Deterministický chaos: jak nás omezuje v předpovídání budoucnosti

Tato kapitola bude krátká, někdy spíše „povídavá a obrázková“ (tedy trochu na populární úrovni), a můžete ji brát jako rozšiřující učivo.[1] K problematice deterministického chaosu se (byť také jen stručně) vrátíme v druhém ročníku v Teoretické mechanice. Přesto má smysl si již zde v úvodním kurzu klasické mechaniky udělat o tomto tématu alespoň základní představu. Pomůže nám například pochopit, proč se počasí nedá přesně předpovědět třeba na měsíc dopředu. A zčásti se také týká otázky, jestli by nějaká superinteligence nemohla vypočítat naši budoucnost, náš budoucí život, vše, co se nám stane odteď až třeba za padesát let. Mohla nebo nemohla? A jak to souvisí s klasickou mechanikou?

9.1 Determinismus klasické mechaniky

V klasické mechanice si svět můžeme představit jako soustavu hmotných bodů působících na sebe navzájem silami. Pro pohyb každého z těchto hmotných bodů platí druhý Newtonův zákon:

$$m_i \frac{d^2\vec{r}_i}{dt^2} = \vec{F}_i\,, \quad i = 1,\ldots N \quad , \tag{9.1}$$

kde N je počet hmotných bodů.[2] Máme tedy $3N$ diferenciálních rovnic. Konkrétní řešení této soustavy rovnic závisí na počátečních podmínkách. Těmi mohou být polohy a rychlosti hmotných bodů v určitém čase:

$$\vec{r}_i(t_0) = \vec{r}_{i0}\,, \quad \vec{v}_i(t_0) = \vec{v}_{i0}\,, \quad i = 1\ldots N\,. \tag{9.2}$$

Počátečními podmínkami je řešení diferenciálních rovnic (9.1) jednoznačně určeno.[3]

To ale znamená, že z poloh a rychlostí hmotných bodů v určitý okamžik (třeba právě teď) a ze znalosti sil, jimiž na sebe tyto body působí, lze v principu vypočítat jejich polohy a rychlosti v budoucnu.

Jinými slovy, polohy a rychlosti bodů teď (a síly mezi body) jednoznačně určují jejich pohyb v budoucnu. Vypadá to, že budoucnost je jednoznačně určena, neboli determinována. Proto mluvíme o *determinismu* klasické mechaniky.

Často se uvádí, že prvním, kdo upozornil na tento rys klasické newtonovské mechaniky, byl Laplace.[4] Konstatoval, že budoucí vývoj vesmíru je dán jeho současným stavem, stejně jako současný stav plyne ze stavu v minulosti. (Že vývoj samozřejmě závisí i na silách mezi body, nemusel zdůrazňovat.) Argumentoval, že kdyby nějaká superinteligentní bytost znala síly a polohy a rychlosti všech částic ve

[1] Fakticky ani není mezi povinnou látkou v sylabu přednášky.

[2] Pokud bychom zahrnovali celý pozorovatelný vesmír a jako body brali třeba atomy, N by nebylo nijak malé, odhady říkají řádově 10^{80} nebo i více, ale nikdo po nás naštěstí nechce, abychom všechny tyto rovnice vypisovali na papír… ☺

[3] Samozřejmě, když jsou splněny předpoklady příslušných matematických vět o existenci a jednoznačnosti řešení soustavy diferenciálních rovnic; to zde předpokládáme.

[4] Pierre-Simon Laplace, 1749 –1827, francouzský matematik a fyzik. (S jeho jménem se při studiu matematiky a fyziky ještě mnohokrát setkáte. Anglická Wikipedie nás navíc poučí, že byl markýz.)

vesmíru, mohla by vypočítat pohyb všeho od největších těles až po nejmenší částice, a nic z minulosti ani budoucnosti by pro ni nebylo skryto.[5]

Daná inteligence bývá někdy označována jako „Laplaceův démon", ale nic démonického na ní není, navíc on sám tento název nepoužil. Některé prameny[6] také upozorňují, že Laplace sám ideu absolutního determinismu nezastával, naopak zdůrazňoval potřebu pravděpodobnostního popisu, který počítá i s nahodilostí.

Dnes bychom si pod Laplaceovým „démonem" mohli představit nesmírně velký počítač, který by uměl integrovat pohybové rovnice. Opravdu by mu nebyla skryta budoucnost vesmíru, včetně všech detailů?

Taková myšlenka je zajímavá, ale pokud by byla pravdivá, znamenalo by to, že vše je předurčeno. I to, zda a kde zakopnete, až půjdete z přednášky[7], jaké bude počasí zítra nebo za rok, jakou známku dostanete u zkoušky, koho si vezmete[8], a cokoli dalšího. Stačilo by to vypočítat ze současného stavu věcí.[9]

Takováto představa je ovšem jasně v rozporu s naším přesvědčením, že se můžeme sami rozhodnout, co budeme dělat, tedy že máme *svobodnou vůli*. Minimálně některé věci přece můžeme ovlivnit naším rozhodnutím. Můžeme se třeba rozhodnout, jestli se na zkoušku budeme učit, nebo vůbec ne. A můžeme si vybrat, koho si vezmeme. Kdyby bylo všechno předurčeno, naše svobodná vůle by byla jen iluzí.

Problematika determinismu a svobodné vůle je obecně otázka spíše filozofická a zde ji určitě nevyřešíme.[10] Nebudeme ani uvažovat, co k problému determinismu přináší kvantová fyzika.[11] Zůstaneme v klasické mechanice – ale podíváme se, co vše by nějaká ta „superinteligence" musela do svých výpočtů zahrnout, aby opravdu mohla budoucnost detailně předpovědět.

---

[5] Příslušná pasáž v anglickém překladu zní: „We may regard the present state of the universe as the effect of its past and the cause of its future. An intellect which at a certain moment would know all forces that set nature in motion, and all positions of all items of which nature is composed, if this intellect were also vast enough to submit these data to analysis, it would embrace in a single formula the movements of the greatest bodies of the universe and those of the tiniest atom; for such an intellect nothing would be uncertain and the future just like the past would be present before its eyes." (Převzato ze stránky Wikipedie Laplace's demon - Wikipedia.)

[6] Například https://cs.wikipedia.org/wiki/Pierre-Simon_Laplace .

[7] V časech online výuky by mohlo jít o zaškobrtnutí, až budete vstávat od počítače…

[8] Máte-li již po svatbě, tak si sem dosaďte jinou událost z rodinného života nebo něco jiného z budoucnosti, třeba jestli zbohatnete na burze a co si za to koupíte…

[9] Tedy třeba vypočítat, které klávesy počítače bude tisknout zkoušející, až vám bude zadávat známku do studijního informačního systému. ☺

[10] O tomto problému existuje spousta článků a knih jak z oblasti filosofe, tak psychologie; když si v anglické Wikipedii vyhledáte heslo „free will", najdete na konci dlouhého článku odkazy na více než dvě stě dalších zdrojů.

