

Mechanika kontinua – úvodní poznámka před vlastním textem

Kapitola věnovaná mechanice kontinua se nám poněkud natáhla, je delší než všechny ostatní. Ono je to na jednu stranu přirozené, mechanika kontinua je rozsáhlá část klasické mechaniky a bývají jí věnovány samostatné učebnice, ne právě tenké. Ale pro vaše uklidnění:

Neděste se rozsahu kapitoly!

Větší počet stránek neznamená, že byste zde museli „dostat do hlavy“ enormní množství znalostí. Ostatně, podívejte se na „Shrnutí“ na straně 40, tam je vzorečků vlastně jen pár.

To, že je kapitola rozsáhlejší, je dáno snahou dostatečně podrobně – ale přitom pokud možno názorně a s pomocí obrázků – zavést hlavní veličiny, které se v mechanice kontinua používají, a vysvětlit jejich význam a vzájemné vztahy.

Cílem tedy je, jednoduše řečeno, abychom spolu prošli úvod do mechaniky kontinua¹ a získali základní představu, oč v této oblasti jde.

Seznámíme se přitom i s typem veličin, které jste asi dosud ve fyzice nepotkali: s *tenzory*. Což s sebou přinese i trochu další matematiky. Něco je vyloženo v hlavním textu, podrobnosti jsou však většinou soustředěny v Dodatcích. Právě ty kapitoly výrazně natáhly, zabírají skoro třetinu celkového počtu stránek. Ovšem **dotatky představují spíše rozšiřující učivo**. Jsou proto označeny hvězdičkou *² a míněny hlavně pro zájemce nebo pro případ, kdy se k problematice vrátíte a budete se chtít podívat na odvození některých věcí, které jsou v základním textu jen konstatovány, nebo na některé matematické podrobnosti týkající se vektorů a tenzorů.³

Pro začátek se tedy můžete dodatku vyhnout,⁴ to hned udělá text o dost kratší.

Takže, na další stránce už začneme vlastním názvem kapitoly, a bez strachu a bázně, jdeme na to!

¹ Opravdu, navzdory rozsahu kapitoly je to jen úvod.

² V některých případech dvěma hvězdičkami jako „více rozšiřující učivo“. Hvězdičkou je, coby spíše rozšiřující partie, označen i jeden kousek v hlavním textu kapitoly.

³ K odvozením a důkazům v dodatcích se můžete vrátit, až příslušnou tematiku proberete v přednáškách z matematiky resp. v předmětu *Matematické metody fyziky*. Třeba vám to, co v této kapitole v dodatcích najdete, pomůže konkretizovat a ilustrovat některé matematické výsledky na fyzikálním základě.

A proč zde je tolik věcí, které lze považovat za rozšiřující? Inu, hlavně proto, aby zde byl popis a výklad rozumně ucelený („pěkně v jednom balíčku, převázaný mašličkou“) a nemuseli jsme příliš často používat obraty typu „z matematiky víte/v matematice se naučíte“, „při podrobnějším výkladu by šlo odvodit/dokázat“, nebo „podrobnosti najdete v učebnicích mechaniky kontinua“ – i když se takovým vyjádřením zcela nevyhneme.

⁴ Přece sem nemůžu natvrdo napsat, že dodatky můžete ignorovat... ☺

No... možná se podívejte alespoň na Dodatek A, u toho je ta „rozšiřující hvězdička“ jen napůl.

Mechanika kontinua

Při našem seznamování s mechanikou jsme od hmotného bodu přes soustavu hmotných bodů dospěli k tuhým tělesům. Umožnilo nám to popsat, vysvětlit a předpovídat řadu jevů. Spousta věcí kolem nás se ovšem nechová jako hmotné body nebo tuhá tělesa: houbu na mazání tabule můžeme zmáčknout, gumový svazek natáhnout nebo zkroutit, plastelínu zformovat do různých tvarů... Nemluvě o tekutinách: tekoucí voda nebo proudící vzduch rozhodně nejsou tuhá tělesa.⁵

I chování těchto objektů a látek umí mechanika popsat – věnuje se tomu její rozsáhlá část označovaná jako **mechanika kontinua**. Pojdme se podívat na její základy.

Chování tekutin si necháme do příští kapitoly, v této se budeme zabývat látkami, které netečou, takže je můžeme označit jako pevné. Řadu věcí, které se přitom naučíme, ale následně využijeme i při popisu tekutin.

10.1 Co je to kontinuum

Zdůrazněme hned na začátku: kontinuum je zase *idealizace*. Materiál si v dané látce představujeme „spojitě rozmazaný“, nepřihlížíme k jeho molekulární struktuře. Reálně to znamená, že vždy, když budeme uvažovat kousek látky, půjde o kousek tak velký, že v něm bude veliký počet molekul. Podobně jsme to vlastně dělali už u tuhého tělesa, když jsme zaváděli hustotu. Jen se teď látka bude moci navíc deformovat, tedy měnit velikost a tvar.

Kontinuum můžeme také označit jako **spojité prostředí**. Například hustotu ρ budeme považovat za spojitou funkci polohy,

$$\rho = \rho(\vec{r}) . \quad (10.1)$$

Podobně to bude s ostatními veličinami⁶. Pokud by se prostředí pohybovalo, přibyla by v (10.1) a v podobných vztazích ještě závislost na čase, bylo by tedy $\rho = \rho(\vec{r}, t)$. To bude podstatné v mechanice tekutin, viz následující kapitolu. Zatím nám bude stačit závislost veličin na poloze.⁷

V dalších částech této kapitoly budeme rozebírat, jak se jednotlivé kousky látky⁸ natahují, stlačují apod. a jaké v nich působí síly. A právě silami začneme.

⁵ Ono vlastně žádná reálná tělesa nejsou absolutně tuhá. I ocelové lano se při zatížení mírně natáhne, i třeba žulu lze nepatrně stlačit. (Ve speciální teorii relativity se dokonce ukazuje, že absolutně tuhá tělesa nemohou existovat. V takových tělesech by totiž rychlost zvuku byla nekonečná, takže by převyšovala rychlost světla, a to podle speciální teorie relativity není možné. Detaily si ale necháme na přednášku *Speciální teorie relativity* ve třetím ročníku.)

⁶ Tedy s veličinami popisujícími síly v dané látce či to, jak je stlačena, natažena či jinak zdeformována; seznámíme se s nimi právě v této kapitole.

⁷ Jak už bylo řečeno, závislost na souřadnicích bude dána spojitými funkcemi, navíc budeme předpokládat, že existují derivace těchto funkcí podle souřadnic (většinou budou stačit první derivace). Nespojitost může nastat jen na rozhraní různých prostředí; například na rozhraní ocelové traverzy a vzduchu se hustota samozřejmě mění skokem. ☺

⁸ Říkat „kousek látky“ zní možná až příliš neformálně, ale snad si to v tomto textu můžeme dovolit. V učebnicích se leckdy používá termín *částice kontinua*, ovšem nemyslí se tím jednotlivé molekuly nebo atomy, ale právě určité kousky látky, v nichž je molekul mnoho. (Pozor, už vůbec nejde „částice kontinua“ plést s elementárními částicemi, byť by k tomu někoho mohla podobnost názvů svádět.) Jindy se používají názvy *reprezentativní objemový element* nebo *reprezentativní elementární objem*. Ale fakticky si pod těmito termíny můžeme pořádně představit například malou krychličku nebo malý kvádr dané látky.

10.2 Jak popsat síly v kontinuu

Jedna rada na začátek: Aby pro nás následující úvahy nebyly příliš formální, je dobře představovat si přitom určité konkrétní situace. Tedy místo abstraktního kontinua třeba kus dřevěného trámu, špejli, gumu do praku⁹, apod.

Síly objemové a plošné

Na kontinuum, například na kus trámu, působí dva druhy sil:

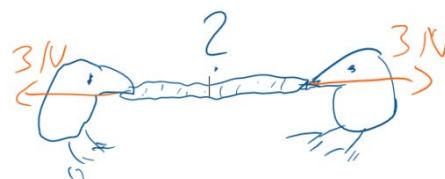
- Síly, jimiž vnější pole působí přímo na každý kousek v objemu materiálu. Jasným příkladem je gravitační síla: na kousek o objemu ΔV působí síla $\Delta \vec{F} = \Delta m \vec{g} = \Delta V \rho \vec{g}$. Takovými silám říkáme **objemové síly**.¹⁰
- Kromě toho můžeme působit silou na povrch materiálu.¹¹ Síla se samozřejmě přenáší i dovnitř materiálu – obecně všem takovým silám říkáme **plošné síly**.

Dále budeme rozebírat, jak popsat plošné síly uvnitř materiálu. Vyjdeme přitom z jednoduché, byť značně umělé situace.

Plošné síly na povrchu a uvnitř tělesa

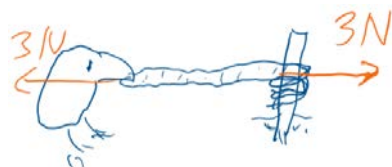
Příklad: Dva kosi a žížala

Řekněme, že se dva kosi tahají o žížalu, viz obrázek vpravo. Každý kos táhne silou 3 N, žížala vydrží sílu maximálně 5 N.¹² Přetrhne se žížala nebo ne?



Naivně by se zdálo, že se přetrhne, přece $3 \text{ N} + 3 \text{ N} = 6 \text{ N}$, a to je víc, než žížala vydrží. Nebo ne?

Ve skutečnosti působí i uvnitř žížaly stejná síla 3 N. A nezáleží na tom, jestli na obou stranách tahají kosi, nebo se třeba na jedné straně žížala drží, aby ji kos neodtáhl. Fakticky totiž kolík, kterého se žížala drží, na ni působí silou také 3 N, viz obrázek vlevo. Jinak by totiž žížala musela díky síle kosa zrychlovat směrem doleva.



Skutečnost, že v žížale působí stejná síla, si můžeme ověřit pokusem se třemi siloměry zapojenými za sebou, viz následující obrázek. Krajní siloměry ukazují síly, kterými táhnou žížalu z obou stran kosi (případně sílu, kterou na žížalu působí kolík, jehož se drží).

⁹ Na webu se najde i pod názvem letecká guma, např. s profilem 5×5 mm i větším. Představit si samozřejmě můžete i gumu na gumování.

¹⁰ Fakticky se v příkladech a konkrétních situacích jako s objemovou silou setkáme právě jen s gravitační resp. tíhovou silou. Kdyby šlo o nabitě dielektrikum, působilo by v objemu také elektrické pole, ale ani v této ani v následující kapitole se takovýmto případem nebudeme zabývat.

¹¹ Příkladem může být trám položený přes potok opřený na koncích o kameny. Ty na jeho povrch působí silou. Když si na trám stoupneme, jde o další silové působení na jeho povrch.

¹² Jde o hodnoty „vycucané z prstu“. Sílu vyvinutou kosa ani pevnost žížal jsme neměřili; celý pokus je jen myšlenkový a žádný živočich při něm reálně nedošel k újmě či zranění.

Prostřední siloměr ukáže sílu, působící uvnitř žížaly. Siloměrů může být i víc, pak ukazují sílu v různých místech žížaly, ta bude také ve všech případech stejná.



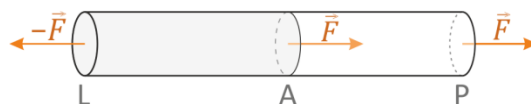
Samozřejmě jde o model, siloměry ve skutečnosti nespojujeme pomocí kusů žížaly.¹³ V dalším výkladu už ostatně žížalu opustíme a budeme uvažovat váleček nebo tyčinku.¹⁴

Síly v natahovaném válečku

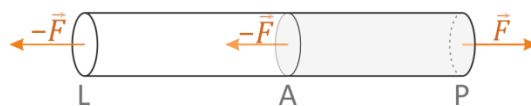
Představme si, že natahujeme váleček z nějakého materiálu, viz obrázek. Síly působící na podstavy L a P jsou stejně velké a opačné, takže celková síla působící na váleček je nulová.¹⁵



Představme si teď nějakou plošku uvnitř válečku rovnoběžnou s podstavami, na obrázku je označena jako A. Část válečku mezi plochami a L a A (na obrázku zabarvená šedě) je v klidu, takže celková síla na ni působící musí být nulová. To znamená, že na plochu A musí *zprava* působit síla \vec{F} , viz obrázek.¹⁶ Plochu A jsme přitom mohli zvolit kdekoli uvnitř válečku. Vidíme tedy, že váleček je opravdu všude (tedy v každém svém průřezu) natahován stejnou silou.



Analogicky můžeme uvažovat část válečku mezi plochou A a plochou P na jeho pravém konci. Část válečku mezi A a P se nepohybuje, celková síla na ni tedy také musí být nulová, a tudíž síla působící *zleva* na plochu A musí být $-\vec{F}$.



Vidíme, že na určitou plochu v látce působí z obou stran síly stejné velikosti, ale opačného směru:



Mluvíme-li o síle působící v materiálu na určité ploše, musíme proto vždy říct, na kterou stranu plochy síla působí.

¹³ A jejich krajní konce můžeme táhnout rukama, nepotřebujeme k tomu zvat kosy. ☺

Vyzkoušejte si tento pokus i ve variantě, kdy jeden z krajních siloměrů netáhnete rukou, ale přivážete k nějakému pevnému předmětu. Síly budou i v tomto případě stejné. (Nejde tedy o to, že bychom museli oba konce „aktivně tahat“.)

¹⁴ Budeme ji totiž rozřezávat na kousky, alespoň myšlenkově. A dělat tohle živému tvorovi nechceme ani v myšlenkách... (Takže opravdu žádný živočich nedojde úhony ani při myšlenkovém pokusu. A ochránci zvířat na nás nebudou muset podávat žalobu ani virtuálně. ☺)

¹⁵ Váleček je proto jen natahován a není nikam urychlován. Nadále budeme předpokládat, že je v klidu.

¹⁶ Touto silou samozřejmě působí materiál, který je vpravo od plochy A.

Síly působící zvenčí na plochy L a A dají dohromady $\vec{F} + (-\vec{F}) = 0$.

Od síly k napětí

O tom, jak moc se váleček natáhne, i když půjde o stejný materiál, samozřejmě nerozhoduje jen síla. Tenkou ocelovou strunu natáhneme (například na kytaře) mnohem snáz, než kdybychom natahovali tlustou ocelovou tyč. Zjevně záleží na velikosti plochy¹⁷.

Důležitý je proto poměr síly a velikosti plochy S , na kterou síla působí:

$$\frac{F}{S} . \quad (10.2)$$

Tato veličina se nazývá **napětí**¹⁸. Označuje se symbolem τ nebo též σ .¹⁹

Při natahování válečku popsaném výše je v něm samozřejmě *tahové napětí* (také se lze setkat s názvem *napětí v tahu*). Kdybychom váleček stlačovali, bude v něm *tlakové napětí* (*napětí v tlaku*); často jednoduše mluvíme třeba o tlaku na podložku.

Jednotkou napětí je **pascal** (značka Pa), je roven newtonu na metr čtvereční:

$$[\tau] = \text{Pa} = \frac{\text{N}}{\text{m}^2} . \quad (10.3)$$

Je dobře uvědomit si, že tlak jednoho pascalu je velmi malý. Když na desku stolu položíme list kancelářského papíru, působí na ni tlakem jen o něco menším než 1 Pa (!).²⁰

Příklady tlaku (resp. napětí):

- Tabulka čokolády Studentská pečeť má 180 g a rozměry 9 cm × 18 cm, tedy plochu asi $1,6 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$. Na podložku proto vyvíjí tlak asi 110 Pa.²¹
- Plochu podrážky boty můžeme odhadnout na 200 až 300 cm^2 .²² Plocha podrážek obou bot je tedy $S = 0,04$ až $0,06 \text{ m}^2$. Tíhu člověka odhadneme na $F = (5 \text{ až } 10) \cdot 10^2 \text{ N}$. Tlak, kterým člověk působí botami na podlahu, odtud vychází v rozmezí zhruba 10 až 20 kPa.²³
- Slon má plochu nohy asi $0,18 \text{ m}^2$, vážit může asi 4 tuny, na jednu nohu tedy připadá tíha asi 10^4 N . Z toho vyjde tlak na zem asi 55 kPa.

¹⁷ Přesněji řečeno: na obsahu plochy. V tomto textu ale budeme občas používat trochu volnější terminologii, takže nebudeme vždy říkat např. „daná plocha má obsah 1 mm^2 “, ale třeba jen „velikost plochy je 1 mm^2 “ nebo jednoduše třeba „trojúhelníček má plochu S “; z kontextu bude jasné, o čem jde.

¹⁸ Nebo též mechanické napětí; jde samozřejmě o něco docela jiného než elektrické napětí.

¹⁹ Různé učebnice používají jeden nebo druhý symbol, tak se vždy podívejte, jaké označení daná kniha používá. Na Wikipedii lze nalézt dokonce kombinaci obou symbolů, σ pro normálové napětí a τ pro tečné napětí; k různým složkám napětí se za chvíli dostaneme. My budeme v tomto textu užívat pro napětí symbol τ .

²⁰ Běžný kancelářský papír je „osmdesátigramový“, to znamená, že metr čtvereční má hmotnost 80 g = 0,08 kg. Jeho tíha je tedy asi 0,8 N (bereme $g \doteq 10 \text{ m/s}^2$), čili tlak, kterým působí na podložku, je asi 0,8 Pa. (Reálně zde samozřejmě navíc působí mnohem větší atmosférický tlak, zde uvažujeme jen příspěvek daný vahou papíru.)

²¹ Zde nepřihlížíme k tomu, že plocha čokolády není úplně rovná, jde tedy o průměrnou hodnotu tlaku. Podobně je tomu i v dalších příkladech.

²² Měření plochy boty autora textu po obkreslení na čtverečkovaný papír dalo asi 290 cm^2 . (Jde o botu velikosti 46. Jsou i větší, ale i výrazně menší čísla bot, také celá podrážka obvykle nedoléhá na podložku, nešlapeme-li zrovna do bažin. ☺ Takže odhad plochy 200 až 300 cm^2 se jeví celkem reálný.)

²³ Chcete-li působit třeba na sních menším tlakem, vezměte si lyže nebo sněžnice.

- Plocha jehlového podpatku dámských střevíčků může být odhadem $1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$. I křehká Popelka ($mg \doteq 400 \text{ N}$), která by při tanci šlápla tímto podpatkem princí na nohu, by na ni vyvinula tlak $4 \cdot 10^2 \text{ N} / 10^{-4} \text{ m}^2 = 4 \cdot 10^6 \text{ Pa}$, tedy 4 MPa.²⁴
- Průměr špičky jehly nebo ostrého špendlíku můžeme odhadnout na desetinu milimetru. Plocha špičky je tedy řádově $(10^{-4} \text{ m})^2 = 10^{-8} \text{ m}^2$. Pokud danou jehlu (nebo špendlík nebo šídlo) zapichujeme do materiálu silou řekněme 1 N, je tlak vyvíjený hrotem 10^8 Pa , tedy 100 MPa.²⁵

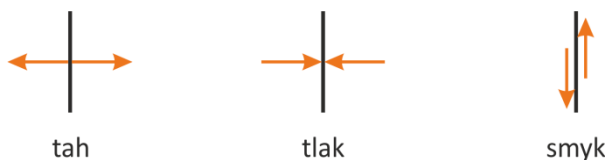
Napětí nemusí být jen tah nebo tlak

Dosud jsme se zabývali jen natahováním nebo stlačováním materiálu, tedy případy, kdy síla je kolmá na plochu. Síla ale může působit i ve směru tečny k povrchu tělesa, viz obrázek.

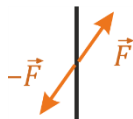
V tomto případě mluvíme o **smykovém napětí** (nebo *napětí ve smyku*). I uvnitř materiálu pak síla působí ve směru tečném k příslušné ploše.

Opět přitom z obou stran plochy působí síly stejně velké a opačného směru.

Všechny tři případy (tah, tlak a smyk) jednoduše vidíme, když se na plochu uvnitř materiálu podíváme v řezu:



Ovšem to jsou stále jen speciální případy. V obecném případě může na ploše působit jak tahové (nebo tlakové), tak smykové napětí, a síla tedy může mířit obecným směrem:



Ovšem pozor. Na jinak orientované ploše bude síla obecně jiná, i když půjde o stejné místo v materiálu. Síly mohou vypadat například takto:



Odtud bychom mohli získat dojem, že popsat napětí v látce, byt třeba na jediném místě, by znamenalo určit napětí pro všechna možná natočení plochy v daném místě. K tomu bychom ale museli znát nekonečně mnoho hodnot: různě natočených rovin je přece nekonečně mnoho! Naštěstí se ukazuje, že není potřeba znát nekonečně mnoho čísel, postačí znát napětí pouze na třech kolmých rovinách. Ukážeme si, jak na to – a navíc se přitom seznámíme s novým typem fyzikálních veličin, s tenzory²⁶.

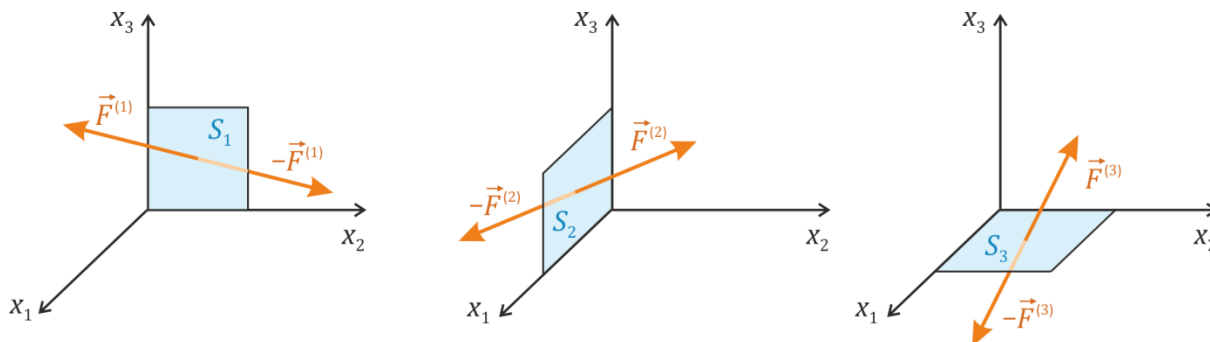
²⁴ Kam se na to hrabe slon... Je pravda, že v tomto odhadu necháváme Popelku působit celou tíhou na jediný jehlový podpatek, reálně budou při tanci tlaky menší. Ale stejně, pokud by měl být princ přišlápnut jehlovým podpatkem, bylo by dobře, kdyby měl okované boty. ☺

²⁵ Je tedy jasné, proč jehlou snadno propíchneme látku nebo šídlo můžeme zarazit do dřeva. (Tlak na špičce šídla je větší, než pevnost dřeva v tlaku, ta podle tabulek činí desítky MPa.)

²⁶ Nebojte se, to zvládneme!

10.3 Tenzor napětí

Podívejme se, jak popsat napětí v nějakém bodě látky.²⁷ V daném bodě si představíme osy kartézských souřadnic a ke každé ose malou plošku kolmou na příslušnou osu souřadnic, viz obrázek. Velikosti těchto plošek označíme S_1, S_2, S_3 .²⁸



Na jednotlivé plošky v materiálu působí plošné síly, ty označíme $\vec{F}^{(1)}, \vec{F}^{(2)}$ a $\vec{F}^{(3)}$. Jak už víme, z obou stran plošky působí opačné síly; dohodneme se, že jako $\vec{F}^{(1)}$ budeme označovat sílu, působící na stranu plošky, na kterou se díváme z osy x_1 .²⁹ Na opačnou stranu plošky (tedy „zezadu“, viz obrázek) působí síla $-\vec{F}^{(1)}$.³⁰ Podobně je tomu u ostatních plošek.

Zatím jsme mluvili o silách, zajímají nás ovšem napětí. Budeme je označovat jako $\vec{T}^{(1)}, \vec{T}^{(2)}$ a $\vec{T}^{(3)}$:

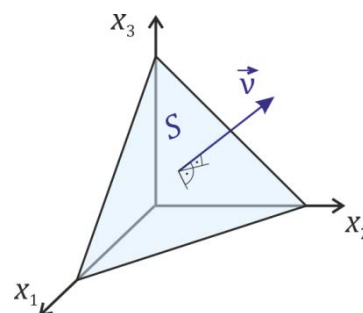
$$\vec{T}^{(1)} = \frac{\vec{F}^{(1)}}{S_1}, \quad \vec{T}^{(2)} = \frac{\vec{F}^{(2)}}{S_2}, \quad \vec{T}^{(3)} = \frac{\vec{F}^{(3)}}{S_3}, \quad \text{tedy } \vec{T}^{(i)} = \frac{\vec{F}^{(i)}}{S_i}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.4)$$

A teď přijde to podstatné:³¹

Tři napětí (10.4) stačí k plnému popisu napětí v daném bodě kontinua.

Ukážeme, že pomocí uvedených tří napětí můžeme určit napětí na libovolně natočenou plošku S . Její natočení je dáno normálovým vektorem \vec{v} , viz obrázek.³² Připomeňme, že normálový vektor je jednotkový:

$$|\vec{v}| = 1 \quad (10.5)$$



²⁷ Respektive v jeho malém okolí – když jde o síly působící na určitých ploškách, tak ty plošky mohou být sice malé, ale nemůže jít jen o jediný bod. (Formálně nakonec budeme velikost těchto plošek limitovat k nule, ale pořád půjde o plošky.)

²⁸ Na obrázku máme plošky nakresleny jako obdélníčky, ale na jejich tvaru nezáleží, mohly by to být kroužky, elipsy, nebo třeba trojúhelníčky.

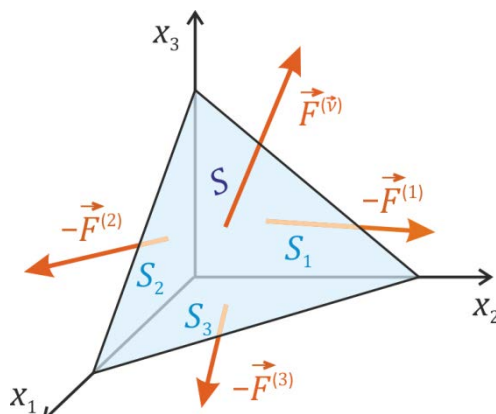
²⁹ Přesněji: z bodů na ose x_1 , kde $x_1 > 0$.

³⁰ Připomeňme ještě jednou: Nejde o nějakou „abstraktní“ sílu, která se vzala bůhvíodkud; je to síla, kterou působí okolní materiál. V případě síly $-\vec{F}^{(1)}$ jde prostě o sílu, kterou působí materiál za ploškou S_1 .

³¹ Měl jsem chuť napsat „teď přijde to kouzlo“. Ale to se jednoduše nehodí napsat do seriózního učebního textu (☺), a jednak nejde o kouzlo, ale o pěknou fyzikální úvahu. Ovšem stejně je to fascinující, že napětí na nekonečně mnoho libovolně natočených plošek dokážeme popsat pomocí napětí na tři kolmé plošky.

