Hydrostatika a hydrodynamika

V této kapitole se budeme zabývat mechanikou **tekutin**, tedy kapalin a plynů. Budeme je přitom popisovat jako kontinuum, tedy spojitě rozloženou látku; nebudeme si všímat toho, že jsou složeny z molekul. Jde tedy opět o idealizaci – nepopíšeme jevy jako difúze a fakticky se nebudeme věnovat třeba ani povrchovému napětí.[1] Ale i tak jsme zase o kus blíže realitě, než když naší idealizací bylo například tuhé těleso. A veličiny jako hustota, tlak a rychlost nám umožní říci o pohybu tekutin leccos užitečného.

Budeme zde navazovat na mechaniku kontinua, které jsme se věnovali v minulé kapitole. Při popisu napětí v tekutině proto občas dojde na tenzor napětí a při popisu, jak tečou reálné tekutiny, i na tenzor rychlosti deformace. Většinou se ale obejdeme se bez tenzorů[2] a jevy související s tekutinami budeme popisovat pomocí co možná jednoduchých veličin a vztahů; někdy dokonce jen jednoduchých úvah. V této kapitole se tedy bude prolínat středoškolský (někdy dokonce základoškolský) a vysokoškolský přístup.[3] Přiučíme se zde také leccos nového z matematiky, co se bude hodit i v dalších partiích fyziky.

11.1 Úvod

Tekutiny

Jako tekutiny označujeme **kapaliny** a **plyny**. Řada jejich vlastností je podobných, v mechanice tekutin je proto budeme popisovat dohromady, byť třeba stlačitelností se většinou výrazně liší.[4]

V předchozí kapitole jsme viděli, že v kontinuu obecně existují napětí tahová, resp. tlaková, a smyková. **V tekutinách jsou ve statické situaci[5] smyková napětí rovna nule**. Musí to tak být: pokud by byla smyková napětí nenulová, tekutina by nemohla být v klidu, vrstvy tekutiny by se po sobě posouvaly. (Prostě, tekutina by tekla tak dlouho, dokud by se neobnovila rovnováha.)

V proudící tekutině jsou ale smyková napětí obecně různá od nuly. Pokud se vrstvy kapaliny pohybují různými rychlosti, třou se o sebe a v důsledku vnitřního tření vzniká napětí ve smyku.

Velikost vnitřního tření charakterizuje ***viskozita***, a ta je u různých tekutin různá. Například voda má viskozitu výrazně nižší, než med.[6] Pokud nebudeme popisovat zrovna tečení medu, můžeme tedy doufat, že alespoň v některých situacích budeme moci vnitřní tření a smyková napětí zanedbat – můžeme čekat, že rovnice pro proudění tekutin budou v tomto případě jednodušší.[7]

Ideální tekutina

Hodí se proto zavést pojem ***ideální tekutina*** – to je tekutina, v níž ***neexistuje vnitřní tření***. Napětí v ideální tekutině proto nemá smykové složky. Formálně bude takové napětí popsáno tenzorem napětí, který má nenulové jen diagonální složky. Trochu si ho připomeneme, než přejdeme k jednodušším vyjádřením.

---

[1] Byť to je nezbytné při vysvětlování jevů jako kapilární elevace nebo tvaru malých kapiček vody a třeba i toho, proč se proud vody rozstřikuje na malé kapičky. Prostě, v mechanice tekutin nevysvětlíme všechno. (S danými jevy si počkejte na přednášku *Molekulová fyzika*.)

[2] Uklidnilo vás to, nebo rozesmutnilo?

[3] Co do stránkového rozsahu je tato kapitola o něco delší, věřím však, že dostatečně podrobná odvození v kombinaci se středoškolským přístupem umožní probíraným tématům z mechaniky tekutin lépe porozumět.

[4] Ne vždy, nad *kritickou teplotou* plyn a kapalinu nerozlišíme. To už ale opravdu patří do molekulové fyziky.

[5] Například ve vodě v nádobě (polévce v talíři, minerální vodě v láhvi nebo pivu v půllitru).

[6] Navíc třeba viskozita vody klesá s teplotou, viskozita medu ostatně také.

[7] A ony opravdu jsou – poznáme to dále ke konci této kapitoly.

Tenzor napětí ideální tekutiny má tedy složky $\tau_{11} = \tau_{22} = \tau_{33} = -p$, $\tau_{ij} = 0$ pro $i \neq j$, čili

$$\boxed{\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}\ ,} \tag{11.1}$$

což můžeme alternativně zapsat jako

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix} . \tag{11.2}$$

Napětí v ideální tekutině je charakterizováno jedinou skalární veličinou p, což je ***tlak***.[8]

Samozřejmě, tlak obecně závisí na místě: $p = p(\vec{r})$.

I když s tenzory v této kapitole dál nebudeme příliš pracovat, stojí za zmínku, že tenzor napětí má uvedený tvar (11.2) v libovolně natočené kartézské soustavě souřadnic.[9] Z toho také plyne důležitý fakt:

V daném bodě ideální tekutiny působí na libovolně natočenou plošku stejný tlak.[10]

Ve statické situaci toto platí i pro reálnou tekutinu (tedy tekutinu, v níž existuje vnitřní tření). Tuto skutečnost můžeme ověřit pokusem.

Ideální kapalina

Kapaliny jsou velmi málo stlačitelné. V řadě případů můžeme jejich stlačitelnost zanedbat. Hodí se proto zavést další pojem: ***ideální kapalina*** – to je kapalina, která je zcela nestlačitelná a navíc má nulové vnitřní tření (je tedy zároveň ideální tekutinou). Jasným důsledkem této definice je:

Ideální kapalina má konstantní hustotu, ρ = konst.

Podstatné je, že hustota ideální kapaliny nezávisí na tlaku.[11]

Terminologické poznámky:

Místo „ideální tekutina" a „ideální kapalina" se často užívají termíny „dokonalá tekutina", resp. kapalina.

V souvislosti s rozdělením tekutin na kapaliny a plyny se často používá název ***hydromechanika*** pro mechaniku kapalin a ***aeromechanika*** pro mechaniku plynů. My zde v této kapitole budeme používat termín ***hydrostatika*** pro část mechaniky tekutin popisující statické chování tekutin (jak kapalin, tak plynů) a podobně termín ***hydrodynamika*** pro část mechaniky tekutin studující jejich proudění. („Hydro" se tedy nebude vztahovat jen k vodě, ale ke všem tekutinám.)

---

[8] Nemusíme asi připomínat, že znaménko mínus je v těchto vztazích díky tomu, že τ_{11}, τ_{22} a τ_{33} jsou napětí *v tahu* ve směru jednotlivých os.

[9] Formálně bychom to odvodili, když bychom přetransformovali tento tenzor z jedné kartézské soustavy do jiné, natočené. S tím souvisí další věc: Skutečnost, že tlak ve směrech všech tří os je stejný, tedy že τ_{11}= τ_{22}= τ_{33}, lze odvodit z požadavku, že smyková napětí musí být nulová v libovolně natočené soustavě souřadnic. Lze to odvodit i názorně, viz Dodatek A0.

[10] Někdy se to vyjadřuje formulací „Tlak působí všemi směry stejně."

[11] Když je kapalina nestlačitelná, tak ji libovolně velkým tlakem nestlačíme, tedy nezměníme její hustotu. Reálně samozřejmě žádná kapalina není ideální a pro popis některých jevů tato idealizace není vhodná: v ideální kapalině by se například zvuk šířil nekonečně rychle. V řadě případů jde však o idealizaci užitečnou.

11.2 Hydrostatika

V hydrostatice jde o popis tekutiny **v klidu** – o to, jaký je v ní v různých místech tlak a jak tento tlak působí na tělesa, která jsou v ní ponořena nebo na hladině kapaliny plavou. Samozřejmě, příslušné zákony a mnohé výsledky už známe ze střední či dokonce základní školy,[12] ale zde je odvodíme od začátku, možná trochu zpřesníme a aplikujeme i na některé nové situace.

Rovnováha v tekutině

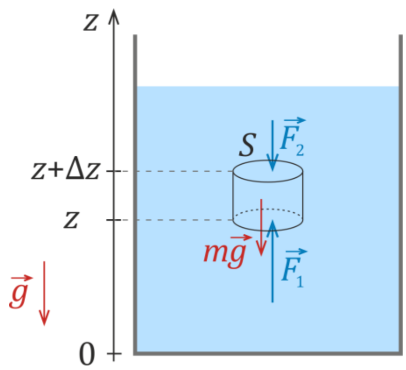
Budeme uvažovat tekutinu, na níž působí gravitace; gravitační pole popíšeme gravitačním zrychlením $\vec{g}$. Z úvodu už víme, že napětí v tekutině je ve statickém případě charakterizováno jedinou skalární veličinou, tlakem p. V gravitačním poli bude hrát roli také hustota tekutiny ρ. Hustota i tlak mohou být obecně závislé na místě:[13]

$$\rho = \rho(\vec{r}), \quad p = p(\vec{r}) \ . \tag{11.3}$$

Pokud půjde o kapalinu, bude ovšem hustota prakticky konstantní, pro ideální kapalinu pak bude přesně ρ = konst.

Situací, které odpovídají uvedenému abstraktnímu popisu, je samozřejmě mnoho: limonáda nebo jiný nápoj ve sklenici[14], voda v přehradní nádrži, moře v … no v tom, co ohraničuje moře, tedy dno a pobřeží. Ale třeba také plyn v tlakové nádobě nebo celá zemská atmosféra.

Ve statické situaci je tekutina v klidu, **každý kousek tekutiny** tedy **musí být v rovnováze**.