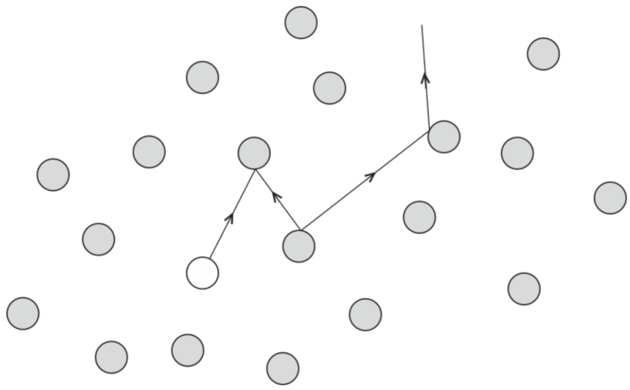
[11] V ní mají výsledky měření makroskopickými měřicími přístroji pravděpodobnostní charakter. Celá problematika je ovšem trochu složitější, protože třeba Schrödingerova rovnice jednoznačně předvídá budoucí časový vývoj vlnové funkce.

9.2 Budoucnost ovlivní i maličkosti

Pro naše úvahy bude vhodné vybrat si situaci co nejjednodušší.[12] Například soustavu molekul plynu, které se vzájemně srážejí a mezi srážkami se pohybují rovnoměrně. Srážky jsou ideálně pružné. Aby to bylo jednodušší, budeme si molekuly představovat jako tuhé kuličky. V celém souboru molekul si vybereme jednu a budeme sledovat její pohyb.

Chceme zjistit, jak pohyb naší vybrané kuličky ovlivní i nepatrné vlivy. Pro tenhle účel si můžeme náš model zjednodušit ještě víc: všechny ostatní kuličky budeme brát v klidu, fixované na svých pozicích.[13] Náš model si můžeme představit jako „kulečník“ (ve 3D), v němž se pohybuje jediná kulečníková koule; všechny ostatní jsou připevněné a představují pevné překážky.

Naše kulička se tedy pohybuje stále stejně velkou rychlostí[14], od ostatních kuliček se odráží jednoduše tak, že úhel odrazu se rovná úhlu dopadu.[15]



Dráha, kterou naše kulička urazí, než narazí na další překážku, je několikanásobkem poloměru kuličky. Pro jednoduchost řekněme, že v našem modelu to bude stonásobek, ať se nám to dobře počítá.[16]

Pohyb naší kuličky jsme zatím uvažovali rovnoměrný přímočarý. Reálně ale na kuličku působí vnější síly (například gravitační síly od ostatních kuliček), takže její trajektorie bude mírně zakřivená. Uvažovaná „superinteligence“ by ovšem mohla všechny tyto vlivy započítat, vypočíst přesně bod, kde naše kulička narazí do první překážky, určit, kam se odrazí, a tak dále, libovolně daleko do budoucna.

$\boxed{?}$ Co když ale nějaký nepatrný vliv nezapočte? Omezí to nějak její předvídání budoucího vývoje?

---

[12] Počítat, jak se pohybují částice v našem mozku, abychom zjistili, zda nakonec síť našich neuronů dospěje k rozhodnutí „učit se na zkoušku“ nebo „vykašlu se na to, nějak to dopadne“, by bylo zjevně příliš složité. (O mnoho a *mnoho* řádů složitější, než si detailně promyslet a propočítat celou látku z Mechaniky a dalších předmětů a jít na zkoušky perfektně připraven. ☺)

[13] Takhle se samozřejmě molekuly v plynu nechovají. S modelem plynu, v němž se všechny molekuly pohybují, navíc s různými rychlostmi, se seznámíte v předmětu *Molekulová fyzika*. My zde ale nepotřebujeme skutečný model plynu (a to ani tzv. ideálního plynu), stačí nám situace výrazně zjednodušená.

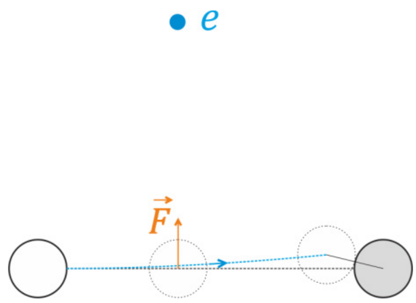
[14] Srážky jsou ideálně pružné, takže energie se zachovává; ostatní kuličky jsou fixovány na svých místech, takže nemohou pohybující se kuličce žádnou energii odebrat. Neuvažujeme rotaci naší kuličky, bereme ji zkrátka jako hmotný bod.

[15] Povrch kuliček uvažujeme ideálně hladký, takže zde nepůsobí žádné síly tečné k povrchu. (Člověk by neřekl, co vše musíme předpokládat, aby uvažovaná situace byla opravdu extrémně jednoduchá...)

[16] Ve skutečnosti je to ještě víc: molekuly dusíku mají průměr necelé 0,4 nm, jejich střední volná dráha mezi srážkami (za normálních podmínek, tedy atmosférického tlaku a pokojové teploty) je asi 100 nm; tohle vše budete podrobně brát v *Molekulové fyzice*.

Zkusme odhadnout, jaký vliv by měla skutečně velmi nepatrná síla.

Nejslabší interakce je gravitační, tak uvažujme, že kuličku něco přitahuje gravitačně. A to něco bude mít velmi malou hmotnost – takže zvolíme třeba elektron. Ten kuličku poněkud vychýlí z její dráhy.



Výchylku jsme ovšem na obrázku přehnali, gravitační síla od elektronu bude jen malá:

$$F = G\,\frac{m_e\, m_{kuličky}}{r^2} \tag{9.3}$$

(Upřesňující poznámka.: Elektron budeme uvažovat mnohonásobně dál, než činí vzdálenost kuliček, takže síla bude prakticky pořád kolmá na směr pohybu kuličky a vzdálenost *r* se příliš nemění.)

Zrychlení kuličky je

$$a = \frac{F}{m_{kuličky}} = G\,\frac{m_e}{r^2} \tag{9.4}$$

Abychom vzali *opravdu* malý vliv, uvažujme, že elektron je velmi daleko, a to 14 miliard světelných let.[17] Dosadíme-li do (9.4) $r \doteq 1{,}4\cdot10^{26}$ m, $m_e \doteq 10^{-30}$ kg a $G \doteq 6{,}67\cdot10^{-11}$ N·m²/kg², dostaneme

$$a \doteq 3\cdot10^{-93}\ \mathrm{m/s^2}\ . \tag{9.5}$$

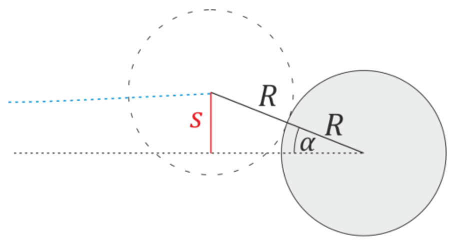
To opravdu není moc velké zrychlení. ☺ O kolik se kulička odchýlí (ve směru kolmém na svou rychlost)? Zrychlení je prakticky konstantní, takže odchylka bude jednoduše

$$s = \tfrac{1}{2}\,a\,t^2\ . \tag{9.6}$$

Čas t vezmeme jako střední dobu mezi nárazy molekul v plynu, za normálních podmínek je řádově 10^{-9} s.[18] Po dosazení této hodnoty a zrychlení (9.5) do (9.6) dostaneme řádově

$$s \doteq 10^{-111}\,\mathrm{m}\ . \tag{9.7}$$

To vypadá zcela a naprosto zanedbatelně, že? Kdyby bez vlivu vzdáleného elektronu narazila naše kulička do překážky centrálně, a se započtením vlivu o kousek jinde, což vyjádříme úhlem α (viz obrázek), bude $s = 2R\sin\alpha \doteq 2R\,\alpha$, takže



$$\alpha \doteq \frac{s}{2R} \doteq 10^{-102}\ \mathrm{rad}\ . \tag{9.8}$$

Pokud by srážka bez vlivu elektronu nebyla centrální, může být vliv elektronu na úhel, pod nímž naše kulička dopadne na překážku, někdy poněkud větší, ale jako typickou řádovou hodnotu můžeme vzít (9.8). A méně než 10 na mínus sto snad můžeme jasně zanedbat – nebo ne?