³² Normálový vektor je kolmý na plochu. Zde ho označujeme, ve shodě s některými učebnicemi, řeckým písmenem „nů“. (Pokud by se vám \vec{v} nelíbilo, klidně pište třeba \vec{n} , na odvození to samozřejmě nic nezmění. ☺)

S trojhranem souřadnicových os dostáváme vlastně malý jehlan. Síly působící na plošky jehlanu³³ ukazuje obrázek:



Plošky S_1 , S_2 a S_3 jsou nyní trojúhelníčky, síly na ně působící jsou dány vektory napětí $\vec{T}^{(1)}$, $\vec{T}^{(2)}$ a $\vec{T}^{(3)}$. Ze (10.4) je:

$$\vec{F}^{(1)} = S_1 \vec{T}^{(1)}, \quad \vec{F}^{(2)} = S_2 \vec{T}^{(2)}, \quad \vec{F}^{(3)} = S_3 \vec{T}^{(3)}, \quad \text{tedy } \vec{F}^{(i)} = S_i \vec{T}^{(i)}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (10.6)$$

pro síly působící na jehlan zvenku je ovšem, jak ukazuje obrázek výše, musíme brát se záporným znaménkem.³⁴

Napětí na plochu S je $\vec{T}^{(\vec{v})} = \frac{\vec{F}^{(\vec{v})}}{S}$, takže síla, působící na této ploše zvenku na jehlan je

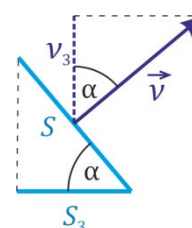
$$\vec{F}^{(\vec{v})} = S \vec{T}^{(\vec{v})}. \quad (10.7)$$

Celková síla působící na jehlan je součtem plošných a objemových sil:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{celk}} &= -\vec{F}^{(1)} - \vec{F}^{(2)} - \vec{F}^{(3)} + \vec{F}^{(\vec{v})} + V \rho \vec{g} = \\ &= -S_1 \vec{T}^{(1)} - S_2 \vec{T}^{(2)} - S_3 \vec{T}^{(3)} + S \vec{T}^{(\vec{v})} + V \rho \vec{g}, \end{aligned} \quad (10.8)$$

kde V je objem jehlanu a ρ hustota materiálu.³⁶

Velikosti plošek S_1 , S_2 a S_3 můžeme vyjádřit pomocí velikosti plochy S a složek vektoru \vec{v} . Pro plošku S_3 to ilustruje obrázek, ukazující plochu S „z boku“. Plocha S svírá s vodorovnou rovinou (rovinou $x_1 x_2$) úhel α . Průmět plochy S do vodorovné roviny je $S \cos \alpha$, ale to je právě plocha S_3 . Je tedy $S_3 = S \cos \alpha$.



Úhel α ale svírá také normálový vektor \vec{v} se svislým směrem (tedy s osou x_3).

Je tedy $\cos \alpha = \frac{v_3}{|\vec{v}|} = v_3$.³⁷ To znamená, že $S_3 = S v_3$. Obdobně je tomu pro ostatní plošky, takže:

$$S_1 = S v_1, \quad S_2 = S v_2, \quad S_3 = S v_3, \quad \text{tj. } S_i = S v_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (10.9)$$

³³ Tedy síly, kterými působí na náš jehlan okolní materiál.

³⁴ Protože působí z opačných stran, než které vidíme z kladných částí souřadnicových os, viz dohodu o značení plošných sil na předchozí straně.

³⁵ Zde sílu působící zvenku bereme s tímto znaménkem, protože příslušnou stranu plochy S (vnější vzhledem k jehlanu) vidíme z vrcholu vektoru \vec{v} , viz obrázek na předchozí straně.

³⁶ Jako objemovou sílu zde bereme konkrétně gravitační sílu; následující odvození by platilo i pro případné jiné druhy objemových sil.

³⁷ Protože \vec{v} je jednotkový vektor, $|\vec{v}| = 1$.

Po dosažení do (10.8) dostaneme

$$\vec{F}_{\text{celk}} = S \left(-v_1 \vec{T}^{(1)} - v_2 \vec{T}^{(2)} - v_3 \vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} \right) + V \rho \vec{g} . \quad (10.10)$$

Objem jehlanu je $V = \frac{1}{3} S h$, kde h je výška jehlanu³⁸. Výsledný vztah pro celkovou sílu na kontinuum v jehlanu je tedy

$$\vec{F}_{\text{celk}} = S \left(-v_1 \vec{T}^{(1)} - v_2 \vec{T}^{(2)} - v_3 \vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} + \frac{1}{3} \rho \vec{g} h \right) . \quad (10.11)$$

Uvažovaný materiál je ale v klidu, náš malý jehlan je v něm v rovnováze. To znamená, že celková síla na jehlan působící je rovna nule:

$$S \left(-v_1 \vec{T}^{(1)} - v_2 \vec{T}^{(2)} - v_3 \vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} + \frac{1}{3} \rho \vec{g} h \right) = 0 .$$

Po vydělení plochou S odtud okamžitě plyne

$$-v_1 \vec{T}^{(1)} - v_2 \vec{T}^{(2)} - v_3 \vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} + \frac{1}{3} \rho \vec{g} h = 0 . \quad (10.12)$$

Nyní můžeme učinit poslední, ale důležitý krok: velikost jehlanu budeme limitně zmenšovat k nule.³⁹ K nule se tedy bude zmenšovat i výška jehlanu, $h \rightarrow 0$, takže člen odpovídající objemovým silám z (10.12) vypadne a zbude jen $-v_1 \vec{T}^{(1)} - v_2 \vec{T}^{(2)} - v_3 \vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} = 0$. Odtud okamžitě

$$\vec{T}^{(\vec{v})} = v_1 \vec{T}^{(1)} + v_2 \vec{T}^{(2)} + v_3 \vec{T}^{(3)} = \sum_{j=1}^3 v_j \vec{T}^{(j)} , \quad (10.13)$$

takže vidíme, že znalost napětí (10.4) opravdu stačí k tomu, abychom určili napětí na libovolně orientované plošce.⁴⁰

Od vektorů k tenzoru

Zatím jsme s napětími na ploškách pracovali jako s vektory, a dospěli jsme k tomu, že pro určení napětí v daném bodě potřebujeme tři vektory. Nešlo by napětí vyjádřit nějakou jednou veličinou?

Šlo – ale půjde o nový typ veličiny, se kterým jsme se dosud v mechanice nepotkali. Zatím známe **skaláry** (tedy veličiny, vyjádřené jediným číslem, příkladem je hmotnost nebo hustota) a **vektory**, tedy veličiny, které mají velikost a směr a lze je také vyjádřit trojicí jejich složek. (Příkladů už známe

³⁸ Výšku zde ovšem bereme „šikmo“, tedy jako vzdálenost vrcholu jehlanu (bodů, kde se stýkají osy x_1 , x_2 a x_3 , tedy počátku naší kartézské soustavy souřadnic) od plochy S .

³⁹ Tohle můžeme udělat v našem modelu kontinua, kde látku považujeme za spojitě rozloženou. Pro jehlan konečné velikosti byla vlastně napětí $\vec{T}^{(1)}$, $\vec{T}^{(2)}$ a další ve vztazích (10.4) až (10.12) *průměrná* napětí na daných ploškách, limitou dostaneme hodnoty těchto napětí v jednom bodě. Reálně samozřejmě musí náš jehlan stále obsahovat velké množství molekul. Přesto model kontinua a v něm počítaná napětí a další veličiny dobře popisují mechanické chování látek. (Při vysvětlení, proč se látky chovají tak, jak se chovají, na čem závisí jejich pevnost a další vlastnosti, jak se v nich šíří různé poruchy apod. je přirozeně nezbytné uvažovat jejich strukturu. Mikroskopickým popisem se zabývá *fyzika pevných látek* resp. obecněji, *fyzika kondenzovaného stavu*, s ní se ve svém studiu potkáte později.)

⁴⁰ Pozorný čtenář by mohl namítnout, že zde jsme to odvozovali jen v případě, kdy normálový vektor \vec{v} měl všechny složky kladné (tedy mířil „dopředu doprava nahoru“). Lze si ale rozmyslet, že i v ostatních případech dá vztah (10.13) správné výsledky. Například kdyby vektor \vec{v} mířil „dozadu“, proti směru osy x_1 , tedy kdyby měl složky $\vec{v} = (-1, 0, 0)$, vyjde z (10.13) $\vec{T}^{(\vec{v})} = -\vec{T}^{(1)}$, což je správné napětí na takto orientované plošce.

hodně: rychlost, zrychlení, síla, hybnost...) Vztah (10.13) ale ukazuje, že pro vystižení napětí jediný vektor s jeho třemi souřadnicemi nestačí, potřebujeme více čísel.

Pro seznámení s novou veličinou popisující napětí⁴¹ bude vhodné zapsat vztah (10.13) ve složkách. Nejdříve si zapíšeme složky vektorů $\vec{T}^{(1)}$, $\vec{T}^{(2)}$ a $\vec{T}^{(3)}$ hezky pod sebe:⁴²

$$\begin{aligned}\vec{T}^{(1)} &= (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}) \\ \vec{T}^{(2)} &= (\tau_{21}, \tau_{22}, \tau_{23}) \\ \vec{T}^{(3)} &= (\tau_{31}, \tau_{32}, \tau_{33})\end{aligned}\tag{10.14}$$

Vztah (10.13) zapsaný ve složkách tedy bude

$$T_i^{(\vec{v})} = v_1 T_i^{(1)} + v_2 T_i^{(2)} + v_3 T_i^{(3)} = v_1 \tau_{1i} + v_2 \tau_{2i} + v_3 \tau_{3i} = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} v_j .$$

Zápis pomocí sumy je jednodušší, takže výsledný vztah budeme obvykle psát ve tvaru

$$T_i^{(\vec{v})} = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} v_j .\tag{10.15}$$

Devět čísel τ_{11} až τ_{33} můžeme spojit do jediné veličiny:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} .\tag{10.16}$$

Tato veličina není ani skalár, ani vektor. Jde o nový typ veličiny, kterému se říká **tenzor**.⁴³

V našem případě, protože jde o veličinu charakterizující napětí, jde o **tenzor napětí**. Jednotlivá τ_{ij} v (10.16) jsou **složky tenzoru napětí**.

Stručné poučení o tenzorech najdete v Dodatku A, pro začátek nám bude stačit jednoduchá informace, že jde (v případě tenzoru druhého řádu) o devět složek, které lze uspořádat do „tabulky“, jak to ukazuje (10.16).

Při pohledu na (10.16) nás asi přirozeně napadne otázka:

„To je sice hezké, že máme devět složek, ale co vlastně znamenají. Jaký je jejich význam?“

Takže se na význam jednotlivých složek podíváme.

⁴¹ No ano, bude to *tenzor napětí*, vždyť už se tenhle termín dvakrát objevil v nadpisech...

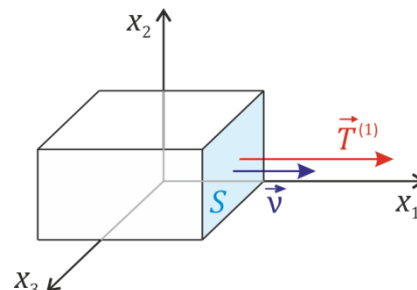
⁴² Jak jsme se dohodli výše, napětí budeme označovat symbolem τ , takže tento symbol použijeme i pro složky daných třech vektorů napětí. Každé τ má u sebe dva indexy: první označuje, o který vektor napětí jde, druhý index označuje složku daného vektoru.

⁴³ V tomto případě jde o *tenzor druhého řádu*. Poznáme to tak, že jeho složky mají dva indexy. Ve fyzice se používají i tenzory vyšších řádů; složky tenzorů třetího řádu mají tři indexy, složky tenzorů čtvrtého řádu čtyři indexy, atd.

Význam složek tenzoru napětí

Význam složek na diagonále ($\tau_{ij}, i = j$)

Začneme případem, kdy materiál natahujeme ve směru osy x_1 , viz obrázek.⁴⁴ Plošku S táhneme doprava silou $\vec{F}^{(1)} = (F, 0, 0)$.⁴⁵ Která složka tenzoru napětí bude odpovídat příslušnému napětí F/S ?



Vektor napětí je

$$\vec{T}^{(1)} = \vec{F}^{(1)}/S = (F/S, 0, 0) \quad (10.17)$$

a víme, že obecně je (viz (10.14)) $\vec{T}^{(1)} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$.⁴⁶ Nenulová složka tenzoru napětí je tedy

$$\tau_{11} = F/S. \quad (10.18)$$

To znamená, že τ_{11} je napětí v tahu ve směru osy x_1 .

Podobně je tomu při natahování ve směru ostatních os, napětí tam jsou τ_{22} a τ_{33} . Vidíme, že

diagonální složky tenzoru napětí jsou tahová napětí ve směru příslušných os.⁴⁷

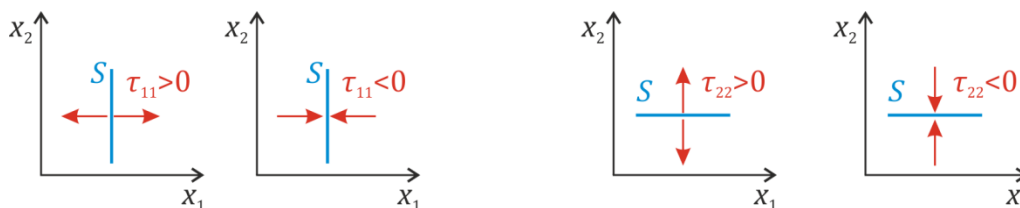
Známe už tedy význam tří složek tenzoru napětí:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (10.19)$$

A co když materiál nenatahujeme, ale stlačujeme?

Je to jednoduché: Příslušné složky napětí jsou pak záporné, např. $\tau_{11} < 0$. **Kladné hodnoty složek τ_{11} , τ_{22} a τ_{33} znamenají tah** (natahování), **záporné hodnoty tlak** (stlačování).

Pro napětí ve směru os x_1 a x_2 to ukazuje obrázek:⁴⁸



⁴⁴ Na obrázku jsme pro přehlednost otočili soustavu souřadnicových os tak, že osa x_1 míří doprava.

⁴⁵ V obrázku není nakreslena síla $-\vec{F}^{(1)}$, kterou držíme levou stranu kváдру (resp. příslušné napětí $-\vec{T}^{(1)}$), reálně tam taková síla samozřejmě je.

⁴⁶ Tak jsme si složky $\vec{T}^{(1)}$ označili.

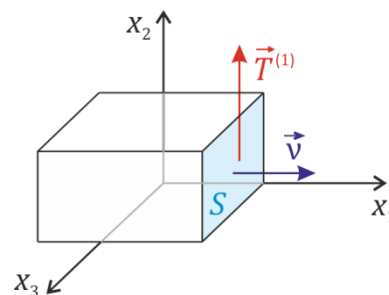
⁴⁷ Co jsou diagonální složky, vidíme o dva řádky níže v zápisu (10.19).

⁴⁸ Pro napětí ve směru osy x_3 by to samozřejmě bylo analogické, pro názornost zde ale tento a podobné obrázky kreslíme jen dvourozměrně, v tomto případě jde tedy o pohled ze směru osy x_3 .

(Jsou-li pro vás názornější třírozměrné obrázky, zkuste si je nakreslit sami. Coby autor tohoto studijního textu přiznávám, že mi třírozměrné obrázky, které se snažím kreslit, obvykle moc názorné nepřipadají; ono se to kreslení musí umět a mít k tomu větší talent... ☹️)

Význam nediagonálních složek ($\tau_{ij}, i \neq j$)

Síla působící na plošku v materiálu nemusí být na tuto plošku kolmá, může s ní být i rovnoběžná, viz obrázek. Ukazuje situaci, kdy síla působící zprava na plošku S kolmou na osu x_1 má nenulovou jen složku do osy x_2 , $\vec{F}^{(1)} = (0, F, 0)$. V materiálu v tomto případě působí **smykové napětí**.



Vektor napětí je

$$\vec{T}^{(1)} = \vec{F}^{(1)}/S = (0, F/S, 0) \quad (10.20)$$

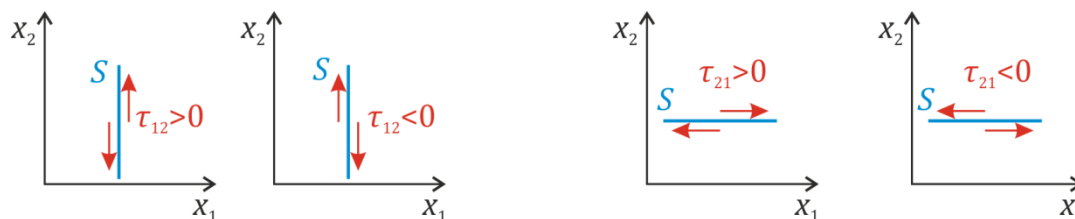
a z toho, že $\vec{T}^{(1)} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$ (viz (10.14)), vidíme, že nenulová je v tomto případě složka τ_{12} :

$$\tau_{12} = F/S. \quad (10.21)$$

To znamená, že τ_{12} je **napětí ve smyku ve směru osy x_2 působící na plošku kolmou na osu x_1** . Podobně je tomu pro ostatní τ_{ij} , kde $i \neq j$. Vidíme, že

nediagonální složky tenzoru napětí popisují smyková napětí v materiálu.

Samozřejmě, že na opačné straně plošky působí síla opačným směrem. Situaci pro kladné i záporné hodnoty τ_{12} a τ_{21} ukazuje obrázek:



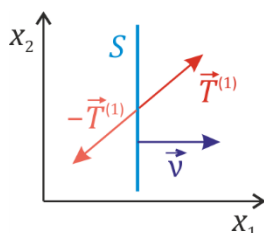
Zcela analogicky je to u složek τ_{13} , τ_{31} a τ_{23} , τ_{32} . Takže už rozumíme i všem nediagonálním složkám tenzoru napětí:

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}. \quad (10.22)$$

Zatím jsme uvažovali pouze tahové nebo pouze smykové napětí. Co když půjde o obecnější případ a vektor napětí bude mířit „šikmo k ploše“? Zůstane význam složek τ_{ij} stejný, jak jsme ho poznali výše? Uvidíme, že naštěstí ano.

Tahové a smykové napětí dohromady...

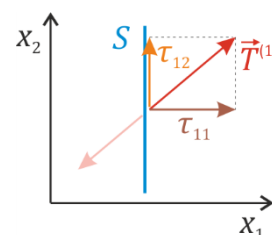
Pojďme se podívat na obecný případ, kdy v materiálu působí na plošku S současně napětí v tahu i ve smyku.



Příkladem může být situace znázorněná na obrázku. Ploška S je kolmá na osu x_1 , příslušný vektor napětí působící na tuto plošku (zprava) je $\vec{T}^{(1)}$. Napětí v materiálu může být zcela obecné (všechny složky tenzoru napětí (10.16) mohou být nenulové).

I v tomto obecném případě jsou τ_{11} , τ_{12} a τ_{13} složkami vektoru napětí: $\vec{T}^{(1)} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$.

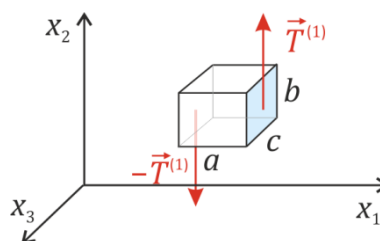
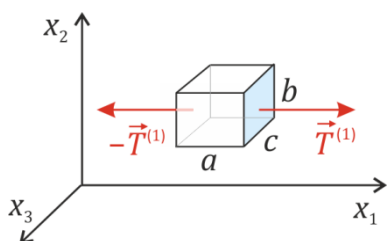
To znamená, že pro libovolně složité napětí je τ_{11} stále napětím v tahu (ve směru osy x_1 , tedy kolmo na naši plošku S) a τ_{12} je smykové napětí (tečné k plošce S ; přesněji řečeno jde o složku tohoto smykového napětí do směru osy x_2 ⁴⁹), viz obrázek vpravo.



Takže složkám tenzoru napětí snad už docela rozumíme.⁵⁰

Symetrie tenzoru napětí

Podívejme se na plošné síly působící na malý kvádřík v materiálu. Konkrétně si všimneme sil na jeho stěny kolmé na osu x_1 , viz následující obrázky.⁵¹



Když jde o tahovou sílu (viz levý obrázek), síly zleva a zprava se vyrovnají. Celková síla na kvádřík je nulová a kvádřík není plošnými silami nikam tažen.⁵²

Ovšem když jde o smykové síly (viz pravý obrázek), vidíme, že síla na kvádřík je sice opět nulová⁵³, ale moment těchto sil je nenulový: daná dvojice sil by zjevně kvádřík roztočila!⁵⁴ A úhlová rychlost kvádříku by se stále zvětšovala... Což se v materiálu samozřejmě neděje. Jak to tedy je?

⁴⁹ Složka tohoto smykového napětí do směru osy x_3 je τ_{13} .

⁵⁰ Prosim laskavého čtenáře, aby si všechny uvedené úvahy sám podrobně promyslel. I když to na začátku možná vypadá trochu složitě, když se s tím sžijeme, není problém odpovědět, když na nás někdo vybatne třeba otázkou „Které složky tenzoru napětí popisují tečné napětí působící na plošku kolmou na osu x_3 ? A která z těch složek se týká složky daného napětí do osy x_2 ?“ (Není asi moc pravděpodobné, že by podobná otázka padla v nějaké televizní soutěži, kdybyste se jí náhodou účastnili, ale člověk nikdy neví... ☺)

⁵¹ Na obrázcích kreslíme vektory napětí. Sílu dostaneme po vynásobení plochou stěny: $\vec{F}^{(1)} = bc\vec{T}^{(1)}$.

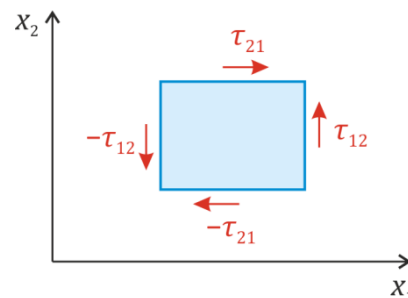
⁵² Podmínku rovnováhy pro část materiálu jsme ostatně výše užívali, když jsme určovali napětí na libovolně orientované plošce, viz odvození před (10.13). Vyrovnání tahových sil se týká i plošek kolmých na osy x_2 a x_3 .

⁵³ Síla je součtem $bc\vec{T}^{(1)} + bc(-\vec{T}^{(1)})$.

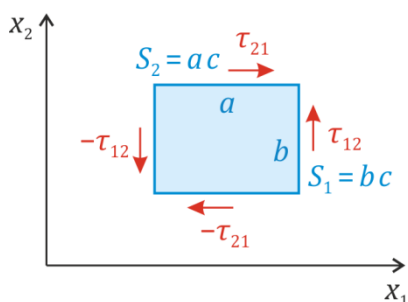
⁵⁴ Velikost momentu této dvojice sil by byla dána vztahem „síla krát rameno“, tedy $abc|\vec{T}^{(1)}|$.

Materiál v látce musí být v rovnováze, takže nejen celková síla, ale i celkový moment sil působící na každý kousek materiálu musí být roven nule.

Proč se malý kvádrík materiálu neroztočí, je kvalitativně vidět na obrázku vpravo. Smyková napětí τ_{12} a $-\tau_{12}$ na pravé a levé stěně kvádru se snaží roztáčet kvádr proti směru hodinových ručiček, napětí τ_{21} a $-\tau_{21}$ na horní a dolní stěně kvádru se ho snaží roztočit ve směru hodinových ručiček.⁵⁵ Příslušné momenty sil se vzájemně vyrovnají.



Tak, a teď už to jen popsat kvantitativně. Uvažujme kvádrík délky a , výšky b a hloubky c (tu ovšem na obrázku vlevo nevidíme, protože jde o pohled ze směru osy x_3). Pravá stěna kvádríku má plochu $S_1 = bc$.⁵⁶ Síla, kterou smykové napětí působí na stěnu, je tedy $F^{(1)} = S_1 \tau_{12} = bc \tau_{12}$. Na levou stěnu působí stejně velká síla opačného směru.⁵⁷



Moment dané dvojice sil spočteme podle vztahu „síla krát rameno“, jeho velikost je tedy

$$M^{(1)} = a F^{(1)} = abc \tau_{12} . \quad (10.23)$$

Síla působící na horní stěnu je analogicky $F^{(2)} = S_2 \tau_{21} = ac \tau_{21}$ a moment dvojice sil působících na horní a dolní stěnu je

$$M^{(2)} = b F^{(2)} = bac \tau_{21} . \quad (10.24)$$

Oba momenty míří ve směru osy x_3 , mají ovšem opačnou orientaci, takže aby se vyrovnaly, musejí se jejich velikosti rovnat. Z (10.23) a (10.24) pak dostáváme $abc \tau_{12} = bac \tau_{21}$ a odtud okamžitě

$$\tau_{12} = \tau_{21} . \quad (10.25)$$

Analogicky lze odvodit, že $\tau_{13} = \tau_{31}$ a $\tau_{23} = \tau_{32}$. To znamená, že platí

$$\tau_{ij} = \tau_{ji} \text{ pro všechna } i, j = 1, 2, 3 . \quad (10.26)$$

Jinými slovy,

tenzor napětí je symetrický.

Nezávislých složek tenzoru napětí proto není devět, ale jen šest.

⁵⁵ Omlouvám se čtenářům z generace mileniálů, kteří jsou již zvyklí jen na digitálky a označení „po směru hodinových ručiček“ a „proti směru hodinových ručiček“ považují za něco příliš archaického, co mělo vymřít nejspíš s dinosaury. ☺ Ale i pro odpůrce hodin s ručičkami je ze šipek snad zřejmé, kam by která napětí kvádr roztočila. ☺ ☺

⁵⁶ Značíme ji S_1 , protože jde o plochu kolmou na osu x_1 .

⁵⁷ Smykové napětí bereme na pravé i levé stěně stejně velké, protože kvádr předpokládáme velmi malý. Fakticky na konci výpočtu můžeme limitovat rozměry kvádru k nule, pak je rovnost velikostí napětí na obou stěnách jasná.

⁵⁸ Právě jsme to dokázali pro $i \neq j$, pro $i = j$ je platnost samozřejmá.

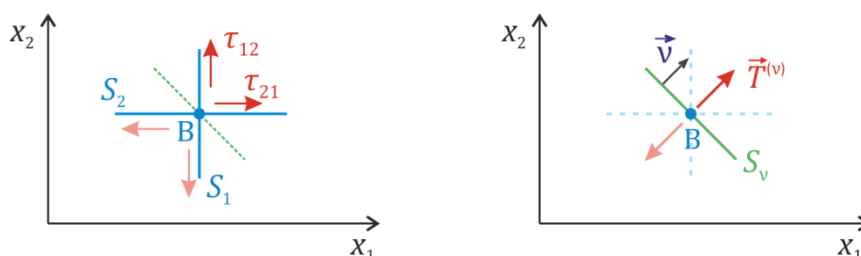
Další poznámky k tenzoru napětí

Hlavní směry tenzoru napětí

Napětí v daném bodě materiálu jsme na začátku této části kapitoly popsali vektory působícími na plošky S_1, S_2, S_3 kolmé na osy souřadnic.⁵⁹ Napětí na těchto ploškách obecně měla jak složku tahovou (kolmou na plošku), tak složku smykovou (tečnou na plošku). Napětí tedy celkově vypadá jako docela složitá veličina.

Dá se ale ukázat, že pro libovolně složitě napětí v daném bodě můžeme najít plošku natočenou tak, že vektor napětí na ni působící je k ní kolmý. To znamená, že na takové plošce **není smykové napětí**, působí na ni **jen čistý tah** (nebo tlak).