Pro výpočet rovnováhy budeme v nádobě s vodou uvažovat malý váleček vody o ploše podstavy S a výšce Δz, viz obrázek. Tlak ve vodě závisí na svislé souřadnici z: na spodní podstavě válečku je $p(z)$, na horní podstavě $p(z+\Delta z)$. Tlaková síla působící na váleček zespoda je $F_1 = p(z)\cdot S$, síla působící seshora je $F_2 = p(z+\Delta z)\cdot S$. Tohle jsou velikosti sil, jejich složky do směru osy z jsou

$$F_{1z} = p(z)\cdot S\,, \quad F_{2z} = -p(z+\Delta z)\cdot S\,.$$

Na daný váleček vody působí ještě tíhová síla $\vec{F}_g = m\vec{g}$. Hmotnost válečku vody je $m = \rho V = \rho\, S\, \Delta z$, z-ová složka gravitačního zrychlení je $-g$. z-ová složka tíhové síly je tedy

$$F_{gz} = -\rho\, g\, S\, \Delta z\,.$$

V rovnováze musí být celková síla na kousek vody nulová[15], je tedy

$$F_{1z} + F_{2z} + F_{gz} = p(z)\cdot S - p(z+\Delta z)\cdot S - \rho\, g\, S\, \Delta z = 0$$

Vydělením S a úpravou dostaneme

$$p(z+\Delta z) - p(z) = -\rho\, g\ \Delta z$$

a po vydělení Δz pak konečně

[12] Pascalův nebo Archimedův zákon vás určitě neminuly.

[13] Na místě by v principu mohlo být závislé i $\vec{g}$, většinou však budeme uvažovat homogenní gravitační pole.

[14] Například Martini s vodkou, protřepat, nemíchat…

[15] Jinak by v okolní vodě padal nebo naopak byl „vystřelován" nahoru – to se zjevně ve sklenici s vodou neděje…

$$\boxed{\frac{p(z+\Delta z)-p(z)}{\Delta z}=-\rho g\ .}\tag{11.4}$$

Tento vztah už vyjadřuje, jak se musí s výškou z měnit tlak, aby tekutina byla v rovnováze. Na úrovni střední školy bychom ho asi ponechali v tomto tvaru; jinak samozřejmě můžeme provést limitu $\Delta z \to 0$ a levá strana přejde v derivaci

$$\frac{dp}{dz}=-\rho g\ .\tag{11.5}$$

Vzhledem k tomu, že tlak je obecně funkcí místa, tedy tří souřadnic, $p = p(x,y,z)$, je vhodnější psát zde parciální derivaci, tedy

$$\boxed{\frac{\partial p}{\partial z}=-\rho g\ .}\tag{11.6}$$

Tlaky ze stran na váleček se vyrovnávají, tlak zjevně nezávisí na souřadnicích x a y ve vodorovném směru.[16] Je tedy $\frac{\partial p}{\partial x}=0, \frac{\partial p}{\partial y}=0$. Protože gravitační zrychlení má složky $\vec{g}=(0,0,-g)$, můžeme vztahy pro závislost tlaku na souřadnicích zapsat jako

$$\frac{\partial p}{\partial x}=\rho g_x\,,\ \frac{\partial p}{\partial y}=\rho g_y\,,\ \frac{\partial p}{\partial z}=\rho g_z\ ,\ \text{tedy}\ \ \frac{\partial p}{\partial x_i}=\rho\, g_i\ \ \text{pro}\ i=1,2,3\ ,\tag{11.7}$$

což ve vektorovém zápisu je

$$\boxed{\operatorname{grad} p=\rho\,\vec{g}\ .}\tag{11.8}$$

Tento vztah platí zcela obecně, pro gravitační zrychlení mířící libovolným směrem. Lze ho samozřejmě odvodit i formálně, z rovnice rovnováhy kontinua.[17] Naopak lze velmi neformálně a jednoduše chápat jeho význam:

Tlak roste tím směrem, kterým míří gravitační zrychlení.
Jeho nárůst při posunu v tomto směru je úměrný hustotě tekutiny a gravitačnímu zrychlení.

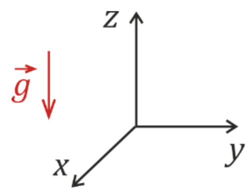
Poznámka: $\rho\vec{g}$ je hustota *objemové síly.* Tak označujeme sílu působící na tekutinu v jejím objemu; to je rozdíl například proti síle, kterou na tekutinu ve válci působíme pístem, té říkáme tlaková síla. Objemovou silou nemusí být jen síla gravitační, resp. tíhová; v celém objemu působí i setrvačné síly (v neinerciálních soustavách). Ve zrychlené nebo rotující soustavě tedy musíme na pravou stranu (11.8) přidat ještě setrvačné síly, setkáme se s tím v jednom z následujících příkladů.

Pojďme se podívat, co se dá z rovnice (11.8) vypočítat.

[16] Nakreslete si v nádobě s vodou místo válečku kvádřík a proveďte analogickou úvahu, jako výše. Vyjde vám, že parciální derivace tlaku podle x a y jsou nulové.

[17] Pro zájemce: Rovnice rovnováhy kontinua je $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}+\rho g_i=0$. Protože $\tau_{ij}=-p\,\delta_{ij}$, viz (11.1), je $\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}=-\frac{\partial p}{\partial x_j}\delta_{ij}=-\frac{\partial p}{\partial x_i}$, takže z rovnice rovnováhy kontinua plyne $-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\rho g_i=0$, a to už je (11.7).

Hydrostatický tlak v kapalině a Pascalův zákon



Budeme uvažovat ideální kapalinu, její hustota tedy bude konstantní: ρ = konst. Soustavu souřadnic zvolíme tak, že osa z míří svisle vzhůru, viz obrázek. Tíhové zrychlení má tedy složky $\vec{g} = (0, 0, -g)$. Tlak závisí na místě: $p = p(x, y, z)$. Právě tuto závislost chceme určit.

Samozřejmě by tlak šel určit rovnou z úvahy, kterou jsme provedli na straně 3.[18] Pojďme si ale ilustrovat, jak ho lze určit řešením rovnice (11.8), tedy $\boxed{\operatorname{grad} p = \rho \vec{g}}$. Rozepíšeme si tuto rovnici do složek:

$$\frac{\partial p}{\partial x} = 0\,, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0\,, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g\,. \tag{11.9}$$

Z prvních dvou rovnic plyne, že tlak nezávisí na x ani y. Musí tedy být $p = p(z)$. Poslední rovnici z (11.9) proto můžeme napsat pomocí obyčejné derivace:

$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \qquad \Big/ \int dz \tag{11.10}$$

Jak už je naznačeno, tlak odsud získáme integrováním přes z. Protože ρ i g jsou konstantní, je integrace velmi jednoduchá:

$$p = -\int \rho g \, dz = -\rho g \; z + \text{konst.} \tag{11.11}$$

Neznámou integrační konstantu určíme z požadavku, že v určitém místě se souřadnicí $z = z_0$ (například na hladině) má tlak známou hodnotu p_0, tedy že $p(z_0) = p_0$.

Dosazení do (11.11) dá $p_0 = -\rho g \; z_0 + \text{konst.}$, odtud $\text{konst.} = p_0 + \rho g \; z_0$ a (11.11) pak je

$$p = p_0 + \rho g \left(z_0 - z \right)\,. \tag{11.12}$$

Pokud $z_0 - z$ označíme jako hloubku h, tj. $h = z_0 - z$, dostaneme z (11.12) známý vzorec pro hydrostatický tlak:

$$\boxed{p = p_0 + \rho g h} \tag{11.13}$$

Jako ***hydrostatický tlak*** (tj. tlak, který je daný tíhou kapaliny nad daným místem) se často označuje jen člen $\rho g h$. Člen p_0 je dán vnějším tlakem působícím na hladinu. To může být atmosférický tlak, nebo například tlak, jímž na kapalinu v nějakém válci působíme pístem.

Zvětšíme-li tlak p_0 o Δp, například zatlačením na hladinu, zvětší se podle (11.13) o stejnou hodnotu Δp tlak ve všech místech kapaliny. Odvodili jsme tedy **Pascalův zákon**. Ten lze formulovat například takto:

Změna tlaku v jednom místě kapaliny vyvolaná vnější tlakovou silou způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny.[19]

Pascalův zákon platí přesně pro nestlačitelnou kapalinu, není podstatné, zda má nebo nemá vnitřní tření.

[18] Tak se ostatně hydrostatický tlak odvozuje ve středoškolské fyzice.

[19] Někdy se pro upřesnění dodává, že před změnou a po změně tlaku je kapalina v rovnováze.

Poznámka: Lze narazit na různé formulace Pascalova zákona, některé přesnější, některé méně přesné. Přidejme proto drobné komentáře k některým formulacím:

Ve středoškolských učebnicích se například u Pascalova zákona mluví o kapalině v uzavřené nádobě. To je v zásadě v pořádku, ovšem puntičkář může poznamenat, že v případě moře, na jehož hladinu působí shora atmosférický tlak, se také při zvýšení atmosférického tlaku zvýší tlak i v hlubinách moře (byť samozřejmě půjde o změny vůči hydrostatickému tlaku v hloubce nepatrné). A přitom moře není v uzavřené nádobě…

V některých VŠ učebnicích se naopak (na rozdíl od SŠ formulací) mluví obecně o „změně tlaku v jenom místě kapaliny“, aniž by se explicite řeklo, že jde o tlak vyvolaný vnější tlakovou silou. Kritický student by mohl vznést námitku: A co když je změna tlaku zapříčiněna změnou tíhového zrychlení? Při zvětšení tíhového zrychlení bude tlak s hloubkou narůstat rychleji – takže nenaroste ve všech místech stejně. (Gravitační zrychlení jako takové se zřejmě podstatněji nemění, ale efekt by se mohl díky setrvačným silám projevit ve zrychlených systémech.)

Lze narazit na tvrzení, že Pascalův zákon platí i **pro plyny**. Zde už je třeba být trochu opatrný. Například když ve válci s pístem posunutím pístu stlačíme plyn, zvětší se jeho hustota. Díky tomu bude tlak s hloubkou růst rychleji, než tomu bylo před stlačením, takže v různých místech vzroste různě.
Je ovšem třeba podotknout, že u plynů bude příspěvek daný hydrostatickým tlakem většinou zanedbatelný oproti celkovému tlaku plynu. Takže když třeba nafoukneme pneumatiku, bude tlak plynu na její vnitřní stěny ve všech místech prakticky stejný – to, že ve spodní části pneumatiky je o pár pascalů vyšší, než v horní části pneumatiky, můžeme proti tlaku v pneumatice (řádu několika atmosfér, tj. 10^5 Pa) opravdu zanedbat.

