/A| \cdot (\cos\varphi + i(-\sin\varphi)) .$$

Podíl ryze imaginární a reálné části na levé straně se musí rovnat podílu ryze imaginární a reálné části na pravé straně⁹⁰, tedy $\frac{2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$.

Odtud

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2} . \quad (8.87)$$

⁸⁴ Pro posouzení, jak je rezonanční křivka široká nebo „štíhlá“ se často bere šířka křivky pro amplitudu rovnou polovině maximální amplitudy.

⁸⁵ Rozmyslete si proč.

⁸⁶ Za předpokladu, že v daném bodě existuje; předpoklady příslušné věty z matematické analýzy zde pokládáme za splněné.

⁸⁷ Kdybychom rezonanční křivku protáhli do záporných hodnot Ω , bude mít pro $\Omega = 0$ minimum, to je formální a opravdu nás nezajímá.

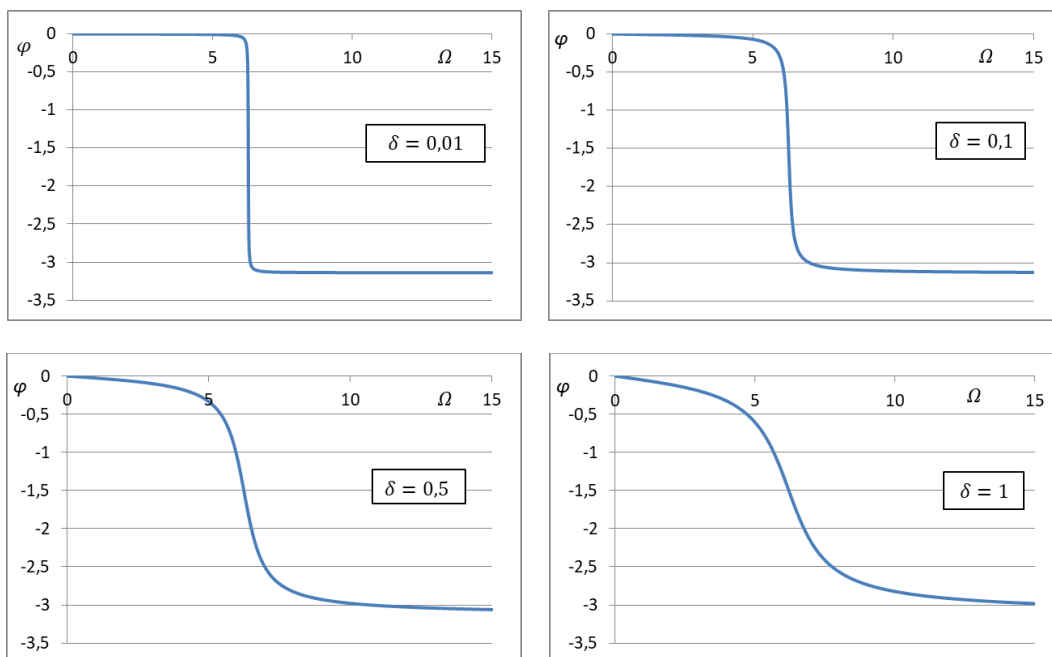
⁸⁸ Je to trochu vidět i na grafech na předchozí stránce, ale zároveň vidíme, že posun je velmi malý.

⁸⁹ Připomeňme, že S je reálné kladné, tedy $S = |S|$

⁹⁰ V rovnici jsme části pro přehlednost vyznačili barevně. (Společný faktor $|S/A|$ v pravé části se při dělení vykrátí.)

Poznámka: Pokud vám vadí, že se v (8.87) pro $\Omega = \omega_0$ dělí nulou, podívejte se na alternativní odvození a tvar výsledku v Dodatku E.

Závislost fázového posunutí na Ω pro různé hodnoty tlumení ukazují následující grafy:



Fakticky jde pro různá tlumení o podobnou závislost, hodnota δ ovlivňuje jen strmost, s jakou se fáze mění v okolí úhlové frekvence ω_0 .⁹¹

Ze vztahu (8.87) i z grafů vidíme, že **pro malé budicí frekvence** ($\Omega \rightarrow 0$) je fázové posunutí nulové, takže **budicí síla a výchylka jsou ve fázi**.

Pro velké budicí frekvence (mnohem větší než rezonanční frekvence, $\Omega \rightarrow \infty$) je fázové posunutí rovno $-\pi$, takže **budicí síla a výchylka jsou v protifázi**.

Pro $\Omega = \omega_0$ (tj. typicky **blízko rezonance**) je fázové posunutí $-\pi/2$, takže **výchylka je za budicí silou opožděna o čtvrt periody**.⁹²

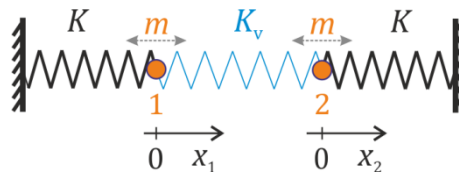
⁹¹ Ta je pro dané grafy $\omega_0 = 6,28 \text{ s}^{-1}$, stejně jako u rezonančních křivek výše.

⁹² Rozmyslete si, že fázové posunutí o $\pi/2$ opravdu odpovídá čtvrtině periody.

Poznámka pro zájemce: Můžete si odvodit, že v tomto případě je síla ve fázi s *rychlostí* pohybu hmotného bodu. A můžete si také rozmyslet, jak je to s prací, kterou síla na hmotný bod koná, tedy s energií, kterou oscilátoru dodává – a naopak s energií, kterou oscilátor ztrácí díky tlumení.

8.6 Vázané oscilátory, skládání kmitů

Uvažujme dva (netlumené) oscilátory, například dvě kuličky na pružinkách, jak je ukazuje obrázek vpravo. Pro jednoduchost předpokládejme, že obě kuličky mají stejnou hmotnost m a obě pružiny mají stejnou tuhost K . Kuličky jsou navíc spojeny pružinou o tuhosti K_v . Ta mezi oběma oscilátory vytváří vazbu, proto mluvíme o *vázaných oscilátorech*.



Souřadnice kuliček x_1 , x_2 budeme odečítat od jejich rovnovážných poloh.⁹³ Pohybové rovnice kuliček jsou

$$\begin{aligned} m \ddot{x}_1 &= -K \cdot x_1 - K_v \cdot (x_1 - x_2) \\ m \ddot{x}_2 &= -K \cdot x_2 - K_v \cdot (x_2 - x_1) \end{aligned} \quad (8.88)$$

Jde o soustavu dvou diferenciálních rovnic, vzájemně provázaných. Když je sečteme a odečteme, dostaneme

$$m(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2) = -K \cdot (x_1 + x_2), \quad (8.89)$$

a když je odečteme,

$$m(\ddot{x}_1 - \ddot{x}_2) = -K \cdot (x_1 - x_2) - 2K_v \cdot (x_1 - x_2). \quad (8.90)$$

Označíme-li součet a rozdíl x_1 a x_2 například

$$x_1 + x_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} X, \quad x_1 - x_2 \stackrel{\text{ozn.}}{=} \xi, \quad (8.91)$$

dostaneme z (8.89) a (8.90) po úpravě⁹⁴

$$\begin{aligned} \ddot{X} + \omega_0^2 X &= 0 \\ \ddot{\xi} + \omega_1^2 \xi &= 0 \end{aligned} \quad (8.92)$$

kde

$$\omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{K + 2K_v}{m} \quad (8.93)$$

Rovnice (8.92) už jsou dvě nezávislé diferenciální rovnice, navíc známého tvaru⁹⁵, takže můžeme okamžitě napsat jejich řešení

$$\begin{aligned} X(t) &= A \cdot \cos(\omega_0 t) \\ \xi(t) &= B \cdot \cos(\omega_1 t) \end{aligned} \quad (8.94)$$

Vidíme, že tyto kombinace x_1 a x_2 kmitají s různými frekvencemi.⁹⁷ Kmitání jednotlivých kuliček získáme, když z (8.91) vypočteme x_1 a x_2 : $x_1 = \frac{1}{2}(X + \xi)$, $x_2 = \frac{1}{2}(X - \xi)$. Dostaneme

⁹³ Navíc pro jednoduchost předpokládáme, že v rovnovážných polohách mají pružiny svou klidovou délku, tj. nejsou ani prodloužené, ani zkrácené. (Laskavý čtenář si sám může dopočítat, že závěry, ke kterým dojdeme, budou platit i v případě, kdy by třeba všechny tři pružiny byly natažené.)

⁹⁴ Rovnice jsou $m \ddot{X} = -K \cdot X$ a $m \ddot{\xi} = -(K + 2K_v) \cdot \xi$, pak už je úprava triviální.

⁹⁵ Můžeme jim říkat třeba „naše staré známé rovnice pro lineární harmonický oscilátor“ (dokonce netlumený).

⁹⁶ Do argumentů kosinů bychom mohli ještě přidat fázová posunutí, obecně různá, ale chování výsledných řešení by bylo analogické tomu, které budeme rozebírat dále.

⁹⁷ Často se pro podobnou situaci užívá termín *módy kmitů*; v našem případě máme dva módy kmitů.

$$\begin{aligned}x_1(t) &= \frac{1}{2} (A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_1 t)) \\x_2(t) &= \frac{1}{2} (A \cdot \cos(\omega_0 t) - B \cdot \cos(\omega_1 t))\end{aligned}\tag{8.95}$$

Hodnoty konstant A a B závisí na počátečních podmínkách.⁹⁸ Podívejme se na tři zajímavé konkrétní případy.

- 1) $A \neq 0, B = 0$. V tomto případě je $x_1(t) = x_2(t) = \frac{A}{2} \cos(\omega_0 t)$, obě kuličky kmitají ve fázi, se stejnou amplitudou, vliv vazby se zde vůbec neprojevuje. (Rozmyslete si, proč.⁹⁹)
- 2) $A = 0, B \neq 0$. V tomto případě je $x_1(t) = \frac{B}{2} \cos(\omega_1 t)$, $x_2(t) = -x_1(t)$ obě kuličky kmitají v protifázi, opět se stejnou amplitudou, vazbová pružina se projevuje.¹⁰⁰
- 3) $B = A$. V tomto případě se budou kombinovat oba módy kmitů. Využijeme-li součtových goniometrických vzorců¹⁰¹, dostaneme $x_1(t) = \frac{A}{2} (\cos(\omega_0 t) + \cos(\omega_1 t)) = A \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t\right)$ a podobně pro $x_2(t)$, takže

$$\begin{aligned}x_1(t) &= A \cos\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t\right) \\x_2(t) &= -A \sin\left(\frac{\omega_0 + \omega_1}{2} t\right) \sin\left(\frac{\omega_0 - \omega_1}{2} t\right)\end{aligned}\tag{8.96}$$

Není-li vazba příliš silná, jsou ω_0 a ω_1 blízké úhlové frekvence. Jejich kombinace $(\omega_0 + \omega_1)/2$ ¹⁰² je jejich průměrem a její hodnota se tedy od nich moc neliší. Ovšem $(\omega_0 - \omega_1)/2$ bude mít výrazně nižší hodnotu a představuje tedy mnohem pomalejší kmitání. Na výsledek se můžeme dívat tak, že každá z kuliček kmitá „rychlými kmity“ (s frekvencí $(\omega_0 + \omega_1)/2$), ale amplituda těchto kmitů je „modulována“ pomalými kmity s frekvencí $(\omega_0 - \omega_1)/2$. Navíc mají-li kmity jedné kuličky maximální amplitudu, mají kmity druhé amplitudu nulovou nebo téměř nulovou. (Rozmyslete si, že toto ze vztahů (8.96) opravdu plyne.) Ale přesně takto se vázané oscilátory při praktickém pokusu chovají!

Příklad takového kmitání (kdy můžeme říci, že se energie „přelévá“ mezi prvním a druhým oscilátorem) ukazují grafy na další straně.¹⁰³ Takovéto kmity se často označují jako **rázy**.