Příklad ukazuje následující obrázek. Na plošky kolmé k osám x_1 a x_2 působí tečná napětí. Na natočenou plošku S_v (kolmou k normálovému vektoru \vec{v}) působí pouze napětí v tahu.⁶⁰



Dokonce platí ještě víc: existují **tři** směry $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ takové, že na ploškách k nim kolmých je jen čistý tah nebo tlak, žádná smyková napětí. Těmito směry se říká **hlavní směry tenzoru napětí**. A navíc: tyto směry jsou vzájemně kolmé.⁶¹ Blíže se o této problematice zmíníme (hlavně pro zájemce) v Dodatku D.

Tenzor napětí „funguje“ i při pohybu kontinua

Když jsme výše zaváděli tenzor napětí a ukazovali, že z něj lze určit vektor napětí na libovolně natočené plošce, dělali jsme to pro kontinuum v klidu. Celkovou sílu na kousek kontinua (10.10) resp. (10.11) jsme proto brali rovnou nule – aby byl daný kousek kontinua v rovnováze a nebyl nikam „strkán“ či tažen. Co když ale třeba lokomotiva táhne rozjíždějící se vagón nebo auto táhne na laně jiné auto a zrychluje? Pak se přece uvažovaný kousek kontinua pohybuje se zrychlením a síla na něj působící tedy není nulová.⁶² Není tedy naše odvození nepoužitelné?⁶³

Naštěstí tomu tak není. Druhý Newtonův zákon použitý na daný kousek materiálu dá

$$m\vec{a} = \vec{F}_{\text{celk}}, \quad (10.27)$$

⁵⁹ Pak jsme ze složek těchto vektorů dali dohromady tenzor napětí, viz (10.14).

⁶⁰ Vektor napětí $\vec{T}^{(v)}$ je rovnoběžný s vektorem \vec{v} . Tento výsledek lze odvodit pomocí vztahu (10.15), blíže viz Dodatek D.

⁶¹ Dodejme, že tyto směry nemusí být určeny jednoznačně. Například pro tyč, kterou natahujeme ve směru osy x_1 a jinak na ni nepůsobíme, je jedním z hlavních směrů právě směr osy x_1 . Druhé dva hlavní směry jsou libovolné směry na danou osu kolmé. (Je pak vhodné volit tyto dva směry také vzájemně kolmé.)

⁶² Příkladů můžeme najít mnohem víc. Jasným „školním“ příkladem je třeba závaží kmitající na pružině nebo gumičce, tam se části pružiny nebo gumičky pohybují se zrychlením prakticky pořád.

⁶³ To by byl průšvih, znamenalo by to, že tenzor napětí je pro výpočet napětí na libovolných ploškách použitelný jen ve statickém případě, což by bylo dost omezující.

kde \vec{F}_{celk} je dáno vztahem (10.10) ev. (10.11) a m je hmotnost daného kousku materiálu:

$$m = V\rho = \frac{1}{3}hS\rho .$$

Z (10.27) po dosazení dostáváme

$$\frac{1}{3}hS\rho \vec{a} = \vec{F}_{\text{celk}} = S\left(-v_1\vec{T}^{(1)} - v_2\vec{T}^{(2)} - v_3\vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} + \frac{1}{3}\rho \vec{g}h\right)$$

a odtud

$$S\left(-v_1\vec{T}^{(1)} - v_2\vec{T}^{(2)} - v_3\vec{T}^{(3)} + \vec{T}^{(\vec{v})} + \frac{1}{3}\rho \vec{g}h - \frac{1}{3}\rho \vec{a}h\right) = 0 . \quad (10.28)$$

Po vydělení S a limitě $h \rightarrow 0$ k „nekonečně malému kousku kontinua“ pak už opět dostáváme (10.13).⁶⁴ Takže vztah mezi tenzorem napětí a vektory napětí na libovolně natočených ploškách funguje i v kontinuu, které se pohybuje se zrychlením.⁶⁵

Rovnice rovnováhy kontinua

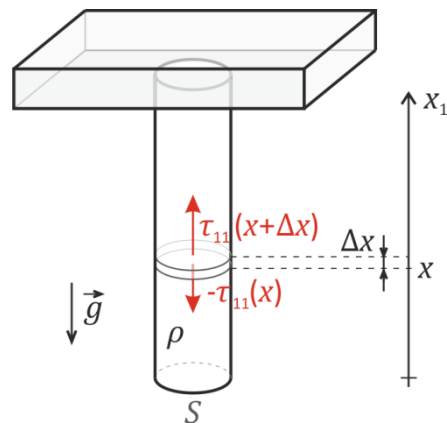
Vraťme se ještě k rovnováze v kontinuu. Představme si třeba ocelové lano⁶⁶ pověšené od stropu. A uvažujme v něm váleček výšky Δx , viz obrázek vpravo. Jeho horní podstava je tažena nahoru silou $S \tau_{11}(x + \Delta x)$, spodní dolů silou $S \tau_{11}(x)$. Samotný váleček má hmotnost $m = \rho S \Delta x$, takže je tažen dolů tíhovou silou $\rho S \Delta x g$. Celková síla působící na daný váleček ve směru osy x_1 je tedy

$$F_1 = S \tau_{11}(x + \Delta x) - S \tau_{11}(x) - \rho S \Delta x g . \quad (10.29)$$

V rovnováze je tato síla nulová, $S(\tau_{11}(x + \Delta x) - \tau_{11}(x) - \rho \Delta x g) = 0$, úpravou odsud dostáváme

$$\frac{\tau_{11}(x + \Delta x) - \tau_{11}(x)}{\Delta x} = \rho g . \quad (10.30)$$

Jak určitě už očekáváte, budeme uvažovat limitu $\Delta x \rightarrow 0$, čímž levá strana (10.30) přejde v derivaci:



⁶⁴ Poznámka na okraj: V (10.28) vidíme, že člen se zrychlením \vec{a} se zde vyskytuje, až na znaménko, stejně jako člen s tíhovým zrychlením \vec{g} . Proto se v některých učebnicích jako příklad objemových sil působících v kontinuu uvádějí i setrvačné síly. Ty má smysl uvažovat, pokud situaci popisujeme v neinerciálním systému. V této kapitole však předpokládáme, že vše popisujeme v inerciálním systému (v němž žádné setrvačné síly nejsou), proto jsme vycházeli z druhého Newtonova zákona (10.27).

K tomu ještě jedna poznámka pro opravdu pozorné a kritické čtenáře: Možná namítáte, že druhý Newtonův zákon platí pro hmotné body, tak jak to, že ho zde najednou používáme pro kousek kontinua? Naštěstí to jde: Když jsme se v kapitole 4 seznamovali s první impulzovou větou, odvodili jsme jako její důsledek vztah (4.20),

tedy $m \frac{d\vec{v}_s}{dt} = \vec{F}^E$. To znamená, že pro zrychlení hmotného středu soustavy hmotných bodů platí vztah

„hmotnost krát zrychlení = celkové síle působící na soustavu“. A teď je tou soustavou hmotných bodů uvažovaný kousek kontinua. (Pro ještě kritičtější čtenáře: Ano, kontinuum není z jednotlivých bodů, takže zde výsledek z kapitoly 4 zobecňujeme na spojité prostředí. Jste vy to ale „šťourové“, že do toho tak vrtáte... Což je samozřejmě v naprostém pořádku, tak to má být, jen šťourejte a vrtejte! Fyzika není o slepém přejímání někde napsaného či řečeného, je potřeba se s ní „poprat“, právě tím ji lépe poznáte. Ostatně, coby autor tohoto textu bez mučení přiznávám, že mám mezi kolegy také pověst „šťoury“. Takže vítejte v klubu. ☺)

⁶⁵ Hurá!

⁶⁶ Nebo spíš tlustý ocelový drát, aby šlo o jednolitý materiál a ne o mnoho spletených pramenů.

$$\frac{d\tau_{11}}{dx} = \rho g . \quad (10.31)$$

Fyzikální význam je jasný: směrem nahoru tahové napětí stoupá, protože lano v daném místě musí unést i část lana pod ním.

Bude užitečné zapsat výsledek (10.31) pomocí složek vektoru tíhového zrychlení $\vec{g} = (g_1, g_2, g_3)$.⁶⁷ Je $g_1 = -g$, $g_2 = 0$, $g_3 = 0$. Místo obyčejné derivace také bude vhodné psát parciální derivaci, abychom vystihli i obecnější situaci, kdy by τ_{11} mohlo záviset i na souřadnicích x_2 a x_3 .⁶⁸ Dostaneme tak $\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} = -\rho g_1$, což bývá zvykem psát jako

$$\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \rho g_1 = 0 . \quad (10.32)$$

Obecněji bychom mohli tento výsledek psát jako $\frac{\partial \tau_{1i}}{\partial x_1} + \rho g_i = 0$, $i = 1, 2, 3$.⁶⁹ To už je „skoro celá“ rovnice rovnováhy kontinua. V obecném případě ovšem působí ještě smyková napětí; obecná **rovnice rovnováhy kontinua** je pak

$$\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0, \quad i = 1, 2, 3 . \quad (10.33)$$

Názorné i trochu formálnější odvození jsou pro zájemce uvedena v Dodatku E.

Napětí obecně závisí na místě

Jak jsme už viděli v předchozím příkladu, napětí nemusí být v celém tělese stejné. To znamená, že složky tenzoru napětí obecně závisejí na místě. (Jsou funkcemi souřadnic resp. polohového vektoru.) To znamená, že abychom znali rozložení napětí v nějakém tělese, musíme znát složky tenzoru napětí v každém bodě tělesa.

Často se v této souvislosti používá název **tenzorové pole**. Napoprvé nás tento název může zarazit, ale v zásadě nejde o nic složitého.

Pomůže nám analogie s vektorovými poli, které už vlastně známe: Když například známe gravitační pole v okolí Země, víme, jak gravitační zrychlení závisí na poloze, tedy jaká je závislost $\vec{g} = \vec{g}(\vec{r})$. Vyjádřeno ve složkách, známe závislosti $g_i = g_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$. Abychom znali rozložení napětí v tělese, musíme znát závislosti $\tau_{ij} = \tau_{ij}(x_1, x_2, x_3)$, $i, j = 1, 2, 3$.⁷¹ Toť vše.⁷²

⁶⁷ Osy x_2 a x_3 v obrázku na předchozí stránce nejsou nakresleny; jsou samozřejmě vodorovně, kolmo na osu x_1 .

⁶⁸ Parciální derivaci budeme psát podle proměnné x_1 , zatím jsme u x index nepisali, což bylo vlastně trochu „nepořádné“, teď už zápis zpřesníme.

⁶⁹ Pro $i=2$ a 3 je pravá strana nulová a levá také, protože v lanu nejsou smyková napětí τ_{12} a τ_{13} .

⁷⁰ V učebnicích je často místo tíhové objemové síly $\rho \vec{g}$ v této rovnici uváděna obecná objemová síla \vec{G} .

⁷¹ Právě ty popisují **pole tenzoru napětí** v daném tělese.

⁷² Takže žádný strach před tenzorovými poli...

10.4 Jak popsat deformaci kontinua

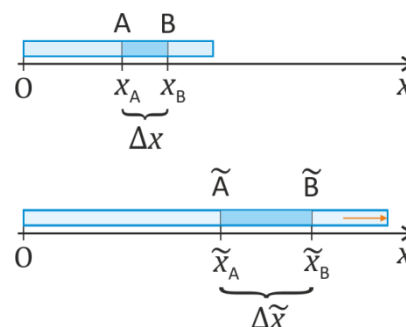
Kontinuum, tedy nějaký materiál, můžeme deformovat různě. Může jít o natažení, stlačení, smyk a kroucení (neboli torzi), viz obrázek níže. A samozřejmě o kombinaci těchto dílčích typů deformace.⁷³ Jak popsat všechny tyto deformace?



Začneme nejjednodušším případem, natažením tělesa. Může jít třeba o natahování gumového vlákna.

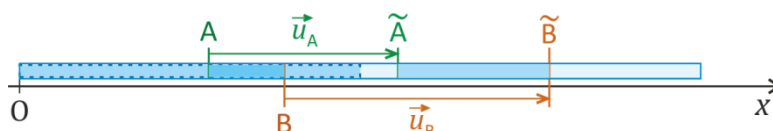
Při popisu deformace budeme vždy porovnávat deformovaný stav se stavem před deformací. Při natahování gummy si na ní třeba vyznačíme dva body, A a B. Pak budeme sledovat, kam se posunou po natažení; jejich nové polohy označíme \tilde{A} a \tilde{B} .

Gumové vlákno uvažujeme rovné (jako rovný váleček), v jeho směru budeme brát osu x .⁷⁴ Souřadnice bodů A a B budeme označovat x_A , x_B , souřadnice bodů \tilde{A} a \tilde{B} pak \tilde{x}_A a \tilde{x}_B .



Rozdíly souřadnic obou bodů $\Delta x = x_B - x_A$ (před natažením gummy) a $\Delta \tilde{x} = \tilde{x}_B - \tilde{x}_A$ (po natažení) jsou délky téhož kousku materiálu před deformací a po deformaci.

Při popisu deformace vyjdeme z posunutí bodu A a bodu B. Posunutí budeme brát jako vektor; \vec{u}_A je vektor z bodu A do bodu \tilde{A} , podobně pro vektor \vec{u}_B , viz obrázek:



Zde potřebujeme jen x -ové složky vektorů posunutí u_{xA} a u_{xB} . Ty jsou samozřejmě $u_{xA} = \tilde{x}_A - x_A$, $u_{xB} = \tilde{x}_B - x_B$. Zároveň ovšem můžeme říci, že posunutí závisí na místě, z něhož se posunujeme⁷⁵, je tedy funkcí x :

$$u_{xA} = u_x(x_A), \quad u_{xB} = u_x(x_B) .^{76} \quad (10.34)$$

Souřadnice bodů A a B po deformaci jsou tedy

$$\tilde{x}_A = x_A + u_x(x_A), \quad \tilde{x}_B = x_B + u_x(x_B) .^{77} \quad (10.35)$$

⁷³ Třeba školní houbu můžete současně natahovat a kroutit. Materiál také můžeme v jednom směru natahovat a v kolmém směru stlačovat... možnost je nepřeborně. Navíc jsme v našem výčtu neuvadli *ohyb*.

⁷⁴ Natahování gummy budeme brát jako jednorozměrný problém, co se děje ve směrech kolmých na osu x nás zatím nezajímá.

⁷⁵ Je to vidět i na obrázku, bod B se posunul více, než bod A. Na naší natahované gumě je zřejmé, proč posunutí závisí na místě: body u levého konce gummy (který držíme pevně) se posunou jen málo, body u pravého konce gummy, za který taháme, se posunou hodně.

⁷⁶ Funkci určující jak velké je posunutí bodu v závislosti na jeho poloze na (nenatažené) gumě jsme si zde označili u_x . Kdybychom si ji označili f , byl by vztah (10.34) $u_{xA} = f(x_A)$, podobně pro bod B.

⁷⁷ Podrobněji: Je $\tilde{x}_A = x_A + u_{xA}$, odtud po dosazení (10.34) dostaneme (10.35); analogicky pro bod B.

Samotné polohy bodů po deformaci ani samotná posunutí nás ale vlastně nezajímají.⁷⁸ Pro zjištění, jak moc je guma v daném úseku natažená, tedy deformovaná, je důležité, jak se změnila délka kousku mezi body A a B. Ta byla před deformací

$$\Delta x = x_B - x_A \quad (10.36)$$

a po deformaci

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x} &= \tilde{x}_B - \tilde{x}_A = x_B + u_x(x_B) - (x_A + u_x(x_A)) = x_B - x_A + u_x(x_B) - u_x(x_A) = \\ &= \Delta x + u_x(x_B) - u_x(x_A) \end{aligned} \quad . \quad ^{79} \quad (10.37)$$

Když chceme deformaci popsat lokálně, v okolí určitého bodu, zvolíme body A a B blízko sebe. Ve výsledku (10.37) pak máme rozdíl funkce u_x ve dvou blízkých bodech a můžeme ho aproximovat pomocí derivace:

$$u_x(x_B) - u_x(x_A) = u_x(x_A + \Delta x) - u_x(x_A) \doteq \frac{du_x}{dx} \Delta x \quad (10.38)$$

Po dosazení do (10.37) dostaneme

$$\Delta \tilde{x} = \Delta x + \frac{du_x}{dx} \Delta x = \left(1 + \frac{du_x}{dx} \right) \Delta x \quad . \quad ^{80} \quad (10.39)$$

Abychom stále nemuseli vypisovat symbol derivace, označíme

$$\frac{du_x}{dx} \stackrel{\text{ozn.}}{=} e_{xx} \quad , \quad ^{81} \quad (10.40)$$

takže vztah (10.39) získá podobu

$$\Delta \tilde{x} = (1 + e_{xx}) \Delta x \quad (10.41)$$

Jak uvidíme dále, deformace se obecně vystihují pomocí *druhých mocnin* délek mezi body v materiálu, tedy pomocí $(\Delta x)^2$ a $(\Delta \tilde{x})^2$. Umocněním (10.41) dostáváme

$$(\Delta \tilde{x})^2 = (1 + e_{xx})^2 (\Delta x)^2 = (1 + 2e_{xx} + e_{xx}^2) (\Delta x)^2 \quad (10.42)$$

Toto platí obecně. A pokud jde třeba o gumu, kterou můžeme natáhnout až na několiknásobek původní délky, čili jde o *velké deformace*, musíme užívat právě tento vztah. Často se ovšem setkáváme s případy, kdy prodloužení je jen velmi malé. Například při natahování oceli je relativní

⁷⁸ Proč by také měly? Jak jsme viděli, některé body se posunují málo, některé hodně. A kdybychom natahovali opravdu dlouhý gumový vlasec a zjistili jsme, že se body na konci posunuly třeba o dva metry, tak o tom, jak je velká deformace, nám to vlastně nic neřekne.

⁷⁹ Zde jsme při úpravách využili (10.35).

⁸⁰ Poznamenejme, že zde už nepíšeme přibližnou rovnost, i když v (10.38) přibližná byla. Předpokládáme totiž, že body A a B k sobě „limitně blížíme“, tedy fakticky děláme limitu $\Delta x \rightarrow 0$. Samozřejmě byste mohli namítat, že v tomto případě dá (10.39) triviální vztah $0 = 0$. Matematicky korektní by bylo psát (10.39) s užitím

diferenciálů, tedy ve tvaru $d\tilde{x} = dx + \frac{du_x}{dx} dx$, ovšem leckdo asi ještě nejste zvyklí na práci s diferenciály, a tak

raději zůstaneme u konečných „kousků“ Δx a $\Delta \tilde{x}$ s tím, že jde o „kousky“ tak malé, že nepřesnost daná aproximací v (10.38) je prakticky zanedbatelná.

⁸¹ Zatím to berte jako zkratku nebo pracovní označení. V další části kapitoly uvidíme, jak to souvisí se značením běžně používaným pro deformaci.

prodloužení maximálně zlomek procenta.⁸² To znamená, že jde o **malé deformace**. V tomto případě je člen e_{xx}^2 v (10.42) malý oproti členu $2e_{xx}$ a můžeme ho zanedbat.

Poznámka: Dané zanedbání samozřejmě musíme umět zdůvodnit.⁸³ Naštěstí to jde snadno. Z (10.41) po úpravě dostaneme $e_{xx} = (\Delta\tilde{x} - \Delta x) / \Delta x$, takže vidíme, že e_{xx} je rovno relativnímu prodloužení daného kousku materiálu. A jestliže relativní prodloužení je například 10^{-3} , pak e_{xx}^2 je rovno 10^{-6} , takže zanedbání oproti $2 \cdot 10^{-3}$ je skutečně oprávněné.

Pro **malé deformace** tedy platí

$$(\Delta\tilde{x})^2 = (1 + 2e_{xx}) (\Delta x)^2. \quad (10.43)$$

Jestliže budeme natahovat homogenní tyč (kvádrík nebo váleček, např. ocelovou strunu) z počáteční délky l_0 na délku l , bude zřejmě

$$\frac{\Delta\tilde{x}}{\Delta x} = \frac{l}{l_0}. \quad (10.44)$$

To znamená, že pro natažení celého válečku platí vztah analogický k (10.43):

$$l^2 = (1 + 2e_{xx}) l_0^2. \quad (10.45)$$

Odtud po úpravě:

$$l^2 - l_0^2 = 2e_{xx} l_0^2. \quad (10.46)$$

Levou stranu (10.46) můžeme upravit (když navíc označíme protažení jako $l - l_0 = \Delta l$ a uvážíme, že jde o malou deformaci):

$$l^2 - l_0^2 = (l + l_0)(l - l_0) = (2l_0 + \Delta l)\Delta l = 2l_0(1 + \Delta l / (2l_0))\Delta l \doteq 2l_0 \Delta l \quad (10.47)$$

a z (10.46) po vydělení $2l_0^2$ dostaneme

$$\frac{\Delta l}{l_0} = e_{xx}. \quad (10.48)$$

Odtud je zřejmý význam veličiny e_{xx} , je to **relativní prodloužení** ve směru osy x .⁸⁵

Tak, a teď to celé zobecnit, abychom uměli popsat i jiné deformace, než jen natažení...

⁸² Když natahujete ocelovou strunu na kytaru, tak od chvíle, kdy je prakticky rovná, rozhodně na ladící kolík nenavínete desítky centimetrů struny. Maximální prodloužení můžete spočítat z Hookova zákona, Youngova modulu pružnosti a meze pružnosti oceli. (K těmto veličinám se ještě dostaneme.) Vyjde vám relativní prodloužení asi dvě desetiny procenta, při vyšším by už deformace nebyla pružná. Pokud bychom strunu napínali ještě více, samozřejmě nakonec překročíme mez pevnosti a struna se přetrhne.

⁸³ Přece se nespokojíme s tím, že v předchozím odstavci je sugestivně napsáno „člen ... je malý oproti členu ... a můžeme ho zanedbat“. Musíme se zeptat „A proč je malý?“, „Odkud to víme?“, „Odkud to plyne?“. Případně (protože jsme ve studijním programu Fyzika se zaměřením na vzdělávání): „Jak bychom to někomu vysvětlili?“

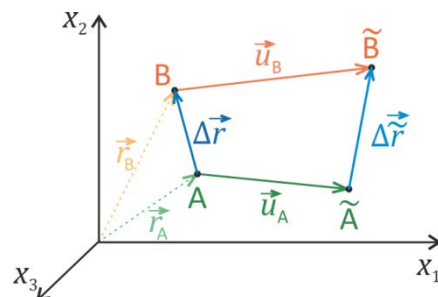
⁸⁴ Formálně bychom to mohli ukázat třeba tak, že bychom myšlenkově rozdělili váleček na n částí délky Δx . Bylo by tedy $\Delta x = l_0 / n$. Po natažení pak $\Delta\tilde{x} = l / n$, protože všechny části válečku se natahují stejně.

⁸⁵ Fakticky už jsme to výše mohli vidět ze vztahu (10.41). Teď jsme si ale předvedli, jak se to dá odvodit ze vztahů pro veličiny $(\Delta x)^2$ a $(\Delta\tilde{x})^2$, které se používají při popisu obecnějších deformací; viz dále.

10.5 Tenzor deformace

Uvažujme teď obecný případ deformace. Postup při jejím popisu bude v zásadě stejný, jako jsme to výše dělali při natahování tyče, jen teď místo jedné souřadnice x budou všude vektory resp. jejich souřadnice.

Body A a B jsou dva libovolné blízké body v kontinuu před deformací. Jejich polohové vektory jsou \vec{r}_A a \vec{r}_B . (V obrázku jsou kresleny jen slabě, aby se nestal nepřehledným.) Vektor spojující oba body před deformací je $\Delta\vec{r}$. Za chvíli ho budeme potřebovat i ve složkách, je $\Delta\vec{r} = (\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$.



Při deformaci se body posunou do nových poloh \tilde{A} a \tilde{B} , vektory posunutí jsou \vec{u}_A , \vec{u}_B . Posunutí je opět funkcí polohy původního bodu, takže $\vec{u}_A = \vec{u}(\vec{r}_A)$, $\vec{u}_B = \vec{u}(\vec{r}_B)$.

Vektor spojující body po deformaci je $\vec{\Delta\tilde{r}}$. Jak je vidět už z obrázku, platí

$$\vec{\Delta\tilde{r}} = \Delta\vec{r} + \vec{u}_B - \vec{u}_A = \Delta\vec{r} + \vec{u}(\vec{r}_B) - \vec{u}(\vec{r}_A). \quad (10.49)$$

Opět zde máme rozdíl funkčních hodnot ve dvou blízkých bodech. Vyjádříme jej opět s pomocí derivací. Protože ale teď máme tři souřadnice x_1, x_2, x_3 , budou ve výsledku parciální derivace podle všech souřadnic:

$$\vec{u}(\vec{r}_B) - \vec{u}(\vec{r}_A) = \vec{u}(\vec{r}_A + \Delta\vec{r}) - \vec{u}(\vec{r}_A) = \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_2} \Delta x_2 + \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_3} \Delta x_3 = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \Delta x_j. \quad (10.50)$$

Dosazení do (10.49) dá $\vec{\Delta\tilde{r}} = \Delta\vec{r} + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \vec{u}}{\partial x_j} \Delta x_j$. Pro i -tou složku odtud dostaneme

$$\Delta \tilde{x}_i = \Delta x_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j, \quad (10.51)$$

což ještě můžeme přepsat s využitím Kroneckerova delta na tvar

$$\Delta \tilde{x}_i = \sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j. \quad (10.52)$$

Takže známe složky vektoru $\vec{\Delta\tilde{r}}$.⁸⁶ Pro popis deformace se užívá druhá mocnina jeho velikosti, tedy $|\vec{\Delta\tilde{r}}|^2$, tedy druhá mocnina vzdálenosti bodů \tilde{A} a \tilde{B} , tedy bodů po deformaci. Vyjádřeno pomocí souřadnic, je

$$|\vec{\Delta\tilde{r}}|^2 = \sum_{i=1}^3 \Delta \tilde{x}_i \Delta \tilde{x}_i. \quad (10.53)$$

⁸⁶ Pokud jste se v matematice ještě nesetkali s aproximací přírůstku funkce více proměnných pomocí parciálních derivací, vezměte prostě (10.50) jako přirozené zobecnění vztahu (10.38) z jedné proměnné na tři proměnné. (Mírně nevázně někdy říkám, že členy pro x_2 a x_3 musejí být analogické členu pro první proměnnou, „aby to těm dalším proměnným nebylo líto“. A člen pro první proměnnou vypadá stejně, jako v případě funkce jedné proměnné, jen ta derivace je tam parciální.)

⁸⁷ Je totiž $\sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \Delta x_j = \Delta x_i$, protože δ_{ij} ponechá ze sumy jen člen, kde $j=i$.

⁸⁸ Připomeňme, že to je vektor spojující dané blízké body A a B po deformaci.