Na některých internetových stránkách se lze setkat s tvrzením, že Pascalův zákon se matematicky vyjadřuje vzorcem $p = F/S$. To už je dost mimo; jde prostě o vzorec pro výpočet tlaku z tlakové síly, ne o vyjádření Pascalova zákona.

A konečně, někdy bývá použita formulace „tlak vyvolaný vnější silou se šíří…“. Je-li tekutina v rovnováze, tak se tlak nešíří, tak v tekutině prostě je. Šíří se změna tlaku, když se něco změní, například když zatlačíme na píst. Změna tlaku se pak šíří rychlostí zvuku v daném prostředí. (A nějakou dobu potom trvá, než se ustaví rovnováha. Například když prásknete dveřmi v uzavřené místnosti, zvuk ještě chvíli doznívá. Ale to už je mimo téma této kapitoly.)

Aby zde nebyly jen kritické připomínky: Někdy se zdůrazňuje, že stejně, jako se změní tlak v objemu tekutiny, se změní i tlak na stěny nádoby. To je pravda. Tlak, kterým třeba plyn v tlakové láhvi působí na její stěnu, je v rovnováze stejný jako tlak v tomto plynu kousek od stěny.

Abychom to shrnuli:

- Pascalův zákon platí přesně pro nestlačitelnou kapalinu.
- Pokud na tekutinu nepůsobí objemové síly, pak tlak je stejný v celém objemu tekutiny. (Tedy opět Pascalův zákon platí přesně.)
- Kapaliny jsou velmi málo stlačitelné, takže Pascalův zákon v nich platí téměř přesně; prakticky ho můžeme používat bez problémů.
- Pokud jsou rozdíly dané hydrostatickým tlakem (tj. členem $h\rho g$) zanedbatelné vůči celkovému tlaku, pak můžeme Pascalův zákon používat i pro stlačitelné tekutiny, tedy i pro plyny.[20]
- Tlak v tekutině (kousek od stěny nádoby) je stejný, jako tlak, kterým tekutina působí na stěnu nádoby. Ve formulaci Pascalova zákona tedy můžeme mluvit i o tlaku na stěny nádoby.

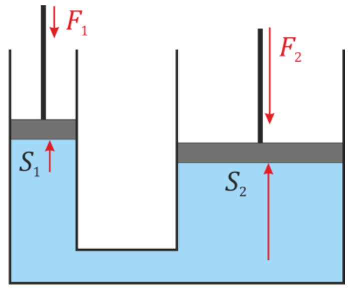
Navíc je vidět, že přesně formulovat i tak jednoduchou věc, jako je Pascalův zákon, je docela složité. Jednoduché formulace nemohou být zcela přesné a lze je tedy kritizovat. Na druhou stranu, vychytat všechny detaily a „jemnosti“, abychom se obrnili proti kritice, může vést ke komplikovaným a špatně srozumitelným formulacím. Ve výuce je zjevně třeba zvolit vhodnou střední cestu a vyhnout se

[20] Ono to vypadá skoro jako tautologie: Když jsou rozdíly tlaku dané hydrostatickým tlakem zanedbatelné, je tlak v celém objemu tekutiny prakticky stejný. Fyzikální obsah zde ale pořád je: Když máme válec se dvěma písty, tak tlak na jeden i druhý píst jsou stejné (pomineme-li případný vliv hydrostatického tlaku). Nemůže se stát, že by tlak na jeden píst byl třeba dvakrát vyšší, než na druhý píst.

oběma extrémům: Přehnanému zjednodušení, které vede k přílišnému zkreslení až k fyzikálním chybám. A na druhé straně příliš složité, byť formálně správné formulaci, kterou ale skoro nikdo nepochopí a může se ji maximálně naučit zpaměti.[21]

Pojďme se ale od trochu didaktických úvah vrátit k hydrostatice.

Aplikace Pascalova zákona: hydraulický lis

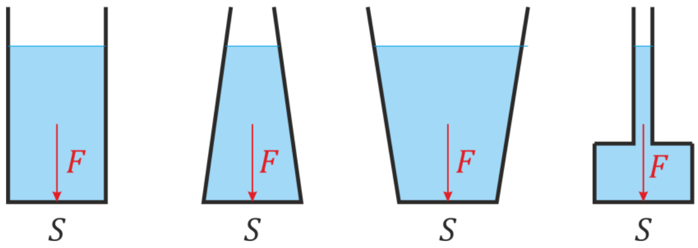


Známou aplikací je *hydraulický lis* (a podobně řada dalších hydraulických zařízení). Jestliže dva válce s písty jsou propojeny a naplněny kapalinou, působí na oba písty stejný tlak. Jsou-li plochy pístů S_1 a S_2 a síly na písty působící F_1 a F_2, musí být $F_1/S_1 = p = F_2/S_2$ a odtud $F_2 = F_1\, S_2/S_1$. Na menší píst tedy stačí působit menší silou, na větší píst pak kapalina působí větší silou.[22] (Tato síla je v rovnováze se silou, kterou na píst zvenku působí například zvedaná zátěž nebo materiál, který lisujeme.)

Hydrostatický paradox[23]

Když do nádoby, jejíž dno má plochu S, nalijeme kapalinu do výšky h, síla F, kterou kapalina působí na dno, bude stejná nezávisle na tom, jaký je tvar nádoby. Přitom v nádobě, která se směrem nahoru rozšiřuje, je víc kapaliny, než v nádobě, která se zužuje. (V nádobě, která by nahoru pokračovala jen úzkou trubicí, může být kapaliny jen málo.)

To může působit paradoxně: Jak to, že víc vody nevytvoří na dno větší sílu?



Sílu na dno můžeme samozřejmě snadno spočíst. Je $F = p\,S$, kde p je hydrostatický tlak; ten je rovný $h\rho g$. Při stejné výšce je tlak ve všech nádobách stejný a při stejné ploše dna je tedy stejná i síla. Názorný důvod, proč víc vody v rozšiřující se nádobě nepůsobí na dno větší silou, také vymyslíme – rozmyslete si to, než otočíte na další stránku…

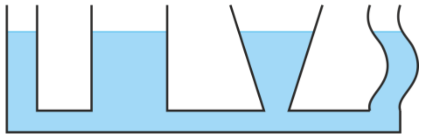
[21] To se lehko řekne, že… Různým žákům navíc vyhovuje různá míra přesnosti, preciznosti a formálnosti. Jak si s tím poradit, je jednou z úloh didaktiky fyziky.
V této souvislosti připojím jednu možná samozřejmou poznámku k vám, čtenářům tohoto textu:
I vy si prosím při studiu učebnic, zápisků z přednášek a studijních textů (včetně tohoto) snažte co nejvíc propojovat základní jednoduché popisy a vyjádření fyzikálních pojmů, jevů a zákonů s popisy a formulacemi formálnějšími, podrobnějšími a preciznějšími. S tím souvisí i propojení vzorců, rovnic a výpočtů s názornými představami a „fyzikální intuicí". Učebnice, texty, přednášející a cvičící vám v tom mohou pomoci, ale finálně to nakonec za vás nikdo neudělá. Výsledné znalosti si ve své vlastní hlavě musíte „zkonstruovat" sami.
(Jak už bylo řečeno, tato poznámka možná konstatuje věci, které jsou už pro vás samozřejmé. Je-li tomu tak, tím lépe. Dodám už jenom to, že tohle promýšlení souvislostí a toho, jak věci co nejlépe pochopit, vyložit, ukázat pomocí pokusů atd. – to není něco, co by člověk jednou udělal, složil třeba zkoušku, zaklapl učebnici a své poznámky a měl hotovo. Je to spíš aktivita na celý život. Což je moc dobře: S fyzikou a její výukou fakt není nuda.)

[22] Za poznámku stojí, že Blaise Pascal (1624-1662, francouzský matematik, fyzik a filosof), po němž se jmenuje výše uvedený zákon, svou myšlenku vyslovil právě pro případ nádoby se dvěma písty o různé ploše. Myšlenky, které vedly až k dnešní formulaci tohoto zákona, pak rozvíjeli další fyzikové.

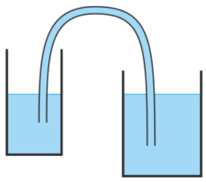
[23] Setkat se můžeme i s krásně starobylým názvem *hydrostatické paradoxon*.

Máte to rozmyšlené? A máte rozmyšlené, proč ve zužující se nádobě je síla na dno stejná, i když je tam vody méně? Tak si to zkontrolujte v poznámce pod čarou.[24]

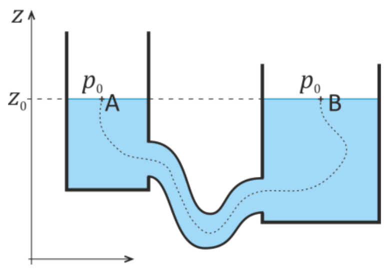
Spojité nádoby



V nádobách, které jsou propojené, vystoupí kapalina do stejné výšky. Tohle je známý fakt a má také známé a jednoduché vysvětlení: pokud by byla výška různá, byl by různý i hydrostatický tlak u dna, kde jsou nádoby spojeny trubkou. Rozdíl tlaku by způsobil tok vody mezi nádobami, dokud by se hladiny nevyrovnaly.



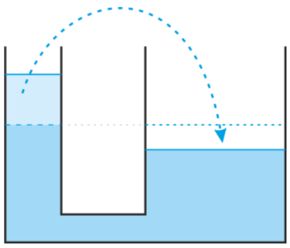
Nádoby přitom nemusejí být spojeny vodorovnou trubkou, ale libovolně. Příkladem takového spojení je **násoska**.[25] Pokud zvedneme jednu z nádob (viz obrázek), bude z ní kapalina přetékat tak dlouho, dokud se hladiny nevyrovnají. (Rozmyslete si, jaký je tlak v hadičce nad hladinou vody v nádobách v porovnání s atmosférickým tlakem. [26])



Podrobněji zdůvodnit, že hladiny jsou stejně vysoko, můžeme pomocí výše odvozeného vztahu (11.12), tj. $p(z) = p_0 + \rho g\left(z_0 - z\right)$.