Jak se změní rychlost tohoto „přelévání“ (tedy perioda pomalejších kmitů, které „modulují“ ty rychlé) v závislosti na tuhosti vazby? Rozmyslete si to sami.¹⁰⁴

⁹⁸ Při zadání obecných počátečních poloh a rychlostí bychom museli do argumentů kosinů přidat ještě fázová posunutí. Vztahy (8.95) odpovídají počátečním podmínkám, kdy počáteční rychlosti obou kuliček jsou nulové.

⁹⁹ Pro kontrolu vašich úvah: Pružina tvořící vazbu má při kmitání kuliček stále stejnou délku.

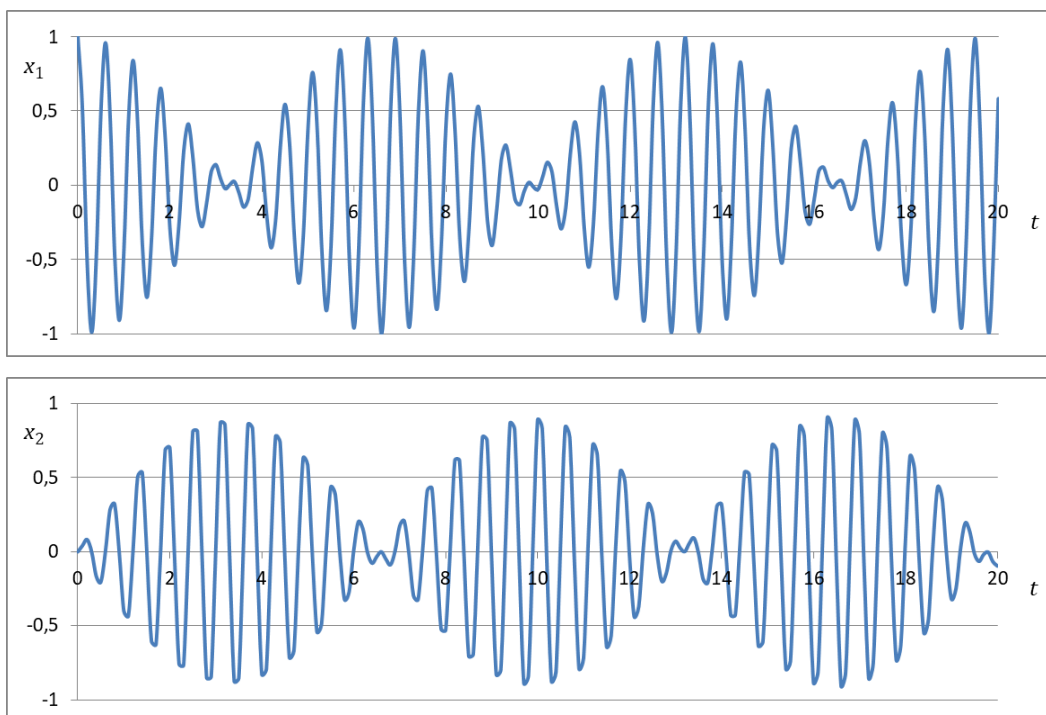
¹⁰⁰ Rozmyslete si, jak udělat počáteční podmínky, aby kuličky kmitaly tímto způsobem.

¹⁰¹ $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \cos\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$, $\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin\left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)$

¹⁰² V (8.96) je vyznačena zeleně.

¹⁰³ Odpovídají hodnotám $m = 1$ kg, $K = 100$ N/m, $K_v = 10$ N/m, $A = 1$ (metr nebo cm, vyberte si ☺).

¹⁰⁴ A případně si to sami vyzkoušejte pokusem, třeba se dvěma propojenými matematickými kyvadly.



Skládání kmitů

Vyzkoušejte si sami (třeba na počítači nebo na tabletu), jak vypadá skládání dvou kolmých kmitání, tedy kmitů

$$\begin{aligned}x &= a \cdot \cos(\omega_1 t) \\ y &= a \cdot \cos(\omega_2 t)\end{aligned}\tag{8.97}$$

Když poměry frekvencí ω_1 a ω_2 jsou například 1:1, 1:2, 1:3, 2:3, ... Výsledkem jsou **Lissajousovy obrazce**.¹⁰⁵

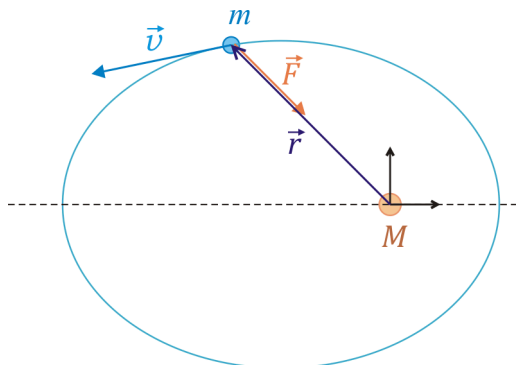
¹⁰⁵ Jsou docela pěkné, vykreslete si je.

8.7 Keplerova úloha

Chceme spočítat, jak se pohybuje hmotný bod gravitačně přitahovaný nehybným silovým centrem. Příkladem může být pohyb planety nebo komety kolem Slunce. (Slunce považujeme za nehybné.)

Hmotnost centrálního tělesa (např. Slunce) označíme M , hmotnost obíhajícího hmotného bodu m . Počátek soustavy souřadnic umístíme do silového centra, polohu obíhajícího bodu udává polohový vektor \vec{r} . Rychlost hmotného bodu budeme značit \vec{v} . Síla, kterou centrální těleso působí na hmotný bod je

$$\vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \frac{\vec{r}}{r}.$$



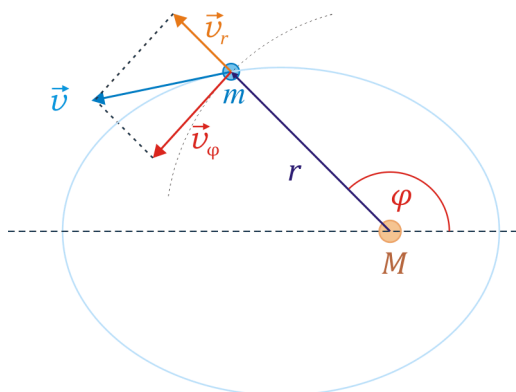
Spočítat pohyb řešením pohybové rovnice (2. Newtonova zákona $m\ddot{\vec{r}} = \vec{F}$) v kartézských souřadnicích lze numericky, tedy pomocí počítače. Pokud si ale zkusíme pohybovou rovnici rozepsat do souřadnic, uvidíme, že analytické řešení je pro nás neschůdné. Zkusme to jinak.

Gravitační síla \vec{F} má vzhledem k centru nulový moment: $\vec{r} \times \vec{F} = 0$.¹⁰⁶ Díky tomu se zachovává moment hybnosti $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v}$.¹⁰⁷ Z toho plyne, že **pohyb hmotného bodu m se děje v rovině**. Jak to zdůvodníme? Vektory \vec{L} a \vec{r} jsou na sebe kolmé.¹⁰⁸ Takže je-li \vec{L} konstantní vektor, musí být polohový vektor \vec{r} kolmý na pevný směr v prostoru; všechny koncové body \vec{r} tedy musí ležet v jedné rovině.¹⁰⁹

Budeme pracovat v polárních souřadnicích

Pohyb bodu v rovině bude užitečné popisovat ne v kartézských, ale v **polárních souřadnicích** r, φ . Vektor rychlosti \vec{v} bude vhodné rozložit **do radiálního směru** a **do směru k němu kolmého**. Složku rychlosti do radiálního směru (tedy do směru rostoucího r) označíme v_r . Tato složka je rovna časové změně radiální souřadnice r :

$$v_r = \frac{dr}{dt} = \dot{r}. \quad (8.98)$$



Složku rychlosti ve směru kolmém na radiální označíme v_φ . Výhradně v tomto směru by se bod pohyboval, pokud by bylo $r = \text{konst.}$ Pak by šlo vlastně o pohyb po kružnici, jeho rychlost jednoduše určíme jako součin poloměru a úhlové rychlosti:

¹⁰⁶ Uvědomte si, proč.

¹⁰⁷ Opět si uvědomte proč, připomeňte si druhou větu impulzovou.

¹⁰⁸ Víte proč?

¹⁰⁹ Názorně je to vidět, pokud osy soustavy souřadnic natočíme tak, aby \vec{L} mířil ve směru osy z . Vektor \vec{r} pak může mířit jen do roviny xy .

$$v_\varphi = r \frac{d\varphi}{dt} = r \dot{\varphi} . \quad (8.99)$$

Využijeme zákony zachování

Výše uvedené složky rychlosti můžeme využít při výpočtu **momentu hybnosti** L . Uplatní se při něm jen složka v_φ . Je totiž $\vec{L} = \vec{r} \times m\vec{v} = m \vec{r} \times \vec{v} = m \vec{r} \times (\vec{v}_r + \vec{v}_\varphi) = m \vec{r} \times \vec{v}_r + m \vec{r} \times \vec{v}_\varphi = m \vec{r} \times \vec{v}_\varphi$, protože \vec{r} a \vec{v}_r mají stejný směr.¹¹⁰ Protože \vec{r} a \vec{v}_φ jsou na sebe kolmé, platí pro velikost (resp. přesněji pro jedinou složku) vektoru \vec{L} :

$$L = m r v_\varphi = m r^2 \dot{\varphi} \quad (8.100)$$

Připomeňme, že ze zákona zachování hybnosti, $L = \text{konst.}$, plyne rovnou **2. Keplerův zákon**.¹¹¹

Kinetická energie hmotného bodu m je $T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (v_r^2 + v_\varphi^2) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + (r \dot{\varphi})^2) = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2$. Gravitační potenciální energie v poli silového centra M je $V = -G \frac{mM}{r}$.

Celková energie $E = T + V$ je tedy

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r} \quad (8.101)$$

Při pohybu v gravitačním poli se zachovává energie; již výše jsme odvodili, že i moment hybnosti je konstantní:

$$E = \text{konst.}, \quad L = \text{konst.}$$

A právě **ze zachování energie a momentu hybnosti** odvodíme, po jaké trajektorii se hmotný bod m pohybuje.

Malá odbočka: efektivní potenciál

Nejprve ale ukážeme, jak ze vztahů (8.100) a (8.101) jednoduše odvodit, v jakém rozmezí radiální souřadnice r se může bod pohybovat. Ze (8.100) plyne

$$\dot{\varphi} = \frac{L}{m r^2} \quad (8.102)$$

Dosazením (8.102) do (8.101) dostaneme

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \frac{L^2}{m^2 r^4} - G \frac{mM}{r} = E ,$$

což můžeme přepsat jako

$$\frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \left(\frac{L^2}{2m r^2} - \frac{G mM}{r} \right) = E \quad (8.103)$$

¹¹⁰ Uvědomte si, co to znamená, když v_r píšeme bez šipky, a co je vektor \vec{v}_r .

¹¹¹ Zopakujte si, proč tomu tak je. Je to ostatně vidět i ze (8.100), uvědomíme-li si, že plošná rychlost je rovna

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{2} r v_\varphi .$$

Označíme-li část v kulatých závorkách jako **efektivní potenciál** $V_{ef}(r)$:

$$V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r},$$

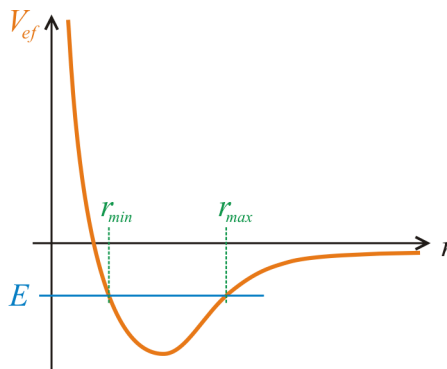
plyne z (8.103)

$$0 \leq \frac{1}{2}m\dot{r}^2 = E - V_{ef}(r). \quad (8.104)$$

Je tedy jasné, že radiální souřadnice r může nabývat jen takových hodnot, že $E \geq V_{ef}(r)$.