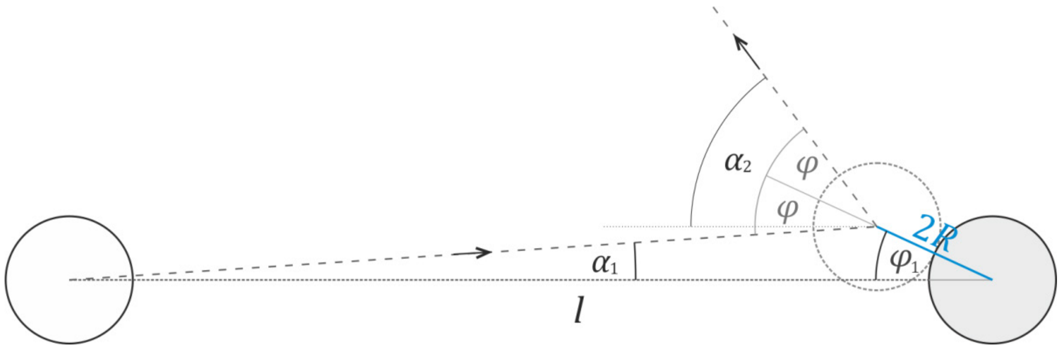
Podívejme se, co se bude dít při dalších odrazech.

[17] Necelých 14 miliard let je současné stáří vesmíru. Se vzdálenostmi na kosmologických škálách je to sice trochu složitější, ale pro náš odhad prostě vynásobíme stáří vesmíru rychlostí světla. Světelný rok je asi 10^{16} m, 10 miliard světelných let je tedy 10^{26} m.

[18] Střední volná dráha molekul je zhruba 10^{-7} m, rychlosti molekul jsou řádu stovek m/s (to lze odhadnout i z rychlosti zvuku, tedy vzít asi 330 m/s).

Jestliže l je vzdálenost, kterou musí kulička urazit k další překážce, a směr jejího letu se změní o úhel α_1, pak z obrázku níže plyne, že $l\,\mathrm{tg}\,\alpha_1 \doteq 2R \sin\varphi_1$. Předpokládáme, že úhly jsou velmi malé[19], takže $\mathrm{tg}\,\alpha_1 \doteq \alpha_1$ a $\sin\varphi_1 \doteq \varphi_1$. Je tedy

$$\varphi_1 \doteq \frac{l}{2R}\alpha_1, \text{ a z obrázku dále: } \varphi = \varphi_1 + \alpha_1, \;\; \alpha_2 = 2\varphi - \alpha_1 = 2\varphi_1 + \alpha_1 \doteq \left(2\cdot\frac{l}{2R} + 1\right)\alpha_1 \;. \qquad (9.9)$$



Protože $l >> R$, vidíme z (9.9), že přibližně je[20]

$$\alpha_2 \doteq \frac{l}{R}\,\alpha_1 \;. \qquad (9.10)$$

Jak jsme uvedli výše, v našem modelu je l/R = 100. (Ve skutečném plynu by byl za normálních podmínek tento poměr ještě větší.) To znamená, že odchylka (9.8) způsobená vzdáleným elektronem se po dalším odrazu asi 100-krát zvětší. Po dalším odrazu zase 100-krát a tak dále. Po N odrazech se tedy zvětší $(100)^N$-krát. To znamená, že výsledná odchylka bude

$$\alpha_N \doteq (100)^N\,\alpha_1 \;. \qquad (9.11)$$

Předpověď, která by nebrala v úvahu uvedený vliv elektronu, by jistě byla špatná, pokud výsledná odchylka bude řekněme 1 radián nebo více.[21] Když za α_1 dosadíme 10^{-102} (viz (9.8)), vidíme, že předpověď selže, když

$$(100)^N \cdot 10^{-102} \geq 1, \text{ tj. } (100)^N \geq 10^{102} \;. \qquad (9.12)$$

Z toho již můžeme výsledek určit úvahou, nebo daný vztah zlogaritmovat. Dostaneme

$$N\cdot\log(100) \geq 102 \quad\Rightarrow\quad N \geq 102/\log(100) = 102/2 = 51 \;. \qquad (9.13)$$

To znamená, že předpověď selže už po pouhých asi padesáti odrazech!

[19] Obrázek úhly značně přehání.

[20] Skutečnost, že $l >> R$, jsme využili již výše, když jsme nerozlišovali, jestli l je vzdálenost mezi středy kuliček nebo mezi jejich okraji. Při našem výpočtu jsme také uvažovali, že kulička by v neodchýleném směru mířila přímo na překážku (tedy centrálně). Při přesnějším odvozování bychom měli brát srážku necentrální a ze změny úhlu α_1 vypočítat změnu úhlu α_2. Poměr $\Delta\alpha_1/\Delta\alpha_2$. by vyšel ještě větší než $2l/R$. (Máte-li zájem, zkuste si to odvodit.)

[21] Ve skutečnosti se už při menší odchylce naše kulička netrefí do některé z překážek, do které by se (bez vlivu daného elektronu) strefila. Mohli bychom říci, že předpověď selhává, už když bude odchylka třeba jeden stupeň. Jak ale uvidíme, na výsledek by to nemělo téměř žádný vliv.

Střední doba mezi nárazy molekul je, jak jsme už uvedli, asi 10^{-9} s. To znamená, že předpověď budoucího vývoje (vinou toho, že nebere v úvahu gravitační působení jediného elektronu „na samém okraji“ pozorovaného vesmíru) selže už asi za padesát nanosekund!

Tento výsledek přitom příliš nezávisí na zvolených parametrech. Kdyby střední volná dráha molekul byla jen desetinásobkem jejich poloměru, předpověď by selhala po $N \gtrsim 102/\log(10)$ = 102 odrazech. Kdyby elektron byl desetkrát dál a síla od něj byla tedy stokrát slabší, selhání předpovědi by nastalo jen o jeden odraz později.

Náš model byl samozřejmě velmi zjednodušený. Kreslili a počítali jsme vlastně dvourozměrný případ srážek a také jsme neuvažovali, že když se kulička strefí „hodně necentrálně“, tedy blízko okraje překážky, pak i malá změna v bodu nárazu vede k výrazné změně úhlu, pod kterým odletí. Ale to vše změní výsledek jen o jednotky či desítky odrazů. Nic to nemění na tom, že předpověď selže velmi brzy.

Chování molekul plynu, které se vzájemně srážejí, je zjevně nahodilé a má smysl ho popisovat jen pravděpodobnostně. V kinetické teorii plynů se v této souvislosti mluví o ***molekulárním chaosu***.

Vrátíme-li se k problematice výpočtu budoucího chování světa z jeho současného stavu, je zřejmé, že takový výpočet by musel brát v úvahu vše ve vesmíru a počítat nejspíš nekonečně přesně. (Protože, jak jsme viděli, jakkoli malé chyby se s časem rychle násobí.[22])

V této souvislosti nás mohou napadnout úvahy, jak velký počítač bychom potřebovali, abychom ho mohli „nakrmit“ daty o celém vesmíru, i kdybychom je znali naprosto přesně. A jak výkonný by ten počítač musel být, aby počítal jeho vývoj. Zřejmě by muselo jít o počítač alespoň tak velký a složitý, jako je náš vesmír…

Raději již tyto úvahy opustíme – a opustíme i složité systémy mnoha částic. Ukazuje se totiž, že chaotické chování mohou mít i systémy mnohem jednodušší.