Plyne z něj, že tlak závisí jen na výšce z. Jestliže v bodech A a B působí na hladinu stejný tlak (v obou místech atmosférický tlak), musí být oba body stejně vysoko.

Odvození stejné výšky hladin bychom mohli provést i mnohem formálněji. [27] Ale na druhou strany lze daný výsledek odvodit i zcela jednoduše, pomocí energie.



Pokud je v jedné nádobě hladina výše než v druhé nádobě, s ní spojené, je potenciální energie vody určitě větší než v případě, že jsou hladiny vyrovnané. Je to vidět na obrázku: vyrovnání hladin můžeme dosáhnout i tak, že „přebytek“ vody v levé nádobě přeneseme do nádoby vpravo. Vodu přenášíme do menší výšky, takže energie tím poklesne.

Stejná výška hladin ve spojitých nádobách ovšem platí jen v případě, že je ve všech nádobách kapalina stejné hustoty. Pokud by ve spojených nádobách byla rtuť a pak bychom do jedné nádoby přilili vodu, určitě by její hladina byla výš než hladina vody v druhé nádobě.[28]

---

[24] V nádobě, která se směrem nahoru rozšiřuje, působí na kapalinu silou nahoru i boční stěny. Naopak v nádobě, která se nahoru zužuje, působí boční stěny silou dolů; proto i méně kapaliny vyvolá na dno stejnou sílu jako je tomu ve válcové nádobě.

[25] Nemíníme tím lidové označení pro opilce ☺, ale hadičku či trubičku pro přečerpávání kapalin.

[26] Správně, je nižší než atmosférický. Proto pro násosku nemůžeme použít hadičku, která by se snadno smáčkla.

[27] Pro tlak v místě B platí $p(\vec{r}_B) = p(\vec{r}_A) + \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} (\operatorname{grad} p) \cdot d\vec{r}$, od A k B můžeme jít například po křivce vyznačené na obrázku. Za gradient v integrálu dosadíme (11.8), tj. $\rho\vec{g}$, integrál pak dá výsledek $\rho\vec{g} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$, takže $p(\vec{r}_B) - p(\vec{r}_A) = \rho\vec{g} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$. Když se oba tlaky rovnají, musí být $\vec{g} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A) = 0$. Spojnice bodů A a B je tedy kolmá na $\vec{g}$, oba body musí být stejně vysoko. (To by člověk neřekl, že na výšku hladin ve spojených nádobách se dá jít i s pomocí gradientů a křivkových integrálů, že? ☺)

[28] Pokud bychom takový pokus dělali ve škole, použijeme raději vodu a řidší olej.

Izotermická atmosféra

Pojďme se podívat, jak se s výškou mění tlak vzduchu v atmosféře – a to v nejjednodušším možném případě, kdy teplota v atmosféře je všude stejná. Pro takovou situaci se používá název *izotermická atmosféra*.

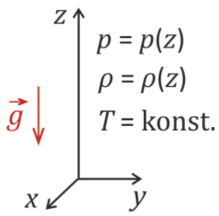
Vzduch budeme brát jako ideální plyn. Bude tedy pro něj platit stavová rovnice[29]

$$pV = \frac{m}{\mu} RT \ . \tag{11.14}$$

Zde p je tlak plynu, V jeho objem, m jeho hmotnost, μ jeho molární hmotnost, R univerzální plynová konstanta a T absolutní teplota plynu. Vydělíme-li (11.14) objemem V, dostaneme vztah mezi tlakem a hustotou plynu ρ:

$$p = \frac{m}{V}\frac{RT}{\mu} = \rho \frac{RT}{\mu} \quad \Rightarrow \quad \rho = p\,\frac{\mu}{RT} \ . \tag{11.15}$$

Tlak i hustota závisí pouze na svislé souřadnici z.[30] To, jak tlak klesá s výškou, popisuje rovnice pro hydrostatickou rovnováhu (11.6). Protože $p = p(z)$, můžeme v rovnici pro rovnováhu psát obyčejnou derivaci místo parciální:



$$\frac{dp}{dz} = -\rho g \ . \tag{11.16}$$

Dosadíme za hustotu z (11.15) a dostaneme diferenciální rovnici, tu pak vyřešíme[31]:

$$\frac{dp}{dz} = -p\,\frac{\mu}{RT} g \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{p} dz$$

$$\frac{dp}{p} = -\frac{\mu}{RT} g\, dz$$

$$\ln|p| = \int \frac{dp}{p} = -\int \frac{\mu g}{RT} dz = -\frac{\mu g}{RT} z + C \ .$$

Po odlogaritmování pak[32]

$$p = e^{-\frac{\mu g}{RT} z + C} = e^{-C} \cdot e^{-\frac{\mu g}{RT} z} \ .$$

Konstanta C je libovolná, takže je libovolné též e^{-C}. Je určeno podmínkou, jaký je tlak v určité výšce, například $z = 0$. Je-li $p(0) = p_0$, bude $e^{-C} = p_0$. Pro závislost tlaku na výšce tedy nakonec dostáváme

$$\boxed{p(z) = p_0\, e^{-\frac{\mu g}{RT} z} \ .} \tag{11.17}$$

Tlak s výškou klesá exponenciálně, proto se někdy používá název *exponenciální atmosféra.*

Je dobré uvědomit si, že kvalitativní chování poklesu tlaku s výškou podle vztahu (11.17) je „rozumné“: Při větší molární hmotnosti nebo při větším tíhovém zrychlení tlak klesá rychleji, při vyšší teplotě naopak pomaleji.

A ještě jedna věc: Blízko země, kde hustotu můžeme považovat prakticky za konstantní ($\rho \approx \rho_0$), klesá tlak jako $p = p_0 - \rho_0 g z$. (Odvoďte si, že tohle plyne z (11.17) a (11.15); nápověda je na další stránce, viz [33].)

[29] Znáte ji ze středoškolské fyziky; blíže se stavovým rovnicím plynů budete věnovat v předmětu *Molekulová fyzika*.

[30] Uvědomte si, proč.

[31] Metodou separace proměnných.

[32] Je $p > 0$, takže nemusíme psát absolutní hodnotu.

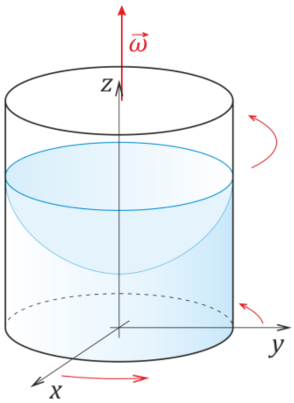
Poznámka k atmosférickému tlaku (a jak ho jednoduše změřit)

Atmosférický tlak má hodnotu asi 100 kPa, tedy 10^5 Pa.[34]

Že má zhruba tuto hodnotu, můžeme změřit jednoduchým pokusem pomocí obyčejné plastové stříkačky. Její píst nejprve stlačíme (takže z ní vytlačíme skoro všechen vzduch), otvor pro jehlu pak zacpeme prstem a píst zase táhneme. Uvnitř stříkačky je velmi malý tlak a atmosférický tlak zvenku působí proti tažení pístu. Ze síly, kterou táhneme píst, a z plochy pístu už atmosférický tlak lehce vypočteme.[35]

Podobně můžeme řádovou hodnotu atmosférického tlaku určit ze síly, kterou odtrhneme od podkladu plastovou přísavku – stačí změřit průměr „bubliny“, která se pod přísavkou dělá, když ji odtrháváme.[36]

Hladina vody v rotující nádobě



V nádobě, která je v klidu, je hladina samozřejmě vodorovná. V nádobě, která rotuje – a kapalina rotuje s ní – je hladina u stěny výše než ve středu.[37] Jaký je tvar hladiny?

Budeme uvažovat situaci, kdy nádoba i kapalina v ní rotují stejnou úhlovou rychlostí ω kolem svislé osy. Soustavu souřadnic, v níž budeme vše popisovat, spojíme s nádobou; jde tedy o rotující soustavu souřadnic. V ní na kapalinu působí odstředivá síla. Na malý kousek kapaliny o objemu ΔV a tedy hmotnosti $\Delta m = \rho\,\Delta V$ působí síla

$$\Delta\vec{F}_o = \Delta m\,\vec{R}\,\omega^2 = \rho\,\omega^2\vec{R}\,\Delta V \ , \tag{11.18}$$

---

[33] Pro $\left|\frac{\mu g}{RT}z\right| \ll 1$ je $e^{-\frac{\mu g}{RT}z} \approx 1-\frac{\mu g}{RT}z$. Z (11.15) plyne $\frac{\mu g}{RT}=\frac{\rho_0 g}{p_0}$, takže $e^{-\frac{\mu g}{RT}z} \approx 1-\frac{\rho_0 g}{p_0}z$. Toto platí do výšek $|z| \ll \frac{RT}{\mu g}$. Z (11.15) plyne $\frac{RT}{\mu g}=\frac{1}{g}\frac{p}{\rho}$. Za tlak a hustotu lze dosadit hodnoty u hladiny moře, vyjde $|z| \ll 7\,\text{km}$, lze tedy říci, že lineární pokles tlaku s výškou je zhruba do výšek stovek metrů až kilometru.

[34] Jde o hodnotu v běžných podmínkách na Zemi. *Normální atmosférický tlak* je stanoven na 101,325 kPa, často se zapisuje jako 1 013,25 hPa. Má jít o průměrný tlak na hladině moře na 45 stupních severní šířky při teplotě 15 °C. Na horách je tlak nižší, navíc se tlak mění v závislosti na počasí.

Normální atmosférický tlak se dobře pamatoval ve starších jednotkách: měl hodnotu jedna *atmosféra*. Ale pozor, to byla jednotka *fyzikální atmosféra*, kromě toho existovala jednotka *technická atmosféra*, ta byla o něco menší. Navíc se užívala jednotka *torr*, to byl hydrostatický tlak rtuťového sloupce o výšce 1 mm. (Normální tlak je 760 torr.) Novější jednotkou (ale také mimo soustavu SI) je *bar*: 1 bar = 100 kPa. Je těch jednotek skoro až příliš, že? A to ještě nemáme anglosaskou jednotku libra na čtvereční palec! (Převádět navzájem anglosaské jednotky musela být lahůdka; zlatá SI!)