Z grafu funkce $V_{ef}(r)$ je vidět¹¹², že pro:

- $E < 0$ jde o **vázané orbity** (je $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$, bod nemůže uniknout „do nekonečna“),
- $E \geq 0$ se bod může vzdálit do libovolně velké vzdálenosti.¹¹³



Poznámky:

1. Proč používáme termín „efektivní potenciál“:

Rovnici (8.104) můžeme přepsat jako $E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{ef}(r)$. Právě taková by byla energie hmotného bodu, který by se pohyboval po přímce (souřadnicí by bylo r) v poli síly o potenciálu $V_{ef}(r)$.¹¹⁴

2. Pozor, efektivní potenciál závisí na velikosti momentu hybnosti L . Pro $L = 0$ nevzrůstá, když se r blíží k nule. (Tak se můžeme strefit do silového centra $r = 0$: hzením přímo do centra.)

Od rovnic pro časovou závislost k rovnici pro trajektorii

Rovnici (8.103) můžeme po vynásobení $2/m$ přepsat na tvar

$$\frac{dr}{dt} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}} \quad (8.105)$$

a rovnice (8.102) je

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{L}{mr^2}. \quad (8.106)$$

Jde o dvě diferenciální rovnice 1. řádu pro dvě neznámé funkce $r(t)$, $\varphi(t)$. Bohužel, analyticky je řešit neumíme – tedy neumíme z nich dostat vzorce popisující časový vývoj obou souřadnic. Co však lze vypočítat, je **tvar trajektorie**, tedy závislost $r = r(\varphi)$.

K tomu stačí rovnici (8.105) vydělit rovnicí (8.106). Platí totiž, že

¹¹² Rozmyslete si, jak to z grafu a vztahu (7) názorně plyne.

¹¹³ Uvědomte si, jak možnost „ulétnout k nekonečnu“ souvisí s druhou kosmickou rychlostí. Dobře je to vidět, pokud z místa o radiální souřadnici r vystřelíme hmotný bod rychlostí v v radiálním směru. Zákon zachování energie pak je $\frac{1}{2}m\dot{r}^2 - GmM/r = E = 0$. Připomeňte si, proč musí být energie rovna nule, pokud má bod „právě doletět do nekonečna“, tedy nespadnout zpět, a jak odtud vyjádřit druhou kosmickou rychlost.

¹¹⁴ Fakticky jde o potenciální energii, přesto se však zde používá pojem potenciál.

$$\frac{dr}{d\varphi} = \frac{\frac{dr}{dt}}{\frac{d\varphi}{dt}} \quad .^{115}$$

Vydělením rovnice (8) rovnicí (9) dostaneme

$$\frac{dr}{d\varphi} = \pm \frac{mr^2}{L} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}} \quad (8.107)$$

– a to už je diferenciální rovnice, z níž vypočteme $r = r(\varphi)$, tedy určíme tvar trajektorie.

Řešíme rovnici pro trajektorii

Rovnici (8.107) budeme řešit separací proměnných, tedy tak, že výrazy, v nichž se vyskytuje r , přesuneme na levou stranu rovnice, výrazy, v nichž se vyskytuje φ (včetně diferenciálu $d\varphi$), na pravou stranu a rovnici budeme integrovat:

$$\int \frac{L dr}{mr^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2GM}{r} - \frac{L^2}{m^2r^2}}} = \pm \int d\varphi \quad (8.108)$$

Pravá strana dá $\varphi + \text{konst.}$, levou musíme integrovat. Substitucí $\xi = L/(mr)$ a následně substitucí $\xi - GMm/L = \tau \sqrt{2E/m + (GMm/L)^2}$ můžeme integrál na levé straně upravit na „tabulkový integrál“, který již umíme řešit; pak zpětně dosadíme za τ a poté za ξ , abychom v něm měli původní proměnnou r :¹¹⁶

$$\begin{aligned} -\int \frac{d\xi}{\sqrt{2E/m + (2GMm/L)\xi - \xi^2}} &= -\int \frac{d\xi}{\sqrt{(2E/m + (GMm/L)^2) - (\xi - GMm/L)^2}} = \\ &= -\int \frac{d\tau}{\sqrt{1 - \tau^2}} = \arccos(\tau) = \arccos\left(\frac{\xi - GMm/L}{\sqrt{2E/m + (GMm/L)^2}}\right) = \arccos\left(\frac{L^2/(GMm^2)(1/r) - 1}{\sqrt{2EL^2/(G^2M^2m^3) + 1}}\right) \end{aligned}$$

Označíme-li

$$\frac{L^2}{GMm^2} = p \quad \text{a} \quad \sqrt{2EL^2/(G^2M^2m^3) + 1} = \varepsilon, \quad (8.109)$$

přejde (8.108) na

$$\arccos\left(\frac{p/r - 1}{\varepsilon}\right) = \pm \varphi + \text{konst.} \quad (8.110)$$

¹¹⁵ Plyne to z věty o derivaci inverzní funkce; mnemotechnicky si to můžeme pamatovat tak, že výsledek je stejný, jako kdybychom „zkrátily diferenciály“ dt .

¹¹⁶ Výpočet je vlastně přímočarý, jen trochu zdlouhavý a napoprvé nás může množstvím veličin, dvojí substitucí a převedením výrazu pod odmocninou na tvar „jedna mínus druhá mocnina“ trochu zaskočit. Zkuste si ho popočítat podrobně, alespoň jednou v životě stojí za to si výpočet projít a přesvědčit se, že i takovýchle integrálů umíme spočítat.

Konstantu na pravé straně (8.110) můžeme bez újmy na obecnosti zvolit rovnou nule¹¹⁷ a získaný vztah upravit na

$$\frac{p-r}{\varepsilon} = \cos(\pm\varphi) = \cos\varphi$$

Odtud

$$p = r(1 + \varepsilon \cos\varphi) \quad (8.111)$$

Interpretujeme řešení – a dostáváme první Keplerův zákon

Vztah (8.111) je rovnice kuželosečky v polárním tvaru.

To, že jde o kuželosečku, je samozřejmě nejjednodušeji vidět v případě $\varepsilon = 0$.¹¹⁸

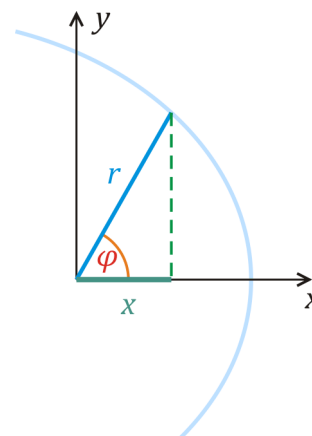
Obecně:

Protože $x = r \cos\varphi$ (viz obrázek), plyne ze (8.111)

$$p = r + \varepsilon r \cos\varphi = r + \varepsilon x \Rightarrow p - \varepsilon x = r.$$

Po umocnění dostaneme $(p - \varepsilon x)^2 = r^2 = x^2 + y^2$ a po úpravě levé strany $p^2 - 2p\varepsilon x + \varepsilon^2 x^2 = x^2 + y^2$. Odtud konečně

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + y^2 = p^2 \quad (8.112)$$



1) Pro $\varepsilon = 1$ je křivkou parabola.

Z (8.109) vidíme, že toto nastane, pokud celková energie $E = 0$.¹¹⁹ Že jde o parabolu, můžeme vidět, když do (8.112) dosadíme $\varepsilon = 1$. Dostaneme $2px + y^2 = p^2 \Rightarrow x = \frac{p}{2} - \frac{y^2}{2p}$.

2) Pro $0 < \varepsilon < 1$ je křivkou elipsa.

Z (8.109) je vidět, že toto nastává pro $E < 0$. Vztah (8.112) lze v tomto případě upravit na

$$x^2(1 - \varepsilon^2) + 2p\varepsilon x + \frac{\varepsilon^2 p^2}{1 - \varepsilon^2} + y^2 = p^2 + \frac{\varepsilon^2 p^2}{1 - \varepsilon^2} = \frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}. \quad (8.113)$$

První tři členy lze upravit na druhou mocninu dvojčlenu $(1 - \varepsilon^2) \left(x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} \right)^2$. Vydělíme-li (8.113)

její pravou stranou, dostaneme

¹¹⁷ Přičtení konstanty znamená vlastně jen pootočení soustavy souřadnic. (Rozmyslete si, proč.)

¹¹⁸ Schválně: co je to v tomto případě za křivku? ☺ (Pokud váháte, uvědomte si, že p je konstanta.)

¹¹⁹ Tedy právě „na pomezí“ toho, že hmotný bod může uniknout do nekonečna.

$$\frac{\left(x + \frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2}\right)^2}{\frac{p^2}{(1 - \varepsilon^2)^2}} + \frac{y^2}{\frac{p^2}{1 - \varepsilon^2}} = 1. \quad (8.114)$$

Označíme-li

$$\frac{p}{1 - \varepsilon^2} = a, \quad \frac{p}{\sqrt{1 - \varepsilon^2}} = b \quad (8.115)$$

a

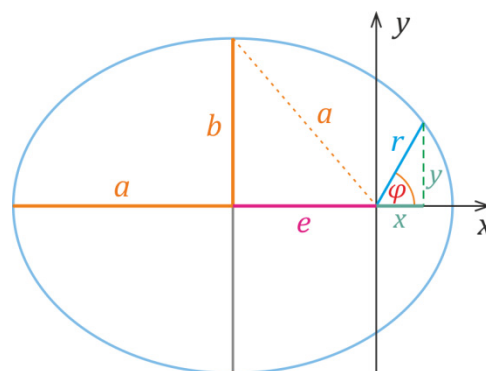
$$\frac{\varepsilon p}{1 - \varepsilon^2} = e, \quad (8.116)$$

dostaneme ze (8.114)

$$\frac{(x + e)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad (8.117)$$

tedy známý tvar rovnice elipsy. Přitom a je délka velké poloosy elipsy, b délka malé poloosy. Počátek soustavy souřadnic (tedy místo, kde je silové centrum M) není ve středu elipsy, je posunut o e . Navíc platí, že $e^2 = a^2 - b^2$, e je tedy *excentricita*, čili vzdálenost mezi středem elipsy a ohniskem¹²⁰. Vidíme tedy, že silové centrum je v ohnisku elipsy.

Odvodili jsme tedy **první Keplerův zákon**: Planety obíhají kolem Slunce po elipsách, v jejich ohnisku je Slunce.¹²¹



3) Pro $\varepsilon > 1$ (tedy pro $E > 0$) je křivkou **hyperbola**.¹²²

Druhý Keplerův zákon

Druhý Keplerův zákon jsme už odvodili dříve: plošná rychlost je konstantní, $\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$.

Třetí Keplerův zákon

Ve třetím Keplerově zákoně se vyskytuje doba oběhu T . Spočíst se dá pěkným trikem: Plocha elipsy je $S = \pi a b$. Zároveň (protože plošná rychlost je konstantní), musí platit $S = \frac{dS}{dt} T = \frac{L}{2m} T$. Kombinací obou vztahů dostaneme

$$T = \pi a b \frac{2m}{L}. \quad (8.118)$$

¹²⁰ Poznamenejme, že $\varepsilon = e/a$ (jak plyne ze (8.115) a (8.116)). Tato veličina se nazývá *numerická excentricita*.

¹²¹ Ze vztahů (8.115) a (8.109) lze navíc odvodit, že $a = -GMm/(2E)$, tedy že velká poloosa nezávisí na momentu hybnosti L , ale jen na energii. (Znaménko mínus ve vztahu pro a je v pořádku, protože $E < 0$.)

¹²² Důkaz je analogický jako v případě elipsy; ponecháváme jej na aktivitě laskavého čtenáře. ☺

Ze vztahů (8.115) plyne $b = \sqrt{a} \sqrt{p}$, což po dosazení za p z (8.109) dá $b = \sqrt{a} \frac{L}{\sqrt{GMm}}$. Dosazením do

(8.118) dostaneme

$$T = \pi a \sqrt{a} \frac{L}{\sqrt{GMm}} \frac{2m}{L} = 2\pi a^{3/2} \frac{1}{\sqrt{GM}}.$$

Umocněním na druhou pak dostáváme

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}} \quad (8.119)$$

To je **třetí Keplerův zákon**: druhé mocniny oběžných dob planet jsou úměrné třetím mocninám velkých poloos jejich trajektorií.¹²³

¹²³ Kdyby silové centrum nebylo nehybné (a Slunce nehybné opravdu není), museli bychom pohyb soustavy planeta+Slunce počítat jako problém dvou těles. Ve vztahu (8.119) by pak ve jmenovateli bylo $\kappa(M+m)$, tedy součet hmotnosti Slunce a planety.