[22] Takže zjišťovat předem, jakou známku dostanete u zkoušky, pomocí výpočtu, které klávesy bude zkoušející tisknout, až bude známku zadávat, je nesmírně pracné a museli byste přitom počítat vývoj celého vesmíru. Připravit se pořádně na zkoušku je opravdu *mnohem* jednodušší… ☺

9.3 Jednoduchý model vývoje populace: „králíci na ostrově“

Chaos může nastat i v systémech, které k popisu nepotřebují diferenciální rovnice. Podíváme se proto mimo klasickou mechaniku, na jednoduchý model vývoje populace.[23] Říkejme tomuto modelu třeba „králíci na ostrově“.

Na nějakém ostrově žijí králíci. Budeme sledovat jejich počet každou sezónu, třeba každý rok. Králíci se množí, takže jejich počet může narůstat. Jejich počet označíme k_n, kde n čísluje roky. Bude tedy n = 1, 2, … Vývoj počtu králíků budeme modelovat na počítači, takže nebude problém sledovat naši kolonii králíků třeba sto let i déle.

Nejjednodušší model vývoje zřejmě bude mít tvar

$$k_{n+1} = a \cdot k_n \ , \tag{9.14}$$

kde a je konstanta udávající, jak rychle se králíci množí.[24] (Zjevně musí být $a \geq 0$, záporné počty králíků nedávají smysl.) Časový vývoj odpovídající (9.14) můžete jednoduše vypočítat analyticky, je dán geometrickou posloupností

$$k_n = a^n \cdot k_0 \ . \tag{9.15}$$

Pro $a < 1$ je osud kolonie králíků smutný; postupně vymírá. Pokud je přesně $a = 1$, počet zůstává stálý; takový vývoj je pro králíky asi optimální, ale pro nás ne příliš zajímavý.

V případě $a > 1$ počet králíků roste, a to, jak se říká, „geometrickou řadou“.[25] (Takto roste například počet bakterií v prostředí, které jim poskytuje dost živin; ovšem „sezóna“, během níž se namnoží, je podstatně kratší než rok.[26]) Takový růst ovšem nemůže pokračovat do nekonečna: Pokud by bylo $a = 2$, každý rok by se počet králíků zdvojnásobil. Za deset let by se tedy zvětšil 1024-krát, za 20 let více než miliónkrát… snadno si lze spočítat, že za 83 let by hmotnost králíků převýšila hmotnost Země.

Reálně je počet králíků omezen dostupnými zdroji, v daném případě tedy asi množstvím trávy, která stihne za sezónu narůst.[27] Vztah (9.14) tedy zjevně není vhodný pro popis reálného vývoje počtu králíků. Lze ho ale snadno modifikovat, aby vystihoval omezení dané dostupnou potravou:

$$k_{n+1} = a \cdot k_n \cdot \left(1 - \frac{k_n}{K}\right) \ . \tag{9.16}$$

Konstanta K určuje maximální počet králíků, které už ale ostrov neuživí: je-li $k_n = K$, do dalšího roku všichni králíci vymřou. V modelu vývoje populací se počet králíků vystihuje poměrem $x_n = k_n / K$, tato hodnota zjevně může být jen v intervalu $0 \leq x_n \leq 1$.

[23] Tento příklad se ale uvádí i v moderních učebnicích teoretické mechaniky. Výhodou je, že na něm můžete vysvětlovat deterministický chaos i na středoškolské úrovni.

[24] Charakterizovala by „přírůstek obyvatelstva“ daný rozdílem mezi tím, kolik králíků se v roce n narodí, a kolik umře. Tohle je asi vysvětlitelné i na úrovni základní školy: Pokud bylo v roce třeba n=3 bylo na ostrově 200 králíků a do čtvrtého roku se 50 narodilo a 30 umřelo, bude v roce n=4 na ostrově 220 králíků; tomu odpovídá a = 1,1 (k_3 = 200, k_4 = 220, takže $k_4 = 1{,}1 \cdot k_3$).

[25] Ve skutečnosti jde samozřejmě o geometrickou posloupnost.

[26] Bakterie se množí dělením, takže záleží na době, za níž se bakterie rozdělí (tzv. generační doba). Na internetu lze dohledat, že tato doba bývá řádu i jen desítek minut.

[27] Stejně je naštěstí dostupností živin omezen růst bakterií; ty by jinak hmotnost Země přesáhly za zhruba 130 nebo jen o něco více generací. (Ta geometrická posloupnost, resp. exponenciální nárůst, dokáže opravdu stoupat hodně rychle.)

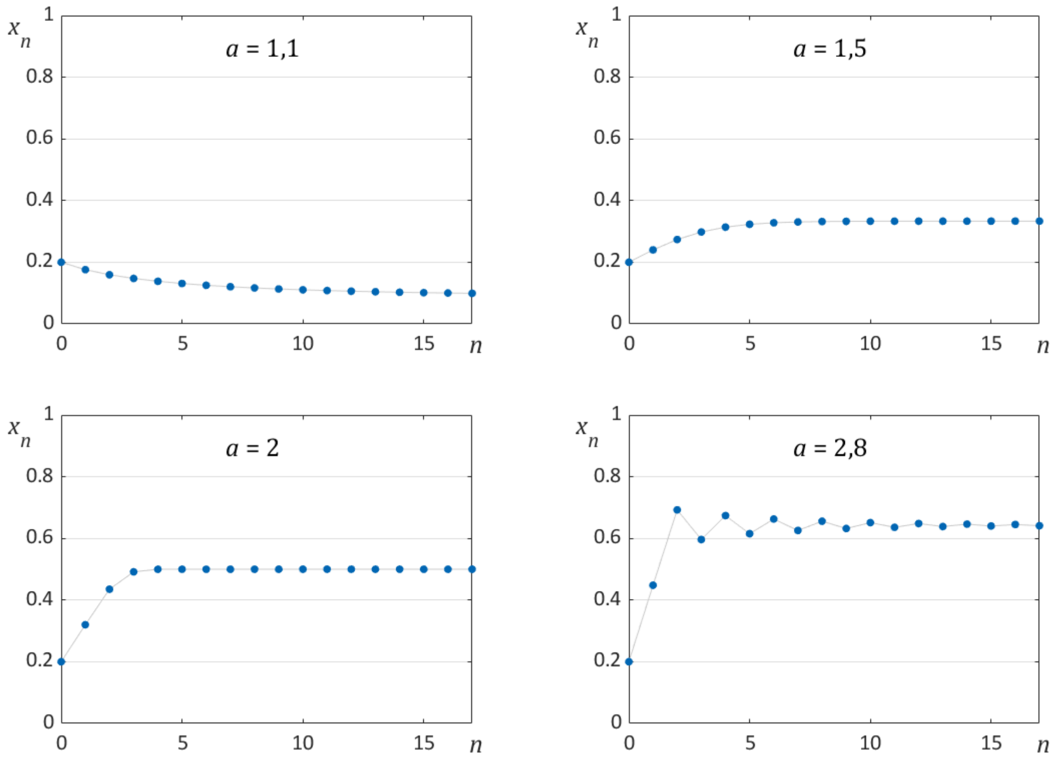
Výsledný vztah určující časový vývoj populace tedy je[28]

$$\boxed{x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)} \ . \tag{9.17}$$

Pro tento vývoj neexistuje vzorec, který by přímo udával hodnotu x_n z x_0 podobně, jako to dělal (9.15) pro iteraci (9.14).[29] Přesto ale vztah (9.17) jednoznačně určuje vývoj populace, jde tedy o vývoj přesně určený, tedy **deterministický**. Jak uvidíme za chvíli, i tento vývoj ale může vést k chaotickému chování.