Ještě pozor na jednu věc: Leckdy, když se v praxi mluví o tlaku, myslí se tím *přetlak* vůči atmosférickému tlaku. Například když nahustíme pneumatiku na dva a půl atmosféry, bude v ní tlak asi o $2{,}5\cdot 10^5$ Pa = 0,25 MPa vyšší než atmosférický, tedy tlak asi 0,35 MPa.

[35] Samozřejmě to bude jen přibližné, vadí nám tření pístu o stěny stříkačky. Ale řádovou hodnotu určíme velmi dobře. A i kvalitativně je pokus poučný: píst z užší stříkačky lze vytáhnout snáz než píst širší stříkačky.

[36] Navíc tím zjistíme, jakou maximální sílu přísavka udrží. Fakticky je přísavka držící na podkladu malou analogií magdeburských polokoulí. Přísavku na povrchu opravdu drží atmosférický tlak. (Zkuste si ji na nějaký povrch přitlačit ve vakuu, držet nebude…)

[37] To známe už ze situace, kdy si třeba v hrnku mícháme lžičkou čaj. V tom případě se ovšem hrnek netočí a stěny rotaci vody zpomalují, takže profil hladiny bude trochu jiný než v případě, že nádoba i kapalina rotují stejnou rychlostí.

kde $\vec{R} = (x, y, 0)$ je vektor mířící od osy rotace (tedy od osy z) k danému kousku kapaliny. Kromě odstředivé síly navíc na kousek kapaliny působí gravitační síla $\Delta\vec{F}_g = \Delta m\,\vec{g} = \rho\,\vec{g}\,\Delta V$.

Celková síla působící na daný kousek kapaliny je tedy

$$\Delta\vec{F} = \rho\,\omega^2\vec{R}\,\Delta V + \rho\,\vec{g}\,\Delta V$$

Vydělením ΔV dostaneme objemovou hustotu síly $\vec{f}$ působící na kapalinu:

$$\vec{f} = \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta V} = \rho\,\omega^2\vec{R} + \rho\,\vec{g} \;. \tag{11.19}$$

Podíváme-li se na rovnici rovnováhy tekutiny (11.8), $\operatorname{grad} p = \rho\vec{g}$, vidíme, že v ní na pravé straně vystupovala hustota objemové síly. To ovšem jedinou objemovou silou byla síla gravitační. Nyní, v rotující nádobě, musíme na pravou stranu napsat celkovou objemovou sílu. Rovnice rovnováhy tedy bude

$$\boxed{\operatorname{grad} p = \rho\,\omega^2\vec{R} + \rho\,\vec{g}\,.} \tag{11.20}$$

Zapsáno ve složkách[38], je to

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \rho\omega^2 x \;, \tag{11.21}$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \rho\omega^2 y \;, \tag{11.22}$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} = -\rho g \;. \tag{11.23}$$

Jak řešit rovnice (11.21) – (11.23)?

Začneme rovnicí (11.21). Potřebujeme najít funkci $p = p(x, y, z)$ takovou, že když ji parciálně zderivujeme podle x, dostaneme $\rho\omega^2 x$. Souřadnice y a z můžeme na chvíli brát za konstantní a soustředíme se na závislost tlaku na x . Rovnice (11.21) dává hodnotu derivace p podle x , tlak p tedy získáme integrací

$$p = \int \rho\omega^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2 + \tilde{p}(y,z)\,. \tag{11.24}$$

Integrační konstantu jsme označili $\tilde{p}$. Tato konstanta samozřejmě nezávisí na x, ale může záviset na y a z. Dosazením (11.24) se můžeme přesvědčit, že rovnice (11.21) je splněna.

Potřebujeme splnit další dvě rovnice. Derivací (11.24) podle y získáme $\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial \tilde{p}}{\partial y}$.[39] Dosazení do (11.22) dá

$$\frac{\partial \tilde{p}}{\partial y} = \rho\omega^2 y\,. \tag{11.25}$$

Integrací přes y odtud dostaneme

$$\tilde{p} = \int \rho\omega^2 y\,dy = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 y^2 + \tilde{\tilde{p}}(z)\,. \tag{11.26}$$

Derivací (11.26) podle z pak z (11.23) vyplyne rovnice pro $\tilde{\tilde{p}}$:

[38] Je $\vec{g} = (0, 0, -g)$ a tedy $\vec{f} = (\rho\omega^2 x, \rho\omega^2 y, -\rho g)$.

[39] Protože x na y nezávisí, takže $\frac{\partial}{\partial y}\left(\tfrac{1}{2}\rho\omega^2 x^2\right) = 0$.

$$\frac{d\tilde{\tilde{p}}}{dz} = -\rho g \ .^{40} \tag{11.27}$$

Její řešení už je jednoduché:

$$\tilde{\tilde{p}} = -\rho g z + p_0 , \tag{11.28}$$

kde p_0 je zatím neznámá konstanta. (Teď už opravdu konstanta, nezávisí ani na x, ani na y, ani na z.)

Když tento výsledek dosadíme zpátky do (11.26) a to pak do (11.24), dostaneme výsledný vztah pro tlak:

$$p(x, y, z) = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2\left(x^2 + y^2\right) - \rho g z + p_0 \tag{11.29}$$

$x^2{+}y^2$ je ale R^2, kde R je vzdálenost od osy otáčení. Vztah pro tlak v kapalině tedy můžeme psát jako

$$\boxed{p = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g z + p_0 \ .} \tag{11.30}$$

Stačili jste postup řešení sledovat? Věřím, že ano, a tak můžu blahopřát:

Právě jste vyřešili svou první ***soustavu parciálních diferenciálních rovnic***![41] Právě to totiž jsou rovnice (11.21) – (11.23). Formu parciálních diferenciálních rovnic má řada fyzikálních zákonů.[42] Řešit takové rovnice je často náročné (není divu, když vystihují bohatost jevů ve světě kolem nás) a příslušné problémy byly inspirující i pro matematiku. Teorie parciálních diferenciálních rovnic tvoří důležitou část matematické analýzy.[43]

Vraťme se k určení tvaru hladiny kapaliny v rotující nádobě. Z (11.30) už ho určíme lehce. Hladina je tam, kde tlak je roven atmosférickému tlaku p_a:

$$p_a = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 - \rho g z + p_0 \quad \Rightarrow \quad \rho g z = \tfrac{1}{2}\rho\omega^2 R^2 + p_0 - p_a$$

Po vydělení ρg a označení $(p_0 - p_a)/(\rho g) = z_0$ dostaneme

$$z = \frac{\omega^2}{2g} R^2 + z_0 \ . \tag{11.31}$$

Hladina vody má tedy tvar *rotačního paraboloidu*. (Jinak řečeno, její průřez svislou rovinou, která obsahuje osu rotace, je parabola.) Tvar hladiny přitom nezávisí na hustotě kapaliny; při stejné rychlosti otáčení má stejný tvar hladina vody, oleje a třeba rtuti.[44]

---

[40] Zde již můžeme psát obyčejnou derivaci (nikoli parciální), protože $\tilde{\tilde{p}}$ závisí jen na z.

[41] Pokud už jste parciální diferenciální rovnice řešili už dříve, tak pardon, že jsem vás podcenil. Tak to není vaše první vyřešená soustava, ale druhá, třetí nebo třeba sto osmdesátá pátá…

[42] Například Maxwellovy rovnice, vlnová rovnice, rovnice pro vedení tepla, Einsteinovy rovnice v obecné teorii relativity a mnoho dalších. S některými se ostatně potkáme za chvíli v hydrodynamice.

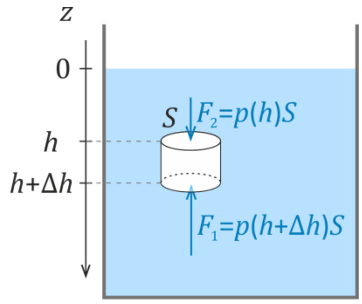
[43] My jsme se zde na příkladu kapaliny v rotující nádobě těchto rovnic zatím jen zlehka dotkli – a snad jsme se přesvědčili, že nejde o nic záhadného, čeho bychom se měli bát. Parciální diferenciální rovnice jsou zkrátka pro fyziku užitečným nástrojem.

[44] Poznámka pro „šťouraly“: Nebereme zde v úvahu efekty dané povrchovým napětím.

Archimedův zákon

Archimedův zákon patří asi k nejznámějším fyzikálním zákonům a snad každý umí nějakou jeho formulaci „odrecitovat“.[45]

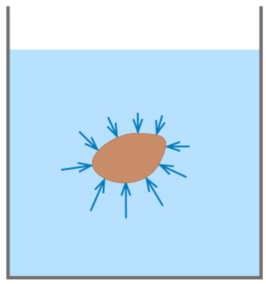
Archimedův zákon určuje **vztlak**, tedy sílu, kterou je těleso v kapalině tlačeno směrem vzhůru. Středoškolsky se obvykle odvozuje ze sil, kterými kapalina působí na váleček s plochou podstav S, viz obrázek. Protože hydrostatický tlak v hloubce h je $p = h\rho g$, je síla směrem nahoru



$$\begin{aligned} F_{\text{vztlak}} &= F_1 - F_2 = (h+\Delta h)\rho g S - h\rho g S = \\ &= S\Delta h \rho g = \Delta V \rho g = \Delta m_{\text{kapaliny}}\, g \end{aligned}, \qquad (11.32)$$

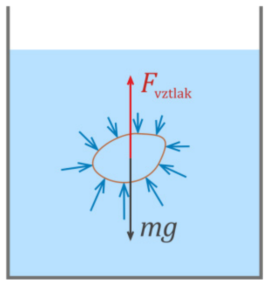
kde ΔV je objem válečku a $\Delta m_{\text{kapaliny}}$ hmotnost kapaliny, která by se vešla do daného válečku. Síla je tedy opravdu rovna tíze kapaliny, která se vejde do daného válečku.[46]

Jak je tomu ale ***pro těleso obecného tvaru*** – například pro bramboru ponořenou do vody?[47]



I obecné těleso bude nadlehčováno vztlakovou silou – prostě proto, že na jeho spodní část působí větší tlak, než na horní, jak to ukazuje obrázek.