Po dosažení (10.52) do (10.53) si pak užijeme řadu matematických úprav:⁸⁹

$$\begin{aligned}
 |\Delta \vec{r}|^2 &= \sum_{i=1}^3 \Delta \tilde{x}_i \Delta \tilde{x}_i = \\
 &= \sum_{i=1}^3 \left[\left(\sum_{j=1}^3 \left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \Delta x_j \right) \left(\sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \Delta x_k \right) \right] = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{i=1}^3 \left[\left(\delta_{ij} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \right] \Delta x_j \Delta x_k = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\underbrace{\sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \delta_{ik}}_{\delta_{jk}} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}}_{\frac{\partial u_j}{\partial x_k}} + \underbrace{\sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \delta_{ik}}_{\frac{\partial u_k}{\partial x_j}} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \Delta x_j \Delta x_k = \\
 &= \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\delta_{jk} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \Delta x_j \Delta x_k = \\
 &= \underbrace{\sum_{j=1}^3 \Delta x_j \Delta x_j}_{|\Delta \vec{r}|^2} + \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right] \Delta x_j \Delta x_k
 \end{aligned} \tag{10.54}$$

V dalším se omezíme na **malé deformace**. Pro ně, podobně jako jsme to poznali výše v případě natahování tyče, jsou derivace posunutí *malé*, tedy $\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| \ll 1$ (pro všechny kombinace j a k) a člen ve výsledku (10.54) obsahující jejich součiny (je vyznačen barevně) bude ještě mnohem menší⁹⁰, takže ho budeme moci zanedbat. Z (10.54) pak dostáváme

$$|\Delta \vec{r}|^2 - |\Delta \vec{r}|^2 = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \left[\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right] \Delta x_j \Delta x_k \tag{10.55}$$

Ted' už jsme s úpravami prakticky hotovi, zbývá výsledek interpretovat.

⁸⁹ Nebojte se jich, i když možná na první pohled vypadá tahle „houština vzorců“ trochu hrůzostrašně. Ale fakticky jde jen o roznásobování, využití toho, že sumy můžeme napsat v libovolném pořadí (protože se stejně nakonec sčítá přes všechny kombinace indexů) a využití už známého obratu typu $\sum_{i=1}^3 \delta_{ji} a_i = a_j$. A navíc na začátku musíme za $\Delta \tilde{x}_i$ dosadit (10.52) dvakrát, jednou přitom změníme sčítací index z na k , tedy dosazujeme

$\Delta \tilde{x}_i = \sum_{k=1}^3 \left(\delta_{ik} + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} \right) \Delta x_k$, abychom nenásobili dvě sumy se stejnými sčítacími indexy, to by byl zmatek.

⁹⁰ Formálně bychom zanedbání mohli zdůvodnit tak, že když $\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \right| \lesssim \varepsilon \ll 1$, $\left| \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right| \lesssim \varepsilon \ll 1$, pak $\left| \frac{\partial u_j}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right| \lesssim \varepsilon^2$ a zanedbáváme člen řádu ε^2 oproti členům řádu ε .

Pro člen v hranaté závorce v (10.55) (resp. jeho polovinu) si pro další úvahy zavedeme zvláštní označení:

$$e_{jk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j} \right). \quad (10.56)$$

Jde vlastně o novou veličinu, přesněji řečeno o složky nové veličiny. Mají dva indexy, takže to naznačuje, že by mohlo jít o složky tenzoru.

A opravdu je tomu tak: e_{jk} dané (10.56) jsou složky **tenzoru malých deformací**.^{91 92} Jde o tenzor druhého řádu,

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}, \quad (10.57)$$

a z (10.56) ihned vidíme, že je **symetrický**, tedy že $e_{kj} = e_{jk}$ (pro všechna j a k).

Vztah (10.55) má pak při zápisu se složkami daného tenzoru tvar

$$|\Delta \vec{r}|^2 - |\Delta \vec{r}|^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2e_{ij} \Delta x_i \Delta x_j. \quad (10.58)$$

Dobře, mohli byste říci, zavedli jsme další tenzor. Definice (10.56) ale vypadá dost formálně. Co si pod ní vlastně máme představit? Pojdme se proto podívat, jak složky tenzoru deformace interpretovat.

Význam složek tenzoru deformace

Diagonální složky tenzoru malých deformací

Význam diagonálních složek zjistíme jednoduše, postupem, který jsme už poznali výše v části 10.3 věnované natahování tyče.

Vektor $\Delta \vec{r}$ zvolíme ve směru osy x_1 ; bude tedy $\Delta x_1 = \Delta x$, $\Delta x_2 = 0$, $\Delta x_3 = 0$. Na pravé straně (10.58)

tedy zbyde ze sum jen jediný člen: $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 2e_{ij} \Delta x_i \Delta x_j = 2e_{11} \Delta x_1 \Delta x_1 = 2e_{11} (\Delta x)^2$. Na levé straně je

$|\Delta \vec{r}|^2 = (\Delta x)^2$ a analogicky po deformaci $|\Delta \vec{r}|^2 = (\Delta \tilde{x})^2$. Vztah (10.58) tedy dá

$$(\Delta \tilde{x})^2 - (\Delta x)^2 = 2e_{11} (\Delta x)^2. \quad (10.59)$$

A to už je vlastně vztah (10.43), z něhož jsme výše odvodili, že e_{11} je relativní prodloužení ve směru osy x_1 .⁹⁴ Podobně je tomu u os x_2 a x_3 .

⁹¹ Poznámka: Uvědomte si, že na tom, jakými písmeny označujeme indexy, nijak nezáleží; vztahy (10.56) jsme mohli psát jako $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$. Tak nebuďte překvapeni, až se písmena v indexech změni.

⁹² Pro velké deformace se analogicky zavádí **tenzor velkých deformací**, v němž se člen obsahující součiny $\frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_k}$ nezanedbává.

⁹³ Vidíte, tady jsme od indexů j , k přešli k indexům i , j . To bychom si zvykali... ☺

⁹⁴ Ve vztahu (10.43) jsme ho ovšem značili e_{xx} a osa byla prostě osa x .

Takže můžeme uzavřít konstatováním:

Diagonální složky e_{ii} tenzoru deformace jsou relativní prodloužení ve směru příslušných os.⁹⁵

Ještě bychom to měli trochu upřesnit: o prodloužení jde, když $e_{ii} > 0$; pokud je $e_{ii} < 0$, jde o relativní zkrácení.⁹⁶

Skutečnost, že např. e_{11} je relativním prodloužením ve směru osy x_1 , odvodíme pro jistotu ještě jiným způsobem. Pozorný čtenář by totiž mohl namítnout, že když jsme výše napsali, že $|\Delta\vec{r}|^2 = (\Delta\tilde{x})^2$, nemusí to platit přesně.⁹⁷ Proto zde nabízíme alternativní odvození:

Ze vztahu (10.51) pro $i = 1$ a $\Delta x_2 = 0, \Delta x_3 = 0$ plyne

$$\Delta\tilde{x}_1 = \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1. \quad (10.60)$$

Po jednoduché úpravě odtud dostaneme

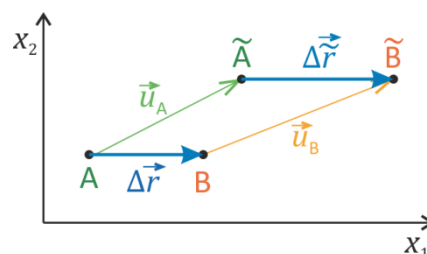
$$\frac{\Delta\tilde{x}_1 - \Delta x_1}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (10.61)$$

Levá strana (10.61) je relativní prodloužení ve směru osy x_1 . A pravá strana je rovna e_{11} , protože z definice složek tenzoru deformace (10.56) je

$$e_{11} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial x_1}. \quad (10.62)$$

Takže jsme se ujistili, že e_{11} je relativním prodloužením ve směru osy x_1 .

Poznamenejme, že toto platí při obecné (malé) deformaci, posunutí materiálu nemusí být ve směru osy x_1 , jak jsme ho uvažovali výše, když jsme se s deformacemi začali seznamovat v předchozí části této kapitoly. Deformace může být opravdu obecná a posunutí \vec{u} může mířit libovolným směrem, třeba tak, jak to ukazuje obrázek vpravo.⁹⁸



⁹⁵ Zdůrazněme, že toto platí pro tenzor malých deformací. (Poznámka pro zájemce: Pro velké deformace by se analogické tvrzení muselo formulovat poněkud „opatrněji“ a přesněji, viz následující diskusi a poznámku k alternativnímu odvození významu e_{11} .)

⁹⁶ Čili když $e_{ii} = -0,01$, je materiál ve směru osy x_i zkrácen na 99 % původní délky.

Upozornění pro čtenáře, kteří znají a používají Einsteinovu sumační konvenci (zmínili jsme ji v poznámce v kap. 1), podle níž se sčítá přes indexy, které se ve výrazu opakují: Zde, když píšeme např. $e_{ii} > 0$, tak **nesčítáme** přes i , máme tedy na mysli např. $e_{11} > 0$ nebo $e_{22} > 0$, nikoli součet $e_{11} + e_{22} + e_{33}$.

⁹⁷ A dlužno říci, že pozorný čtenář má pravdu. I když vektor $\Delta\vec{r}$ před deformací měl směr osy x_1 , vektor $\Delta\vec{r}$ po deformaci už může být trochu natočený. Uvidíme to za chvíli, až budeme popisovat smykovou deformaci.

V učebnicích se proto setkáváme s opatrnou formulací typu, že e_{11} je relativní změna délky elementu, který by původně rovnoběžný s osou x_1 . Pro malé deformace však opravdu (až na členy druhého řádu, které zanedbáváme) jde o relativní prodloužení ve směru x_1 .

⁹⁸ Na obrázku je ovšem protažení ve směru osy x_1 pro názornost dost přehněná, činí asi 33 %, to už by nebyla malá deformace...

Nediagonální složky tenzoru malých deformací

Diagonálním složkám už rozumíme, zbývá zjistit význam nediagonálních, tj. e_{ij} , $i \neq j$. Prozkoumejme konkrétně význam složky e_{12} .⁹⁹ Z (10.56) víme, že

$$e_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \right). \quad (10.63)$$

Potřebujeme tedy zjistit, jakou deformaci popisují parciální derivace $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ a $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$.

Ze vztahu (10.51) pro složky vektoru $\vec{\Delta r}$ po posunutí,

$$\Delta \tilde{x}_i = \Delta x_i + \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \Delta x_j, \quad (10.64)$$

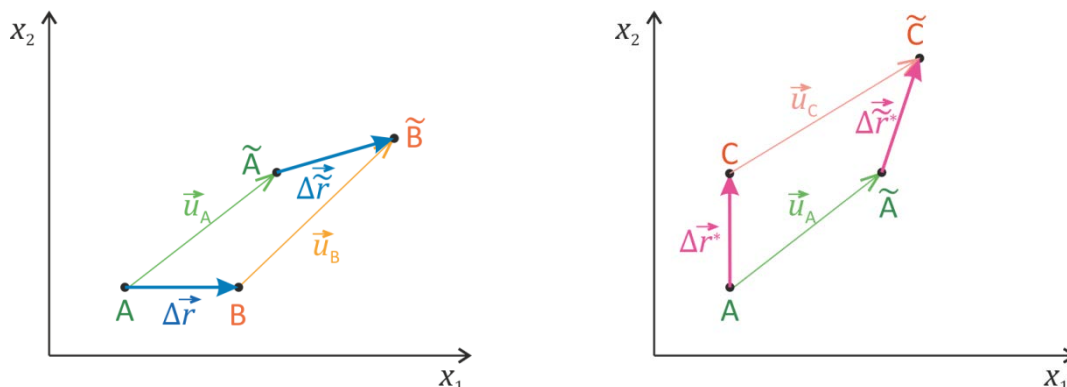
vidíme, že derivaci $\frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ zde dostaneme, když budeme počítat složku $\Delta \tilde{x}_2$ (tedy složku vektoru $\vec{\Delta r}$ do směru osy x_2) a přitom bude $\Delta x_1 \neq 0$, $\Delta x_2 = 0$, $\Delta x_3 = 0$ (tedy $\vec{\Delta r} = (\Delta x_1, 0, 0)$). Pak totiž (10.64) dá

$$\Delta \tilde{x}_2 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1, \quad (10.65)$$

Příslušné vektory ukazuje levý z následujících obrázků. Význam derivace $\frac{\partial u_1}{\partial x_2}$ podobně uvidíme ze složky $\Delta \tilde{x}_1$, když $\Delta x_1 = 0$, $\Delta x_2 \neq 0$, $\Delta x_3 = 0$. Pak totiž z (10.64) je

$$\Delta \tilde{x}_1 = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2. \quad (10.66)$$

Tuto situaci ukazuje pravý obrázek.¹⁰¹



⁹⁹ A tedy také e_{21} , díky symetrii tenzoru deformace je $e_{21} = e_{12}$.

¹⁰⁰ Kdybyste to někomu vysvětlovali, tak možná pro začátek rozepište podrobněji:

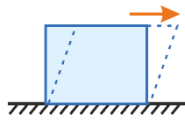
$$\Delta \tilde{x}_2 = \underbrace{\Delta x_2}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1 + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \underbrace{\Delta x_2}_0 + \frac{\partial u_2}{\partial x_3} \underbrace{\Delta x_3}_0 = \frac{\partial u_2}{\partial x_1} \Delta x_1.$$

¹⁰¹ Na něm jsou ovšem vektory mezi dvěma blízkými body značeny $\vec{\Delta r}^*$ (před deformací) a $\vec{\Delta r}^{\tilde{*}}$ (po deformaci). Je to proto, že oba obrázky budeme spojovat, tak abychom v nich různé vektory neměli označeny stejně.

(Hvězdička slouží jen k rozlišení vektorů, nemá zde žádný speciální matematický význam.) Vztah (10.66) bychom tedy, „aby ladil s obrázkem“, mohli psát ve tvaru $\Delta \tilde{x}_1^* = \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \Delta x_2^*$.

Zatím jsme uvažovali zvlášť posun a natočení dvojice bodů A, B a dvojice A, C. Význam deformace, o níž tady jde, bude jasnější, když do jednoho obrázku zakreslíme obě dvojice bodů, jak to ukazuje obrázek vpravo.¹⁰²

Vidíme, že vektory $\Delta\vec{r}$ a $\Delta\vec{r}^*$, které byly před deformací kolmé, už po deformaci (kdy je značíme s vlnkami) obecně kolmé nejsou.



Právě tohle nastává při smykové deformaci, jak nám ji připomíná obrázek vlevo. Vidíme

tedy, že složka e_{12} tenzoru malých deformací popisuje **smykovou deformaci** v rovině $x_1 x_2$. Podobně tomu je i pro ostatní nediagonální složky tohoto tenzoru.

Tuto úvahu můžeme dotáhnout i kvantitativně. Obrázek vpravo ukazuje složky vektorů $\Delta\vec{r}$ a $\Delta\vec{r}^*$ ¹⁰³ a úhly, o které jsou natočeny oproti původním směrům.¹⁰⁴ Z obrázku je vidět, že

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta\tilde{x}_2}{\Delta\tilde{x}_1}, \quad \operatorname{tg} \beta = \frac{\Delta\tilde{x}_1^*}{\Delta\tilde{x}_2^*}. \quad (10.67)$$

Ve jmenovateli obou zlomků ale můžeme psát původní délky vektorů, tedy Δx_1 a Δx_2^* .¹⁰⁵ Je tedy: $\operatorname{tg} \alpha \doteq \frac{\Delta\tilde{x}_2}{\Delta x_1}$, $\operatorname{tg} \beta \doteq \frac{\Delta\tilde{x}_1^*}{\Delta x_2^*}$.

Z (10.65) a (10.66) ovšem vidíme, že $\frac{\Delta\tilde{x}_2}{\Delta x_1} = \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$ a $\frac{\Delta\tilde{x}_1^*}{\Delta x_2^*} = \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$.¹⁰⁶ Po dosazení vidíme, že $\operatorname{tg} \alpha \doteq \frac{\partial u_2}{\partial x_1}$

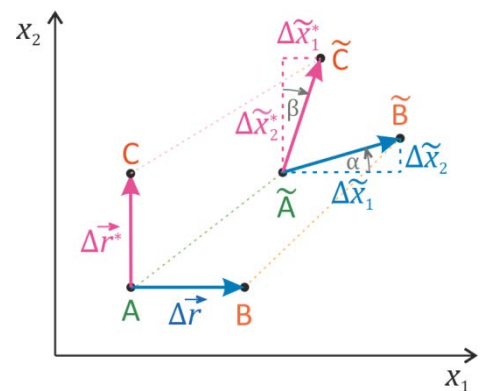
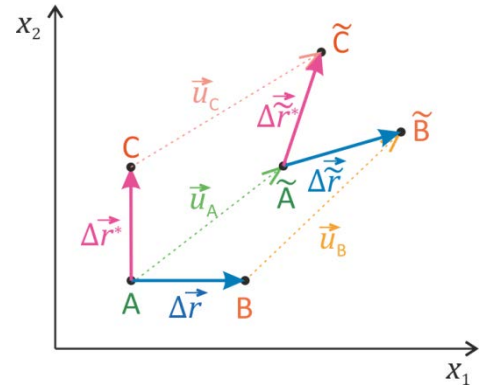
a $\operatorname{tg} \beta \doteq \frac{\partial u_1}{\partial x_2}$. Navíc pro malé deformace je $|\alpha| \ll 1$, $|\beta| \ll 1$ a pro malé úhly je $\operatorname{tg} \alpha \doteq \alpha$, $\operatorname{tg} \beta \doteq \beta$.

Celkem tedy

$$\alpha + \beta \doteq \frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1}. \quad (10.68)$$

Z obrázku je zřejmé, že $\alpha + \beta$ je úhel, o který se změní původně pravý úhel obou vektorů. Nazývá se

zkosení. Z (10.63) přitom vidíme, že $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x_1} = 2e_{12}$, po dosazení (10.68) tedy $\alpha + \beta = 2e_{12}$.¹⁰⁷



¹⁰² Poznamenejme, že daný obrázek i oba obrázky předcházející odpovídají situaci, kdy $\frac{\partial u_2}{\partial x_1} > 0$ a $\frac{\partial u_1}{\partial x_2} > 0$.

Zkuste si sami nakreslit, jak by situace vypadala, kdyby některá z derivací byla záporná (nebo byly záporné obě).

¹⁰³ Tedy vektorů po deformaci.

¹⁰⁴ Tedy směrům os x_1 a x_2 . Poznamenejme, že velikosti úhlů jsou v obrázku pro názornost voleny značně velké, v nakresleném případě by rozhodně už nešlo o malou deformaci.

¹⁰⁵ Chyba, která touto záměnou vznikne, bude velmi malá. Je totiž (viz (10.60)) $\Delta\tilde{x}_1 = \Delta x_1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \Delta x_1 = \left(1 + \frac{\partial u_1}{\partial x_1}\right) \Delta x_1$ a jak jsme výše ukázali, pro malé deformace je velikost derivace $\partial u_1 / \partial x_1$ malá (řádu promile nebo menší).

¹⁰⁶ V (10.66) jsme u označení složek vektoru neměli hvězdičky, protože šlo o obecný vztah, teď ho aplikujeme na složky vektorů $\Delta\vec{r}^*$ a $\Delta\vec{r}^*$, proto zde hvězdičky píšeme. (Nejde tedy o žádný „podfuk“.)

¹⁰⁷ Zde už přestáváme psát „rovná se přibližně“ a píšeme prostě rovnítko. (Drobné odchylky tedy zanedbáváme.)

Ted' už vidíme význam nediagonální složky i kvantitativně:

$$e_{12} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) . \quad (10.69)$$

Čili:¹⁰⁸

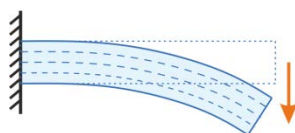
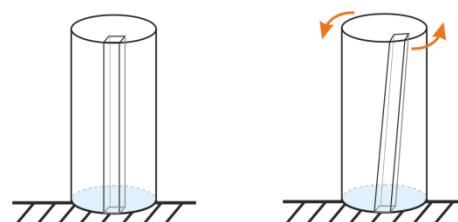
nediagonální složky tenzoru malých deformací jsou rovny polovině úhlu zkosení příslušných os.

Poznamenejme, že úhel zkosení se často označuje jako γ . (Tj. bere se $\alpha + \beta = \gamma$.)

Další druhy deformací

Zjistili jsme, že složky tenzoru malých deformací vystihují prodloužení (resp. zkrácení) a smykovou deformaci. Co ale ostatní typy deformací – torze a ohyb? Znamená to, že je tenzorem deformace nepostihneme? A že by byl potřeba nějaký další tenzor? Naštěstí ne. I další druhy deformací lze popsat pomocí prodloužení (resp. zkrácení) a smyku.

Například **torze**, tedy zkroucení: Vezměme si třeba příklad válečku, jehož horní podstavu budeme pootáčet, přičemž spodní strana je fixovaná. Když si v materiálu představíme úzký hranolek ze spodní k horní podstavě (viz obrázek), vidíme, že při pootočení horní podstavu se hranolek „zešikmí“, jeho deformace je tedy deformace *smyková*. Chování válečku (ale i jiných těles) při zkroucení lze tedy popsat pomocí smykové deformace.¹⁰⁹



Pokud jde o **ohyb**, uvažujme například nějaký nosník, třeba ve tvaru hranolu, vetknutý do pevné zdi. (Obrázek vlevo ukazuje situaci v řezu.) Když ho na konci zatížíme, horní strana hranolu se prodlouží, spodní zase zkrátí. Analogicky se prodlouží, resp. zkrátí části materiálu uvnitř hranolu.¹¹⁰

Deformace při ohybu je tedy hlavně prodloužení a zkrácení; vzorce pro výpočet ohybu vycházejí právě z tohoto pohledu.

Na příkladech vidíme, že deformaci lze lokálně popsat vždy prodloužením resp. zkrácením a smykem. K popisu deformace v daném bodě a jeho okolí proto vždy dostačuje tenzor deformace.¹¹¹

Další poznámky k tenzoru deformace

Dodejme už jen dvě drobné poznámky, spíše pro zájemce.

1) Deformace materiálu v různých částech může být samozřejmě různá, takže složky tenzoru deformací jsou funkcí místa.¹¹²

¹⁰⁸ To, co jsme zjistili pro e_{12} můžeme samozřejmě zobecnit i na ostatní nediagonální složky.

¹⁰⁹ K tomuto příkladu se ještě vrátíme v další části kapitoly.

¹¹⁰ Říká se, že se prodlouží ev. zkrátí jednotlivá *vlákn*a uvnitř hranolu; samozřejmě je zde jedno střední vlákno, které délku nezmění.

¹¹¹ A jsou-li deformace malé, stačí tenzor malých deformací.

¹¹² Mluví se pak o *poli tenzoru deformace*.

2) Protože je tenzor deformace symetrický, lze (podobně jako tomu bylo u tenzoru napětí) najít tři hlavní směry, v nichž jde čistě o prodloužení nebo zkrácení. V soustavě souřadnic dané těmito směry jsou pak nediagonální složky tenzoru deformace rovny nule.

Ale ještě na jednu důležitou věc nesmíme zapomenout:

Pomocí mechaniky kontinua popisujeme také materiály, které tečou. V tom případě se složky tenzoru deformace, jak jsme ho zavedli výše, mění s časem. A k popisu chování například tekutin by nám samotný tenzor deformace moc nepomohl. U tekutin je totiž podstatné, *jak rychle* se deformují. Potřebujeme tedy zavést ještě jednu veličinu:

Tenzor rychlosti deformace

Formálně lze tenzor rychlosti deformace zavést velmi jednoduše, prostě jako časovou derivaci tenzoru deformace. Ve složkách tedy:

$$D_{ij} = \frac{\partial e_{ij}}{\partial t} \quad (10.70)$$

Po dosazení vztahu (10.56) pro e_{ij} odtud dostaneme¹¹³

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\frac{\partial u_i}{\partial t}}_{v_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} \underbrace{\frac{\partial u_j}{\partial t}}_{v_j} \right), \quad (10.71)$$

kde v_i a v_j jsou složky rychlosti daného kontinua¹¹⁴.

Výsledný vztah pro **složky rychlosti tenzoru deformace** je tedy

$$D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right). \quad (10.72)$$

S tenzorem rychlosti deformace se setkáme v příští kapitole v části věnované proudění tekutin.

Veličiny popisující napětí a deformaci už máme, můžeme se tedy podívat, jaký je jejich vztah.

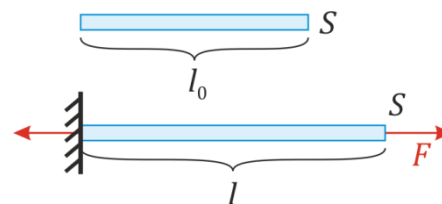
¹¹³ Při úpravě využijeme záměnnosti druhých parciálních derivací.

¹¹⁴ Tedy tekutiny, třeba tekoucí vody, oleje nebo medu.

10.6 Vztah napětí a deformace, pružnost

Natahujeme-li tyč (ocelovou strunu apod.), víme, že pro její protažení z původní délky l_0 na délku l platí **Hookův zákon**:

$$\frac{l-l_0}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}, \quad (10.73)$$



kde F je síla, kterou tyč natahujeme, S její příčný průřez a E **Youngův modul pružnosti**.¹¹⁵

Poměr $\frac{l-l_0}{l_0}$ je *relativní prodloužení* tyče.¹¹⁶ Jak víme, relativní prodloužení je popsáno složkou e_{11}

tenzoru deformace.¹¹⁷ Poměr síly a průřezu tyče je napětí v tahu, to je popsáno složkou τ_{11} tenzoru napětí.¹¹⁸ Hookův zákon (10.73) tedy můžeme psát ve tvaru

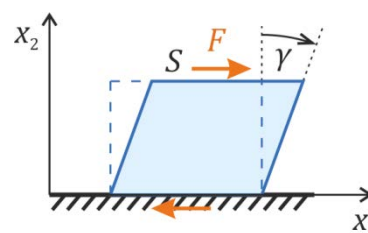
$$e_{11} = \frac{1}{E} \tau_{11}. \quad (10.74)$$

Častěji se ovšem s užitím složek uvedených tenzorů zapisuje ve tvaru, kdy se napětí určuje z deformace:

$$\tau_{11} = E e_{11}. \quad (10.75)$$

Analogický vztah mezi napětím a deformací platí pro **smyk**. Jestliže například na horní stěnu hranolu působí tečně síla F a plocha stěny je S , je smykové napětí F/S . Zkosení¹¹⁹ (úhel mezi původním směrem svíslé stěny hranolu a směrem stěny po deformaci) označíme γ , viz obrázek. Zkosení je přímo úměrné smykovému napětí:

$$\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}, \quad (10.76)$$



kde G je **modul pružnosti ve smyku**. Víme, že zkosení se vyjadřuje nediagonálními složkami tenzoru deformace, v našem případě složkou e_{12} , přičemž platí (viz (10.69)) $e_{12} = \frac{1}{2}(\alpha + \beta) = \frac{1}{2}\gamma$.¹²¹ Tečné napětí je složkou τ_{12} tenzoru napětí. Vztah (10.76) lze tedy zapsat jako $2e_{12} = (1/G)\tau_{12}$, respektive

$$\tau_{12} = 2G e_{12}. \quad (10.77)$$

¹¹⁵ Též nazývaný **modul pružnosti v tahu**.

¹¹⁶ Často se také zapisuje jako $\frac{\Delta l}{l_0}$, kde $\Delta l = l - l_0$.

¹¹⁷ Je jí rovno, tedy $e_{11} = \frac{l-l_0}{l_0}$. Osu x_1 přitom orientujeme podél délky tyče.

¹¹⁸ Také je jí rovno, $\tau_{11} = F/S$.

¹¹⁹ Lze se setkat také s názvy *relativní zkosení*, *poměrné zkosení* nebo *zkos*, vždy jde o stejnou veličinu.

¹²⁰ Někdy se pro tento vztah používá název **Hookův zákon pro smyk**.