Modelujeme vývoj populace

Vývoj populace podle modelu (9.17) můžeme lehce spočíst na počítači jednoduchým programem prakticky v libovolném programovacím jazyce, nebo třeba v Excelu. Vývoj pro několik hodnot parametru a ukazují následující grafy:



Jako „startovací“ hodnota je zde zvolena $x_0 = 0{,}2$. Můžete se ale přesvědčit, že i při jiném x_0 vývoj konverguje ke stejné limitní hodnotě x_∞, ta závisí jen na konstantě a. Hodnotu x_∞ dostaneme jednoduše ze vztahu (9.17), když se podíváme, kdy už se x_n nemění, tedy je $x_{n+1} = x_n$:

$$x_n = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n) \Rightarrow 1 = a \cdot (1 - x_n) \Rightarrow x_n = 1 - \frac{1}{a} \ . \tag{9.18}$$

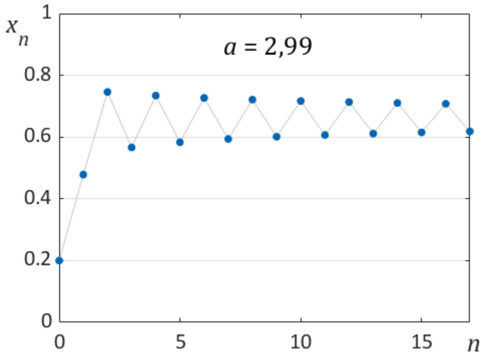
Na grafech vidíme, že k této hodnotě opravdu vývoj konverguje.[30] Pro nižší hodnoty konverguje pomaleji, pro vyšší rychleji, ovšem jen do určité velikosti a. Na posledním grafu vidíme cosi nového: hodnota x nejdřív „přestřelí“ a limitní hodnotě se blíží „zmenšujícími se krůčky“ kolem ní.

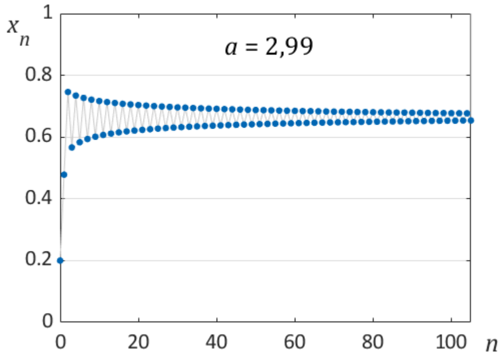
[28] Používá se pro něj název *logistické zobrazení* (*logistic map*, v angličtině se užívá též *quadratic iterator*).

[29] Výjimkou jsou některé speciální případy. Například pro $a = 2$ a $x_0 = 0{,}5$ je $x_n = 0{,}5$ pro všechna n.

[30] Toto platí pro $a \geq 1$ (uvidíme, do jak vysokých hodnot a); pro $a < 1$ hodnoty x_n konvergují k nule.

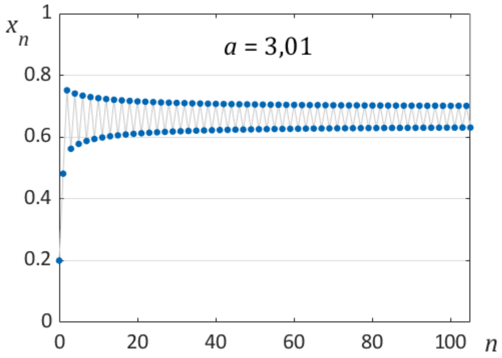
Pro a = 2,99 se ty krůčky zmenšují jen pomalu a musíme čekat řadu sezón, než se výrazně utlumí:

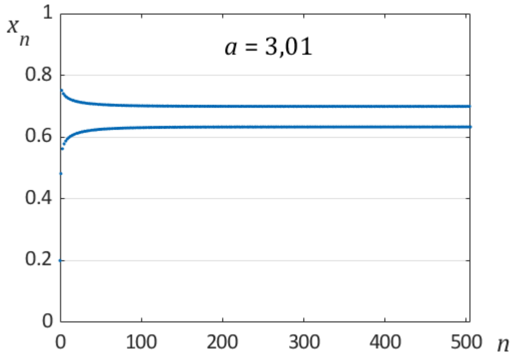




„Oscilace“ mezi dvěma hodnotami

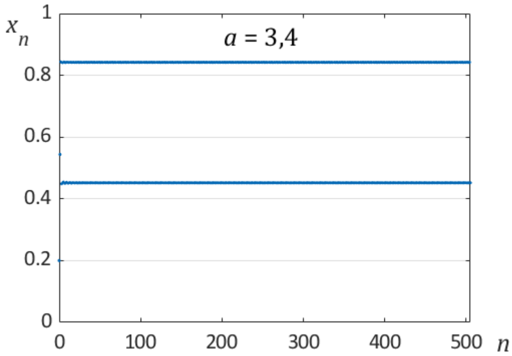
Pro hodnotu větší než 3 už se tyto oscilace neutlumí a x stále překmitává mezi dvěma hodnotami:[31]

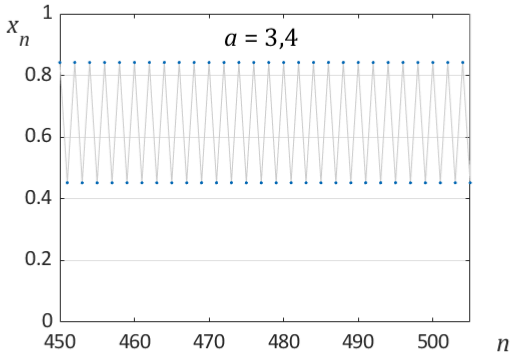




Vidíme zde jasnou výhodu počítačových simulací, kterou už jsme zmínili výše: fakt, že simulaci na spoustu sezón uděláme v mžiku a na výsledky nemusíme čekat pět set let.[32] Můžeme tedy v pokusech směle pokračovat a zvyšovat hodnotu a. Maximem pro nás bude hodnota a = 4, pro vyšší a totiž při iteraci vycházejí záporné hodnoty x (a záporný počet králíků opravdu nedává smysl).