Celkovou vztlakovou sílu bychom mohli vypočítat integrací příspěvků tlakových sil přes povrch tělesa. To by ale dalo trochu práce a rozhodně bychom takové odvození nemohli prezentovat na úrovni střední školy.[48] Naštěstí lze vztlak odvodit pomocí velmi jednoduché úvahy srozumitelné už na úrovni ZŠ.



Představme si, že jsme naši ponořenou bramboru vydlabali a nechali z ní jen tenkou slupku, ale stále s tvarem původní brambory. Slupku naplníme vodou – stejnou vodou, jako bude kolem v nádobě. Máme tedy „vodní bramboru“ stejného tvaru jako původní brambora. Tlakové síly, kterými na naši vodní bramboru působí okolní voda, jsou stejné jako síly, kterými působila na původní bramboru.[49] To znamená, že vztlaková síla na původní bramboru i „vodní bramboru“ jsou stejné.

Ovšem na „vodní bramboru“ působí i tíhová síla mg. Přitom celková síla na „vodní bramboru“ musí být nulová – jde o kus vody ve vodě, a ten je v rovnováze, nepadá ke dnu ani není urychlován směrem k hladině. To znamená, že vztlaková síla a tíhová síla se vyrovnají. Čili:

> **Vztlaková síla na těleso** (původní bramboru) **se rovná tíze kapaliny, která se vejde do prostoru, který toto těleso v kapalině zaujímá**. A právě tohle je Archimedův zákon.

---

[45] Klasická školní formulace zněla: „Těleso ponořené do kapaliny je nadlehčováno silou, která se rovná váze kapaliny tělesem vytlačené.“ V tomto znění ho dokonce v jedné písni před lety zpívali Jiří Grossmann a Miroslav Šimek, viz [1969 Jiří Grossmann a Miloslav Šimek - Archimedův zákon - YouTube](). Oni tedy místo „nadlehčováno“ zpívali „nadnášeno“, asi to lépe sedlo rytmicky. V trochu novějších formulacích se místo o „váze“ mluví o „tíze“.

[46] Ve starší formulaci: „tíze kapaliny válečkem vytlačené“. Váleček ovšem nemusí kapalinu někam „vytlačovat“, mohl být v nádobě třeba zavěšen a kapalinu jsme tam mohli lít až potom. K možným nejasnostem kolem „vytlačování kapaliny“ se ještě dostaneme.

[47] Nebo pro ponorku, velrybu či potápěče; žádný z těchto objektů není válec. ☺

[48] Snad s výjimkou nějakého speciálního semináře pro zájemce, kteří řeší pokročilé úlohy fyzikální olympiády a plošné integrály jsou pro ně vítanou lahůdkou.

[49] Tlak vody ve stejné hloubce zůstal stejný a stejné jsou velikosti i natočení kousků plochy, na které tlak působí.

Poznámky k Archimedovu zákonu

- Archimedův zákon jsme formulovali pro kapaliny, ale platí obecně **pro tekutiny**. Díky němu se vznášejí třeba balóny a vzducholodě.[50]
- V případě tělesa, které není zcela ponořeno, je vztlaková síla rovna tíze kapaliny, která by se vešla do prostoru, jež zaplňuje **ponořená část tělesa**. (V případě lodi jde o část pod čarou ponoru.)
- Působištěm vztlakové síly je bod, v němž by kapalina, která by vyplnila prostor zaplněný tělesem (resp. jeho ponořenou částí) měla hmotný střed.[51] Tomuto bodu se říká **metacentrum**.
  Pokud je těleso ponořeno jen zčásti, pak poloha metacentra obecně závisí na tom, jak se těleso na hladině natočí. Vzájemná poloha těžiště tělesa a metacentra má vliv na stabilitu plovoucího tělesa.[52]
- Formální poznámka: Správně bychom měli říkat ne „vztlaková síla se rovná…“, ale „*velikost* vztlakové síly se rovná tíze kapaliny…“, protože obě síly mají opačnou orientaci. Takže to, co se rovná, nejsou samotné síly, ale jejich velikosti.[53] Ale tím bychom formulaci Archimedova zákona prodloužili – a postupným dalším precizováním bychom mohli dospět k vyjádření komplikovanému a obtížně srozumitelnému.[54] Přitom i z kratší formulace je jasné, oč jde; takže se s ní zde spokojíme. (V případě potřeby můžeme naše vyjádření zpřesňovat a vysvětlovat, oč v Archimedově zákoně jde a jak ho aplikovat.)

Není asi nutno zde připomínat, že z Archimedova zákona plyne, že těleso, jehož průměrná hustota je nižší, než hustota kapaliny, v ní stoupá vzhůru (příkladem je kus dřeva[55] nebo bublina ve vodě), zatímco těleso, jehož hustota je vyšší než hustota kapaliny, v ní klesá ke dnu (třeba kámen ve vodě[56]).

Pomocí Archimedova zákona můžeme řešit kvantitativní problémy, například to, jak velká část ledovce vyčnívá nad hladinu. Pojďme se však podívat na několik známých, ale trochu „lstivých“ *kvalitativních* otázek a problémů týkajících se aplikací Archimedova zákona. Bylo by škoda o nich nevědět – můžete je dát jako zajímavé otázky žákům, nebo s nimi na vás mohou přijít oni.

---

[50] Rozmyslete si, jak to je: Balón se opravdu vznáší díky tomu, že na jeho spodní část působí okolní vzduch větším tlakem, než na jeho horní část. Rozdíl je dán rozdílem hydrostatického tlaku (zde bychom asi měli mluvit spíše o *aerostatickém tlaku*) v různých výškách.

[51] Rozmyslete si, že to je pravda: Kdyby vztlaková síla a tíhová síla na naši „vodní bramboru“ působily v různých bodech, pak by měly nenulový moment síly, takže by naši „vodní bramboru“ roztočily. To se zjevně neděje. Jinak řečeno: Naše „vodní brambora“ je v okolní vodě v rovnováze. Musí na ni tedy působit nulová celková síla (z toho jsme odvodili Archimedův zákon) a nulový musí být i celkový moment vnějších sil. Proto musí tíhová síla na vodu i vztlaková síla působit ve stejném bodě.

[52] Zkuste třeba dlouhý dřevěný hranolek „zapíchnout“ do vody tak, aby jeho dlouhá strana byla svisle. Samozřejmě, že se v této pozici neudrží. Horší je, když dostatečnou stabilitu nemá loď. To byl případ švédské lodě *Vasa*, která se potopila na své první plavbě v roce 1628 poté, co ujela necelé dva kilometry. (V roce 1961 byla vyzdvižena ze dna a je k vidění v Museu Vasa ve Stockholmu.)

[53] Striktně vzato, když řekneme „síla 1 se rovná síle 2“, tak když síly chápeme vektorově, tak by to znamenalo, že mají stejný směr (i orientaci).

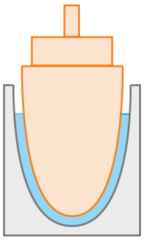
[54] Například: „Velikost vztlakové síly, kterou na těleso působí okolní kapalina v tíhovém poli, je rovna velikosti tíhové síly, kterou by stejné tíhové pole působilo na tutéž kapalinu, která by vyplnila prostor, jež v kapalině zaujímá dané těleso.“ (Uff! Už je to skoro přesné, ale představte si, že by se to žáci měli takhle učit. Pomohlo by to porozumění?)

[55] Hmm… vždy se najde výjimka. Takže pro tento pokus neberte kus ebenu.

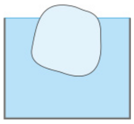
[56] Nebo sekera; ostatně se říká „jde jak sekera ke dnu“.

Zajímavé kvalitativní problémy týkající se Archimedova zákona

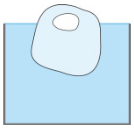
Zkuste se zamyslet nad následujícími problémy:



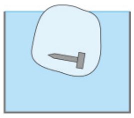
- Může plavat loď ve vaně?
  Přesněji řečeno, může plavat v nádobě, kde kolem ní je jen málo místa, takže vody je tam celkově mnohem méně, než loď váží?
  Vždyť nemůže vytlačit tolik vody, kolik je její váha. Tolik vody ani v nádobě nebylo, než jsme tam loď spustili. Takže: může plavat tak, jak je znázorněno na obrázku, nebo nemůže? A proč?
- Postavte na digitální váhy kádinku s vodou a podívejte se, jakou váhu ukazují. Pak strčte do vody prst. Změní se údaj na digitálních vahách? Stoupne, klesne nebo zůstane stejný? A proč?
- Ve sklenici s vodou plave kus ledu, hladina je přesně po okraj. Co se stane, když led roztaje? Přeteče voda ze sklenice, nebo hladina klesne, nebo zůstane, jak byla? A proč?[57]



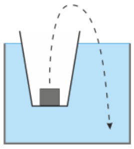
- Podobný problém, jenže tentokrát je v ledu zamrzlá bublina vzduchu. A opět se ptáme, co se stane, až led roztaje: Přeteče voda, nebo hladina klesne, nebo zůstane, jak byla? A proč?



- A ještě jeden podobný problém:
  Opět led plave na hladině, ale tentokrát je v něm zamrzlé něco těžkého, třeba kus kovu nebo kámen. (Ale ne tak těžký, že by led klesl na dno.) A stejná otázka: Co se stane po roztání ledu? Přeteče voda, nebo hladina klesne, nebo zůstane, jak byla? A proč?



- A přidáme ještě jeden problém tentokrát bez ledu:
  V nádobě, v níž je hladina po okraj, plave kelímek a na dně má zátěž, třeba kus kovu. Co se stane, když zátěž vyndáme z kelímku a hodíme na dno nádoby? Přeteče voda, nebo hladina klesne, nebo zůstane, jak byla? A proč?