Shrnutí

Nabitá částice v homogenním elektrickém poli: $\vec{r} = \frac{q}{2m} \vec{E} t^2 + \vec{v}_0 t + \vec{r}_0$ (pohyb po parabole)

Nabitá částice v homogenním magnetickém poli: pohyb po šroubovici, $\omega = \frac{qB}{m}$, $R = \frac{mV}{qB}$

Pohyb v odporujícím prostředí: $F_x = -k \cdot v_x$ (např. Stokesova síla) $\Rightarrow v_x = v_0 \cdot e^{-\frac{k}{m}t}$

$$F_x = -k \cdot v_x^2 \quad (v_x > 0), \text{ např. } F = \frac{1}{2} C_S \rho v^2 \Rightarrow v_x = v_0 / (1 + (k v_0 / m) \cdot t) \quad (\text{Netřeba umět z paměti; je třeba umět odvodit.})$$

Lineární harmonický oscilátor:

Netlumený: $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ (lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, řeš. hledáme ve tvaru $e^{\alpha t}$)

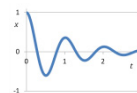
$$\text{řešení: } x(t) = C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t} = D_1 \cos(\omega t) + D_2 \sin(\omega t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

Tlumený: $\ddot{x} + 2\delta \dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ (úpravou z $m \frac{d^2 x}{dt^2} = -k \cdot x - b \cdot v_x$, $\frac{k}{m} = \omega_0^2$, $\frac{b}{m} = 2\delta$)

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2}$$

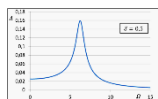
Aperiodický případ: $x(t) = C_1 e^{\alpha_1 t} + C_2 e^{\alpha_2 t}$. Mezní aperiodický případ: $x(t) = (C_1 + C_2 t) \cdot e^{-\delta t}$

Periodický případ: $x(t) = A e^{-\delta t} \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$

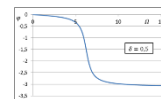


Buzené kmity a rezonance: rezonanční křivka, rezonanční frekvence, fáze kmitů

$$\frac{|A|}{|S|} = \frac{1}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$$



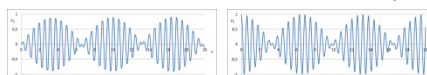
$$\Omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\delta^2}, \quad \text{tg } \varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}$$



Vázané oscilátory (módy kmitů)

$$x_1(t) = \frac{1}{2} (A \cdot \cos(\omega_0 t) + B \cdot \cos(\omega_1 t)), \quad x_2(t) = \frac{1}{2} (A \cdot \cos(\omega_0 t) - B \cdot \cos(\omega_1 t)), \quad \omega_0^2 = \frac{K}{m}, \quad \omega_1^2 = \frac{K + 2K_v}{m}$$

Příklady: pohyb ve fázi, pohyb v protifázi, rázy



Skládání kmitů (v kolmém směru: Lissajousovy obrazce)

Keplerova úloha (pohyb v poli centrální síly) řešíme v rovině, v polárních souřadnicích,

$$\text{vycházíme ze zachování } E \text{ a } L, \quad E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\varphi}^2 - G \frac{mM}{r}, \quad L = m r^2 \dot{\varphi}$$

Efektivní potenciál $V_{ef} = \frac{L^2}{2mr^2} - \frac{GmM}{r}$, $E \geq V_{ef}(r)$



První Keplerův zákon – trajektorie je kuželosečka ($p = r(1 + \varepsilon \cos \varphi)$), silové centrum v ohnisku,

$0 \leq \varepsilon < 1$ ($E < 0$)... elipsa ($\varepsilon = 0$ kružnice), $\varepsilon = 1$ ($E = 0$)... parabola, $\varepsilon > 1$ ($E > 0$)... hyperbola

Druhý Keplerův zákon – plošná rychlost je konstantní, plyne z $L = \text{konst.}$ ($\frac{dS}{dt} = \frac{L}{2m}$)

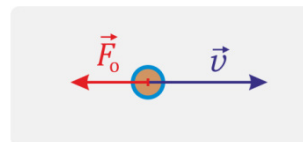
Třetí Keplerův zákon, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM}$ (a je velká poloosa; přesněji: místo M je $M+m$)

Dodatek 8.A: Odporové síly při pohybu tělesa v prostředí

Všichni víme, že při pohybu tělesa v kapalině nebo plynu působí okolní prostředí na těleso silou proti směru pohybu: Když jedeme na kole, odpor vzduchu nás zjevně brzdí, když plaveme a přestaneme hýbat rukama a nohama a budeme jen splývat, za chvíli se prakticky zastavíme.

Odporová síla \vec{F}_o působí proti směru rychlosti \vec{v} , viz obrázek.¹²⁴ Je tedy

$$\vec{F}_o = F_o(v) \frac{\vec{v}}{v}, \quad (8.A.1)$$

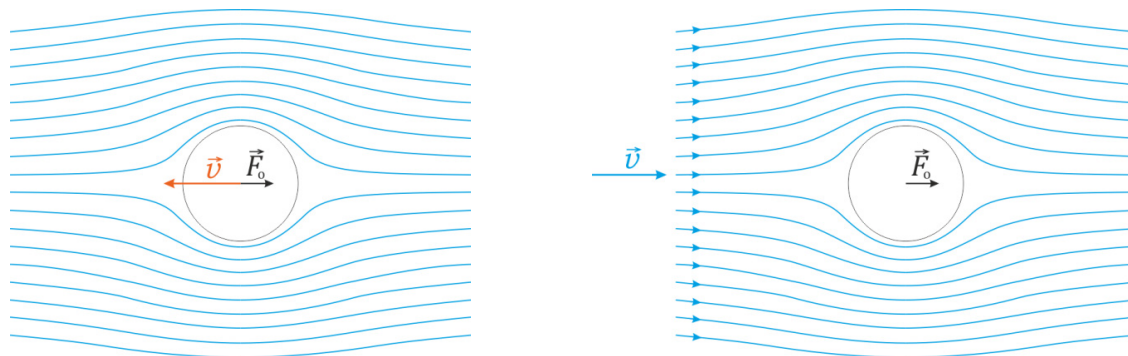


kde $v = |\vec{v}|$ ¹²⁵ a $F_o(v)$ vystihuje závislost velikosti odporové síly na rychlosti.¹²⁶

Jak přesně síla závisí na rychlosti, to není vůbec jednoduché určit. Pro velký rozsah rychlostí může být závislost docela složitá.¹²⁷ Spokojíme se proto se vztahy, které tuto závislost popisují alespoň přibližně, pro určitý rozsah rychlostí.¹²⁸

Odporová síla při malých rychlostech

Představme si malou kuličku pohybující se v nehybné tekutině (kapalině nebo plynu), viz levý obrázek. Pokud je rychlost malá, kulička „rozhruje“ tekutinu, ta se za ní zase „spořádaně srovná“. Možná názornější je pohled ze soustavy, v níž kulička stojí a tekutina ji obtéká, viz pravý obrázek. Modré čáry zde znázorňují pohyb tekutiny. (Jde o tzv. proudnice, blíže se s nimi seznámíme, až se budeme v kapitole 11 věnovat hydrodynamice. Tam si řekneme, že při takovémto „hladkém“ obtékání bez vírů a podobných složitostí jde o tzv. laminární proudění.)



Těsně u povrchu kuličky tekutina lne k povrchu tělesa, takže se prakticky nepohybuje.¹²⁹ Dále od povrchu kuličky rychlost tekutiny postupně narůstá. (Daleko od kuličky se tekutina pohybuje rychlostí \vec{v} .)

¹²⁴ Poznamenejme, že pokud by se těleso otáčelo a osa rotace nebyla rovnoběžná se směrem rychlosti, působila by i síla kolmá k rychlosti. Jde o tzv. *Magnusův jev*, tím se zde ale nebudeme zabývat. Budete tedy předpokládat, že těleso nerotuje.

¹²⁵ Nemusíme snad připomínat, že \vec{v}/v je jednotkový vektor ve směru rychlosti. (Pokud namítnete, že není definován pro $v = 0$, máte pravdu, ale při nulové rychlosti prostředí žádnou odporovou silou nepůsobí. Takže jestli chcete vše mít formálně korektně, napište, že vztah (8.A.1) platí pro $v \neq 0$, a pro $v = 0$ je $\vec{F}_o = 0$.)

¹²⁶ Síla totiž na rychlosti nepochybně závisí. Zkuste ve vodě pohybovat rukou nejdřív pomalu a pak mávnout rychle – rozdíl pocítíte doslova na vlastní kůži.

¹²⁷ Příklad uvidíme na konci tohoto dodatku.

¹²⁸ Zase to zanedbávání... Opravdu se bez něj ve fyzice často neobejdeme.

¹²⁹ Teď popisujeme situaci znázorněnou na pravém obrázku, tedy se stojící kuličkou. (Kuličku pochopitelně držíme v klidu nějakou další silou, ta není v obrázku zakreslena.)

Jednotlivé vrstvy tekutiny se přitom o sebe třou a přitom na sebe působí silou; vrstva těsně u povrchu kuličky působí silou na samotnou kuličku – a právě to dá¹³⁰ odporovou sílu působící na kuličku.

Jak moc se o sebe vrstvy tekutiny třou, závisí jednak na tom, jak rychle se mění rychlost tekutiny (když postupujeme „od vrstvy k vrstvě“ o nějakou malou délku Δl), a jednak na vlastnostech tekutiny, konkrétně na tom, jaká je její **viskozita** η .¹³¹ Blíže se této problematice budeme věnovat v kapitole 11.

Kvalitativně se s viskozitou potkáváme v běžném denním životě: vodu nebo čaj zamícháme lžičkou snadno, med jen obtížně. Je to dáno právě hodnotou viskozity. Voda má $\eta \doteq 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$;¹³² viskozita medu se uvádí až o tři až čtyři řády vyšší. Naopak viskozita vzduchu je nižší, asi $2\cdot 10^{-5} \text{ Pa}\cdot\text{s}$.¹³³ (Taky se vzduch míchá ještě snáze, než voda...)

Odvození celkové síly, kterou tekutina na kuličku působí, není jednoduché; najdete ho v učebnicích mechaniky kontinua. Výsledný vztah, nazývaný **Stokesův vzorec**, ale jednoduchý je:

$$F = 6\pi R\eta v . \quad (8.A.2)$$

Přitom R je poloměr kuličky a v vzájemná rychlost kuličky a tekutiny.

Kdy platí Stokesův vzorec

Je třeba si uvědomit, že vztah (8.A.2) platí opravdu jen pro malé rychlosti. Jak malé musí být, se pozná z hodnoty tzv. *Reynoldsova čísla*, s ním se také seznámíme v kapitole 11. Zde si zatím „v předstihu“ uvedeme, že jde o bezrozměrné číslo dané vztahem

$$\text{Re} = R \cdot (\rho/\eta) \cdot v . \quad (8.A.3)$$

Uvádí se, že odpor prostředí je popsán Stokesovým vzorcem, pokud

$$\text{Re} \lesssim 1 . \quad (8.A.4)$$

Pro vodu ($\eta \doteq 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$, $\rho \doteq 10^3 \text{ kg/m}^3$) vychází $\text{Re} \doteq 10^6 R \cdot v / (\text{m}^2\cdot\text{s}^{-2})$, takže pro kuličku o poloměru 1 mm by rychlost musela být menší než asi 1 mm/s, aby byla splněna podmínka (8.A.4). Pro pohyb v oleji nebo v medu mohou být rychlosti i poloměry větší.

Při vyšších rychlostech už není odporová síla přímo úměrná rychlosti. Závislost síly na rychlosti je složitější; pro Reynoldsovo číslo vyšší než asi 10^3 je síla prakticky úměrná druhé mocnině rychlosti.¹³⁷

¹³⁰ Po sečtení „kousků sil“ na jednotlivé části povrchu kuličky.