Zkusíme hodnotu a = 3,4. Oscilace se výrazně zvětšily, x stále přeskakuje mezi dvěma hodnotami:





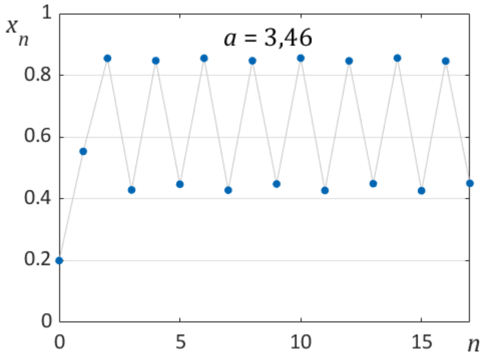
[31] Fakticky to znamená, že v jednom roce se králíci přemnoží, sežerou příliš trávy a v dalším roce zas vinou nedostatku potravy jejich počet klesne. (Být králíkem, už se mi tato situace nejeví příliš optimální…)

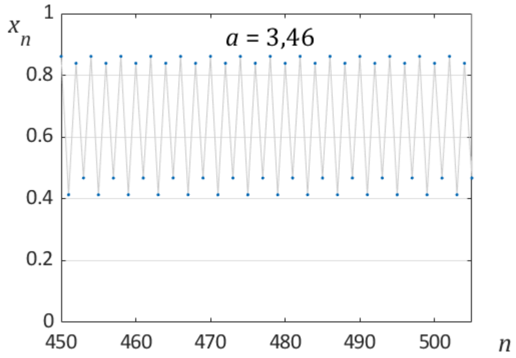
[32] Další nezanedbatelnou výhodou je skutečnost, že při našich simulacích nezahynul ani neutrpěl újmu jediný králík… ☺

Zdvojnásobování periody

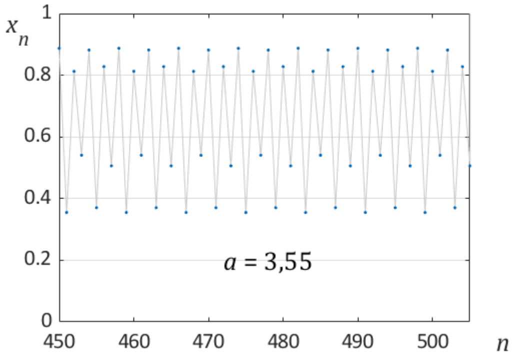
Ovšem při dalším zvětšování a, konkrétně nad hodnotu asi 3,45 (přesněji se uvádí 1+√6) se objeví další zajímavost: x bude oscilovat mezi čtyřmi hodnotami. Perioda tedy bude čtyři roky.

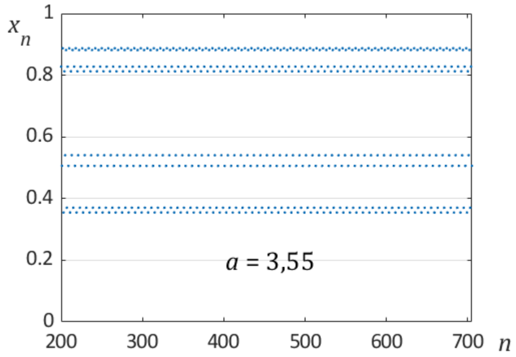
Na začátku vývoje ještě kolísání mezi čtyřmi hodnotami není vidět úplně jasně, ale když počkáme dostatečně dlouho, je už výrazné:





Mohlo by nás napadnout, zda při dalším zvýšení parametru a nezačne x oscilovat mezi osmi hodnotami (takže perioda se zdvojnásobí na osm let). Opravdu je tomu tak, dokonce velmi brzy, když a přesáhne asi 3,54409. Lépe je to vidět, když hodnoty zobrazíme pro více sezón:

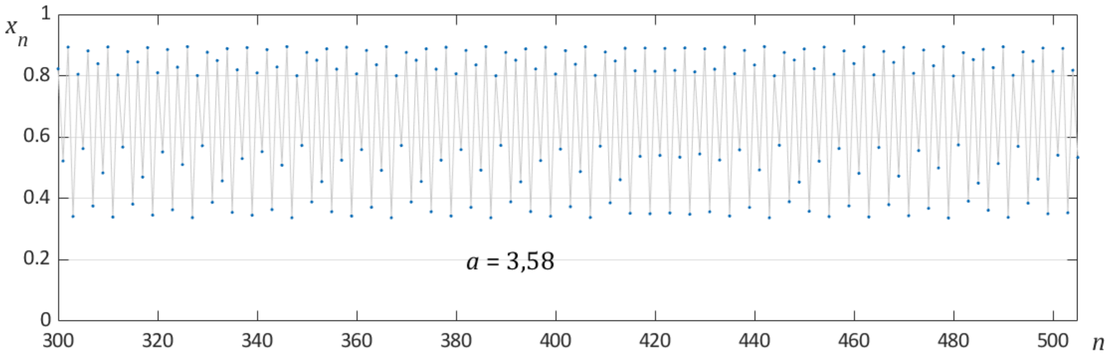




Při dalším zvýšení a (už stačí jen malé) x osciluje mezi šestnácti hodnotami, pak mezi 32, …[33]

… a nástup chaosu

Pro a větší než asi 3,56995 (s výjimkami, k nimž se ještě dostaneme) už nemá vývoj žádnou zřejmou periodicitu:[34]



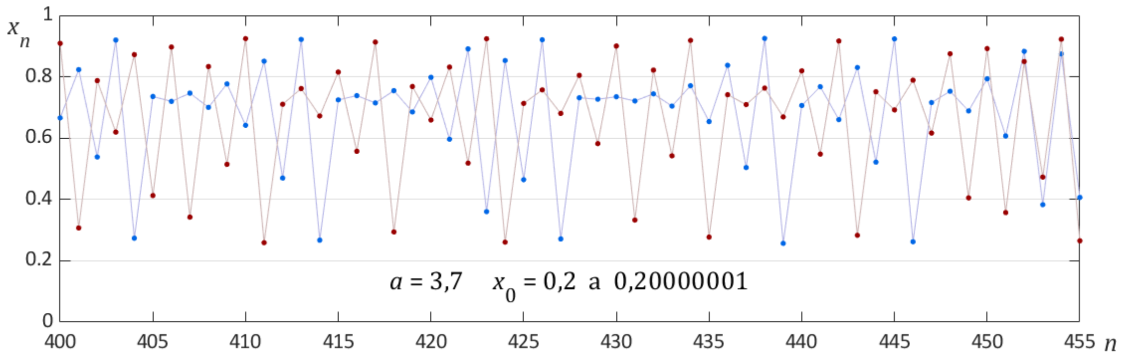
[33] Hodnoty a, kdy se perioda zdvojnásobí, lze nalézt např. na https://mathworld.wolfram.com/LogisticMap.html.

[34] Všimněte si například, jak se hodnoty mezi asi n = 420 až 430 opakují, toto opakování už jinde v grafu nevidíme.

Vývoj už opravdu vypadá chaoticky, i když vztah, jímž je generován, je plně deterministický. Právě proto se pro toto chování používá termín **deterministický chaos.**

Abychom mohli chování systému označit za chaotické, nestačí na to samozřejmě jen náš subjektivní dojem. Matematika má přesná kritéria, kdy jde o deterministický chaos. Jednou z nejzákladnějších vlastností deterministického chaosu je **citlivá závislost na počátečních podmínkách.**