¹²¹ Uvědomte si, že součet úhlů $\alpha + \beta$, které jsme v části 10.5 této kapitoly používali při interpretaci složky e_{12} tenzoru deformace, je opravdu zkosení γ , které je na obrázku na této stránce.

Sluší se připomenout, že přímá úměrnost mezi napětím a deformací vyjádřená vztahy (10.74) až (10.77) má své meze. Například při natahování gumy je při větším protažení závislost mezi napětím a prodloužením nelineární.¹²² U jiných materiálů při překročení *meze pružnosti* začne být deformace *plastická*. Například měděný drát se při větším zatížení začne protahovat tak, že i když zatížení odstraníme, zůstane protažený. Těchto jevů si stručně všimneme v další části kapitoly – zatím budeme předpokládat, že materiál je ideálně pružný a napětí a deformace jsou si přímo úměrné.

Jednoduché vztahy mezi napětím a deformací – když šlo o čistý tah nebo čistý smyk - už jsme si připomněli. Pojdme se podívat, jak je tomu v obecném případě.

Zobecněný Hookův zákon

Deformace je charakterizována tenzorem deformace¹²³ e_{ij} , napětí tenzorem napětí τ_{ij} . Nejobecněji lze jejich přímou úměrnost (což je podstata Hookova zákona) vyjádřit takto:

$$\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl} \quad (10.78)$$

Veličina C_{ijkl} je tenzor¹²⁵, a to tenzor čtvrtého řádu (protože má čtyři indexy).¹²⁶ Složky C_{ijkl} se nazývají *elastické koeficienty*. Do dvourozměrné tabulky už je nezapišeme.¹²⁷ Také je těch složek dost, celkem 81.¹²⁸ Ne všechny jsou ovšem nezávislé. Když se započítají všechny symetrie (dané i symetriemi tenzorů napětí a deformace), je nezávislých složek dvacet jedna.¹²⁹

Tenzor C_{ijkl} vystihuje mechanické vlastnosti látky, co se pružnosti týče. 21 nezávislých složek ovšem má jen v případě obecně anizotropní látky.¹³⁰ Pro látky, které mají nějakou vnitřní symetrii, je počet nezávislých složek nižší.

My si dále všimneme nejjednoduššího případu, a to **látek izotropních**.¹³¹

¹²² Hezký námět, jak příslušný pokus využít ve výuce fyziky, je v příspěvku Z. Drozda „Fyzika materiálů ... a co s ní na gymnáziu?“ dostupném na http://vnuf.cz/sbornik_old/rozsirene/Drozd/deformace.html.

¹²³ Stále pracujeme s tenzorem malých deformací.

¹²⁴ Tohle už se opravdu pohodlněji píše s využitím Einsteinova sumačního pravidla jako $\tau_{ij} = C_{ijkl} e_{kl}$.

(Připomeňme, že s využitím daného pravidla je jasné, že se sčítá přes indexy k a l , protože se ve výrazu opakují.)

¹²⁵ Přesněji řečeno, C_{ijkl} jsou složky tenzoru.

¹²⁶ Nádhera! No nemáte radost, že jsme se potkali s dalším tenzorem, dokonce čtvrtého řádu? ☺

¹²⁷ To šlo v případě tenzorů druhého řádu. Pro každý index je ovšem v tabulce potřeba samostatný rozměr, takže bychom potřebovali čtyřrozměrnou tabulku. To nejde udělat moc názorně – byť třeba deklarovat v počítačovém programu čtyřrozměrné pole není žádný problém. Ale názornou excelovskou tabulku z toho neuděláte...

¹²⁸ Každý index může mít tři hodnoty, takže složek je $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$. (U dvourozměrné tabulky je složek $3 \times 3 = 9$, tam je to vidět hned, pro čtyřrozměrnou tabulku je to analogické.)

¹²⁹ To zde dokazovat nebudeme; zájemci důkaz najdou např. v učebnici Brdička M., Samek L., Sopko B.: *Mechanika kontinua*, Academia, Praha, 2000. (V této skoro osmisetstránkové knize ostatně zájemci najdou nejspíš vše „co chtěli vědět o mechanice kontinua, ale báli se zeptat“... ☺)

¹³⁰ Já bych si v této souvislosti vzpomněl na školní znalosti z přírodopisu, když nás učili o trojklonné (= triklinické) krystalové soustavě. Ta je nejméně symetrická. Zjevně v ní směry napětí a deformací mohou být obecně různé; právě to je vystiženo vztahem (10.78).

¹³¹ To jsou například amorfní látky, ale na makroskopické úrovni také třeba kovy. (Ty jsou polykrystalické, čili skládají se z mnoha mikroskopických různě orientovaných krystalků; jinak by tomu samozřejmě bylo v případě makroskopických krystalů kovů.)

Naivně bychom možná předpokládali, že pro izotropní látky bude každá složka τ_{ij} úměrná příslušné složce e_{ij} a že koeficient úměrnosti bude pro všechny složky stejný. Pak by pružnost izotropního materiálu charakterizovala jediná konstanta. Tak to ovšem není.¹³² Jedna konstanta nestačí, jsou potřeba dvě.

Ukázalo se, že **zobecněný Hookův zákon pro izotropní látky** má tvar¹³³

$$\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{ij}. \quad (10.79)$$

Koeficienty λ a μ se nazývají **Laméovy koeficienty**.

No počkat, řeknete si teď možná. Výše jsme pružnost materiálu charakterizovali Youngovým modulem pružnosti E a modulem pružnosti ve smyku G . Najednou tu máme dva další koeficienty. To už by byly dohromady čtyři koeficienty. Tak jsou potřeba dva nebo čtyři?

Odpověď zní, že jak E , tak G můžeme vyjádřit pomocí Laméových koeficientů. Ukážeme, jak na to.

Jak vyjádřit Youngův modul pružnosti pomocí λ a μ : natahování tyče

Uvažujme tyč natahovanou ve směru osy x_1 . Nenulová složka tenzoru napětí tedy bude $\tau_{11} = F/S$. Ostatní složky tenzoru napětí jsou nulové:

$\tau_{22} = \tau_{33} = 0$, $\tau_{12} = \tau_{13} = \tau_{23} = 0$. Z Hookova zákona (10.79) plyne pro $i \neq j$:

$$0 = \tau_{12} = 2\mu e_{12} \Rightarrow e_{12} = 0 \text{ a analogicky } e_{13} = 0, e_{23} = 0, \quad (10.80)$$

takže tenzor deformace má nenulové jen diagonální složky e_{11}, e_{22}, e_{33} . Z (10.79) pro $i = j$ dostáváme:

$$\begin{aligned} \tau_{11} &= \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} & (a) \\ 0 &= \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{22} & (b) \\ 0 &= \lambda (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{33} & (c) \end{aligned} \quad (10.81)$$

To jsou tři rovnice pro tři neznámé e_{11}, e_{22}, e_{33} . Odečtením rovnic (b) a (c) dostaneme $0 = 2\mu(e_{22} - e_{33})$, čili

$$e_{22} = e_{33}. \quad (10.82)$$

Z rovnic (10.81) (a) a (b) pak po dosazení (10.82) plyne

$$\begin{aligned} (\lambda + 2\mu)e_{11} + 2\lambda e_{22} &= \tau_{11} & (a') \\ \lambda e_{11} + 2(\lambda + \mu)e_{22} &= 0 & (b') \end{aligned} \quad (10.83)$$

Z (10.83) (b') pak dostaneme vztah mezi e_{11} a e_{22} :

$$e_{22} = -\frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} e_{11} \quad (10.84)$$

a po dosazení do (10.83) (a'):

$$\left(\lambda + 2\mu - \frac{\lambda^2}{\lambda + \mu} \right) e_{11} = \tau_{11} \Rightarrow \tau_{11} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} e_{11}. \quad (10.85)$$

¹³² Ostatně už z toho, že jsme výše připomněli Youngův modul pružnosti E a modul pružnosti ve smyku G , je vidět, že asi budou potřeba konstanty dvě.

¹³³ Dokazovat to zde nebudeme, zájemce odkazujeme na učebnice mechaniky kontinua.

Porovnáním s „běžným“ Hookovým zákonem (10.75), tedy $\tau_{11} = E e_{11}$, ihned vidíme, že Youngův modul pružnosti je

$$E = \frac{\mu (3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu} . \quad (10.86)$$

Smyková deformace a Laméovy koeficienty

Uvažujme už výše popsaný případ smykové deformace, viz obrázek. Napětí je charakterizováno složkou τ_{12} tenzoru napětí. Ze zobecněného Hookova zákona (10.79) pro $i = 1$ a $j = 2$ dostaneme

$$\tau_{12} = 2\mu e_{12} . \quad (10.87)$$

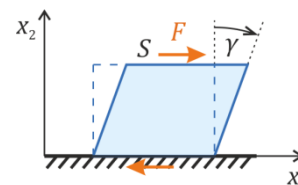
Výše jsme však odvodili (viz (10.77)), že

$$\tau_{12} = 2G e_{12} .$$

Z porovnání s (10.87) vidíme, že

$$G = \mu , \quad (10.88)$$

takže Laméův koeficient μ je roven modulu pružnosti ve smyku.



Z Laméových koeficientů jde tedy určit moduly pružnosti. Jde to samozřejmě i obráceně: z (10.86) a (10.88) vyjde

$$\lambda = \frac{G(E - 2G)}{3G - E} . \quad (10.89)$$

Zobecněný Hookův zákon: další důsledky *

Ze zobecněného Hookova zákona pro izotropní látky lze vyvodit víc než jen souvislost Laméových koeficientů s moduly pružnosti v tahu a smyku.

1) Souvislost modulů pružnosti v tahu a ve smyku

Když vydělíme vztahy (10.86) a (10.88), dostaneme

$$\frac{E}{G} = \frac{3\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = \frac{3 + 2(\mu/\lambda)}{1 + (\mu/\lambda)} . \quad (10.90)$$

Tento poměr musí být větší než 2 a menší než 3.¹³⁴ Platí tedy $2G \leq E \leq 3G$, neboli

$$G \in \left\langle \frac{E}{3}, \frac{E}{2} \right\rangle . \quad (10.91)$$

Takže modul pružnosti ve smyku musí být mezi třetinou a polovinou Youngova modulu pružnosti. V tabulkách si můžeme ověřit, že tomu tak pro konkrétní materiály opravdu je.¹³⁵

¹³⁴ Člen (μ/λ) musí být v mezích 0 až ∞ . Pro $\mu/\lambda = 0$ dá pravá strana (10.90) hodnotu 3, pro $\mu/\lambda \rightarrow \infty$ hodnotu 2.

A snadno lze ukázat (například zderivováním), že funkce $f(x) = \frac{3+2x}{1+x}$ na pravé straně (10.90) je pro $x > 0$ klesající.

¹³⁵ Například (dle *Matematických, fyzikálních a chemických tabulek pro střední školy*, Prometheus, 2003) pro ocel je $E = 210$ GPa, $G = 80$ GPa, takže $G/E \doteq 0,38$. Pro hliník je $E = 80$ GPa, $G = 30$ GPa, takže $G/E \doteq 0,43$.

Pro titan tabulky uvádějí $E = 120$ GPa, $G = 40$ GPa, což by dávalo $G/E \doteq 1/3$, čili přesně hraniční hodnotu. To je až trochu podezřelé... Ovšem třeba na anglické Wikipedii lze dohledat přesnější hodnoty $E = 116$ GPa, $G = 41,4$ GPa, což dá $G/E \doteq 0,357$, tedy bezpečně uvnitř rozsahu $\langle 1/3, 1/2 \rangle$.

2) Poměr prodloužení a příčného zkrácení

Vztah (10.84) ukazuje, že při prodloužení v jednom směru se tyč zkracuje v příčných směrech. To samozřejmě není příliš překvapivé, zde však dostáváme výsledek kvantitativně. Poměr příčného zkrácení k prodloužení vychází¹³⁶

$$\left| \frac{e_{22}}{e_{11}} \right| = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \mu_P \quad (10.92)$$

Tento poměr se nazývá *Poissonovo číslo*.¹³⁷ Lze jej vyjádřit i pomocí E a G ¹³⁸ jako $\mu_P = \frac{E}{2G} - 1$. Takže z měření modulů pružnosti v tahu a smyku můžeme odvodit, jak moc se materiál při natahování zkrátí v příčném směru.¹³⁹

3) Objemová stlačitelnost

Co když budeme na nějaké těleso z homogenního izotropního materiálu tlačit ze všech stran stejně?¹⁴⁰ Když mělo těleso na počátku objem V_0 , jaký bude jeho objem V po stlačení?

Tlak působící ze všech stran stejně znamená, že stejné jsou všechny diagonální složky tenzoru napětí,

$$\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} \stackrel{\text{ozn.}}{=} \tau \quad (10.93)$$

Ve všech směrech budou zřejmě stejná i relativní prodloužení, tedy diagonální složky tenzoru deformace:

$$e_{11} = e_{22} = e_{33} \stackrel{\text{ozn.}}{=} e \quad (10.94)$$

Pro jednoduchost uvažujme krychličku o počáteční délce strany l_0 , po stlačení pak l .¹⁴² Po stlačení bude $l = l_0(1 + e)$.¹⁴³ Objem po stlačení bude

$$V = l^3 = (l_0)^3 (1 + e)^3 = V_0 (1 + 3e + 3e^2 + e^3) \doteq V_0 (1 + 3e) \quad (10.95)$$

Změna objemu je $\Delta V = V - V_0$, takže z (10.95) vidíme, že relativní změna objemu je

$$\frac{\Delta V}{V} = 3e \quad (10.96)$$

¹³⁶ Tyč se natahuje ve směru osy x_1 , zkrácení zde bereme ve směru osy x_2 (ve směru osy x_3 je stejné). Poměr e_{22}/e_{11} bereme v absolutní hodnotě, protože je $e_{22} < 0$.

¹³⁷ Někdy také *Poissonův poměr* nebo *Poissonova konstanta*. (Ale pozor, nepleť s Poissonovou konstantou κ z termodynamiky.) Podle normy se značí μ (tak je také značeno ve výše zmíněných středoškolských tabulkách), ovšem to by se pletlo s Laméovým koeficientem, tak dle vzoru učebnice Kvasnica a kol.: *Mechanika* používáme značení μ_P . Ve výše zmíněné učebnici Brdička a kol.: *Mechanika kontinua* se ovšem označuje σ . (Pak se v tom vyznejte... Jasná a už dříve uvedená rada: Vždy se podívejte, jak autor ve své knize, učebnici či práci co značí.)

¹³⁸ Např. dosazením za λ a μ nebo úpravou (10.90).

¹³⁹ To je zajímavé, člověka by asi bez uvedených výpočtů nenapadlo, že tohle půjde. Samozřejmě uvedený výsledek platí jen pro izotropní materiál. Navíc v uvedených úvahách o prodloužení tyče a jejím zkrácení v příčném směru předpokládáme, že materiál je *homogenní*.

¹⁴⁰ Třeba kdybychom kostičku z takového materiálu ponořili na dno Mariánského příkopu nebo stlačili v nějakém speciálním lisu, kde by tlak působil ze všech stran.

¹⁴¹ Protože stejná jsou napětí ve směru všech os. Protože jde o tlak, nikoli tah, bude $\tau < 0$.

¹⁴² Výsledky budou platit i pro kvádr, kouli či jiná tělesa. (Rozmyslete si, proč.)

¹⁴³ Protože jde o stlačení, bude $e < 0$.

¹⁴⁴ Protože jde o malé deformace, tj. $|e| \ll 1$, takže členy s e^2 a e^3 můžeme zanedbat.

Ze zobecněného Hookova zákona (10.79) dostáváme pro $i = j = 1$:

$$\tau = \tau_{11} = \lambda(e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{11} = \lambda 3e + 2\mu e = (3\lambda + 2\mu)e. \quad (10.97)$$

Po dosazení $e = \frac{1}{3}(\Delta V/V)$, což plyne z (10.96), dostaneme z (10.97) $\tau = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \frac{\Delta V}{V}$, tedy

$$\tau = K \frac{\Delta V}{V}, \quad \text{kde } K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3}. \quad (10.98)$$

Koeficient K se nazývá *modul objemové pružnosti*.¹⁴⁶

Modul objemové pružnosti se dá vyjádřit i pomocí modulů pružnosti v tahu a ve smyku¹⁴⁷:

$$K = \frac{GE}{3(3G - E)}. \quad (10.99)$$

Vidíme, že pro $G = E/3$ je $K = \infty$.¹⁴⁸ To by znamenalo, že pro libovolně malé stlačení $\Delta V/V$ by napětí τ muselo být nekonečné – takže takový materiál by byl nestlačitelný.¹⁴⁹ Poznamenejme, že Poissonovo číslo pro takový materiál by bylo rovno jedné polovině.¹⁵⁰

Ufff! To jsme si zaodvozovali a seznámili se s řadou veličin a vztahů... A přitom jsme do mechaniky kontinua jen nepatrně nakoukli.

Na druhou stranu se neděste, že byste všechny uvedené vztahy museli znát nazpaměť „jako když bičem mrská“. Pokud byste pomocí mechaniky kontinua něco aktivně více řešili a počítali, pak ano, bez pracovní znalosti těchto vztahů byste se neobešli. A nepochybně byste znali i mnohem víc.

Reálně nám ale v úvodním kurzu mechaniky bude stačit, když budeme mít o věcech základní přehled, nevydělá nás veličiny typu tenzor a budeme rozumět významu jejich složek (tedy složek tenzoru napětí a deformace). A budeme vědět, že pružnost se dá popsat širěji a detailněji, než jen Hookovým zákonem ve tvaru známém ze středoškolských učebnic.

Řadu vztahů jsme si tady ale odvodili¹⁵¹, abyste měli představu, že jsou různé veličiny týkající se třeba pružnosti vzájemně spjaté, a abyste měli základní vztahy pohromadě, až je někdy budete potřebovat.

Ale přece jen nám z oblasti pružnosti zbývá ještě jeden hezký a přitom důležitý příklad. Týká se kroucení válcové tyče.

¹⁴⁵ Naprosto stejný vztah vyjde pro $i = j = 2$ a $i = j = 3$; ve všech směrech jsou napětí i stlačení stejná.

¹⁴⁶ V alternativním vyjádření $\frac{\Delta V}{V} = \frac{1}{K} \tau$ se koeficient $\frac{1}{K}$ nazývá *koeficient objemové stlačitelnosti*. To je vcelku logické: Vyšší hodnota $\frac{1}{K}$ znamená, že při stejném napětí τ je větší relativní stlačení $\left| \frac{\Delta V}{V} \right|$, látka je tedy stlačitelnější.

¹⁴⁷ Stačí do (10.98) dosadit z (10.88) a (10.89).

¹⁴⁸ Matematici nám snad odpustí, že zde volíme názornou byť nepřesnou formulaci a nepíšeme $G \rightarrow E/3 \Rightarrow K \rightarrow \infty$. (Ostatně i to by bylo nepřesné resp. formálně chybné, protože jsme nenapsali, že jde o limitu zleva...)

¹⁴⁹ To je důvod, proč pro reálné materiály musí být $G > E/3$.

¹⁵⁰ To plyne z dosazení do vztahu $\mu_p = E/(2G) - 1$ odvozeného výše. Pro reálné materiály je $\mu_p < 1/2$.

¹⁵¹ ... doufám, že dostatečně podrobně a přitom snad srozumitelně...

Torze válcové tyče

Uvažujme válec o výšce l . Jeho spodní podstavu držíme pevně, horní pootočíme o úhel φ , viz obrázek. Válec je z homogenního izotropního materiálu.

Jak už jsme diskutovali výše, při pootočení se malý hranolek materiálu deformuje smykem. Zkosení hranolku označíme γ . Když je vzdálenost hranolku od osy válce r ,¹⁵² je posunutí horní stěny hranolku $r \cdot \varphi$.¹⁵³ Zároveň ale, jak vidíme z obrázku, je toto posunutí rovno $l \operatorname{tg} \gamma \doteq l \gamma$.¹⁵⁴

Je tedy

$$l \gamma = r \varphi \Rightarrow \gamma = \frac{r}{l} \varphi. \quad (10.100)$$

Jestliže má horní stěna hranolku plochu ΔS a působíme na ni v tečném směru silou ΔF , je tečné napětí podle Hookova zákona pro smyk (10.77)

$$\frac{\Delta F}{\Delta S} = G \gamma = G \frac{r}{l} \varphi. \quad (10.101)$$

Budeme chtít spočítat, „jak moc musíme horní okraj válce kroutit“, aby se horní podstava pootočila právě o úhel φ .¹⁵⁶

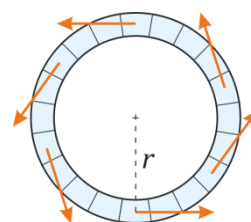
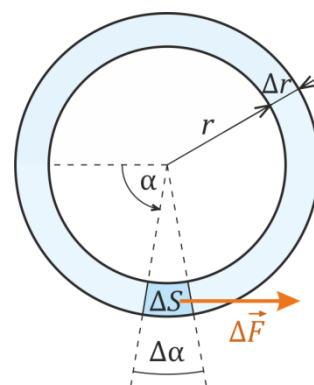
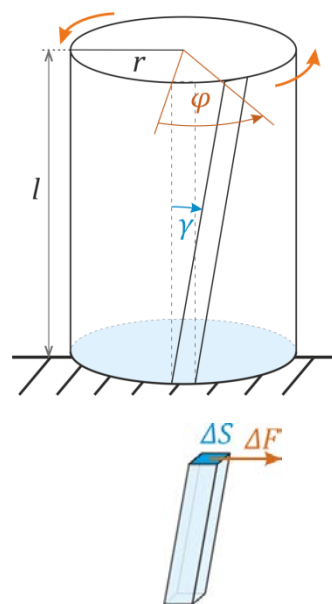
Začneme něčím jednodušším než plným válcem: **tenkou trubkou**. Její (vnitřní) poloměr bude r , tloušťka stěny Δr . Při pohledu shora vypadá vršek trubky tak, jak to ukazuje obrázek. Úhlem α vystihujeme pozici na obvodu trubky. Na obrázku je vyznačena i ploška, která odpovídá vrchní stěně hranolku uvažovaného výše. Dvě strany této plošky sice nejsou úplně rovné, ale pro $|\Delta \alpha| \ll 1$ můžeme jejich zakřivení zanedbat; ploška je prakticky obdélník o stranách Δr a $r \Delta \alpha$. Její plošný obsah je tedy

$$\Delta S = \Delta r \cdot r \Delta \alpha. \quad (10.102)$$

Z (10.101) dostaneme sílu, která musí působit na plošku ΔS :

$$\Delta F = G \frac{r}{l} \varphi \Delta S = \frac{G}{l} \varphi r^2 \Delta r \Delta \alpha \quad (10.103)$$

Chceme-li spočítat celkové silové působení na horní stěnu trubky, musíme sečíst příspěvky přes všechny „kousky“ horní stěny. Nemá ovšem smysl počítat síly (jako vektory), to bychom dostali nulu. Musíme počítat **momenty** sil.



¹⁵² Na obrázku hranolek pro názornost kreslíme u pláště válečku, zakresleny jsou jen hrany na plášti.

¹⁵³ Je rovno délce kruhového oblouku, po kterém se body horní stěny posunuly. (Pokud máte problém představit si, že hranolek je jen zkosen a namítali byste, že třeba při otočení horní podstavy válce „dokola“, tedy o $360^\circ = 2\pi$ radiánů, je sám hranolek nějak „překroucen“, představte si situaci jen na malém kousku výšky válečku, třeba na jedné setině výšky, tam by bylo pootočení v daném případě jen $3,6^\circ$, tedy asi jen 0,06 radiánu a horní podstava části hranolku o dané malé výšce by se opravdu posunula jen o malý kousek prakticky v jednom směru.)

¹⁵⁴ Protože γ je malé, $|\gamma| \ll 1$. (Jde o malé deformace, uvažujeme zde například zkroucení ocelové struny, ne třeba zkroucení válcového gumového vlákna mnohokrát dokola.)

¹⁵⁵ Zde už nepíšeme „rovná se přibližně“, malou odchylku mezi γ a $\operatorname{tg} \gamma$ zanedbáváme.

¹⁵⁶ Co to znamená „jak moc musíme kroutit“, v průběhu výpočtu upřesníme.

Protože síla je na každém „kousku horní stěny“ kolmá na spojnici s osou trubky, lze moment síly jednoduše určit podle středoškolského vzorce „síla krát rameno“. Po dosazení (10.103) dostáváme

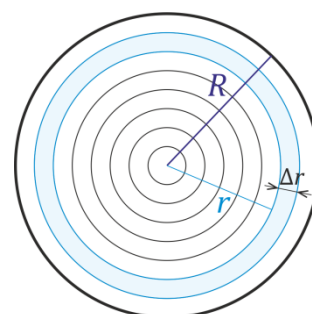
$$\Delta M = r \Delta F = r \cdot \frac{G}{l} \varphi r^2 \Delta r \Delta \alpha = \frac{G}{l} \varphi r^3 \Delta r \Delta \alpha . \quad (10.104)$$

Celkový moment dostaneme „sečtením přes všechny kousky“, tedy integrací přes α od 0 do 2π .¹⁵⁷ Fakticky se integrace redukuje na násobení 2π , takže

$$M_{\text{trubka}} = 2\pi \frac{G}{l} \varphi r^3 \Delta r . \quad (10.105)$$

... a konečně válec...

Ted' už můžeme lehce spočítat moment, kterým musíme kroutit horní stěnu plného válce o poloměru R , aby se otočila o úhel φ . Válec si myšlenkově rozdělíme na trubky o poloměru r , který se mění od 0 do R , a tloušťce stěny Δr , viz obrázek. Celkový moment je součtem momentů sil (10.105) pro jednotlivé myšlené trubky.



Sčítání budeme samozřejmě dělat integrálem. Celkový moment je

$$M = \int_0^R 2\pi \frac{G}{l} \varphi r^3 dr = 2\pi \frac{G}{l} \varphi \int_0^R r^3 dr = 2\pi \frac{G}{l} \varphi \left[\frac{r^4}{4} \right]_0^R = \frac{\pi G}{2l} \varphi R^4 .$$

Výsledkem tedy je:

$$M = \frac{\pi G R^4}{2l} \varphi \quad (10.106)$$

Stojí za to, povšimnout si dvou věcí:

1) Moment síly je úměrný **čtvrté** mocnině poloměru tyče. To znamená, že když máme dvakrát tlustší tyč, musíme ji kroutit *šestnáctkrát* větším momentem, abychom ji zkroutili o stejný úhel. Desetkrát tlustší tyč bychom museli kroutit *desetitisíc krát* (!) větším momentem.¹⁵⁸ Naopak ke stejnému zkroucení vlákna o průměru 0,1 mm stačí desetitisíc krát menší moment, než pro strunu ze stejného materiálu o průměru 1 mm. Proto jsou tak citlivým přístrojem **torzní váhy**, v nichž rameno visí na tenkém vlákně.

2) Moment síly je **přímo úměrný** úhlu zkroucení φ . To znamená, že **torzní kyvadlo**, kde na vlákně je zavěšeno těleso a otáčí se „tam a zpátky“ kolem svislé osy, kmitá harmonicky¹⁵⁹; perioda jeho kmitů tedy nezáleží na amplitudě výchylky.¹⁶⁰ Známe-li moment setrvačnosti takového tělesa, můžeme z periody kmitů určit modul pružnosti ve smyku G .