¹³¹ Upřesnění: η je tzv. *dynamická viskozita*. Kromě ní se používá ještě veličina zvaná *kinematická viskozita*. Ta se značí ν a je definována vztahem $\nu = \eta/\rho$, kde ρ je hustota tekutiny. (Tak když na tyto veličiny narazíte v tabulkách nebo na webu, abyste věděli, o čem jde.)

¹³² Proč je jednotkou dynamické viskozity „pascal krát sekunda“ poznáme v kap. 11.

¹³³ Tyto hodnoty tady neuvádíme proto, že byste se je měli učit nazpaměť. Pokud je budete potřebovat, tak si je zapamatujete, jinak jsou k dispozici v tabulkách. (Ten med tedy v SŠ tabulkách není, ale jeho vlastnosti jdou dohledat na webu; ostatně jako skoro všechno. ☺) Jde o to, abychom těm informacím, co lze dohledat, rozuměli a uměli s nimi pracovat. (Což je ale asi poznámka tak samozřejmá, že je skoro zbytečná...)

¹³⁴ Někdy se pro sílu danou tímto vztahem používá název **Stokesova síla**.

¹³⁵ ρ je hustota tekutiny.

¹³⁶ Při jeho odvozování se používá silnější podmínka: $\text{Re} \ll 1$. Na druhou stranu se uvádí, že Stokesův vzorec (8.A.2) lze užít, pokud je Reynoldsovo číslo řádu jednotek (tedy řekněme do $\text{Re} \lesssim 10$), vztah už pak ale platí s určitou chybou.

¹³⁷ Pro velké hodnoty Reynoldsova čísla (např. $\text{Re} > 10^5$) může být ale závislost zase složitější, viz konec tohoto dodatku; těmto detailům se tady ale nebudeme příliš věnovat.

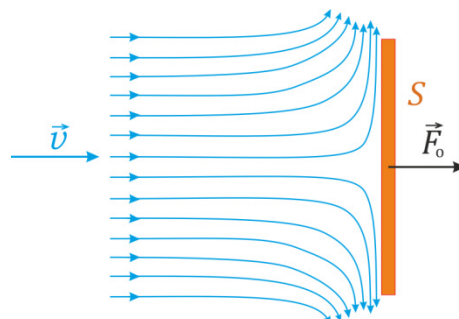
Odporová síla při vyšších rychlostech

Pro odporovou sílu při vyšších rychlostech je podstatné nikoli tření vrstev tekutiny, ale, zjednodušeně řečeno, „to jak tekutina naráží do tělesa“. Princip odvození odporové síly v tomto případě pochází už od Newtona.

Uvažujme například vítr vanoucí rychlostí v a desku o ploše S , která je kolmá k rychlosti větru, viz obrázek.

Vzduch musí desku obtékat¹³⁸, takže jeho rychlost před deskou musí vypadat zhruba tak, jak naznačuje obrázek.¹³⁹

Daleko před deskou měl vzduch nějakou hybnost ve směru původní rychlosti \vec{v} , u desky už hybnost v tomto směru nemá.¹⁴⁰ Hybnost se ale nemohla ztratit, vzduch ji musel něčemu předat. Jediné, čemu ji mohl předat, je deska. A hybnost předávaná desce se právě projevuje jako síla, kterou vítr na desku působí.¹⁴¹



Takže kvalitativně tomu rozumíme, tak teď to jen nějak zformulovat matematicky a odvodit vztah pro velikost síly.

Uvažujme vzduch, který „narází“ na desku za dobu Δt . Je to vzduch ve válečku¹⁴² s podstavou S , jehož výška je $v \Delta t$. Objem válečku je $\Delta V = S \cdot v \Delta t$, hmotnost vzduchu v něm je tedy

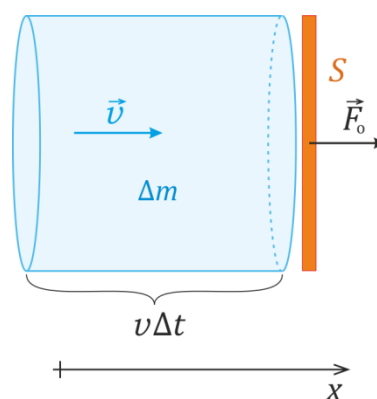
$$\Delta m = \rho \Delta V = \rho v \Delta t S, \quad (8.A.5)$$

kde ρ je hustota vzduchu. Hybnost vzduchu ve válečku (ve směru osy x , viz obrázek) je tedy

$$\Delta p_x = \Delta m v = \rho v^2 \Delta t S. \quad (8.A.6)$$

Právě tento vzduch narazí za dobu Δt do stěny a předá jí tedy hybnost Δp_x .¹⁴³ Když změnu hybnosti (8.A.6) vydělíme dobou Δt , získáme sílu působící na desku:

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \rho v^2 S. \quad (8.A.7)$$



¹³⁸ Názorně řečeno, musí se jí „vyhnout“. (Nemůže protékat skrz ni.)

¹³⁹ Poznamenejme, že obrázek to ukazuje jen kvalitativně, nejde o přesný tvar proudnic získaný nějakým výpočtem. Navíc vůbec neukazujeme, jak vzduch proudí dál, kolem okrajů a zadní strany desky.

¹⁴⁰ Protože ho deska v tomto směru zastavila.

¹⁴¹ Vzpomeňte, že změna hybnosti se rovná impulzu síly. (Viz kapitolu 3, vztah (3.9) a z něj odvozený vztah (3.11).)

¹⁴² Váleček to bude v případě, když deska bude kruhová. Kdyby šlo o obdélníkovou desku, bude to kvádr; na odvození to nic nemění.

¹⁴³ POZOR! Všimli jste si toho, jak při našem odvození situaci zjednodušujeme?

Uvažujeme, že všechny vzduch v uvažovaném válečku narazí do stěny a zcela zastaví svůj pohyb ve směru osy x . Tohle je určitě pravda jen přibližně. I u uvažované stěny část vzduchu desku obteče, aniž by ztratila veškerou rychlost ve směru x . (Navíc může část vzduchu po obtečení narážet do desky zezadu.) Pokud půjde o jiná tělesa, než je deska, v některých případech půjdou obtékat velmi snadno (například kapkový profil), někdy zas mohou vracet část vzduchu proti jeho původnímu směru (třeba polokoule otočená dutou stranou proti větru, například padák). Takže určitě neodvodíme přesnou hodnotu odporové síly. Ve výsledku bude nějaký koeficient, který bude různý pro různá tělesa; určovat se dá pomocí měření například ve větrném tunelu.

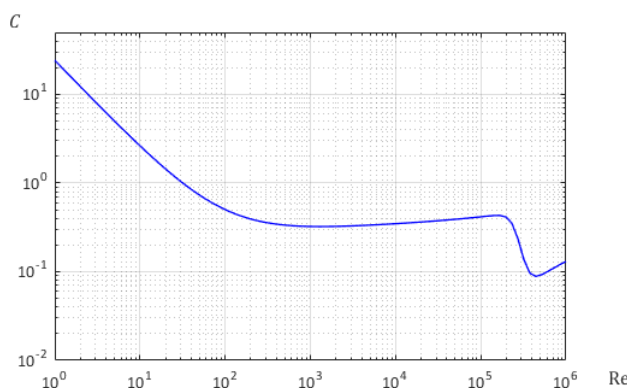
To už je skoro kýžený výsledný vzorec – jen do něj ještě musíme zapracovat koeficient, který vystihne, že odporová síla závisí na tvaru obtékaného tělesa.¹⁴⁴ Zčásti z historických důvodů se tento koeficient píše ve tvaru $\frac{1}{2}C$. Výsledný **Newtonův vzorec** pro odporovou sílu má pak tvar

$$F = \frac{1}{2}C \rho S v^2 . \quad (8.A.8)$$

Jak už bylo řečeno, ρ je hustota vzduchu (resp. obecně tekutiny, která se pohybuje k tělesu nebo v níž se těleso pohybuje), v vzájemná rychlost tekutiny a tělesa, S plocha průřezu tělesa kolmého na rychlost. Bezrozměrný koeficient C se nazývá *koeficient odporu*.¹⁴⁵ Jeho hodnota se zjišťuje experimentálně. Pro představu: přibližné hodnoty koeficientu odporu vybraných těles jsou:¹⁴⁶

Těleso	C
dlouhá plochá deska	2,0
polokoule, otevřenou stranou proti větru (padák)	1,4
plochá deska	1,2
koule	0,47
Boeing 787	0,024

Ovšem pozor! Hodnoty C zde uvádíme jako konstanty, ale ve skutečnosti je to složitější. Závisejí totiž na Reynoldsově čísle Re .¹⁴⁷ Například pro kouli tuto závislost ukazuje graf:



Vidíme, že hodnota C je konstantní jen v určitém rozmezí Re , a i to jen přibližně. Pro malé hodnoty Re C roste¹⁴⁸, pak je asi do $Re \approx 10^3$ přechodná oblast, poté je C přibližně konstantní. Pro $Re \gtrsim 2 \cdot 10^5$ ale najednou výrazně poklesne. Je vidět, že obtékání těles je docela složitá záležitost...

¹⁴⁴ Ostatně i pro desku byla naše úvaha o tom, kolik vzduchu „narazí“ na desku a jak moc se ve směru osy x zastaví, jen přibližná, viz předchozí poznámku pod čarou.

¹⁴⁵ Anglicky *drag coefficient*; proto bývá v anglických zdrojích (třeba na anglické Wikipedii) značen C_d .

¹⁴⁶ Většina údajů je podle https://en.wikipedia.org/wiki/Drag_coefficient, (Hodnoty v tabulce jsou zaokrouhleny na dvě platné cifry. Například pro dlouhou plochou desku se jako přesnější hodnota uvádí 1,98.)

Údaje z různých zdrojů se mohou drobně lišit. Například podle uvedené stránky Wikipedie je koeficient pro plochou desku 1,17; podle stránky NASA <https://www.grc.nasa.gov/www/k-12/rocket/shaped.html> je 1,25. Hodnoty pro řadu různých objektů uvádí https://www.engineeringtoolbox.com/drag-coefficient-d_627.html (extrémně nízkou hodnotu zde najdeme pro delfína: 0,0036, kam se na něj hrabe Boeing...); hodnoty pro mnoho typů a značek automobilů stránka Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Automobile_drag_coefficient.

¹⁴⁷ Pro daný tvar a rozměry tělesa (a dané prostředí) tedy na rychlosti, viz např. (8.A.3).

¹⁴⁸ Chová se jako $C = 24/Re$, což odpovídá tomu, že síla není úměrná v^2 , ale v .

Dodatek 8.B: Řešení diferenciálních rovnic metodou separace proměnných

Ukážeme si jednoduchou a užitečnou metodu, jak řešit jeden typ diferenciálních rovnic prvního řádu.¹⁴⁹
Jde o rovnice typu

$$\frac{dy}{dx} = f(x)g(y) . \quad (8.B.1)$$

Zde x je nezávisle proměnná, y závisle proměnná¹⁵⁰, $f(x)$ je nějaká známá funkce x , $g(y)$ nějaká známá funkce y .¹⁵¹

Název metody – **separace proměnných** – napovídá, jak rovnici (8.B.1) řešit: opravdu *separujeme* nezávisle a závisle proměnnou, tedy x a y . Všechny členy, kde se vyskytuje y , převedeme na levou stranu rovnice a všechny členy, kde je x , na pravou stranu¹⁵². A to včetně jejich diferenciálů dx a dy .¹⁵³

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = f(x)g(y) & \quad \Big/ \cdot \frac{1}{g(y)} dx \\ \frac{1}{g(y)} dy = f(x) dx & \quad (8.B.2) \end{aligned}$$

A teď už jen na obě strany přikreslíme „integřítka“ (tedy symboly integrálu):

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = \int f(x) dx . \quad (8.B.3)$$

Integrály vypočteme a máme v podstatě hotovo. Až na to, že na levé straně máme nějakou funkci y a nikoli samotné y . Ale to se zvládne. Když si neurčité integrály v (8.B.3) označíme jako funkce

$$\int \frac{1}{g(y)} dy = G(y), \quad \int f(x) dx = F(x), \quad (8.B.4)$$

dostane (8.B.3) tvar

$$G(y) = F(x) . \quad (8.B.5)$$

Samotné y získáme pomocí **inverzní funkce** k funkci $G(y)$, tu označujeme $G^{-1}(y)$. Z (8.B.5) tedy vyjde

¹⁴⁹ Využili jsme ji v části 8.2 této kapitoly a ve fyzice se s jejím užitím setkáte ještě mnohokrát.