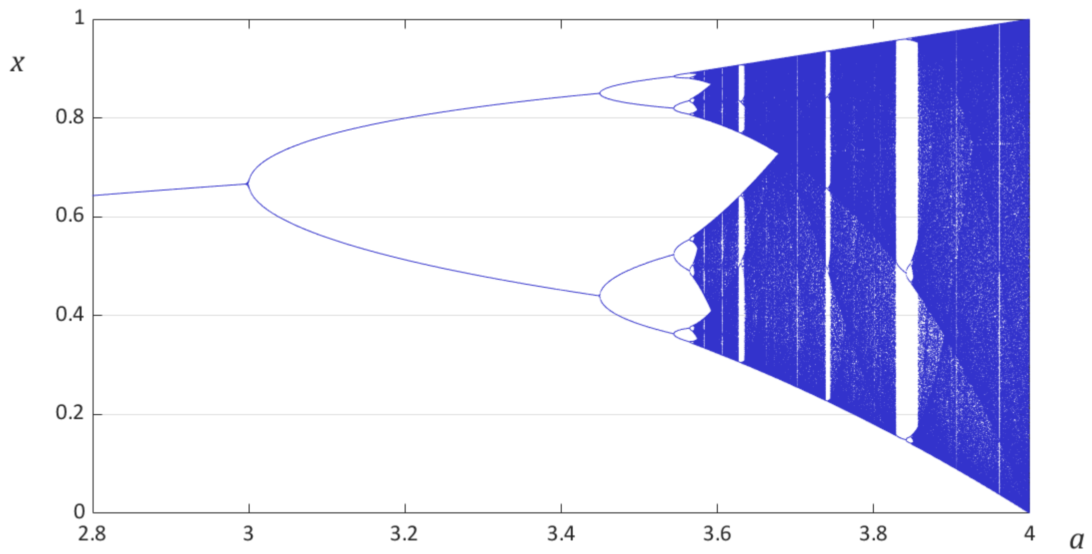
Oč jde, vidíme z následujícího grafu. Je na něm znázorněn vývoj naší králičí kolonie pro stejnou hodnotu parametru a, ale pro nepatrně odlišnou počáteční podmínku. Počáteční hodnoty se liší jen o jednu stomiliontinu (!) – a přesto, jak vidíme, je vývoj v obou případech po čase zcela odlišný.[35]



Bifurkační diagram

Šlo by chování vývoje populací pro různé hodnoty parametru a vystihnout nějak přehledně a souhrnně?

Dělá se to pomocí diagramu, který zobrazuje hodnoty x při vývoji pro dané a. Hodnoty parametru a přitom vynášíme na vodorovnou osu. Při vývoji s daným konkrétním a samozřejmě dostáváme mnoho hodnot x; každou zakreslíme do diagramu jako tečku ve „sloupečku“ nad daným a.[36]

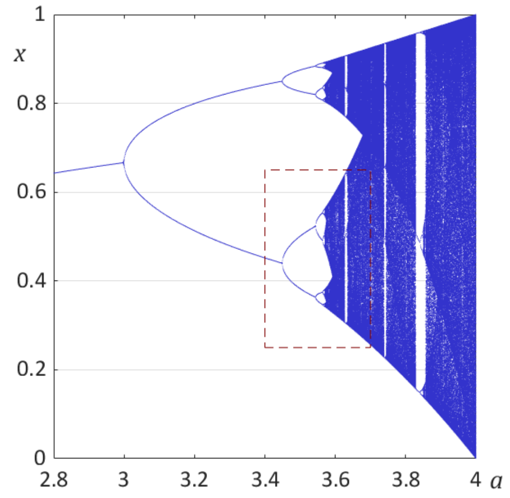


Jasně vidíme, že pro $a < 3$ se počet králíků při časovém vývoji ustálí na jediné hodnotě, pro $a > 3$ až do asi 3,4 „a kousek“ osciluje mezi dvěma hodnotami, pak mezi čtyřmi, pak mezi osmi…

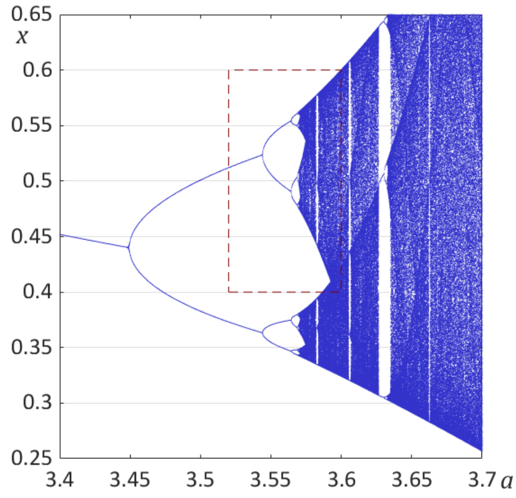
[35] Není to jen tím, že jsme čekali tak dlouho; vývoje se začínají pozorovatelně lišit už asi od n = 60.

[36] Hodnoty x kreslíme až od nějakého vyššího n, aby se do digramu nepromítaly například počáteční oscilace počtu králíků v prvních letech (jak jsme je viděli např. na grafech pro a = 2,8 nebo 2,99).

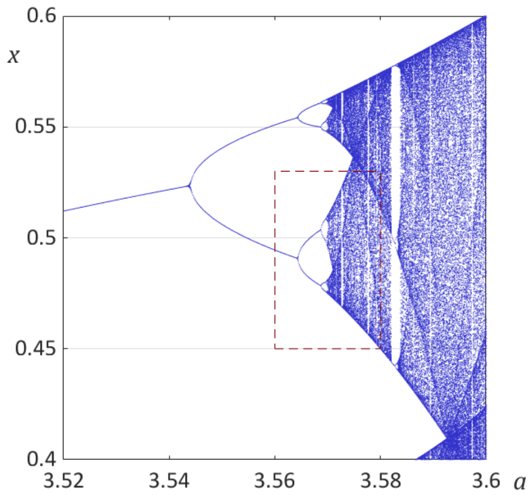
Protože se čára v diagramu rozděluje vždy do dvou, říká se tomuto diagramu *bifurkační diagram*.[37] Pro jaké hodnoty a se čáry rozdělují (a tedy perioda oscilací počtu králíků zdvojnásobuje), vidíme lépe v detailu. Na grafech níže je na obrázku a) stejný diagram, jako na předchozí stránce, na obrázcích b), c) a d) pak větší a větší detaily.[38]



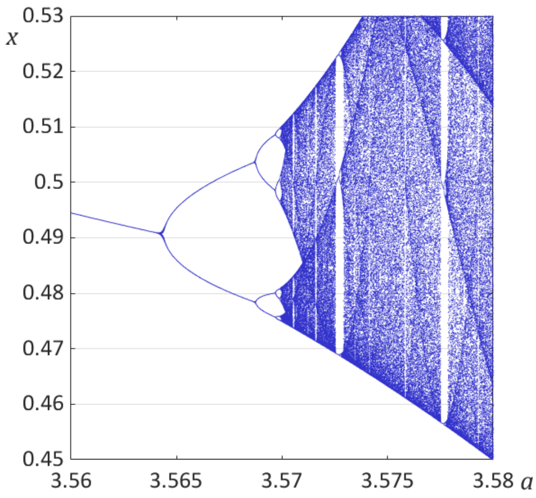
a)



b)



c)



d)

Vidíme, že detaily vypadají podobně, jako celkový digram. V tom se diagramy podobají *fraktálům*.[39]