Sice nejde přímo o problém z mechaniky kontinua, jen o aplikaci výsledku (10.106), ale stojí za to udělat malou odbočku a kmity torzního kyvadla spočítat.

¹⁵⁷ $M_{\text{trubka}} = \int_0^{2\pi} \frac{G}{l} \varphi r^3 \Delta r d\alpha = \frac{G}{l} \varphi r^3 \Delta r \int_0^{2\pi} d\alpha = \frac{G}{l} \varphi r^3 \Delta r 2\pi$

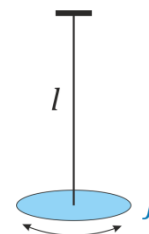
¹⁵⁸ Tlustou tyč prostě rukou nezkroutíte...

¹⁵⁹ Můžeme říci, že je krásným příkladem harmonického oscilátoru.

¹⁶⁰ To je rozdíl oproti matematickému nebo fyzickému kyvadlu, tam toto platí jen pro malé výchylky.

Torzní kyvadlo

Torzní kyvadlo je těleso o momentu setrvačnosti J ,¹⁶¹ zavěšené na vlákně délky l a poloměru R . Těleso se otáčí kolem svislé osy¹⁶² tam a zpět, protože ho k rovnovážné poloze vrací moment síly vyvolaný vláknem při jeho zkroucení.



Úhel výchylky z rovnovážné polohy označíme φ . Úhlová rychlost je tedy $\frac{d\varphi}{dt} \equiv \dot{\varphi}$.¹⁶³

Svislá složka momentu hybnosti tělesa je tedy $L_z = J \dot{\varphi}$.

Moment síly, kterým vlákno působí na těleso, je (viz (10.106)) $M = \frac{\pi G R^4}{2l} \varphi$.¹⁶⁴ Pohybovou rovnicí pro těleso dostaneme z druhé věty impulzové. Je

$$\frac{d}{dt}(J \dot{\varphi}) = -\frac{\pi G R^4}{2l} \varphi. \quad (10.107)$$

Po úpravě dostaneme

$$\ddot{\varphi} + \left(\frac{\pi G R^4}{2l J} \right) \varphi = 0, \quad (10.108)$$

A to už je rovnice známého tvaru $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$ pro harmonický oscilátor. Vidíme, že úhlová frekvence torzních kmitů torzního kyvadla je

$$\omega = \sqrt{\frac{\pi G R^4}{2l J}}, \quad (10.109)$$

čili perioda $T = 1/f = 2\pi/\omega$ je

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{2l J}{\pi G R^4}}. \quad (10.110)$$

Jestliže je tělesem vahadlo, na které můžeme dávat do známých vzdáleností od osy malé přivažky známé hmotnosti, budeme znát, jak se s přidáváním přivažek mění moment setrvačnosti a z měření periody T a vztahu (10.110)¹⁶⁶ můžeme určit modul pružnosti ve smyku G materiálu vlákna.¹⁶⁷

¹⁶¹ Jde o moment setrvačnosti kolem svislé osy.

¹⁶² Vlákno je stále svislé, nekývá se, nejde o matematické kyvadlo.

¹⁶³ Přesně vzato je to složka úhlové rychlosti do svislého směru.

¹⁶⁴ Opět jde o svislou složku momentu síly. V tomto stručném odvození se složkami zacházíme trochu nepořádně a příliš se nestaráme o znaménka. (Poctivě řečeno, nestaráme se o ně vůbec. ☹) Správné znaménko ve výsledné rovnici nakonec určíme ze samozřejmého faktu, že moment sil se snaží vrátit těleso do rovnovážné polohy, tedy do polohy $\varphi = 0$.

¹⁶⁵ Právě tady už jsme znaménko určili z úvahy v předchozí poznámce. Samozřejmě vše můžeme udělat „poctivě“, zakreslit si do obrázku soustavu souřadnic (třeba s osou z mířící svisle vzhůru), určit, při natočení kterým směrem bude výchylka φ kladná, spočítat z-ové složky momentu hybnosti i momentu síly... (Doporučujeme čtenáři, aby si to alespoň jednou opravdu udělal a rozmyslel.)

¹⁶⁶ Resp. „pohodlněji“ asi z jeho druhé mocniny $T^2 = 4\pi^2 \frac{2l}{\pi R^4} \frac{1}{G} J$.

¹⁶⁷ Přesnost bude zřejmě nejvíc záviset na přesnosti měření poloměru vlákna. (Rozmyslete si, proč.)

10.7 Reologie, reologická klasifikace látek

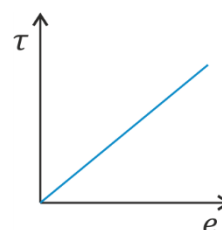
Dostali jsme se k poslední části kapitoly věnované mechanice kontinua.¹⁶⁸ Tato část už bude pouze kvalitativní, hodně „povídavá a obrázková“ a bude jen úplně úvodním nastíněním problematiky.

Reologie je část mechaniky kontinua, která se zabývá vztahem napětí, deformace a rychlosti deformace u různých materiálů, především u materiálů, které podléhají plastické deformaci nebo více či méně tečou.^{169 170}

Různé chování látek při deformaci lze dobře znázornit grafy vystihujícími závislost napětí na deformaci.¹⁷¹ Může přitom jít jak o chování v tahu či tlaku, tak při smyku. V grafech budeme dále napětí značit τ a deformaci e . (Nebudeme zvlášť vypisovat, o které složky tenzoru napětí a tenzoru deformace se jedná, půjde nám spíš o kvalitativní popis.)

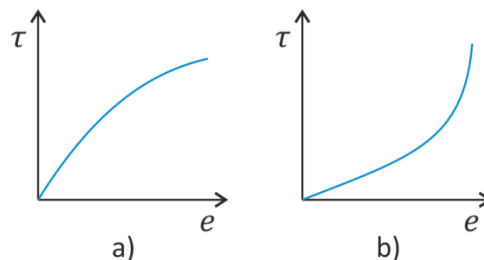
Začneme případem, který už jsme probírali v předchozí části kapitoly. Tedy situací, kdy napětí a deformace jsou si přímo úměrné.

Látkám, které vykazují toto chování, říkáme látky **lineárně elastické** nebo také **klasicky elastické**. (Lze se setkat i s termínem *hookovské látky*.)



Připomeňme, že tato lineární závislost může být omezena jen do určité velikosti napětí. Při vyšších hodnotách napětí může dojít třeba k plastické deformaci. Při překročení meze pevnosti pak materiál praskne.

Materiál ovšem může být pružný (= elastický)¹⁷², ale mezi napětím a deformací nemusí platit přímá úměrnost. Takové látky se nazývají **nelineárně elastické**.



Pro některé materiály se při vyšším napětí materiál snáze protahuje, jak to ukazuje obrázek a). (Uvádí se, že takto se chová například měď.) Naopak u jiných materiálů po natažení potřebné napětí prudce stoupá, viz obrázek b). Tak se chová například guma (pryž); i když její chování může být ještě složitější. Prudký nárůst napětí po natažení lze pochopit,¹⁷³ ovšem v tomto případě už jde o velké deformace. (Uvádí se, že gumu lze natáhnout až na sedminásobek původní délky.)

¹⁶⁸ No, ona příští kapitola věnovaná chování tekutin vlastně do mechaniky kontinua také spadá, takže se kontinua ještě nezbavíme...

¹⁶⁹ Uvádí se, že jméno *reologie* (anglicky *rheology*) bylo inspirováno známým starověkým výrokem „*panta rhei*“ (všechno plyne) připisovaným Herakleitovi. (Možná prý v Platonově podání; anglická stránka Wikipedie o reologii <https://en.wikipedia.org/wiki/Rheology> ho připisuje Simpliciovi. Příslušná stránka Wikipedie o tomto starověkém filosofovi ale zase stran tohoto či podobných výroků odkazuje na Platona a Aristotela. Pak se v tom vyznejte... Na každý pád, všechno plyne a reologie je zajímavá a důležitá disciplína.)

¹⁷⁰ Učebnice *Kvasnica a kol.: Mechanika* (Academia, Praha, 2004) i skripta *Havránek A.: Klasická mechanika II. Kontinuum* (Karolinum, Praha, 2003) zařazuje k reologii a reologickým modelům i chování látek při pružné deformaci (kdy nijak netečou), a tak je sem zahrneme i my.

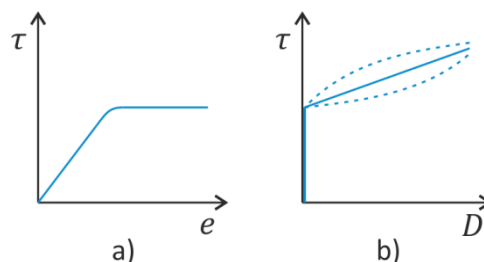
¹⁷¹ Nebo obráceně, deformace na napětí. V různých pramenech bývají uváděny jeden nebo druhý z těchto typů grafů; podívejte se vždy, která veličina je na které ose.

¹⁷² To znamená, že po odstranění napětí se vrátí do původního nedeformovaného stavu.

¹⁷³ V materiálu se natáhnou původně zkroucené polymerní řetězce a dále je už téměř nelze natahovat.

Některé materiály se však po překročení určité meze napětí přestávají chovat pružně. (Této mezi se říká **mez pružnosti**.¹⁷⁴) Po odstranění napětí se pak už nevrátí na původní délku.¹⁷⁵ Takové deformaci říkáme **plastická deformace**.

Při plastické deformaci se může materiál natahovat, aniž by se napětí měnilo, viz vpravo obrázek a). Pak ovšem z grafu závislosti $\tau = \tau(u)$ žádné informace o chování materiálu při plastické deformaci nezískáme. Pomůže vynést graf závislosti napětí na *rychlosti deformace*, viz obrázek b). Vidíme, že do určitého napětí (tj. pod mezí pružnosti) je rychlost deformace nulová. Pak může napětí růst s rychlostí deformace lineárně – takovým látkám se říká látky *lineárně plastické*, nebo nelineárně (jak na obrázku ukazují čárkované průběhy) – pak jde o látky *nelineárně plastické*.

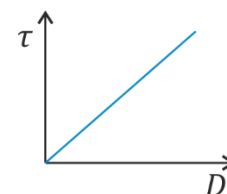


Tekutiny

U tekutin žádná „mez pružnosti“ samozřejmě není, tekutiny tečou už od libovolně malého napětí. V tomto případě jsou podstatná smyková napětí, protože fakticky jde o klouzání jednotlivých vrstev tekutiny po sobě.

Více se tekutinám budeme věnovat v následující kapitole. Teď jen konstatujeme, že tekutinám, u nichž jsou rychlost deformace a napětí přímo úměrné, říkáme **newtonovské tekutiny** (nebo též *ideálně viskózní tekutiny*).

Látky, kde je závislost mezi rychlostí deformace a napětím nelineární, se pak přirozeně nazývají **neneutronovské tekutiny**. Často jde přitom o kapaliny, takže se setkáváme s názvem **neneutronovské kapaliny**. Příkladem jsou různé laky, asfalty, ropa, kaly a další látky.¹⁷⁶



Obecně je ovšem chování látek často složitější, než jsme naznačili uvedenými jednoduchými příklady. Reologie pro popis takového chování vytváří různé **reologické modely**. Názorně bývají popisovány jako kombinace pružin, tlumičů (píst ve válci s viskózní kapalinou) a prvků, v nichž je smykové tření. Takových modelů je celá řada, zájemci se o nich mohou poučit v již výše zmíněných učebnicích.

¹⁷⁴ Též *mez elasticity*.

¹⁷⁵ Zůstanou více natažené.

¹⁷⁶ Pro efektní pokusy pro popularizaci fyziky je oblíbenou látkou škrob, resp. suspenze škrobu ve vodě. Videí s touto tematikou můžete najít na webu dost a dost, viz např. <https://www.youtube.com/watch?v=M9oDGURgVHY>.

Shrnutí

Napětí

$\tau = F/S$, jednotka pascal, Pa = N/m², napětí v tahu, tlaku, smykové

Tenzor napětí: složky τ_{ij} jsou složky vektoru napětí na ploškách kolmých

k osám x_1, x_2, x_3 , např. $\vec{T}^{(1)} = (\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13})$; je symetrický ($\tau_{ij} = \tau_{ji}$)

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix}$$

Napětí na ploše s normálovým vektorem $\vec{\nu}$: $T_i^{(\vec{\nu})} = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} \nu_j$

transformace složek tenzorů
viz Dodatek A

Význam: diag. složky: tahová napětí ve směru os (pro tlak např. $\tau_{11} < 0$), nediag. složky: smyková napětí

V hlavních směrech tenzoru napětí (jsou 3, na sebe kolmé) je čistý tah nebo tlak.

Rovnice rovnováhy kontinua: $\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0$, ρg_i jsou objemové síly

Deformace

Tenzor malých deformací: složky $e_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$, kde \vec{u} je vektor posunutí

$$\begin{pmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{pmatrix}$$

Je symetrický ($e_{ij} = e_{ji}$).

Význam: diag. složky: relativní prodloužení ve směru os (např. $e_{11} = (l - l_0)/l_0$),

nediag. složky: určují zkosení (např. $2e_{12} = \gamma$)

Tenzor rychlosti deformace: $D_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$

Pružnost

Hookův zákon: obecně: $\tau_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 C_{ijkl} e_{kl}$, pro izotropní látky: $\tau_{ij} = \lambda \delta_{ij} (e_{11} + e_{22} + e_{33}) + 2\mu e_{ij}$

λ a μ jsou Laméovy koeficienty

pro izotropní látky: tah: $\frac{l - l_0}{l_0} = \frac{1}{E} \frac{F}{S}$, smyk: $\gamma = \frac{1}{G} \frac{F}{S}$

Modul pružnosti ve smyku $G = \mu$, Youngův modul pružnosti $E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}$, další vztahy viz hlavní text

Torze válcové tyče: $M = \frac{\pi G R^4}{2l} \varphi$

(spíše pro úplnost a zájemce,
např. vztah pro objemovou stlačitelnost)

Reologická klasifikace látek

látky lineárně elastické, nelineárně elastické (oboje do meze pružnosti)

plastická deformace

newtonovské tekutiny (= ideálně viskózní tekutiny, $\tau \sim D$)

neneutronovské kapaliny

Dodatek 10.A: Skaláry, vektory a tenzory (*)

Ve fyzice se setkáváme s různými druhy veličin. Běžně používáme **skaláry** a **vektory**. Jednoduše řečeno:

- **Skaláry** jsou veličiny, k jejichž určení stačí jediná hodnota. (Ještě jednodušeji řečeno, jedno číslo.)¹⁷⁷
- **Vektory** jsou veličiny určené třemi čísly, tedy *složkami* vektoru.¹⁷⁸ V zápisu pomocí složek poznáme, že jde o vektor, jednoduše tak, že složky mají jeden index, např. v_i .¹⁷⁹

V případě napětí jsme narazili na příklad veličiny, kterou nejde popsat ani skalárem, ani vektorem. Vidíme, že existuje další typ veličin:

- **Tenzory**. Ty mají více složek než tři. V případě tenzorů **druhého řádu** je složek devět.¹⁸⁰ Že jde o tenzor druhého řádu, poznáme tak, že složky mají dva indexy, např. právě τ_{ij} .

Tenzory mohou mít i vyšší řád; složky tenzoru třetího řádu mají tři indexy, složky tenzoru čtvrtého řádu čtyři indexy.^{181 182}

(Poznámka pro zvědavé čtenáře: Pokud vám vrtá hlavou, jestli ve fyzice potřebujeme ještě jiné typy veličin než skaláry, vektory a tenzory, pak odpověď zní ano. Ještě existují veličiny zvané **spinory**. Užívá je třeba kvantová fyzika. Zde se jim blíže věnovat nebudeme; omezíme se na konstatování, že skaláry, vektory, tenzory a spinory jsou všechny typy veličin, které fyzika potřebuje, dá se to dokázat matematicky.^{183 184})

¹⁷⁷ Známými příklady jsou hmotnost, elektrický náboj, teplota, hustota, index lomu... a řada dalších. Nemusíme asi dodávat, že hodnotu vždy vyjadřujeme v určitých jednotkách, takže nestačí pouhé číslo. (Kromě případu, kdy veličina je bezrozměrná, jako je třeba index lomu.)

V některých případech se přitom „jedním číslem“ myslí hodnota v jednom bodě. Třeba hustota nebo teplota totiž mohou být v různých místech tělesa různé. (Pak někdy mluvíme o poli hustoty, poli teploty apod.) Pro určení, jak je třeba teplota rozložena v tělese, které na jednom konci zahříváme a na jiném konci chladíme, tedy fakticky potřebujeme nekonečně čísel, tj. hodnot teploty v každém bodě. (A bodů je v tělese nekonečně mnoho.) Ovšem při rozlišování mezi skaláry, vektory a tenzory jde o počet hodnot charakterizujících veličinu v jednom určitém bodě.

¹⁷⁸ Příkladem je třeba polohový vektor, rychlost, zrychlení, síla, hybnost, ... Takže třeba složky síly jsou F_1, F_2, F_3 . Jak už dobře víme, vektor pak zapisujeme jako $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3) = F_1\vec{e}_1 + F_2\vec{e}_2 + F_3\vec{e}_3$, kde $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ jsou vektory báze. (Jde o složky a vektory báze v kartézských souřadnicích, křivočarými souřadnicemi zde popis nebudeme komplikovat.)

¹⁷⁹ To by například mohly být složky vektoru rychlosti, $\vec{v} = \sum_{i=1}^3 v_i \vec{e}_i$.

¹⁸⁰ Viz třeba právě tenzor napětí (10.16). Jeho složky jsou τ_{ij} , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, 3$. Veličin tenzorového charakteru je přirozeně víc. V této kapitole je další takovou veličinou, kterou poznáváme, například tenzor deformace, v druhém ročníku se v Teoretické mechanice seznámíte s tenzorem setrvačnosti.

¹⁸¹ Ve fyzice nám v naprosté většině stačí tenzory maximálně čtvrtého řádu. Zde v úvodních partiích mechaniky se prakticky vždy setkáme nejvýše s tenzory druhého řádu.

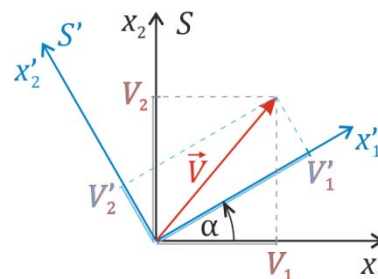
¹⁸² Pozorný čtenář by se mohl zeptat, jestli když složky vektorů mají jeden index, jde vlastně o tenzory prvního řádu. Ano, je tomu tak; dokonce skaláry můžeme brát jako tenzory nultého řádu, ale to už je spíše formalita.

¹⁸³ Pro zájemce: Tenzory (včetně skalárů a vektorů) a spinory jsou totiž veškeré tzv. reprezentace grupy rotací. Ale to už je matematicky výrazně nad úroveň úvodního kurzu mechaniky. Takže toto berte jen jako poznámku zcela na okraj, jen abychom mohli ocenit, jak je matematika krásně mocná.

¹⁸⁴ A ještě jednu poznámku na okraj: Matematika popisuje vektory i v prostorech o obecném počtu rozměrů. Více rozměrů než tři se někdy hodí i ve fyzice. Například v teorii relativity se ke třem prostorovým rozměrům přidává i časový, takže tzv. čtyřvektory mají čtyři složky. Analogicky pak tenzory druhého řádu v prostoročase (někdy nazývané čtyřtenzory) mají 4 krát 4, čili 16 složek. Tyhle věci ovšem zde v mechanice zcela pomineme. (Abychom se z toho všeho nepominuli... ☺)

Takže to vše vypadá vlastně hrozně jednoduše. Ovšem pozor! Ne každá „jen tak napsaná“ trojice čísel tvoří vektor!¹⁸⁵

Podstatné totiž je, jak se složky vektoru chovají **při natočení soustavy souřadnic**. Vektor je totiž **geometrický objekt**, ostatně si ho názorně také zobrazujeme jako úsečku se šipkou. A ta úsečka se šipkou je v prostoru pevná. Když natočíme soustavu souřadnic, tedy přejdeme např. od soustavy S k natočené soustavě S' , budou složky vektoru v soustavě S' , jiné, než byly v soustavě S , viz obrázek.



Podívejme se na složky vektoru \vec{V} .¹⁸⁶ Jeho složky v soustavě S jsou V_1, V_2 , složky v soustavě S' jsou V'_1, V'_2 . Složky vektoru v natočené soustavě můžeme spočítat ze složek v původní soustavě S a z úhlu otočení α .¹⁸⁷

$$V'_1 = \cos \alpha V_1 + \sin \alpha V_2 \quad (10.A.1)$$

$$V'_2 = -\sin \alpha V_1 + \cos \alpha V_2$$

Často se o tomto přepočtu mluví jako o *transformaci složek vektoru*. Transformaci (10.A.1) můžeme také zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} V'_1 &= a_{11} V_1 + a_{12} V_2 \\ V'_2 &= a_{21} V_1 + a_{22} V_2 \end{aligned} \quad (10.A.2)$$

kde koeficienty a_{ij} jsou $a_{11} = \cos \alpha$, $a_{12} = \sin \alpha$, $a_{21} = -\sin \alpha$, $a_{22} = \cos \alpha$. Vztahy (10.A.2) lze zapsat i stručněji:

$$V'_i = \sum_{j=1}^2 a_{ij} V_j, \quad i=1,2. \quad (10.A.3)$$

Zatím jsme vše dělali ve dvourozměrném případě. Vztahy (10.A.1) až (10.A.3) tedy platí pro dvourozměrné vektory při otočení soustavy souřadnic v rovině. Vše lze ale zobecnit na třírozměrné vektory. Analogicky k (10.A.3) pak vztah pro transformaci složek vektorů je

$$V'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} V_j, \quad i=1,2,3. \quad (10.A.4)$$

Jak vypadají koeficienty a_{ij} zde specifikovat nebudeme, museli bychom nejdříve diskutovat, jak popsat libovolné otočení soustavy souřadnic kolem počátku.¹⁸⁸ Nebudeme zde ani odvozovat, jaké podmínky musejí koeficienty a_{ij} splňovat, aby šlo opravdu o otočení. Budeme předpokládat, že jejich hodnoty známe, třeba že nám je nějaký program pro určité otočení spočítal.¹⁸⁹ Pro zájemce ovšem něco o transformacích při otočení soustavy souřadnic uvádíme v Dodatku B.

¹⁸⁵ A ne každá napsaná tabulka devíti čísel tvoří tenzor.

¹⁸⁶ I když ho značíme \vec{V} , nemusí mít nic společného s rychlostí. Je to prostě nějaký vektor pevný v prostoru. Může jít třeba i o polohový vektor.

¹⁸⁷ Lze to odvodit geometricky z obrázku nebo rozpisem vektoru \vec{V} do vektorů báze.

¹⁸⁸ Toho se dotkneme v přednášce *Teoretická mechanika* ve druhém ročníku; tam si stručně ukážeme, že se takové otočení dá parametrizovat třemi tzv. Eulerovými úhly.

¹⁸⁹ V opravdu jednoduchých případech je můžeme určit sami. Třeba pro otočení kolem osy x_3 bude zjevně (viz výše otočení souřadnic v rovině) $a_{11} = a_{22} = \cos \alpha$, $a_{12} = -a_{21} = \sin \alpha$, $a_{33} = 1$, $a_{13} = a_{31} = a_{23} = a_{32} = 0$.

Podstatné je, že transformační vztahy (10.A.4) platí pro složky všech vektorů, ať už jde o složky polohového vektoru $\vec{r} = (x_1, x_2, x_3)$, vektoru rychlosti $\vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$, vektoru síly $\vec{F} = (F_1, F_2, F_3)$, či jakýchkoli dalších vektorů.¹⁹⁰

A jak je tomu s tenzory?

Vlastně hrozně jednoduše. Při otočení soustavy souřadnic pro transformaci složek tenzorů užíváme stejné koeficienty a_{ij} jako v (10.A.4) při transformaci složek vektorů. Jen se musí, zhruba řečeno, „pro každý index použít zvlášť“.

Například složky tenzoru druhého řádu T_{ij} se při otočení soustavy souřadnic transformují takto:

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} T_{kl} . \quad (10.A.5)$$

Možná to bude ještě jasnější, když indexy a k nim příslušné transformační koeficienty odlišíme barevně:

$$T'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} T_{kl} .$$

Poznamenejme, že analogicky by se transformovaly složky tenzorů vyšších řádů.¹⁹² Takže transformovat složky tenzorů umíme. Víme tedy, jak se transformují například složky tenzoru napětí. V souladu s (10.A.5) je to podle vztahů

$$\tau'_{ij} = \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 a_{ik} a_{jl} \tau_{kl} . \quad (10.A.6)$$

Tenzor nejsou jenom složky!

Důležité je uvědomit si, že podobně jako vektory jsou i tenzory **geometrické objekty**, existují v prostoru nezávisle na systému souřadnic, který si zvolíme. Například v nějakém bodě tělesa je prostě určité napětí. Složky tenzoru napětí závisí na tom, v jak natočeném systému souřadnic je budeme vyjadřovat – ale to napětí v tělese je pořád stejné! Tedy i tenzor jako takový je pořád stejný, nezávisle na natočení soustavy souřadnic.

Ono je to méně názorné než v případě vektorů, kde jsme měli jednoduchý názorný objekt, úsečku se šipkou. Mohli bychom říci, že úsečka se šipkou je modelem vektoru.¹⁹³ V případě tenzorů žádný takovýto jednoduchý názorný model nemáme. I když, možná...

V případě tenzorů druhého řádu nám jistou názornost může nabídnout vztah (10.15): $T_i^{(\vec{v})} = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} v_j$. Ukazuje, že tenzor napětí je vlastně určitý „stroj“, který z normálového vektoru \vec{v} plošky vyrobí vektor napětí působící na tuto plošku.

¹⁹⁰ Názorně řečeno je to proto, že všechny tyto vektory můžeme reprezentovat úsečkou se šipkou – a složky všech úseček se šipkou se musí transformovat stejně.

¹⁹¹ Přitom $i = 1,2,3$, $j = 1,2,3$, to už ve vztahu (10.A.5) pro stručnost nevypisujeme, je to jasné z kontextu.

¹⁹² Například složky tenzoru T třetího řádu by se transformovaly jako $T'_{ijk} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=1}^3 \sum_{n=1}^3 a_{il} a_{jm} a_{kn} T_{lmn}$.

¹⁹³ Většinou to takhle formálně neříkáme a spíše si představujeme, že vektor fakticky je úsečka se šipkou – i když reálně třeba z hozeného kamene žádná úsečka se šipkou coby rychlost netrčí.

Podobně se můžeme dívat na každý tenzor druhého řádu: jako na „stroj“, který z jednoho vektoru „vyrábí“ další.¹⁹⁴ Obecně tedy tenzor druhého řádu T_{ij} ¹⁹⁵ dělá z vektoru \vec{V} výsledný vektor \vec{U} :

$$U_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} V_j, \quad i = 1, 2, 3 \quad (10.A.7)$$

Že je výsledek sumy na pravé straně (10.A.7) vektor, je vlastně vidět z daného zápisu hned: je v něm jediný „volný“ index i ¹⁹⁶ – a veličina, která má jeden index, je vektor.