¹⁵⁰ Závisí na x , přitom ovšem funkci $y(x)$ na začátku neznáme, je to řešení dané diferenciální rovnice, které chceme najít.

¹⁵¹ Například pro rovnici $\frac{dy}{dx} = x^2 y$ je $f(x) = x^2$, $g(y) = y$. Příkladem rovnice typu (8.B.1) je také rovnice (8.26),

tedy $m \frac{dv_x}{dt} = -k v_x$, kterou jsme řešili v této kapitole. V ní byl ovšem nezávisle proměnnou čas t , závisle proměnnou

byla x -ová složka rychlosti v_x . (Navíc, striktně vzato, tvar (8.B.1) získá až úpravou na $\frac{dv_x}{dt} = -(k/m)v_x$.)

¹⁵² Méně formálním jazykem bychom mohli říci, že je „přetáhneme“ na levou stranu rovnice. (Ne ovšem tažením lanem ☹, ale podle pravidel pro práci s rovnicemi.)

¹⁵³ Zde by se na nás mohli matematici zlobit, že trháme symbol $\frac{dy}{dx}$ pro derivaci; často zdůrazňují, že jde o

nedělitelný symbol. Ovšem jako návod, jak metodu separace proměnných uplatnit, resp. jak si daný postup pamatovat, se toto „roztržení“ dá použít. (Výsledný vztah pro řešení je přitom podložen přesnou matematickou větou; tu zde neuvádíme a odkážeme zájemce na přednášku nebo učebnice matematické analýzy.) Dále ukážeme, jak lze toto „odtržení“ dx a dy alespoň přibližně chápat názorně.

$$y = G^{-1}(F(x)) . \quad (8.B.6)$$

Výsledek (8.B.6) je vhodné ještě trochu upravit resp. zobecnit.¹⁵⁴ Neurčité integrály (8.B.4) jsou určeny až na konstantu. Pokud funkce $G(y)$ a $F(x)$ bereme jako „pevné“ (tedy nikoli určené až na konstantu), musíme místo (8.B.5) psát

$$G(y) = F(x) + C , \quad (8.B.7)$$

kde C je libovolná konstanta.¹⁵⁵ Po aplikaci inverzní funkce je konečný tvar řešení dané diferenciální rovnice

$$y = G^{-1}(F(x) + C) . \quad (8.B.8)$$

Příklad:

Ukažme si uvedený postup na rovnici

$$\frac{dy}{dx} = -x y . \quad (8.B.9)$$

V označení použitém v (8.B.1) je $f(x) = -x$, $g(y) = y$. Separace proměnných dá

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = -x y & \quad \Big/ \cdot \frac{dx}{y} . \\ \frac{dy}{y} = -x dx & \\ \int \frac{dy}{y} = - \int x dx & . \end{aligned} \quad (8.B.10)$$

Integrály na levé a pravé straně dají¹⁵⁶

$$\int \frac{dy}{y} = \ln|y|, \quad - \int x dx = -\frac{x^2}{2} + C ,$$

čili funkce (8.B.4) jsou

$$G(y) = \int \frac{dy}{y} = \ln|y|, \quad F(x) = - \int x dx = -\frac{x^2}{2} ,$$

Pro jednoduchost budeme uvažovat jen $y > 0$. Inverzní funkcí k $G(y) = \ln(y)$ je exponenciála: $G^{-1}(z) = \exp(z) = e^z$. Obecný vztah (8.B.8) tedy dá výsledek

$$y = \exp\left(-x^2/2 + C\right) = e^{-\frac{x^2}{2} + C} = e^C e^{-\frac{x^2}{2}} = \tilde{C} e^{-\frac{x^2}{2}} . \quad (8.B.11)$$

¹⁵⁴ Také je vhodné uvědomit si dvě drobnosti: Jednak (byť je to asi zřejmé) označení G^{-1} zde opravdu znamená *inverzní* funkci, není to tedy $1/G$ (!). A za druhé předpokládáme, že inverzní funkce k funkci $G(y)$ existuje. Při řešení konkrétní diferenciální rovnice uvidíme, jak to s inverzní funkcí je, zda se třeba nebudeme muset omezit jen na nějaký interval hodnot (podobně, jako když určujeme inverzní funkci třeba k $\sin(x)$) apod. Ostatně, kdybychom měli o správnosti získaného řešení nějaké pochyby, vždy si můžeme ověřit, zda danou diferenciální rovnici splňuje.

¹⁵⁵ Nemusíme zvlášť psát dvě konstanty, každou na jednu stranu rovnice, tedy $G(y) + C_1 = F(x) + C_2$. Úpravou bychom totiž dostali $G(y) = F(x) + C_2 - C_1$, a rozdíl dvou libovolných konstant $C_2 - C_1$ je libovolná konstanta, tu označíme jako C .

¹⁵⁶ Pro integrál na levé straně rovnice nepřipisujeme integrační konstantu, viz předchozí poznámku.

Zde jsme e^C označili jako \tilde{C} . Protože C je libovolná konstanta, je \tilde{C} také libovolná konstanta. Z odvození plyne $\tilde{C} > 0$, ale můžeme se přesvědčit, že (8.B.11) je řešením (8.B.9) i pro \tilde{C} záporné.¹⁵⁷

Matematická analýza nás poučí, že řešení diferenciální rovnice prvního řádu obsahuje jednu nezávislou konstantu, tu jsme v řešení opravdu dostali. Jak už víme, její hodnotu určíme z počáteční podmínky $y(x_0) = y_0$. Například pokud by podmínka byla $y(0) = 5$, bylo by řešení konkrétně $y = 5 e^{-\frac{x^2}{2}}$

Při praktickém řešení diferenciální rovnice často explicitě nevypisujeme symboly funkcí $F(x)$ a $G(y)$, ale např. do (8.B.10) hned připsujeme řešení příslušných integrálů:

$$\ln|y| = \int \frac{dy}{y} = - \int x dx = -\frac{x^2}{2} + C$$

a v daném případě obě strany prostě „odlogaritmujeme“ (tedy zapůsobíme na obě strany exponenciálou) a získáme výsledek

$$|y| = e^{-\frac{x^2}{2} + C} = \dots = \tilde{C} e^{-\frac{x^2}{2}}.^{158}$$

Proč metoda separace proměnných funguje

Na konkrétním příkladu (i výše v kapitole) vidíme, že metoda separace proměnných funguje. Ale přece jen: celý návod působí trochu „kuchařkovitě“¹⁵⁹ a celý postup může působit trochu tajemně, takže se můžeme ptát: Proboha, jak to, že něco takového vůbec funguje?

Pojďme si na uvedený postup posvítit trochu blíže, bez nároku na exaktnost.¹⁶⁰ Půjde nám o to, abychom do fungování dané metody trochu názorně viděli.

Pomůže nám uvědomit si, že derivace funkce $\frac{dy}{dx}$ se přibližně rovná podílu přírůstků Δy a Δx :

$$\frac{dy}{dx} \doteq \frac{\Delta y}{\Delta x}.^{161} \tag{8.B.12}$$

Rovnici (8.B.1), tedy $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, proto můžeme přepsat jako

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} \doteq f(x)g(y).^{162} \tag{8.B.13}$$

V tomto vztahu už můžeme obě strany bez problémů vynásobit Δx (a vydělit $g(y)$); dostaneme tak

¹⁵⁷ Ověřte si dosazením, že jsme dostali opravdu správné řešení rovnice (8.B.9).

¹⁵⁸ Odstranit z něj absolutní hodnotu znamená uvažovat buď y kladné nebo záporné, z výsledku vidíme, že $y(x)$ nemění znaménko.

¹⁵⁹ Místo pokynu ve stylu Magdaleny Dobromily Rettigové „vraž do toho deset vajec“ zde máme pokyn typu „přikreslete integřítka“...

¹⁶⁰ Tu necháme matematické analýze.

¹⁶¹ Přesně je to samozřejmě v limitě $\Delta x \rightarrow 0$, ale pro dostatečně malé Δx je chyba velmi malá.

¹⁶² Místo symbolu „ \doteq “ pro přibližnou rovnost už budeme dále psát jen rovnítko, víme, že vztahy budou platit s nějakou chybou, volbou dostatečně malého Δx ale můžeme chybu libovolně zmenšit.

$$\frac{\Delta y}{g(y)} = f(x)\Delta x \quad (8.B.13)$$

Jestliže vyjdeme z bodu x_0 , v němž y má hodnotu y_0 , můžeme „kousky“ na levé a pravé straně (8.B.13) sčítat; přitom Δx jsou přírůstky nezávisle proměnné a Δy odpovídající přírůstky závisle proměnné, viz obrázek.

Sčítáním „kousků“ v (8.B.13) dostaneme

$$\sum_{i=0}^n \frac{\Delta y_i}{g(y_i)} = \sum_{i=0}^n f(x_i)\Delta x_i \quad (8.B.14)$$

Další krok už je asi zřejmý: Budeme zmenšovat délky intervalů Δx_i ; přitom se budou zmenšovat i délky intervalů Δy_i . Sumy přitom přejdou v integrály,¹⁶⁴ takže z (8.B.14) vyjde

$$\int_{y_0}^{\tilde{y}} \frac{1}{g(y)} dy = \int_{x_0}^{\tilde{x}} f(x) dx \quad (8.B.15)$$

Výsledné \tilde{y} přitom odpovídá hodnotě nezávisle proměnné \tilde{x} , je tedy $\tilde{y} = y(\tilde{x})$. Vztah (8.B.15) dává výsledek (tedy řešení diferenciální rovnice) ve formě určitých integrálů.¹⁶⁵ Můžeme odtud ale snadno dostat i řešení vycházející z neurčitých integrálů. Jestliže neurčité integrály označíme tak, jak jsme to udělali v (8.B.4), tedy $\int \frac{1}{g(y)} dy = G(y)$, $\int f(x) dx = F(x)$, budou určité integrály v (8.B.15)

$$\int_{y_0}^{\tilde{y}} \frac{1}{g(y)} dy = G(\tilde{y}) - G(y_0), \quad \int_{x_0}^{\tilde{x}} f(x) dx = F(\tilde{x}) - F(x_0).$$

Z (8.B.15) tedy vyjde

$$G(\tilde{y}) - G(y_0) = F(\tilde{x}) - F(x_0) \Rightarrow G(\tilde{y}) = F(\tilde{x}) + \underbrace{G(y_0) - F(x_0)}_C, \quad (8.B.16)$$

a to už je fakticky vztah (8.B.7).¹⁶⁶ Takže náš názorný postup opravdu dospěl k výsledku, který na nás výše „vypadl jako recept z kuchařky“.

¹⁶³ Sčítáme přes všechny „kousky“, takže n je rovno počtu „kousků“ minus 1 (protože začínáme od $i = 0$). Konkrétně ale počet n nebudeme v naší úvaze potřebovat.

Délky intervalů Δx_i mohou být stejné, jak je to na obrázku, délky intervalů Δy_i obecně konstantní nejsou. Funkce $y(x)$, kterou ukazuje graf v obrázku, je řešení rovnice s počáteční podmínkou $y(x_0) = y_0$. To, že dané řešení ještě neznáme, nevadí, pro následující úvahu nebudeme konkrétní závislost $y = y(x)$ potřebovat.

¹⁶⁴ Přitom je jedno, že v sumě na levé straně jsou délky intervalů Δy_i různé, délky všech intervalů jdou k nule, takže výsledkem bude opět integrál.

¹⁶⁵ To nevadí, někdy se metoda separace proměnných také takto používá; dává přitom rovnou řešení splňující počáteční podmínku $y(x_0) = y_0$.

¹⁶⁶ V (8.B.16) je vidět, jak konstanta C souvisí s počátečními podmínkami.