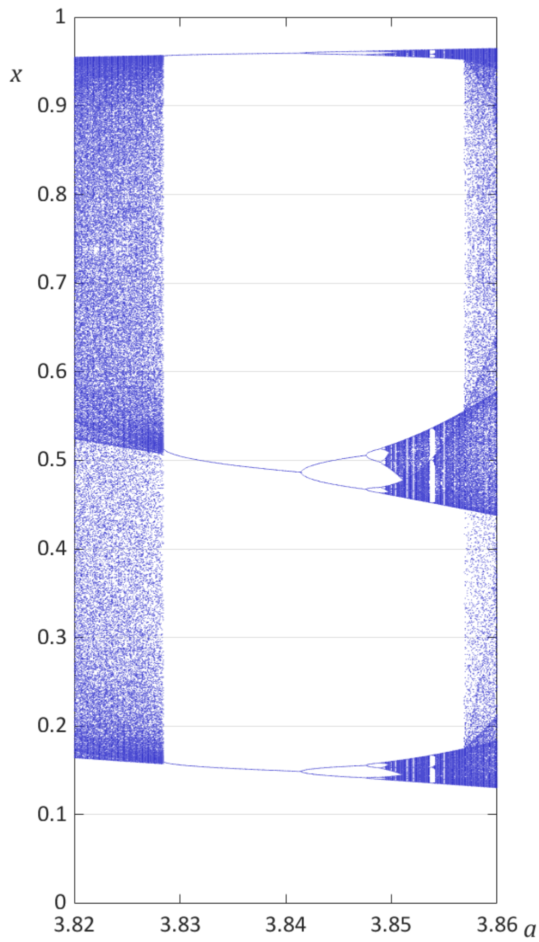
Na diagramu si můžeme všimnout i dalších zajímavostí. Například i v oblasti, kde $a > 3{,}57$ jsou některé hodnoty parametru a, pro něž počet králíků osciluje jen mezi několika hodnotami. I zde se

[37] Termínem *bifurkace* se v geografii označuje rozvětvení toku řeky do dvou koryt.

[38] Čárkovaným obdélníkem je vyznačena oblast, kterou ukazuje následující obrázek detailněji.
„Technická poznámka“: Diagramy jsou vykresleny tak, že se pro každou hodnotu a spočetlo nejdřív tisíc iterací podle (9.17) bez vykreslování a pro dalších tisíc iterací se každá hodnota vyznačila tečkou v grafu. Krok parametru a byl na prvním obrázku 0,001, pro další detaily byl nižší; pro obrázek d) konkrétně 10^{-5}.

[39] Fraktály jsou geometrické objekty, které v libovolném měřítku vypadají podobně (jsou tzv. soběpodobné). Asi nejznámější je Mandelbrotova množina; krásné obrázky můžete najít třeba na https://commons.wikimedia.org/wiki/Mandelbrot_set.

v detailu opakuje stejný vzor, jaký je patrný na celém diagramu. Příklad můžeme vidět na obrázku vpravo.



Je překvapující, jak složité struktury může generovat jednoduchý vztah $x_{n+1} = a \cdot x_n \cdot (1 - x_n)$. Ale nejen on; podobné výsledky bychom dostali i pro analogické iterační vzorce typu $x_{n+1} = f(x_n)$.[40]

Ukazuje se, že deterministický chaos není jen náhodným „šumem“, ale má řadu zajímavých vlastností. Díky některým lze dokonce mluvit o „univerzalitě v chaosu“.[41]

Pojďme se ale od těchto matematických zajímavostí a krás vrátit k základnímu ponaučení, které nám deterministický chaos přináší pro fyziku. Stručně se zmíníme i o tom, jak lidé na deterministický chaos přišli.

[40] Uvažovali bychom přitom spojité nezáporné funkce $f(x)$ na intervalu <0, 1> takové, že $f(0) = 0$, $f(1) = 0$ a f má na intervalu <0, 1> jedno globální maximum. Příkladem je třeba $x_{n+1} = a \cdot \sin(\pi x_n)$.

[41] Například poměr rozdílů mezi sousedními hodnotami a, v nichž dochází k bifurkacím, se v limitě blíží k hodnotě, kterou lze označit za určitou univerzální konstantu. (Pro zájemce: Vygooglete si termíny „Feigenbaumova konstanta“ resp. „Feigenbaum constant“.)

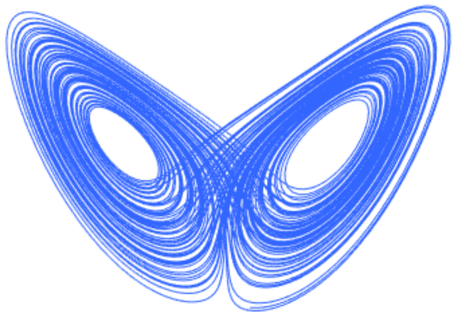
9.4 Závěr: deterministický chaos a fyzika

Deterministický chaos se neuplatňuje jen v jednoduchých modelech typu vývoje populací. Může nastat i v řadě fyzikálních systémů. Skutečnost, že i jednoduché mechanické systémy mohou vykazovat velmi složité chování, objevil už v roce 1880 *Henry Poincaré*, když studoval *problém tří těles*.[42]

Ve dvacátém století deterministický chaos přitáhl pozornost fyziků poté, co meteorolog *Edward Lorenz* prováděl v roce 1961 výpočty týkající se modelování vývoje počasí. Šlo o numerické řešení soustavy diferenciálních rovnic, používal přitom jeden z prvních malých počítačů. Jeho model zahrnoval 12 proměnných a rovnice byly nelineární. Při jednom z výpočtů Lorenz zadal do počítače hodnoty proměnných z předchozího výpočtu[43], ale použil přitom hodnoty vytištěné na tiskárně počítače. Ty ale byly jen na tři desetinná místa, počítač přitom interně počítal na 6 desetinných míst. Když pak Lorenz porovnal výsledky obou výpočtů, zjistil, že se výrazně liší. (My už víme proč, bylo to právě díky zaokrouhlení na méně desetinných míst. Projevila se zde citlivá závislost na počátečních podmínkách.)

Lorenz pak zkusil soustavu daných rovnic zjednodušovat. Nakonec skončil u soustavy tří nelineárních diferenciálních rovnic prvního řádu – i jejich řešení vykazovalo chaotické chování. Výsledné řešení je známo jako *Lorenzův atraktor.* Jak ukazuje obrázek níže, z určitého pohledu se jeho grafické znázornění podobá motýlím křídlům. Je to trochu symbolické, protože jedna přednáška E. Lorenze nesla provokativní název „Předvídatelnost: Vyvolá mávnutí motýlích křídel v Brazílii tornádo v Texasu?“. Daný efekt se proto někdy označuje jako „efekt motýlích křídel“. Nejde samozřejmě o to, že jediný motýl by sám způsobil, že za pár týdnů někde bude nebo nebude tornádo. Podstatné je, že počasí je citlivé na velmi malé změny počátečních podmínek.

Právě proto mohou meteorologové vcelku spolehlivě předpovídat počasí na několik dní dopředu – ale předpovědět, jaké bude počasí v určitý den dejme tomu za tři týdny nebo za měsíc, to už nelze. A to právě proto, že vývoj v delším období záleží na velmi mnoha drobnostech, které se dějí dnes.



Deterministický chaos se neprojevuje jen v meteorologii, vyskytuje se i v jiných oblastech fyziky. S některými dalšími informacemi o tomto fenoménu a možnostech jeho popisu v klasické mechanice se ještě seznámíme v předmětu *Teoretická mechanika*. Pokud si o chaosu a historii jeho zkoumání chcete zatím přečíst něco na populární úrovni, zkuste třeba knihu J. Gleicka.[44]

[42] Problém tří těles se týká pohybu tří hmotných bodů, které na sebe navzájem působí gravitačními silami.

[43] Ne přímo z počátečního času, ale odněkud „z prostředka“.

[44] James Gleick: *Chaos*. Český překlad vyšel v roce 1996. Zřejmě je rozebrán, ale snad bude k sehnání v některé knihovně.