Tohle při práci s tenzory funguje v daném formalismu obecně, stačí se podívat „kolik volných indexů zbylo“. Například když máme tenzor T_{ij} a vektory \vec{A} a \vec{B} , pak výsledek součtu

$$\sum_{j=1}^3 T_{ij} A_j B_j \quad (10.A.8)$$

neobsahuje žádný volný index, musí to tedy být skalár. A skutečně je!¹⁹⁷ Ve skutečnosti se takhle někdy tenzor matematicky přímo zavádí.¹⁹⁸ V této kapitole jsme se s výrazem typu (10.A.8) také setkali: Vztah (10.58) dělal z tenzoru malých deformací a vektorů $\Delta\vec{r}$ rozdíl druhých mocnin délek $|\Delta\vec{r}|^2 - |\Delta\vec{r}|^2$, což je skalár (protože délka na natočení soustavy souřadnic nezáleží).

Pozorného čtenáře by mohlo napadnout, že tenzor bychom mohli „připravit o indexy“ také následující operací:

$$\sum_{i=1}^3 T_{ii} \quad (10.A.9)$$

Výsledkem je opravdu skalár.¹⁹⁹

A co Kroneckerovo delta?

A ještě jedna věc nás může napadnout. Kroneckerovo delta δ_{ij} má dva indexy. Je to tedy tenzor? Ano, je, a jako s tenzorem s ním můžeme bez obav pracovat. Dokonce má jednu speciální vlastnost: V jakkoli natočené kartézské soustavě souřadnic má pořád stejné hodnoty (1 pro $i=j$, 0 pro $i \neq j$).

Ale tím už naše stručné seznamování s tenzory skončíme.

¹⁹⁴ Fakticky je to zobrazení, které vektoru přiřazuje jiný vektor; navíc je toto zobrazení lineární.

Poznámka na okraj: Pojetí tenzoru jako „stroje“ („machine“) najdeme třeba v klasické učebnici obecné teorie relativity Misnera, Thorna a Wheelera *Gravitation*. Přitom Kip Thorne (jeden z autorů) je ten Kip Thorne, který v roce 2017 získal Nobelovu cenu za práce související s objevem gravitačních vln. (Takže tohle pojetí, jak vidno, berou jako rozumné i lidé, kteří ve fyzice rozhodně nejsou žádná „ořezávátka“... ☺)

¹⁹⁵ Pardon, že zde písmenem T značíme obecný tenzor, když v případě napětí jsme měli vektory napětí $\vec{T}^{(\vec{v})}$.

Písmen je málo (☺) a v literatuře je zvykem obecné tenzory značit písmenem T , a ty vektory napětí také... Snad se vám to nesplete.

¹⁹⁶ Volný index je index, přes který se nesčítá.

¹⁹⁷ Nebudeme to zde dokazovat, pro bližší seznámení s tenzory odkážeme na přednášku *Matematické metody fyziky* ve druhém semestru.

¹⁹⁸ Pro zájemce: Tenzor druhého řádu lze zavést jako bilineární zobrazení z vektorového prostoru do reálných čísel. (Nebo do komplexních čísel kdyby šlo o komplexní tenzory. Nebo obecněji... ale to už bychom zabíhali až příliš do algebry.)

¹⁹⁹ Pro zájemce: Této operaci s tenzorem se říká *kontrakce* (česky někdy též *úžení*) a výslednému skaláru *stopa tenzoru*, značívá se Tr (z anglického *trace*), např. $\text{Tr}(T)$.

Dodatek 10.B: Otočení systému souřadnic *

Toto je dodatek k Dodatku A.²⁰⁰ Všimneme si toho, jak se dá dospět k transformačním vztahům pro složky vektorů a tenzorů a uvidíme také, proč třeba součin tenzoru druhého řádu a vektoru dá opravdu vektor, jak to ukazuje vztah (10.A.7).

Uvažujme otočení kartézské soustavy souřadnic kolem počátku O . Obrázek to ukazuje pro jednoduchost dvourozměrně, ovšem obecně půjde o otočení, kde se může změnit i směr osy x_3 .

Vektory báze v původní soustavě S jsou $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$,²⁰¹ vektory báze v otočené soustavě S' označujeme $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3$. Přitom samozřejmě platí, že vektory báze jsou jednotkové, $|\vec{e}_i|=1$ a jsou na sebe vzájemně kolmé. Toto můžeme obecně vyjádřit zápisem

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} . \quad (10.B.1)$$

Totéž platí v otočené soustavě souřadnic:

$$\vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = \delta_{ij} . \quad (10.B.2)$$

Vektory báze soustavy S' musí být lineární kombinací vektorů báze soustavy S :

$$\vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j . \quad (10.B.3)$$

Upozornění k formě zápisu: Zde i dále v tomto Dodatku pro stručnější a přehlednější zápis používáme **Einsteinovu sumační konvenci**, tedy nepíšeme explicitně znak sumace \sum . To, že se v (10.B.3) sčítá přes j , poznáme podle toho, že se index j v součinu $a_{ij} \vec{e}_j$ opakuje, tedy vyskytuje dvakrát. Z kontextu je jasné, že se přes j sčítá od jedné do tří.²⁰⁴

Můžeme říci, že vztah (10.B.3) popisuje *transformaci* vektorů báze z S do S' . Věnujme se teď této transformaci a jejím vlastnostem.

? Proč vlastně platí (10.B.3)? Prostě proto, že každý vektor lze vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů báze, takže to musí platit i pro vektory \vec{e}'_i .²⁰⁵ Je ovšem otázkou, jaké musí být koeficienty a_{ij} , aby šlo o otočení soustavy souřadnic.

Zdaleka ne každá transformace (10.B.3) je totiž otočením.²⁰⁶ Má-li být transformace otočením,

nové vektory báze \vec{e}'_i musí být vzájemně opět kolmé a musí to být jednotkové vektory; čili musí platit (10.B.2).²⁰⁷

²⁰⁰ Dodatek k dodatku, to jsme to dopracovali... Ale stojí za to, doplnit zde některé informace, aby to nevypadalo, že třeba transformační vlastnosti vektorů a tenzorů nějak zázračně „spadly z nebe“.

²⁰¹ V obrázku jsou zakresleny jen první dva.

²⁰² Pro všechny hodnoty i a j od 1 do 3, to už v podobných vztazích budeme předpokládat, i když to nebudeme zvlášť vypisovat.

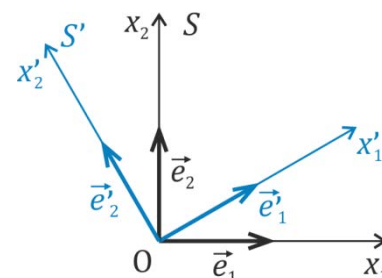
²⁰³ Pro $i = 1, 2, 3$; zde jsme to ještě připomněli, v následujících vztazích už to psát nebudeme.

²⁰⁴ Vztah (10.B.3) tedy znamená $\vec{e}'_i = \sum_{j=1}^3 a_{ij} \vec{e}_j$.

²⁰⁵ Například $\vec{e}'_i = b_1 \vec{e}_1 + b_2 \vec{e}_2 + b_3 \vec{e}_3 = b_j \vec{e}_j$, kde b_j jsou složky tohoto vektoru v soustavě S ; teď jen místo b_j píšeme a_{1j} .

²⁰⁶ Například když všechna $a_{ij} = 0$, pak bychom dostali nulové vektory. Nebo kdyby $a_{ij} = 2\delta_{ij}$, to by se vektory báze prostě protáhly na dvojnásobek.

²⁰⁷ Poznamenejme, že takové transformaci se říká **ortogonální**. (Tento dodatek by tedy mohl nést i název *Ortogonální transformace soustav souřadnic*, ale takový formální název by, obávám se, odradil dost čtenářů. ☺)



Abychom zjistili, jaké podmínky musí splňovat koeficienty a_{ij} , dosadíme do (10.B.2) vektory dané transformací (10.B.3). Ovšem pozor: aby se nám nepletly indexy, budeme dosazovat $\vec{e}'_i = a_{ik} \vec{e}_k$ a $\vec{e}'_j = a_{jl} \vec{e}_l$.²⁰⁸ Z (10.B.2) dostaneme

$$\delta_{ij} = \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = (a_{ik} \vec{e}_k) \cdot (a_{jl} \vec{e}_l) = a_{ik} a_{jl} \underbrace{\vec{e}_k \cdot \vec{e}_l}_{\delta_{kl}} = a_{ik} a_{jk} . \quad (10.B.4)$$

Je-li tedy transformace (10.B.3) **otočení**, musí platit

$$\boxed{a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij} .} \quad {}^{209} \quad {}^{210} \quad (10.B.5)$$

Dá se ukázat, že podmínky (10.B.5) zaručují, že transformace (10.B.5) **zachovává velikosti vektorů a úhly mezi nimi**.²¹¹

Transformace souřadnic vektorů při otočení soustavy souřadnic

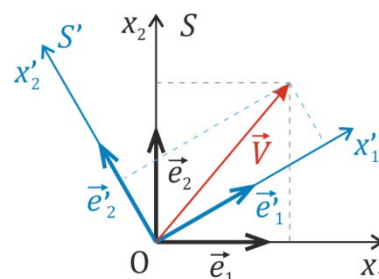
Jak se při otočení soustavy souřadnic transformují složky vektorů?

Jak naznačuje obrázek, jde o to, že máme stále stejný vektor v prostoru.

Tento vektor \vec{V} můžeme rozepsat do složek jak v původní soustavě S , tak v otočené soustavě S' :

$$\vec{V} = V_j \vec{e}_j , \quad (10.B.6)$$

$$\vec{V} = V'_i \vec{e}'_i . \quad (10.B.7)$$



Do (10.B.7) dosadíme (10.B.3), tedy $\vec{e}'_i = a_{ij} \vec{e}_j$. Dostaneme

$$\vec{V} = V'_i \vec{e}'_i = V'_i a_{ij} \vec{e}_j \quad (10.B.8)$$

a v kombinaci s (10.B.6) pak

$$V_j \vec{e}_j = \vec{V} = V'_i \vec{e}'_i = V'_i a_{ij} \vec{e}_j . \quad (10.B.9)$$

Vektor na levé straně se rovná vektoru na pravé straně, musí se tedy rovnat i jeho složky:

$$\boxed{V_j = V'_i a_{ij} .} \quad (10.B.10)$$

Vlastně jsme teď zjistili, jak složky z S' transformovat zpátky do S . Když ale (10.B.10) vynásobíme a_{kj} a využijeme (10.B.5), dostaneme

$$a_{kj} V_j = V'_i a_{ij} a_{kj} = V'_i \delta_{ik} = V'_k ,$$

tedy kýženou transformaci složek z S do S' :

$$\boxed{V'_k = a_{kj} V_j .} \quad (10.B.11)$$

²⁰⁸ Jde jen o přejmenování indexů. (Mělo by vám být jasné, že opravdu jde o tutéž transformaci a že jsme museli indexy přejmenovat, abychom neměli některý index ve výsledném vztahu víc než dvakrát, protože pak by z toho bylo „zmatení indexů“. Pokud to jasné není, zamyslete se nad tím pořádně, abyste to měli rozmyšleno.)

²⁰⁹ Pro jistotu zde tento vztah zapíšeme i ve tvaru s explicitním vyznačením sčítání: $\sum_{k=1}^3 a_{ik} a_{jk} = \delta_{ij}$.

²¹⁰ Upozorníme, že tento vztah *není postačující* pro to, aby šlo o otočení. Splňuje ho též *zrcadlení*, např. transformace, kdy $a_{11} = -1$, $a_{22} = a_{33} = 1$, $a_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, a obecně libovolná kombinace otočení a zrcadlení. Transformace kombinované se zrcadlením převádějí pravotočivé soustavy souřadnic na levotočivé; zde se jim dále nebudeme věnovat.

²¹¹ Ukážeme to na konci tohoto Dodatku, teď by nás to odvádělo od základního směru našich úvah.

A to je přesně vztah (10.A.4), který jsme používali v Dodatku A pro transformaci složek vektorů.²¹²

Násobení tenzoru vektorem dá opravdu vektor

V Dodatku A jsme uvedli, že násobíme-li tenzor druhého řádu vektorem,

$$U_i = T_{ij} V_j, \quad (10.B.12)$$

je výsledek U_i také vektor.

? Ale jak víme, že to je opravdu vektor? V Dodatku A jsme řekli, že to vidíme z toho, že má jediný index. Ale to je vlastně jen taková názorná pomůcka. Opravdu se při otočení soustavy souřadnic složky U_i transformují tak, jak se transformovat mají?

Jestliže je \vec{U} opravdu vektorem, musí se jeho složky transformovat podle vztahu

$$U'_i = a_{ij} U_j. \quad (10.B.13)$$

To musíme ověřit.

Vyjdeme ze vztahu (10.B.12) a dosadíme do něj (10.B.10) ve tvaru $V_j = V'_k a_{kj}$. Dostaneme

$$U_i = T_{ij} V'_k a_{kj}, \quad (10.B.14)$$

Tento výsledek vynásobíme a_{mi} a upravíme. Dostaneme:

$$a_{mi} U_i = a_{mi} T_{ij} V'_k a_{kj} = \underbrace{a_{mi} a_{kj} T_{ij}}_{T'_{mk}} V'_k = T'_{mk} V'_k = U'_m, \quad (10.B.15)$$

tedy $U'_m = a_{mi} U_i$, což je vztah (10.B.13), jen s jinými indexy. Takže jsme dokázali, že \vec{U} daný součinem tenzoru druhého řádu a vektoru, je skutečně vektor.

A co násobení tenzoru druhého řádu dvěma vektory?

V Dodatku A jsme konstatovali, že násobení tenzoru druhého řádu dvěma vektory,

$$T_{ij} A_i B_j, \quad (10.B.16)$$

dá skalár. Pojdme to ověřit. Je-li to skalár, měl by součin $T'_{ij} A'_i B'_j$ dát stejnou hodnotu jako (10.B.16).

Podle (10.B.10) platí pro složky vektorů $A_i = A'_k a_{ki}$, $B_j = B'_l a_{lj}$. Dosazení do (10.B.16) dá

$$T_{ij} A_i B_j = T_{ij} A'_k a_{ki} B'_l a_{lj} = a_{ki} a_{lj} T_{ij} A'_k B'_l = T'_{kl} A'_k B'_l. \quad (10.B.17)$$

Takže skutečně, daný součin dá v S i S' stejnou hodnotu, je to tedy skalár.

²¹² Jen tam byl s jiným indexem (i místo k), s explicitním vyznačením sčítání a explicitním uvedením, že platí pro $i = 1, 2, 3$.

²¹³ Jde o vztah (10.A.7), jen teď už nepíšeme znak sumy.

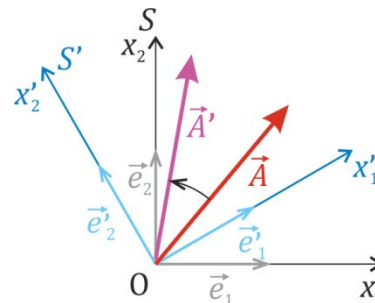
²¹⁴ $U'_m = T'_{mk} V'_k$, protože jde o násobení tenzoru vektorem v soustavě S' .

A ještě jedna drobnost: **ortogonální transformace zachovává délky vektorů a úhly.**

Stručně se vrátíme k tvrzení, že transformace (10.B.3), která splňuje (10.B.5), nejen zachovává kolmost vektorů báze a jejich délku, ale zachovává i délky všech ostatních vektorů a úhly mezi nimi.²¹⁵ Doplníme tím otáčení soustav souřadnic o trochu nový pohled na věc.

Tvrzení se totiž týká situace, kdy nejde o vektory pevné v prostoru, ale o vektory, které se otáčejí spolu se soustavou souřadnic.²¹⁶

Po otočení jde tedy o nový otočený vektor, jak to ukazuje obrázek. Takto se může spolu se soustavou souřadnic otáčet více vektorů, \vec{A}, \vec{B}, \dots . Po otočení půjde o nové vektory, označíme je $\vec{A}', \vec{B}', \dots$



Otázka je, jestli po transformaci (10.B.3) splňující (10.B.5) zůstanou zachovány úhly a velikosti vektorů. K tomu stačí ukázat, že budou zachovány skalární součiny vektorů, tedy že pro libovolné vektory \vec{A} a \vec{B} platí

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = \vec{A} \cdot \vec{B} . \quad (10.B.17)$$

Jde to jednoduše. Stačí si uvědomit, že když se vektory otáčejí spolu se soustavou souřadnic, zůstávají jejich složky *stejně* jako v původní soustavě. Je-li tedy

$$\vec{A} = A_i \vec{e}_i , \quad \vec{B} = B_j \vec{e}_j , \quad (10.B.18)$$

je po otočení

$$\vec{A}' = A_i \vec{e}'_i , \quad \vec{B}' = B_j \vec{e}'_j . \quad (10.B.19)$$

Z (10.B.18) je

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \vec{e}_i \cdot (B_j \vec{e}_j) = A_i B_j \vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i . \quad (10.B.20)$$

Naprostojtě z (10.B.19) dostaneme

$$\vec{A}' \cdot \vec{B}' = A_i \vec{e}'_i \cdot (B_j \vec{e}'_j) = A_i B_j \vec{e}'_i \cdot \vec{e}'_j = A_i B_j \delta_{ij} = A_i B_i . \quad (10.B.21)$$

Okamžitě vidíme, že skalární součin před transformací a po transformaci je stejný.

Takže transformace (10.B.3) splňující (10.B.5) opravdu zachovává úhly a velikosti vektorů.

²¹⁵ Slíbili jsme si, že se k tomuto tvrzení vrátíme, a sliby se mají plnit.

²¹⁶ Kdybychom měli vektory báze „zapíchnuté“ v nějakém malém tělese v počátku souřadnic a otáčeli tělesem spolu s nimi, pak vektor, o který nám půjde, by byl také „zapíchnut“v tomto tělese.

²¹⁷ Zachování velikosti vektoru odsud dostaneme snadno, stačí si uvědomit, že $|\vec{A}'|^2 = \vec{A}' \cdot \vec{A}'$. Že se zachovávají úhly, je zřejmé ze vztahu pro skalární součin $\vec{A} \cdot \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \cos \alpha$.

²¹⁸ Složky A_i, B_j jsou tu bez čárek, to není překlep.

²¹⁹ To není nijak překvapivé, je to známý vzorec pro výpočet skalárního součinu ze složek.

²²⁰ Zde jsme využili toho, že (10.B.3), která splňuje (10.B.5), zachovává kolmost vektorů báze a jejich délku, takže platí (10.B.2).

Dodatek 10.C: Proč jsou tenzory napětí a deformace opravdu tenzory ** 221

[?] Jak vlastně víme, že veličiny τ_{ij} a e_{ij} jsou tenzory? Jistě, mají dva indexy – ale transformují se opravdu podle pravidel pro tenzory? Pojdme se na to podívat.

Transformace složek tenzoru napětí

Díky tomu, jak byl tenzor napětí zaveden, víme, že vektor napětí \vec{T} na ploše s normálovým vektorem $\vec{\nu}$ má složky

$$T_i = \tau_{ij} \nu_j. \quad (10.C.1)$$

Stejný vztah ovšem musí platit i v soustavě S' :

$$T'_i = \tau'_{ij} \nu'_j. \quad (10.C.2)$$

Pro složky vektoru $\vec{\nu}$ platí, viz (10.B.10):

$$\nu_j = a_{kj} \nu'_k. \quad (10.C.3)$$

Dosazení do (10.C.1) dá

$$T_i = \tau_{ij} a_{kj} \nu'_k \quad (10.C.4)$$

a když tento výsledek vynásobíme a_{mi} a využijeme vztahu pro transformaci složek vektoru \vec{T} :

$$T'_m = a_{mi} T_i = a_{mi} a_{kj} \tau_{ij} \nu'_k. \quad (10.C.5)$$

Ovšem platí, že $T'_m = \tau'_{mk} \nu'_k$.²²³ Po dosazení do (10.C.5) dostáváme

$$\tau'_{mk} \nu'_k = a_{mi} a_{kj} \tau_{ij} \nu'_k \Rightarrow (\tau'_{mk} - a_{mi} a_{kj} \tau_{ij}) \nu'_k = 0. \quad (10.C.6)$$

A protože toto platí pro libovolný vektor $\vec{\nu}$ ²²⁴, musí být $(\tau'_{mk} - a_{mi} a_{kj} \tau_{ij}) = 0$, čili

$$\tau'_{mk} = a_{mi} a_{kj} \tau_{ij}. \quad (10.C.7)$$

A to je transformační vztah pro složky tenzoru. Vidíme, že tenzor napětí se transformuje „jak se na tenzor druhého řádu sluší a patří“, takže je to opravdu tenzor.

Transformace složek tenzoru deformace

Pro tenzor malých deformací můžeme vyjít z jeho definice (10.56), tedy

$$e_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right). \quad (10.C.8)$$

Podobně je tomu v soustavě S' :

$$e'_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} \right). \quad (10.C.9)$$

²²¹ Toto je druhý dodatek k Dodatku A, opět spíš pro zájemce. (Nebojte, víc dodatků k Dodatku A nebude.) Připomínáme, že zde opět, stejně jako v Dodatku B, využíváme Einsteinovu sumační konvenci.

²²² Jde o vztah (10.15) z hlavního textu kapitoly, jen zde už pro stručnost nepíšeme k vektoru \vec{T} ani jeho složkám symbol $(\vec{\nu})$.

²²³ To je vztah (10.C.2), jen s přejmenovanými indexy.

²²⁴ Striktně vzato: pro libovolný, pro který je $|\vec{\nu}|=1$, ale to na následující úvaze nic nemění.

²²⁵ Proč volíme zrovna tyto indexy, bude zřejmé na konci odvození.

Potřebujeme tedy vlastně zjistit, jak se transformují parciální derivace v těchto vztazích. Pro složku vektoru \vec{u} platí

$$u'_i = a_{ik} u_k . \quad (10.C.10)$$

Dále ještě využijeme vztah pro transformaci souřadnic (tedy složek polohového vektoru, viz (10.B.10)):

$$x_l = x'_m a_{ml} \left/ \frac{\partial}{\partial x'_j} \right. . \quad (10.C.11)$$

Z něj naznačenou derivací získáme

$$\frac{\partial x_l}{\partial x'_j} = a_{ml} \frac{\partial x'_m}{\partial x'_j} = a_{ml} \delta_{mj} = a_{jl} \quad (10.C.12)$$

Derivací (10.C.10) a následnými úpravami využívajícími (10.C.11) a (10.C.12) dostaneme

$$\frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = a_{ik} \frac{\partial u_k}{\partial x'_j} = a_{ik} \frac{\partial x_l}{\partial x'_j} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} = a_{ik} a_{jl} \frac{\partial u_k}{\partial x_l} . \quad (10.C.13)$$

Analogicky dostaneme

$$\frac{\partial u'_j}{\partial x'_i} = a_{ik} a_{jl} \frac{\partial u_l}{\partial x_k} .^{226} \quad (10.C.14)$$

Dosazením (10.C.13) a (10.C.14) do (10.C.9) a využitím (10.C.8) pak už ihned máme

$$e'_{ij} = a_{ik} a_{jl} e_{kl} , \quad (10.C.15)$$

tedy správný transformační vztah pro tenzor druhého řádu. Takže i tenzor malých deformací je opravdu tenzor.

²²⁶ Fakticky stačí v (10.C.13) vzájemně zaměnit indexy i a j a indexy k a l .

Dodatek 10.D: Hlavní směry tenzoru napětí *

Mějme nějaký kus látky, který je zdeformován (všelijak zkroucen, stlačen různě v různých směrech atd.), takže v něm působí nějaká dost složitá napětí. Napětí v určitém bodě je popsáno tenzorem napětí τ_{ij} , tedy

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \cdot \quad (10.D.1)$$

O jeho složkách nic speciálního nevíme (třeba že by některé byly nulové apod.), kromě obecného faktu, že $\tau_{ij} = \tau_{ji}$.

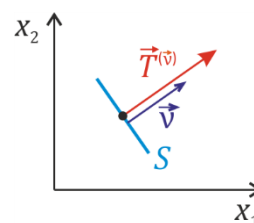
Chceme zjistit, jestli v daném bodě můžeme najít plošku natočenou tak, aby napětí na ní bylo čistým tahem nebo tlakem, tedy aby na ní nebylo žádné smykové napětí.²²⁷

Natočení plošky je dáno jejím normálovým vektorem \vec{v} . Má-li na plošce být jen čistý tah nebo tlak, musí mít vektor napětí $\vec{T}^{(\vec{v})}$ stejný směr jako \vec{v} , viz obrázek. Musí tedy být

$$\vec{T}^{(\vec{v})} = \kappa \vec{v}, \quad (10.D.2)$$

kde κ je nějaké reálné číslo. Zapsáno ve složkách je to:

$$T_i^{(\vec{v})} = \kappa v_i. \quad (10.D.3)$$



Vektor napětí vyjádříme pomocí tenzoru napětí (viz (10.15)): $T_i^{(\vec{v})} = \sum_{j=1}^3 \tau_{ji} v_j = \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} v_j$.²²⁸

Z (10.D.3) dostaneme

$$\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} v_j = \kappa v_i. \quad (10.D.4)$$

Pomocí matic²²⁹ se to dá zapsat ve tvaru

$$\begin{pmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \kappa \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}, \quad (10.D.5)$$

kde vektor \vec{v} je zapsán ve tvaru sloupcového vektoru.

Vektor \vec{v} , který splňuje (10.D.5)²³⁰ se nazývá **vlastní vektor** dané matice (v našem případě matice τ), číslo κ je **vlastní číslo** této matice (příslušné k danému vlastnímu vektoru²³¹).

²²⁷ Snad je tahle formulace srozumitelná, i když je vlastně po matematické stránce nesmyslná: v bodě nemůže být žádná ploška. (Na to je moc malý. ☺) Prostě jde o plošku procházející tím bodem, přičemž nám jde o vektor napětí k dané plošce právě v tom bodě.

²²⁸ Pořadí indexů můžeme přehodit, protože tenzor napětí je symetrický.

²²⁹ Předpokládám, že s maticemi jste se už setkali. Pokud zatím ne, nebo pokud jste se nepotkali s některými souvisejícími věcmi (za chvíli budeme potřebovat determinant matice), nevěšte hlavu. Buď si zatím vystačíte s vyjádřením příslušných operací ve složkách (např. (10.D.4)), nebo můžete celý tento dodatek projít jen zběžně nebo úplně ignorovat a vrátit se k němu, až se třeba v předmětu *Lineární algebra* s danou tematikou seznámíte.

²³⁰ Respektive (10.D.4), jde o totéž, jen zapsané jinou formou.

²³¹ Nebo naopak říkáme, že daný vlastní vektor přísluší k danému vlastnímu číslu, prostě vlastní číslo a vlastní vektor si přísluší navzájem.

S vlastními vektory a vlastními čísly se budete potkávat i v jiných oblastech fyziky, zejména v kvantové fyzice.²³²

... od fyziky k matematice...

Problém, zda k dané matici existují vlastní vektory a vlastní čísla, kolik jich je a jak je najít, je problém čistě matematický.²³³ Pojdme se na něj tedy stručně podívat z hlediska matematiky. Změníme proto, alespoň na chvíli, trochu i označení. Většinou se totiž vlastní čísla označují symbolem λ ,²³⁴ to jsme výše v (10.D.4 a 5) nepoužili, aby se nám to nepletlo s jedním z Laméových koeficientů.