I obecné řešení si můžeme ověřit¹⁶⁷

Pořád ještě pochybujete, zda vztah (8.B.8), k němuž jsme dospěli, je určitě správným řešením výchozí rovnice (8.B.1)?¹⁶⁸

Abychom se o tom přesvědčili, stačí ověřit, že po dosazení výsledku (8.B.8), tedy $y = G^{-1}(F(x) + C)$, do (8.B.1), tedy do $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$, je tato diferenciální rovnice splněna.

Jednodušší bude pracovat místo s (8.B.8) s ekvivalentním vztahem (8.B.7), tedy s $G(y) = F(x) + C$. Vyznačíme v něm, že y závisí na x , a budeme jej derivovat podle x :

$$G(y(x)) = F(x) + C \quad \left/ \frac{d}{dx} \right. \quad (8.B.17)$$

Když provedeme naznačenou derivaci, dostaneme z levé strany (s využitím (8.B.4))

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{dG(y)}{dy} \frac{dy}{dx} = \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} \quad (8.B.18)$$

a z pravé strany

$$\frac{d}{dx}(F(x) + C) = \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \quad (8.B.19)$$

Dosazení do (8.B.17) dá

$$\frac{d}{dx}G(y(x)) = \frac{d}{dx}(F(x) + C) \Rightarrow \frac{1}{g(y)} \frac{dy}{dx} = f(x) \quad (8.B.20)$$

A to už je (po vynásobení $g(x)$) právě rovnice (8.B.1). Vidíme tedy, že (8.B.17) naši diferenciální rovnici opravdu splňuje. Takže vztah $y(x) = G^{-1}(F(x) + C)$, který je s (8.B.17) ekvivalentní, zřejmě diferenciální rovnici rovněž splňuje – a je tedy jejím řešením.

A na závěr pro ty, kdo pořád nejsou přesvědčeni:¹⁶⁹

Vezměte si $y = G^{-1}(F(x) + C)$ a „natvrdo“ ho dosadte do levé strany rovnice $\frac{dy}{dx} = f(x)g(y)$.

Při derivování $\frac{d}{dx}(G^{-1}(F(x) + C))$ budete potřebovat větu o derivaci inverzní funkce – a když to uděláte (a využijete toho, že $\frac{dG(y)}{dy} = \frac{1}{g(y)}$ a $\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$), uvidíte, že opravdu dostanete $f(x)g(y)$.

¹⁶⁷ Tohle už je spíš doplnění pro zájemce; ostatně, příslušnou teorii budete mít exaktněji v matematické analýze.

¹⁶⁸ Pak jste v dobré společnosti – pochybovat je ve vědě důležité! (Kdyby Galileo nepochyboval o tom, že Země je nehybná, neodstartoval by další vývoj fyziky a astronomie.) Mít názornou představu, jak se k řešení rovnice dostat, je fajn, ale je vhodné se také ubezpečit, že výsledek opravdu „sedí“.

¹⁶⁹ Máte pravdu, když se řekne „zřejmě“, tak ono to někdy působí trochu podezřele. ☺ A někomu to může být zřejmé víc a někomu méně. Takže je lépe, mít vše dotaženo zcela explicitě.

Dodatek 8.C: Pohyb v případě, kdy působí odporová síla úměrná druhé mocnině rychlosti a současně konstantní síla (např. gravitační) *

Uvažujme situaci znázorněnou na obrázku vpravo: Těleso padá v odporujícím prostředí, dolů ho táhne gravitační, resp. tíhová síla,¹⁷⁰ proti pohybu působí směrem vzhůru odporová síla. Prakticky tomu odpovídá třeba případ parašutisty, který vyskočil z letadla a dosud neotevřel padák.¹⁷¹

Tíhová síla je $\vec{F}_g = m\vec{g}$ (m je hmotnost padajícího tělesa), odporová síla má velikost $F_o = kv^2$ a míří vzhůru.¹⁷² Osu x orientujeme směrem dolů, takže $F_x = mg - kv_x^2$. Pohybová rovnice padajícího tělesa (resp. její x -ová složka) tedy je

$$m \frac{dv_x}{dt} = mg - kv_x^2. \quad (8.C.1)$$

Po vydělení m , označení $k/m \stackrel{\text{ozn}}{=} b$ a úpravě dostaneme rovnici

$$\frac{dv_x}{dt} = g - bv_x^2 = b(g/b - v_x^2). \quad (8.C.2)$$

Pro další výpočet označíme $g/b \stackrel{\text{ozn}}{=} v_1^2$; pohybová rovnice pak bude mít tvar

$$\frac{dv_x}{dt} = b(v_1^2 - v_x^2) = b(v_1 + v_x)(v_1 - v_x), \quad (8.C.3)$$

kde

$$b = \frac{k}{m}, \quad v_1 = \sqrt{\frac{g}{b}} = \sqrt{\frac{mg}{k}} \quad (\text{a } k = \frac{1}{2}CS\rho). \quad (8.C.4)$$

Rovnici (8.C.3) řešíme metodou separace proměnných, místo v_x už budeme psát pro stručnost jen v :

$$\int \frac{dv}{(v_1 + v)(v_1 - v)} = \int b dt = bt + \tilde{C}. \quad (8.C.5)$$

Při výpočtu integrálu na levé straně provedeme rozklad na parciální zlomky¹⁷³. Po úpravě pak (8.C.5) získá tvar

$$\int \frac{dv}{v_1 + v} + \int \frac{dv}{v_1 - v} = 2v_1(bt + \tilde{C}) = 2(v_1bt + \tilde{C}). \quad (8.C.6)$$

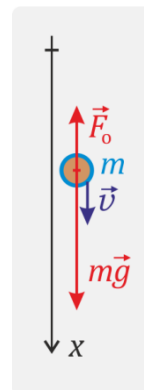
¹⁷⁰ Při pokusu na Zemi je přesnější mluvit o tíhové síle, podstatné bude, že jde o konstantní sílu působící svisle dolů.

¹⁷¹ Neuvažujeme přitom, že by parašutista měnil tvar těla, aktivně při pádu „plaval“ směrem do strany apod. Také předpokládáme, že nefouká vítr a ve vzduchu nejsou žádné stoupavé ani klesavé proudy. Navíc budeme tíhové zrychlení i hustotu vzduchu brát jako konstantní; prostě budeme počítat nejjednodušší příklad.

¹⁷² Pro odporovou sílu bereme Newtonův vzorec (8.24), $F_o = \frac{1}{2}CS\rho v^2$, hodnotu C v něm bereme jako konstantní, takže $k = \frac{1}{2}CS\rho$ je také konstanta.

¹⁷³ Upravíme $\frac{1}{(v_1 + v)(v_1 - v)} = \frac{1}{2v_1} \left(\frac{1}{(v_1 + v)} + \frac{1}{(v_1 - v)} \right)$; ověřte si, že tohle platí.

¹⁷⁴ Doufám, že na nejrůznější „vlnkování“ neznámých konstant už jste si zvykli (☺): \tilde{C} byla libovolná konstanta, takže $v_1\tilde{C}$ je také libovolná konstanta, označili jsme ji \tilde{C} . (Dvojku jsme nechali vytknutou, uvidíme proč.)



Levou stranu zintegrujeme a upravíme:

$$\int \frac{dv}{v_1+v} + \int \frac{dv}{v_1-v} = \int \frac{dv}{v+v_1} - \int \frac{dv}{v-v_1} = \ln|v+v_1| - \ln|v-v_1| = \ln \left| \frac{v+v_1}{v-v_1} \right| \quad (8.C.7)$$

a po dosazení do (8.C.6) a odlogaritmování dostaneme

$$\left| \frac{v+v_1}{v-v_1} \right| = e^{2(v_1bt+\tilde{C})} \quad (8.C.8)$$

Další výpočet musíme rozdělit na dva případy podle znaménka zlomku na levé straně rovnice. Zvlášť vyřešíme případ, kdy pád začíná z rychlosti $v < v_1$ (třeba z nulové rychlosti), a zvlášť, když je $v > v_1$.

Pád začínající z malé rychlosti

Tento případ odpovídá situaci, kdy třeba z natažené ruky pustíme kouli nebo pírko, nebo z letadla vyskočí parašutista a dosud neotevřel padák.¹⁷⁶

V tomto případě $v < v_1$, takže $\left| \frac{v+v_1}{v-v_1} \right| = -\frac{v+v_1}{v-v_1} = \frac{v_1+v}{v_1-v}$. Z (8.C.8) pak dostaneme

$v_1+v = (v_1-v) \cdot e^{2(v_1bt+\tilde{C})}$. Odtud $v \cdot (e^{2(v_1bt+\tilde{C})} + 1) = v_1 \cdot (e^{2(v_1bt+\tilde{C})} - 1)$, čili

$$v = v_1 \cdot \frac{e^{2(v_1bt+\tilde{C})} - 1}{e^{2(v_1bt+\tilde{C})} + 1} = v_1 \cdot \frac{e^{(v_1bt+\tilde{C})} - e^{-(v_1bt+\tilde{C})}}{e^{(v_1bt+\tilde{C})} + e^{-(v_1bt+\tilde{C})}} \quad (8.C.9)$$

Zlomek na pravé straně můžeme jednoduše vyjádřit pomocí funkce **hyperbolický tangens**¹⁷⁷:

$$v = v_1 \cdot \operatorname{tgh}(v_1bt+\tilde{C}) \quad (8.C.10)$$

[?] Jaký je význam konstant ve vztahu (8.C.10)?

Podívejme se nejprve na konstantu v_1 , kterou násobíme funkci hyperbolický tangens. Pomůže nám podívat se, jak se tgh chová, když její argument roste do nekonečna. Platí $\lim_{x \rightarrow \infty} (\operatorname{tgh}(x)) = 1$.¹⁷⁸

Pro $t \rightarrow \infty$ se tedy rychlost v blíží hodnotě v_1 . Odtud vidíme, že:

v_1 je **mezní rychlost**, k níž se rychlost padajícího tělesa blíží s rostoucím časem.

¹⁷⁵ Konstantu \tilde{C} budeme určovat z počáteční podmínky (konkrétně z počáteční rychlosti). Vlnkou ji zde značíme, abychom ji odlišili od konstanty C ve vztahu $F_0 = \frac{1}{2}CS\rho v^2$. Inu, písmenek je málo...

¹⁷⁶ Ouha! Tohle s letadlem vlastně není pravda! Letadlo letí vodorovně značnou rychlostí, takže parašutista nepadá od začátku svisle dolů, ale pohybuje se po balistické křivce, a to by bylo složitější. Náš výpočet odpovídá situaci, kdy by parašutista vyskočil z balónu nebo vzduchodli.

¹⁷⁷ Tato funkce se označuje symbolem thg . Je definována jako $\operatorname{tgh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Podobně se definují (viz poznámku v Dodatku D) funkce **hyperbolický sinus** ($\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$) a **hyperbolický kosinus** ($\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$); vidíme, že platí $\operatorname{tgh}(x) = \sinh(x)/\cosh(x)$.

¹⁷⁸ Můžeme to vidět z definice thg a chování funkcí e^x a e^{-x} pro $x \rightarrow \infty$.