- A pro ty, kdo ještě nemají dost:
  Přes údolí vede akvadukt (most, na němž vede vodní kanál). Akvadukt je už starý a stěží unese vodu v kanále. Je bezpečné, aby na kanál akvaduktu připlula těžká loď? Nemůže akvadukt spadnout?
  Méně dramatická verze otázky: V pilířích akvaduktu jsou zabudovány sondy měřící sílu, kterou pilíře nesou. Když na kanál akvaduktu připluje těžká loď, naměří sondy větší sílu, než když tam loď nebyla?

V řešení těchto problémů nám tenzor napětí ani parciální diferenciální rovnice příliš nepomohou. Chce to zamyslet se (a myslet správně)…[58]

[57] Tohle je známá otázka, takže na ni nejspíš znáte odpověď. Ale stojí za to si zdůvodnění promyslet.

[58] Stručné odpovědi jsou pro kontrolu uvedeny v Dodatku A této kapitoly.

11.3 Hydrodynamika: jak popsat proudění

Přejděme od statického případu k situacím, v nichž tekutina proudí. Jak její proudění popsat?

Jednou možností je jít na to podobně, jako u soustavy hmotných bodů: popsat pohyb každého malého kousku tekutiny. To znamená, představit si tekutinu jako soubor „částeček“; u každé bychom sledovali její polohu v závislosti na čase, $\vec{r}_i = \vec{r}_i(t)$. Takovému popisu proudění tekutiny se říká *Lagrangeův*.[59] Tento popis by však byl až příliš podrobný a značně komplikovaný. Většinou totiž nepotřebujeme vědět, kudy přesně která částečka vody putuje od pramenů řeky do moře nebo kudy která částečka vzduchu cestuje ve vanoucím větru nebo v hubici vysavače. Spíše nás zajímá, jak rychle kde voda nebo vzduch proudí a jaký má v daném místě tlak.

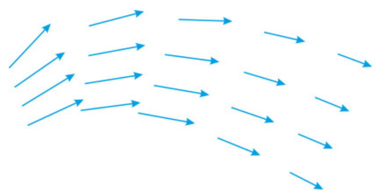
Takovýto popis proudění se nazývá ***Eulerův***. V něm vyjadřujeme rychlost proudící tekutiny a její vlastnosti v závislosti na místě a čase:

$$\begin{aligned} \vec{v} &= \vec{v}\left(\vec{r},t\right) \\ \rho &= \rho\left(\vec{r},t\right) \\ p &= p\left(\vec{r},t\right) \end{aligned} \tag{11.33}$$

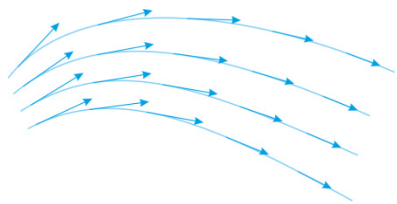
Zde $\vec{r}$ nezávisí na čase; sedíme tedy třeba na břehu řeku a měříme, jak se rychlost vody v určitém místě mění s časem. Nebo například měříme rychlost větru v daném místě v závislosti na čase.

Proudnice

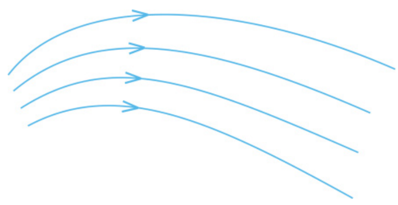
V daném pevném čase můžeme vykreslit vektory rychlosti v jednotlivých bodech, jak to ukazuje obrázek.[60] Zobrazíme tak vlastně *pole rychlosti*.



Pokud nám jde jen o směry rychlosti, je přehlednější zakreslit křivky, které směr ukazují. Tedy křivky, k nimž je rychlost v každém bodě tečná. [61]



Takovým křivkám říkáme ***proudnice***.[62] Vektory rychlosti už do obrázku kreslit nemusíme, proudnice jsou prostě orientované křivky.



Nesmíme si ale představovat, že se daná částečka tekutiny vždy pohybuje podél jedné proudnice. (Například že začne na obrázku na horní nakreslené proudnici vlevo a za chvíli je na stejné proudnici vpravo.) V obecném nestacionárním

[59] Nebo *Lagrangeova metoda popisu*. (Vyslovujeme “lagranžův popis“, „lagranžova metoda“.) „Částice“ tekutiny při něm nemusíme nutně číslovat, stačí si říci, že budeme sledovat v čase pohyb kousků tekutiny, které mají v nějakém čase t_0 souřadnice x_0, y_0, z_0. Pohyb tekutiny v čase je pak popsán vztahy $x_i = x_i(x_0, y_0, z_0, t_0)$.

[60] V obrázku samozřejmě kreslíme vektory rychlosti jen v některých bodech, jinak bychom si zcela začernili papír. ☺

[61] Matematicky řečeno, jsou to integrální křivky vektorového pole rychlosti.

[62] Používá se i název *proudové čáry*.

proudění totiž rychlosti závisí na čase, takže proudnice se s časem mění. (Než částice na našem obrázku doputuje doprava, tvar proudnic může být jiný.) Představte si třeba vodu vířící pod jezem, tam určitě proudnice nezůstávají stejné.

Stacionární proudění

Jednodušší pro popis a rozbor je ***stacionární proudění***. V něm rychlost proudění v daném místě nezávisí na čase:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0 \ . \qquad (11.34)$$

Ve stacionárním proudění v daném místě nezávisí na čase ani další veličiny popisující tekutinu, tedy hustota a tlak:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial t} = 0 \ . \qquad (11.35)$$

To znamená, že rychlost, hustota i tlak jsou funkcemi jenom polohy:

$$\vec{v} = \vec{v}(\vec{r}), \quad \rho = \rho(\vec{r}), \quad p = p(\vec{r}) \ . \qquad (11.36)$$

Ve stacionárním proudění se proudnice s časem nemění a částečky tekutiny se tedy pohybují podél nich.

Vířivé a nevířivé proudění

To, zda tekutina při svém pohybu víří nebo ne, poznáme z ***rotace rychlosti***. Jde o veličinu

$$\vec{\Omega} = \operatorname{rot} \vec{v} \ , \qquad (11.37)$$

kde rot je *operátor rotace*. Rotaci rychlosti můžeme vyjádřit ve složkách

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}, \ \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}, \ \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right), \qquad (11.38)$$

nebo také vektorovým zápisem

$$\operatorname{rot} \vec{v} = \nabla \times \vec{v} \ . \qquad (11.39)$$

O operátoru rotace a dalších diferenciálních operátorech, včetně operátoru ∇ (ten se nazývá *nabla*), najdete základní informace v Dodatku B.

Proudění se nazývá ***nevířivé***, jestliže platí

$$\operatorname{rot} \vec{v} = 0 \ . \qquad (11.40)$$

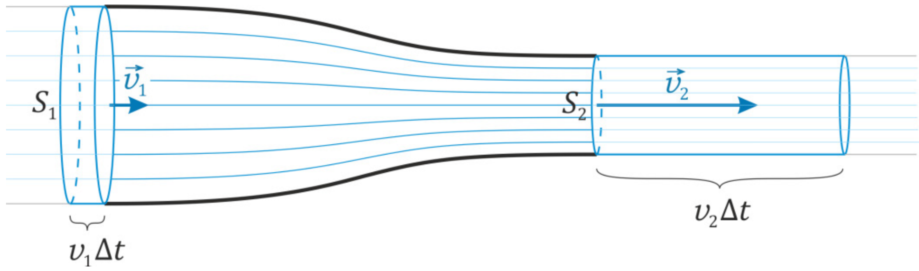
Poznámka: Dá se dokázat, že když je proudění nevířivé, existuje veličina Φ_v taková, že platí $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi_v$. Φ_v je *potenciál rychlosti*. [63] Nevířivému proudění se proto také říká *potenciálové*. (Dodejme, že když existuje potenciál rychlosti, určitě platí $\operatorname{rot} \vec{v} = 0$, takže proudění je nevířivé; podmínky (11.40) a $\vec{v} = \operatorname{grad} \Phi_v$ jsou ekvivalentní; viz Dodatek B.)

Pokud je $\operatorname{rot} \vec{v} \neq 0$, jde o proudění ***vířivé***. Názorně lze říci, že když do takto proudící kapaliny vhodíme malé těleso (třeba malý lístek ze stromu), bude plout s proudem a zároveň se otáčet.

[63] Připomeňte si, že potenciálem jsme charakterizovali silová pole. Gradientem potenciálu tam byla (až na znaménko) intenzita pole. Zde je gradientem potenciálu rychlosti samotná rychlost.

11.4 Rovnice kontinuity

Na střední škole se obvykle rovnice označovaná jako *rovnice kontinuity* odvozuje pro kapalinu tekoucí trubicí. Jestliže plocha průřezu trubice na jednom místě je S_1 a kapalina tam proudí rychlostí v_1 (stejnou v celém průřezu), pak za dobu Δt vteče daným průřezem kapalina o objemu $S_1\, v_1\, \Delta t$. [64] O kus dále průřezem o ploše S_2, kde se kapalina pohybuje rychlostí v_2, vyteče za Δt kapalina o objemu $S_2\, v_2\, \Delta t$.



Když kapalinu považujeme za nestlačitelnou, nemůže se v části trubice mezi oběma průřezy nijak městnat ani zřeďovat. To znamená, že stejně velký objem kapaliny, který za Δt vtekl, musí také vytéct:

$$S_1 v_1 \Delta t \;=\; S_2 v_2 \Delta t\,,$$

a po zkrácení Δt:

$$S_1 v_1 \;=\; S_2 v_2 \;. \tag{11.41}$$

Toto je nejjednodušší tvar rovnice kontinuity, platí pro **nestlačitelnou kapalinu** proudící trubicí.