Takže vlastní číslo teď označíme jako λ , koeficienty matice budeme označovat a_{ij} , a složky hledaného vlastního vektoru x_i . Rovnici pro vlastní čísla a vlastní vektory tedy zapíšeme ve tvaru

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \quad (10.D.6)$$

Jednoduchou úpravou odsud dostaneme

$$\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \mathbf{0}. \quad (10.D.7)$$

Tento vztah představuje tři lineární rovnice o třech neznámých x_1 , x_2 a x_3 . Ovšem pokud matice na levé straně (10.D.7) je *regulární*²³⁷, je jediným řešením (10.D.7) triviální řešení $x_1=0$, $x_2=0$, $x_3=0$. To nás ale nezajímá.²³⁸ Takže potřebujeme, aby matice nebyla regulární, ale *singulární*. To se pozná tak, že její **determinant je roven nule**:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0. \quad (10.D.8)$$

Tento determinant dá po vyčíslení polynom třetího řádu v proměnné λ . (Viz poznámku pod čarou²²⁹.) Říká se mu *charakteristický polynom*. (Rovnici (10.D.8) se říká *charakteristická rovnice*.)

²³² Tam by to bez nich ani nešlo, bude to jeden z nejdůležitějších matematických nástrojů. Jen bude tento pojem zobecněn na *operátory* působící na dost obecných vektorových prostorech. Ale v zásadě to je podobné, jako zde u matic. Třeba tak důležitá věc jako Schrödingerova rovnice (přesněji řečeno bezčasová Schrödingerova rovnice) má tvar $\hat{H}|\psi\rangle = E|\psi\rangle$; v tom poznáváme vlastní vektor (to je to $|\psi\rangle$) a vlastní číslo, to je E .

²³³ Pokud už jej znáte třeba z algebry, můžete následující část textu vypustit nebo jen pro kontrolu zběžně přelétnout.

²³⁴ Třeba i na české Wikipedii na stránce věnované vlastním vektorům a vlastním číslům https://cs.wikipedia.org/wiki/Vlastn%C3%AD_vektory_a_vlastn%C3%AD_%C4%8D%C3%ADsla.

²³⁵ Nebo ve složkách: $\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = \lambda x_i$.

²³⁶ Ve složkách: $\sum_{j=1}^3 (a_{ij} - \lambda \delta_{ij}) x_j = 0$. Nula na pravé straně znamená sloupcový vektor se všemi složkami rovnými nule.

²³⁷ Což například mimo jiné znamená, že k ní existuje matice inverzní.

²³⁸ Takovéto řešení se ani nebere jako vlastní vektor. A nezajímá nás ani fyzikálně. Například z (10.D.5) chceme dostat normálový vektor k plošce, tedy určit směr – a nulový vektor žádný směr neurčí.

²³⁹ Nevíte-li zatím, co je determinant, netrapte se. Pro danou matici 3×3 je determinant v (10.D.8) roven $(a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda)(a_{33}-\lambda) + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}(a_{22}-\lambda)a_{31} - a_{12}a_{21}(a_{33}-\lambda) - (a_{11}-\lambda)a_{23}a_{32}$, ale jeho konkrétní tvar stejně nebudeme potřebovat.

To znamená, že determinant v (10.D.8) je roven nule jen pro nějaké určité hodnoty λ – a právě tyto hodnoty jsou hledanými vlastními čísly.²⁴⁰

Protože determinant dá polynom v proměnné λ , potřebujeme najít jeho kořeny. Matematika nás poučí, že každý polynom stupně n má n kořenů.²⁴¹ Některé kořeny ovšem mohou být totožné, to nevadí. Ovšem kořeny obecně mohou být komplexní²⁴² – a to už by nám při našem hledání hlavních směrů tenzoru napětí vadilo, protože složky vektoru napětí určitě nemohou být komplexní čísla.

Naštěstí se ukazuje, že **vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná**. A reálné pak mohou být i všechny složky vlastních vektorů.

Jak to dokážeme?

Je-li λ vlastní číslo matice a_{ij} a x_i jsou složky jejího vlastního vektoru, pak platí (10.D.6), ve složkách tedy

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = \lambda x_i \quad . \quad (10.D.9)$$

O vlastním čísle λ a složkách x_i ovšem nevíme, jestli jsou reálné nebo komplexní. Předpokládejme tedy, že jsou komplexní. V odvození budeme potřebovat jejich komplexně sdružené hodnoty, ty budeme označovat λ^* a x_i^* . Složky matice jsou reálné, platí tedy $a_{ij}^* = a_{ij}$.

Komplexním sdružením (10.D.9) dostaneme

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j^* = \lambda^* x_i^* \quad . \quad (10.D.10)$$

Nyní vynásobíme (10.D.9) x_i^* a sečteme přes i :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_i^* x_j = \lambda \sum_{i=1}^3 x_i x_i^* \quad . \quad (10.D.11)$$

Analogicky vynásobíme (10.D.10) x_i a sečteme přes i :

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j^* x_i = \lambda^* \sum_{i=1}^3 x_i^* x_i \quad . \quad (10.D.12)$$

Ovšem díky symetrii matice, tedy díky tomu, že $a_{ij} = a_{ji}$, můžeme levou stranu (10.D.12) přepsat na

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j^* x_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ji} x_j^* x_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ij} x_i^* x_j \quad , \quad (10.D.13)$$

a porovnáním s (10.D.11) vidíme, že se levé strany (10.D.11) a (10.D.12) rovnají.²⁴³ Rovnají se tedy i jejich pravé strany,

$$\lambda \sum_{i=1}^3 x_i x_i^* = \lambda^* \sum_{i=1}^3 x_i^* x_i \quad , \quad (10.D.14)$$

a protože se rovnají sumy, plyne z (10.D.14) okamžitě, že

$$\lambda^* = \lambda \quad . \quad (10.D.15)$$

²⁴⁰ Takže už víme, jak hledat vlastní čísla! Navíc tenhle postup platí nejen pro matice 3×3 , ale pro libovolné matice $n \times n$.

²⁴¹ Tohle tvrzení souvisí se *základní větou algebry*. Ta tvrdí, že každý (nekonstantní) polynom jedné proměnné s komplexními koeficienty má alespoň jeden komplexní kořen. Z toho lze odvodit, že kořenů je n ; některé kořeny ovšem mohou splývat.

²⁴² To ostatně známe už z běžné kvadratické rovnice.

²⁴³ Na pořadí sumací nezáleží, protože se celkem sčítá přes všechny kombinace indexů i a j .

To znamená, že vlastní číslo λ je reálné.²⁴⁴ A protože jsme úvahu vedli obecně (λ bylo prostě nějaké vlastní číslo dané matice), platí výsledek pro všechna vlastní čísla. Dokázali jsme tedy, že všechna vlastní čísla reálné symetrické matice jsou reálná.

A co vlastní vektory?

Vzhledem k tomu, že libovolný násobek vlastního vektoru je opět vlastní vektor (příslušný stejnému vlastnímu číslu)²⁴⁵, mohou být samozřejmě všechny složky vlastního vektoru komplexní. (Stačí, když vektor vynásobíme třeba číslem $(1+i)$.) Takže správný dotaz zní, jestli – když máme reálnou symetrickou matici a její nějaké vlastní číslo λ (o kterém už víme, že je reálné) – jde příslušný vlastní vektor najít tak, že všechny jeho složky jsou reálné. A ono to jde!

Když si vedle sebe zapíšeme (10.D.9) a (10.D.10), v němž už vezmeme $\lambda^* = \lambda$,

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j^* = \lambda x_i^*, \quad (10.D.16)$$

vidíme, že tyto vztahy můžeme sečíst a dostat

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} (x_j + x_j^*) = \lambda (x_i + x_i^*). \quad (10.D.17)$$

To znamená, že vektor $(x_j + x_j^*)$ je také vlastním vektorem matice a_{ij} příslušným vlastnímu číslu λ . A tento vektor už je reálný!

Čili už víme, že

**reálná symetrická matice má tři reálná vlastní čísla (ne nutně různá)
a k nim příslušné vlastní vektory jsou reálné (přesněji řečeno lze je vzít jako reálné).**

Pozorný čtenář si ovšem může položit otázku:

Co když jsou vlastní čísla stejná?

Není to v tomto případě tak, že i vlastní vektory musí být stejné resp. alespoň mířit stejným směrem?²⁴⁶

Není tomu tak. Lineární algebra nás poučí, že pokud je λ dvojnásobným kořenem charakteristického polynomu, existují dva lineárně nezávislé vlastní vektory, pokud je trojnásobným kořenem, existují tři nezávislé vlastní vektory.²⁴⁷ Obecně to zde ukazovat nebudeme, jen to ilustrujeme na nejjednodušším příkladu jednotkové matice. Pro ni je charakteristická rovnice (10.D.8)

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (10.D.18)$$

²⁴⁴ Když se komplexní číslo $a+bi$ rovná témuž číslu komplexně sdruženému, $(a+bi)^* = a-bi$, je nutně $b=0$, takže číslo je reálné. (Ne že byste tohle nevěděli, ale pokud už jste předchozími úvahami a odvozeními trochu „uondaní“, zasloužíte si, aby se tu raději explicitě vypsala i takhle jednoduchá věc. ☺)

²⁴⁵ Podívejte se třeba na (10.D.9), když tam místo x_i dosadíte třeba $100 x_i$, bude vztah stále platit. Takže $100 x_i$ je opět vlastní vektor příslušný ke stejnému λ .

²⁴⁶ Jde tu opravdu o směr vlastních vektorů. Jak už jsme viděli, každý násobek vlastního vektoru je zase vlastním vektorem příslušným stejnému vlastnímu číslu.

²⁴⁷ Ona lineární algebra nás poučí, že toto platí obecně, ve vektorovém prostoru o n dimenzích: Když je λ vlastní číslo, které je m -násobným kořenem charakteristického polynomu, tak existuje m lineárně nezávislých vlastních vektorů příslušných tomuto vlastnímu číslu.

tedy

$$(1 - \lambda)^3 = 0, \quad (10.D.19)$$

čili charakteristický polynom $(1 - \lambda)^3$ má zjevně trojnásobný kořen $\lambda = 1$. Rovnice (10.D.7) pro vlastní vektory příslušné tomuto vlastnímu číslu je

$$\begin{pmatrix} 1 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0, \text{ čili } \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0 \quad (10.D.20)$$

a je vidět, že jejím řešením jsou libovolná čísla x_1, x_2, x_3 , tedy libovolný vektor. Takže opravdu máme tři nezávislé vlastní vektory.²⁴⁸

Když jsou vlastní čísla různá...

Podívejme se, jak je tomu s vlastními vektory, když jsou vlastní čísla různá.

Nechť matice a_{ij} má vlastní čísla λ a $\tilde{\lambda}$, přitom $\lambda \neq \tilde{\lambda}$. Příslušné vlastní vektory označíme x_i a \tilde{x}_i .²⁴⁹

Rovnice (10.D.9) pro vlastní čísla a vlastní vektory jsou tedy

$$\sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j = \lambda x_i, \quad \sum_{j=1}^3 a_{ij} \tilde{x}_j = \tilde{\lambda} \tilde{x}_i. \quad (10.D.21)$$

První rovnici vynásobíme \tilde{x}_i a sečteme přes i od 1 do 3. Druhou vynásobíme x_i a také sečteme přes i . Dostaneme

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \tilde{x}_i = \lambda \sum_{i=1}^3 x_i \tilde{x}_i, \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \tilde{x}_j x_i = \tilde{\lambda} \sum_{i=1}^3 \tilde{x}_i x_i. \quad (10.D.22)$$

Díky symetrii matice jsou levé strany výsledných vztahů stejné.²⁵⁰ Musí se proto rovnat i jejich pravé strany, $\lambda \sum_{i=1}^3 x_i \tilde{x}_i = \tilde{\lambda} \sum_{i=1}^3 \tilde{x}_i x_i$. Odtud dostaneme

$$(\lambda - \tilde{\lambda}) \sum_{i=1}^3 x_i \tilde{x}_i = 0, \quad (10.D.23)$$

a protože vlastní čísla jsou různá, tj. $\lambda - \tilde{\lambda} \neq 0$, musí být $\sum_{i=1}^3 x_i \tilde{x}_i = 0$. Ovšem $\sum_{i=1}^3 x_i \tilde{x}_i$ je skalární součin obou vlastních vektorů – a protože je nulový, musí být vektory na sebe kolmé. Dokázali jsme, že

vlastní vektory odpovídající různým vlastním číslům jsou na sebe kolmé.

²⁴⁸ Klidně je můžeme zvolit třeba do směrů souřadnicových os.

²⁴⁹ Asi bych se měl omluvit pozornému čtenáři, který nejspíš již dlouho namítá, že zde formulujeme trochu „nepořádně“. Samozřejmě, x_i jsou složky daného vektoru, stejně tak a_{ij} jsou složky matice. Formulace typu „vektor x_i “ a podobné zde používáme pro stručnost místo delších vyjádření typu „vektor se složkami x_i “, „matice se složkami a_{ij} “, či místo zavádění samostatných symbolů pro matice a sloupcové vektory. Snad to nepůsobí nedorozumění nebo nějaké trauma... (Kdybych chtěl argumentovat, že výše uvedené „zkratkovité“ vyjadřování není zas až tak zavrženíhodné, tak bych se mohl vymlouvat, že zde vlastně používáme takzvaný *formalismus abstraktních indexů*, nazývaný též *abstraktní indexová notace*, který je spojován se jménem Rogera Penrose – ale snad mi laskavý čtenář stručné značení odpustí i bez této výmluvy a zaštiťování se jménem nositele Nobelovy ceny za rok 2017...)

²⁵⁰ $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} x_j \tilde{x}_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \tilde{x}_j x_i$. Je totiž $\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \tilde{x}_j x_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ji} \tilde{x}_j x_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{i=1}^3 a_{ji} \tilde{x}_j x_i = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_{ij} \tilde{x}_i x_j$.

Při úpravě jsme využili symetrii matice, přehození pořadí sumací a nakonec přejmenování indexů, z i na j a z j na i . (Rozmyslete si, že všechno to jsou korektní úpravy.)

Pokud dva vektory odpovídají stejnému vlastnímu číslu λ , pak jejich libovolná lineární kombinace je opět vlastním vektorem odpovídajícím témuž vlastnímu číslu λ .²⁵¹ Lze tedy určitě zvolit takové lineární kombinace, které jsou na sebe kolmé. (Totéž bude platit i v případě tří vektorů odpovídajících stejnému λ .) Vidíme tedy, že

vlastní vektory reálné symetrické matice jsou reálné a všechny na sebe kolmé
(nebo je alespoň lze zvolit tak, že jsou na sebe kolmé).

... a zpět k fyzice ...

Výše jsme odvodili, že na plošce, jejíž normálový vektor $\vec{\nu}$ splňuje rovnici (10.D.5), je čistý tah ev. čistý tlak, tedy žádné smykové napětí. Směru danému takovým vektorem $\vec{\nu}$ říkáme **hlavní směr tenzoru napětí**.

Jen jsme vlastně nevěděli, jestli nějaký takový směr existuje, případně jestli jich může být víc. Díky našemu exkurzu do problematiky vlastních vektorů a vlastních čísel už to víme. Protože tenzor napětí je symetrický (a samozřejmě všechny jeho složky jsou reálné) existují tři vlastní čísla a tři vektory řešící rovnici (10.D.5).²⁵² A dokonce víme, že tyto tři vektory jsou kolmé, respektive že je můžeme kolmé volit. Dokázali jsme tedy, že

v každém bodě kontinua existují tři vzájemně kolmé hlavní směry tenzoru napětí.²⁵³

²⁵¹ Lehce to ověříte, když do vztahů $\sum_{j=1}^3 a_{ij}x_j = \lambda x_i$, $\sum_{j=1}^3 a_{ij}\tilde{x}_j = \lambda \tilde{x}_i$ vystihujících, že jde o vlastní vektory odpovídající

vlastnímu číslu λ , dosadíte libovolnou lineární kombinaci $\tilde{\tilde{x}}_j = b x_j + \tilde{b} \tilde{x}_j$. Uvidíte, že splňuje tentýž vztah.

²⁵² Pokud by některá vlastní čísla byla stejná, je vektorů víc, protože máme libovolně volit jejich lineární kombinace, jak bylo diskutováno výše.

²⁵³ Přičemž v některých případech tyto směry nemusí být určeny jednoznačně, viz poznámku⁶¹ na straně 15.

Dodatek 10.E: Rovnice rovnováhy kontinua *

Když jsme zaváděli tenzor napětí, počítali jsme síly působící na malý kousek materiálu (ve tvaru jehlanu) a uvažovali jsme, že celková síla na něj působící musí být nula, aby byl v rovnováze. Díky limitování na „nekonečně malý kousek“ pak vypadly objemové síly a mohli jsme odvodit vztah (10.13). Plošné síly se v tomto případě zcela vyrovnaly.

Ovšem když kousek materiálu není „úplně nekonečně malý“, objemové síly na něj působí. Například na malý kvádrík o objemu $V = abc$ na obrázku působí objemová síla

$$\vec{F}^{\text{ob.}} = \vec{G}V = \vec{G}abc,$$

kde \vec{G} je hustota objemové síly.²⁵⁴ Obvykle je objemovou silou síla gravitační, resp. tíhová, takže

$$\vec{G} = \rho \vec{g},$$

kde ρ je hustota a \vec{g} tíhové zrychlení.²⁵⁵

Pokud by se plošné síly na kvádrík zcela vyrovnaly, jak jsme to uvažovali výše, musela by objemová síla kvádrík urychlovat. Proč se tak neděje?

Inu proto, že plošné síly působící na stěny kvádríku nejsou zcela v rovnováze.²⁵⁶ Podívejme se například na síly působící na pravou a levou stěnu kvádru. Zaměříme se přitom na složku sil do směru osy x_1 .²⁵⁷

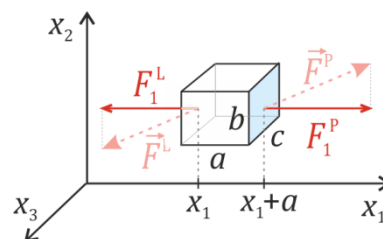
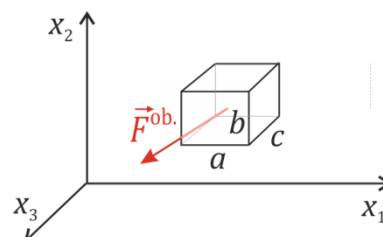
Složka síly do směru x_1 působící na pravou stěnu je dána součinem napětí τ_{11} a plochy stěny $S_1 = bc$. Napětí ovšem musíme brát na dané stěně, tedy v bodě $(x_1 + a, x_2, x_3)$.²⁵⁸ Složka síly na pravou stěnu tedy je

$$F_1^{\text{P}} = \tau_{11}(x_1 + a, x_2, x_3)bc.$$

Na levé stěně bereme napětí v bodě (x_1, x_2, x_3) , takže složka síly je

$$F_1^{\text{L}} = -\tau_{11}(x_1, x_2, x_3)bc.$$
²⁵⁹

Celková síla ve směru osy x_1 působící na pravou a levou stěnu tedy je



²⁵⁴ V učebnici Kvasnica a kol.: *Mechanika* se pro \vec{G} používá prostě název *objemová síla*, o hustotě se tam nemluví, i když fakticky o hustotu jde: sílu (v newtonech) dostaneme, až když \vec{G} vynásobíme objemem.

²⁵⁵ V obrázku jsme ale $\vec{F}^{\text{ob.}}$ nakreslili obecným směrem, ne nutně svisle.

²⁵⁶ Nejde o to, že při odvozování (10.13) jsme uvažovali jehlan a nyní kvádr, ale o malé rozdíly v plošných silách třeba na levou a pravou stěnu kvádru, když nejsou zcela u sebe, tedy když nejde o jednu plochu. Tedy když se nejedná o napětí působící v témže bodě.

²⁵⁷ Nakonec naše úvahy zobecníme i na ostatní složky sil, ale pro jednoduchost začneme složkami F_1 .

²⁵⁸ Pozorný čtenář by se mohl zeptat, jaké jsou hodnoty x_2 a x_3 . Tady musíme přiznat, že naše odvození není úplně precizní. Jednoduše bychom mohli říci, že hodnoty x_2 a x_3 bereme tak, aby šlo o bod ve středu pravé stěny. Ale fakticky je potřeba brát průměrnou hodnotu napětí τ_{11} na celé pravé stěně. Tuto hodnotu bychom mohli napsat pomocí plošného integrálu a celé odvození formalizovat a „vycizelovat“. Ale pro názornost zde pracujeme trochu zjednodušeně (no, přiznejme, že „nepořádně“) a prezentujeme hlavně základní myšlenku daného odvození a ne formální detaily. Naštěstí díky tomu, že rozměry kvádru budeme nakonec limitovat k nule, fakticky nebude záležet na tom, zda je bod x_2, x_3 ve středu stěny nebo v rohu a výsledný vztah dostaneme stejný, jako by vyšel po formálně přesném odvození.

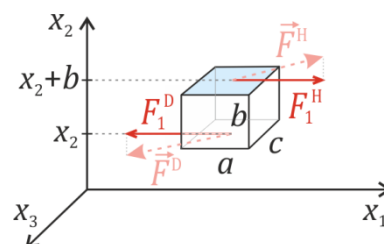
²⁵⁹ Rozmyslete si, proč je zde znaménko mínus. (Nápověda: Viz (10.15), $\vec{v} = (-1, 0, 0)$.)

$$\begin{aligned}
 F_1^{\text{PL}} &= \tau_{11}(x_1 + a, x_2, x_3)bc - \tau_{11}(x_1, x_2, x_3)bc = \\
 &= \underbrace{\left(\tau_{11}(x_1 + a, x_2, x_3) - \tau_{11}(x_1, x_2, x_3) \right)}_{\doteq \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} a} bc \doteq \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} abc . \quad (10.E.1)
 \end{aligned}$$

Při úpravě jsme nahradili rozdíl funkce $\tau_{11}(x_1, x_2, x_3)$ ve dvou blízkých bodech součinem derivace a rozdílu souřadnic těchto blízkých bodů. Body se liší jen v souřadnici x_1 , proto je zde parciální derivace podle této souřadnice.

Ve směru osy x_1 ovšem působí i síly na dalších stěnách kvádru. Například na horní a dolní stěně, viz obrázek. Tam ve směru x_1 působí tečná složka sil, příslušné tečné napětí je τ_{21} . Velikost plochy každé z těchto stěn je $S_2 = ac$, takže síly ve směru x_1 jsou

$$\begin{aligned}
 F_1^{\text{H}} &= \tau_{21}(x_1, x_2 + b, x_3)ac , \\
 F_1^{\text{D}} &= -\tau_{21}(x_1, x_2, x_3)ac ,
 \end{aligned}$$



Celková síla ve směru osy x_1 působící na horní a dolní stěnu tedy je (analogicky k (10.E.1))

$$\begin{aligned}
 F_1^{\text{HD}} &= \tau_{21}(x_1, x_2 + b, x_3)ac - \tau_{21}(x_1, x_2, x_3)ac = \\
 &= \underbrace{\left(\tau_{21}(x_1, x_2 + b, x_3) - \tau_{21}(x_1, x_2, x_3) \right)}_{\doteq \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} b} ac \doteq \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} abc . \quad (10.E.2)
 \end{aligned}$$

Zcela analogicky by vyšla celková síla ve směru osy x_1 na přední a zadní stěnu:

$$F_1^{\text{PZ}} \doteq \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} abc . \quad (10.E.3)$$

Celková plošná síla ve směru osy x_1 působící na všechny stěny je součtem:

$$F_1^{\text{ploš}} = F_1^{\text{PL}} + F_1^{\text{HD}} + F_1^{\text{PZ}} \doteq \left(\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \tau_{21}}{\partial x_2} + \frac{\partial \tau_{31}}{\partial x_3} \right) abc = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{j1}}{\partial x_j} abc . \quad (10.E.4)$$

Analogicky je tomu pro síly do směrů os x_2 a x_3 .²⁶⁰ Obecně je tedy i -tá složka síly:

$$F_i^{\text{ploš}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} abc . \quad (10.E.5)$$

V rovnováze musí být součet celkové plošné síly $\vec{F}^{\text{ploš}}$ a objemové síly \vec{F}^{ob} roven nule. Pro i -tou složku tedy

$$0 = F_i^{\text{ploš}} + F_i^{\text{ob}} = \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} abc + G_i abc = \left(\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + G_i \right) abc . \quad (10.E.6)$$

Odtud okamžitě²⁶¹

$$\boxed{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3.} \quad (10.E.7)$$

A právě toto je **rovnice rovnováhy kontinua**. Je-li objemovou silou síla gravitační, má tato rovnice tvar

$$\boxed{\sum_{j=1}^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i = 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, 3.} \quad (10.E.8)$$

²⁶⁰ Ostatně kterou z os jsme pojmenovali x_1 , bylo věcí volby. Takže to, co jsme odvodili pro složku síly do směru x_1 , musí platit i pro složky do směrů dalších os.

²⁶¹ (10.E.6) vydělíme abc a potom rozměry kvádru limitujeme k nule, tím se přibližné rovnosti stanou přesnými.

Podstatně kratší odvození pro čtenáře, kteří už znají Gaussovu větu ** ²⁶²

Gaussova věta říká, že plošný integrál z vektoru \vec{a} přes uzavřenou plochu S , která je hranicí objemu V , se rovná objemovému integrálu z divergence vektoru \vec{a} přes objem V :

$$\oint_S \vec{a} \cdot \vec{n} dS = \int_V \operatorname{div} \vec{a} dV \quad . \quad ^{263} \quad (10.E.9)$$

Zapsáno ve složkách a s využitím Einsteinovy sumační konvence:

$$\oint_S a_j n_j dS = \int_V \frac{\partial a_j}{\partial x_j} dV \quad . \quad (10.E.10)$$

A teď jak sem zapracovat plošné síly:

i -tá složka vektoru napětí na ploše s normálovým vektorem \vec{n} je (viz (10.15)) $T_i^{(\vec{n})} = \tau_{ji} n_j$. Celkovou plošnou sílu $\vec{F}^{\text{ploš.}}$ (resp. její i -tou složku $F_i^{\text{ploš.}}$) na plochu S tedy spočteme integrálem $\oint_S \tau_{ji} n_j dS$. S využitím (10.E.10) je:

$$F_i^{\text{ploš.}} = \oint_S \tau_{ji} n_j dS = \int_V \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} dV \quad . \quad (10.E.11)$$

Celková objemová síla je $F_i^{\text{objem.}} = \int_V G_i dV$, takže celková síla (plošná i objemová) na látku ve V je

$$F_i = \int_V \left(\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + G_i \right) dV \quad . \quad (10.E.12)$$

Má-li být materiál v rovnováze, musí být tato síla nulová pro libovolný kousek objemu. Musí tedy platit

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + G_i = 0 \quad (\text{pro } i = 1, 2, 3). \quad (10.E.13)$$

A to už je rovnice rovnováhy kontinua. ²⁶⁴

²⁶² Je míněna Gaussova věta z matematiky (nazývaná též Gaussova-Ostrogradského věta), ne Gaussova věta elektrostatiky. Když ji neznáte, nevěšte hlavu a klidně tuto stránku ignorujte. Na odvození se můžete podívat, až se časem s Gaussovou větou seznámíte.

²⁶³ Připomeňme, že \vec{n} je normálový vektor k ploše.

²⁶⁴ Odvozená rychle a elegantně... No není ta matematika úžasně efektivní?

Na druhou stranu z předchozího jednoduchého odvození bylo názorněji vidět, jak ty plošné síly kousek materiálu tlačí a táhnou.