Konstantu \tilde{C} , jak víme, určujeme z počátečních podmínek. Nejjednodušší případ nastane, když $v(0) = 0$. Pak totiž bude $\tilde{C} = 0$.¹⁷⁹ Výsledek (8.C.10) má v tomto případě jednoduchý tvar:

$$v = v_1 \cdot \operatorname{tgh}(v_1 b t). \quad (8.C.11)$$

A co součin konstant $v_1 b$ v argumentu funkce tgh v (8.C.11)? Ten nám odpoví na otázku, **jak rychle se rychlost tělesa přibližuje mezní rychlosti**. Je vhodné zavést označení

$$v_1 b \stackrel{\text{ozn.}}{=} \frac{1}{\tau}. \quad (8.C.12)$$

Pak totiž získá vztah pro rychlost tělesa výsledný přehledný tvar

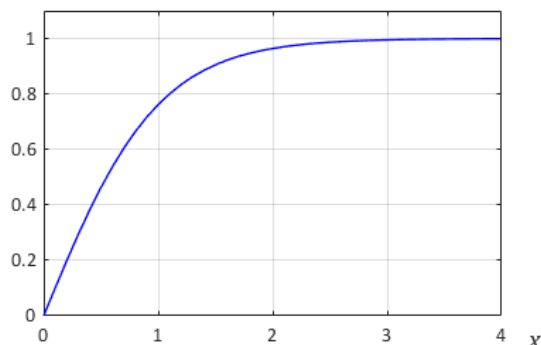
$$v = v_1 \cdot \operatorname{tgh}(t/\tau), \quad (8.C.13)$$

kde (viz (8.C.4) a (8.C.12)):

$$v_1 = \sqrt{\frac{g}{b}} = \sqrt{\frac{mg}{k}}, \quad \tau = \frac{1}{v_1 b} = \sqrt{\frac{1}{gb}} = \sqrt{\frac{m}{gk}} = \frac{v_1}{g}. \quad (8.C.14)$$

Funkce hyperbolický tangens je k dispozici i na lepších kapesních kalkulačkách, takže si můžeme ověřit, jak rychle se rychlost přibližuje mezní rychlosti. Podrobněji to ukazuje graf funkce tgh .

t/τ	$\operatorname{tgh}(t/\tau) \doteq$
1	0,762
2	0,964
3	0,995



Vidíme, že pro $t = \tau$ dosahuje rychlost asi 76 % mezní rychlosti, pro $t = 3\tau$ se už od mezní rychlosti liší jen asi o půl procenta. Čas τ tedy představuje **charakteristický čas přibližování k mezní rychlosti**.

Dráha uražená při pádu:

Uraženou dráhu, tedy souřadnici x , získáme integrací rychlosti (8.C.13):¹⁸⁰

$$x = \int v dt = v_1 \int \operatorname{tgh}(t/\tau) dt = v_1 \int \frac{\sinh(t/\tau)}{\cosh(t/\tau)} dt = v_1 \tau \ln(\cosh(t/\tau)) + \tilde{x}_0. \quad (8.C.15)$$

Trochu „středoškolskéjší“ diskusi a řešení celého problému lze najít v článku v Rozhledech MF.¹⁸¹

¹⁷⁹ Protože $\operatorname{tgh}(x) = 0$.

¹⁸⁰ Při integraci použijeme substituci $y = \cosh(t/\tau)$ a využijeme toho, že $\frac{d}{dy} \cosh(y) = \sinh(y)$. Pokud byste chtěli dráhu v obecnějším případě, než je nulová počáteční rychlost, zintegrujte si příslušný vztah (8.C.10) laskavě sami...

¹⁸¹ Dvořák, L.: Jak provokovat, když dostanete úlohu o pádu železné a dřevěné koule II. Rozhledy matematicko-fyzikální, roč. 96 (2021), č. 3, s. 59–68.

Pád začínající z velké rychlosti

I tento případ odpovídá realistické situaci při pádu parašutisty: jednak může ve fázi pádu se zavřeným padákem přejít z pozice, v níž kladl menší odpor, roztažením rukou a nohou do pozice, v níž při stejné rychlosti klade odpor větší. A samozřejmě, když otevře padák, odpor vzduchu výrazně vzroste. Zde nebudeme počítat přesně reálný děj při otvírání padáku,¹⁸² ale idealizovaný případ, kdy počáteční rychlost je vyšší než mezní a koeficient odporu prostředí zůstává konstantní.

Ze vztahu (8.C.8) dostaneme pro $v > v_1$:

$$\frac{v + v_1}{v - v_1} = e^{2(v_1 b t + \tilde{C})} \quad (8.C.16)$$

a odtud podobně, jako jsme postupovali výše, $v + v_1 = (v - v_1) \cdot e^{2(v_1 b t + \tilde{C})}$, a po dalších úpravách:¹⁸³

$$v = v_1 \cdot \frac{e^{2(v_1 b t + \tilde{C})} + 1}{e^{2(v_1 b t + \tilde{C})} - 1} = v_1 \cdot \frac{e^{(v_1 b t + \tilde{C})} + e^{-(v_1 b t + \tilde{C})}}{e^{(v_1 b t + \tilde{C})} - e^{-(v_1 b t + \tilde{C})}} = v_1 \cdot \operatorname{cotgh}(v_1 b t + \tilde{C}). \quad (8.C.17)$$

Konstanta \tilde{C} už ovšem nemůže být nula, to by v čase $t = 0$ byla rychlost nekonečná. Hodnotu této konstanty určíme z počáteční podmínky. Pro čas $t = 0$ plyne z (8.C.17) $v_0 \equiv v(0) = v_1 \cdot \operatorname{cotgh}(\tilde{C})$, odtud

$$\tilde{C} = \operatorname{argcotgh}(v_0/v_1), \quad (8.C.18)$$

kde $\operatorname{argcotgh}$ je inverzní funkce k funkci cotgh .

Stejně jako výše označíme $v_1 b = 1/\tau$, takže výsledný vztah pro rychlost je

$$v = v_1 \cdot \operatorname{cotgh}(t/\tau + \tilde{C}). \quad (8.C.19)$$

v_1 a τ jsou opět dány vztahy (8.C.14) a mají stejný význam jako výše: mezní rychlost a charakteristický čas přibližování k mezní rychlosti – jen se teď rychlost k té mezní přibližuje shora.

Uraženou dráhu (tj. souřadnici x) opět spočteme integrací:¹⁸⁵

$$x = v_1 \int \operatorname{cotgh}(t/\tau + \tilde{C}) dt = \dots = v_1 \tau \ln(\sinh(t/\tau + \tilde{C})) + \tilde{x}_0 \quad (8.C.20)$$

Konstantu x_0 určíme (jak jinak) z počátečních podmínek.

¹⁸² Reálně je otvírání padáku postupné, aby došlo k plynulému zbrzdění rychlosti, viz např.

https://cs.wikipedia.org/wiki/Para%C5%A1utismus#Otev%C5%99en%C3%AD_pad%C3%A1ku. My budeme počítat idealizovaný případ.

¹⁸³ Teď už můžeme postupovat rychleji, opravdu je vše analogické, jako v případě $v < v_1$.

¹⁸⁴ Funkce cotgh je *hyperbolický kotangents*, platí $\operatorname{cotgh}(x) = 1/\operatorname{tgh}(x)$. Pro $x \rightarrow \infty$ je její limita 1, z (8.C.17) tedy plyne, že v_1 je opět mezní rychlost.

¹⁸⁵ Přidáme oblíbené klišé: „Laskavý čtenář si jistě danou integraci rád provede sám...“ . ☺

Dodatek 8.D: Komplexní exponenciála aneb co je $e^{i\varphi}$

Exponenciální funkci e^x lze definovat i pro komplexní x . Speciálně pro ryze imaginární x platí¹⁸⁶

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi . \quad (8.D.1)$$

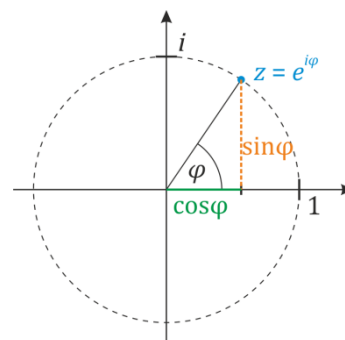
Jde o komplexní jedničku, viz obrázek. Že vzorec opravdu „funguje“ se můžeme přesvědčit na dvou jednoduchých příkladech:

1) Ze střední školy asi znáte Moivreovu větu¹⁸⁷

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) .$$

Pomocí Eulerova vzorce (8.D.1) je její odvození (a zapamatování) jednoduché:

$$(\cos \varphi + i \sin \varphi)^n = (e^{i\varphi})^n = e^{i\varphi n} = \cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi) .$$



2) Když derivujeme $e^{i\varphi}$ podle φ , dostaneme $\frac{d e^{i\varphi}}{d \varphi} = i e^{i\varphi} = i \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = i \cos \varphi - \sin \varphi$.

Přesně totéž dostaneme derivováním pravé strany (8.D.1).

Uvedme ještě pár užitečných vztahů ukazujících, jak s komplexními čísly v exponentech pracovat.¹⁸⁸

Exponenciála komplexního čísla $z = a + bi$ je

$$e^z = e^{a+bi} = e^a \cdot e^{ib} = e^a \cdot (\cos b + i \sin b) .$$

Číslo komplexně sdružené k (8.D.1) je

$$e^{-i\varphi} = \cos \varphi - i \sin \varphi \quad (8.D.2)$$

Sečtením a odečtením (8.D.1) a (8.D.2) získáme $e^{i\varphi} + e^{-i\varphi} = 2 \cos \varphi$ a $e^{i\varphi} - e^{-i\varphi} = 2i \sin \varphi$. Odtud vidíme, že sinus a kosinus můžeme vyjádřit jako

$$\cos \varphi = \frac{e^{i\varphi} + e^{-i\varphi}}{2}, \quad \sin \varphi = \frac{e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}}{2i} . \quad ^{189}$$

¹⁸⁶ Tento vztah se nazývá Eulerův vzorec. (Ovšem, mimo komplexní analýzu jsou po Eulerovi pojmenovány i další vzorce.)

¹⁸⁷ Pokud ne, nic se neděje, je to prostě vztah pro n-tou mocninu komplexní jedničky.

¹⁸⁸ V zásadě pracujeme stejně jako s reálnou exponenciálou.

¹⁸⁹ Stojí za zmínku, že podobnými vztahy jsou definovány *hyperbolický kosinus* a *hyperbolický sinus*:

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \text{ jejich uplatnění jsme viděli už v Dodatku C.}$$

Dodatek 8.E: Fáze buzených kmitů – alternativní odvození

Ve vztahu (8.87) pro fázi buzených kmitů může někomu vadit, že pro $\Omega = \omega_0$ je ve jmenovateli nula.¹⁹⁰ Ukažme si proto alternativní odvození, kde ve výsledném vztahu nebude žádné dělení nulou.

Vyjdeme ze vztahu (8.82) pro komplexní amplitudu kmitů:

$$A = |A| e^{i\varphi}. \quad (8.E.1)$$

φ je fáze kmitů (vzhledem k budící síle). Komplexní amplituda A je dána vztahem (8.81):

$$A = \frac{S}{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega}, \quad (8.E.2)$$

reálná amplituda $|A|$ vztahem (8.84), tedy

$$|A| = \frac{S}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (8.E.3)$$

Vztah (8.1.E) přepíšeme do tvaru

$$\frac{|A|}{A} = e^{-i\varphi}. \quad (8.E.4)$$

Přitom $e^{-i\varphi} = \cos(-\varphi) + i \sin(-\varphi) = \cos\varphi - i \sin\varphi$. Po dosazení (8.E.2) a (8.E.3) do (8.E.4) dostáváme

$$\frac{\omega_0^2 - \Omega^2 + i2\delta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}} = \cos\varphi - i \sin\varphi \quad (8.E.5)$$

Odtud okamžitě¹⁹¹

$$\cos\varphi = \frac{\omega_0^2 - \Omega^2}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{-2\delta\Omega}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\delta^2\Omega^2}}. \quad (8.E.6)$$

Vidíme, že:

- pro $\Omega = 0$ je $\cos\varphi = 1$ a $\sin\varphi = 0$, takže $\varphi = 0$,
- pro $\Omega = \omega_0$ je $\cos\varphi = 0$ a $\sin\varphi = -1$, takže $\varphi = -\frac{\pi}{2}$,
- pro $\Omega \rightarrow \infty$ je $\cos\varphi \rightarrow -1$ a $\sin\varphi \rightarrow 0$ (a přitom $\sin\varphi < 0$), takže $\varphi \rightarrow -\pi$.

Výsledné hodnoty fáze φ přitom z (8.E.6) vycházejí tytéž, jako ze vztahu (8.87), takže dávají tytéž grafy závislosti fáze na Ω , jako jsou uvedeny v hlavním textu kapitoly.

¹⁹⁰ Toto se ukázalo na jedné z přednášek – a přestože lze říci, že můžeme vzít limitu zleva a zprava a vidíme, že pro tento případ zřejmě bude platit $\varphi = -\pi/2$, přece jen u někoho mohou přetrvávat pochybnosti.

¹⁹¹ Protože se musejí rovnat reálné části levé a pravé strany (8.E.5) a také jejich ryze imaginární části.