Pokud trubicí proudí tekutina, která se může stlačovat, bude obecně hustota v různých místech různá a nemůžeme říci, že vteče a vyteče stejný objem. Ovšem pokud proudění bude **stacionární**, za stejný čas vteče a vyteče stejná ***hmotnost***.[65]

Hmotnost, která za Δt vteče v prvním průřezu je $\Delta m_1 = \rho_1 \Delta V_1 = \rho_1 S_1 v_1 \Delta t$, kde ρ_1 je hustota v daném místě[66]. Analogicky je tomu pro druhý průřez. Vteče a vyteče stejná hmotnost, je tedy

$$\rho_1 S_1 v_1 \Delta t \;=\; \rho_2 S_2 v_2 \Delta t\,,$$

a odtud

$$\boxed{\rho_1 S_1 v_1 \;=\; \rho_2 S_2 v_2 \;.} \tag{11.42}$$

Z úvah, kterými jsme k tomuto výsledku dospěli, vidíme, že

rovnice kontinuity vyjadřuje zákon zachování hmotnosti.

Hmotnost tekutiny se v trubici neztrácí, ani tam žádná nevzniká.[67]

Vztah (11.42) se také probírá na střední škole. Jak už bylo řečeno, platí pro proudění trubicí, které je **stacionární**. Pojďme se teď podívat na obecný případ, kdy se situace může v čase měnit. (Například když z pneumatiky vypouštíme vzduch nebo z plynojemu odebíráme plyn.)

[64] Jde o váleček o ploše podstavy S_1 a výšce $v_1\, \Delta t$, viz obrázek.

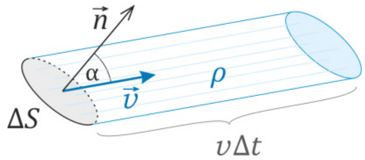
[65] Kdyby například za určitý čas přiteklo o 1 kg více tekutiny, než vyteklo, musela by se tekutina v dané části trubice hromadit, a situace by určitě nebyla stacionární.

[66] Opět ji bereme stejnou v celém průřezu trubice.

[67] Prostě a jednoduše řečeno, při stacionárním proudění „co vteče, to vyteče".

Tok hmotnosti, hustota toku hmotnosti

Pro odvození rovnice kontinuity v obecné situaci se nejprve podíváme, kolik tekutiny proteče malou ploškou ΔS za dobu Δt, když rychlost tekutiny $\vec{v}$ má obecný směr. Normálový vektor k ploše budeme značit $\vec{n}$.[68] Často se také píše $\Delta\vec{S} = \Delta S\,\vec{n}$, v tomto zápise je „schována“ jek velikost plošky, tak její směr a orientace.



Za dobu Δt projde ploškou tekutina v šikmém válci[69], jehož podstavou je ploška ΔS, délka jeho povrchové úsečky je $v\,\Delta t$.[70] Výška daného válce je $v\,\Delta t\cos\alpha$, jeho objem je tedy $\Delta V = \Delta S\, v\,\Delta t\cos\alpha = \Delta S\,\underbrace{v\cos\alpha}_{\vec{v}\cdot\vec{n}}\,\Delta t$, čili

$$\Delta V = \Delta S\,\vec{v}\cdot\vec{n}\,\Delta t \ .$$

Hmotnost proteklé tekutiny dostaneme vynásobením hustotou ρ, $\Delta m_{\text{proteklá}} = \rho\Delta V$, čili po přeuspořádání součinitelů:

$$\Delta m_{\text{proteklá}} = (\rho\vec{v})\cdot\vec{n}\,\Delta S\,\Delta t \ . \qquad (11.43)$$

Po vydělení Δt dostaneme **tok** plochou ΔS:[71]

$$\boxed{\frac{\Delta m_{\text{proteklá}}}{\Delta t} = (\rho\vec{v})\cdot\vec{n}\,\Delta S = (\rho\vec{v})\cdot\Delta\vec{S} \ .} \qquad (11.44)$$

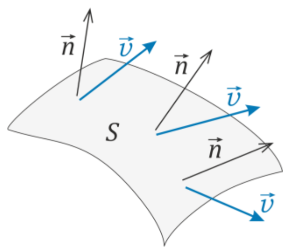
Veličina $\rho\vec{v}$ je **hustota toku** (přesněji řečeno ***hustota toku hmotnosti***) tekutiny v daném místě. Jde o *plošnou* hustotu toku (jednotkou je kg/(s·m^2)), jak je vidět ze zápisu

$$\frac{\left(\dfrac{\Delta m_{\text{proteklá}}}{\Delta t}\right)}{\Delta S} = (\rho\vec{v})\cdot\vec{n} \ . \qquad (11.45)$$

Vztah (11.44) dává tok hmotnosti malou ploškou.[72]

Spočítat ***celkovou hmotnost*** velkou plochou S znamená „sečíst všechny kousky Δm“, tedy integrovat

$$\Delta m_{\text{proteklá}} = \int_S \rho\vec{v}\cdot\vec{n}\,dS\ \Delta t \equiv \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S}\ \Delta t \ . \qquad (11.46)$$



Po vydělení Δt a limitě $\Delta t \to 0$ dostaneme z $\dfrac{\Delta m_{\text{proteklá}}}{\Delta t}$ derivaci a z (11.46) tedy

$$\boxed{\frac{dm_{\text{proteklá}}}{dt} = \int_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \ .} \qquad (11.47)$$

Jde o celkový **tok** (**hmotnosti**) **plochou** S.

[68] Jde o jednotkový vektor kolmý k plošce.

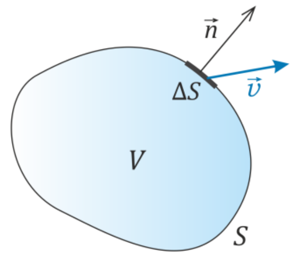
[69] Také se říká „kosý válec“.

[70] Částečka tekutiny, která byla v čase t na plošce ΔS, se za Δt posune o vzdálenost $v\,\Delta t$.

[71] Přesněji bychom mohli říci: ***tok hmotnosti plochou***.

[72] Jak ΔS, tak Δt musí být dostatečně malé, abychom hustotu i rychlost v šikmém válečku mohli považovat za konstantní. Přesně by vztah (11.44) platil, kdybychom místo konečných Δm, ΔS a Δt měli diferenciály.

Rovnice kontinuity v integrálním tvaru



Uvažujme nyní objem V, jehož hranici tvoří (uzavřená) plocha S, viz obrázek.[73] Tok z objemu V směrem ven je

$$\frac{dm_{\text{vyteklá}}}{dt} = \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \;.^{74} \qquad (11.48)$$

Hmotnost uvnitř objemu V je

$$m = \int_V \rho \, dV \,. \qquad (11.49)$$

Když tekutina vytéká z objemu, hmotnost uvnitř se musí zmenšovat, je tedy

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{dm_{\text{vyteklá}}}{dt} = -\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} \quad . \qquad (11.50)$$

Derivací (11.49) podle času a dosazením do (11.50) dostaneme

$$-\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = \frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV \quad ,$$

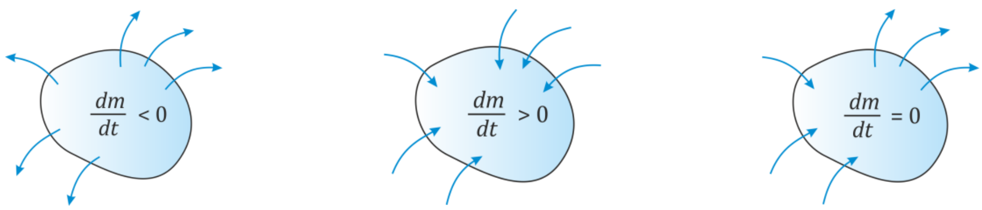
a odtud:

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV + \oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0} \qquad (11.51)$$

Tohle je **rovnice kontinuity v integrálním tvaru**.

I v tomto tvaru samozřejmě vyjadřuje zákon zachování hmotnosti: kolik hmotnosti vyteče směrem ven, o tolik se sníží hmotnost tekutiny vevnitř. A ovšem i naopak:

Pokud je tok směrem ven záporný, $\oint_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} < 0$, hmotnost uvnitř přirozeně vzrůstá, $\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV > 0$.



Pro nestlačitelnou kapalinu je $\rho = \text{konst.}$, takže $\frac{d}{dt}\int_V \rho \, dV = 0$; totéž platí v případě stacionárního proudění. Z rovnice kontinuity pak plyne $\int_S \rho \vec{v} \cdot d\vec{S} = 0$, čili: „kolik hmotnosti vteče, tolik vyteče“. Z toho již můžeme odvodit jednoduché „středoškolské“ tvary rovnice kontinuity (11.42) ev. (11.41).

Zatím jsme rovnici kontinuity formulovali „ve velkém“: pro celou část trubice nebo pro celý objem a jeho hranici. Dá se ale formulovat i lokálně, pro určitý bod a jeho těsné okolí.

[73] Objem V a jeho hranice jsou pevné, tj. s časem se nemění.

[74] Můžeme říci, že to je rychlost, kterou hmotnost m *ubývá* z objemu V.

Rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru

Rovnici kontinuity (11.51) lze upravit s využitím Gaussovy věty matematiky (viz Dodatek C). Integrál přes plochu S s pomocí Gaussovy věty přepíšeme na

$$\oint_S \rho\vec{v}\cdot d\vec{S} \;=\; \int_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})\, dV \,. \tag{11.52}$$

(O operátoru divergence, značeném div, informuje Dodatek B.)

V rovnici kontinuity (11.51) upravíme také člen $\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV$. Objem V je totiž pevný, takže hmotnost se může měnit, jen když se mění hustota. Je tedy[75]

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV \;=\; \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV \,. \tag{11.53}$$

Když (11.52) a (11.53) dosadíme do (11.51), dostaneme

$$0 \;=\; \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t} dV + \int_V \operatorname{div}(\rho\vec{v})\, dV \;=\; \int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v})\right) dV \,. \tag{11.54}$$

A teď přijde důležitá úvaha:

Integrál na pravé straně (11.54) se rovná nule. A tohle platí pro ***libovolný*** objem V. Aby toto platilo, nutně musí být to, co integrujeme, rovno nule. Musí tedy být

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) \;=\; 0 \;.} \tag{11.55}$$

A právě tohle je **rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru**.

(Lze ji odvodit i méně exaktně, ale názorněji, bez použití Gaussovy věty – viz Dodatek D.)

Vidíme, že divergence $\rho\vec{v}$ rozhoduje o tom, jestli hustota v daném bodě s časem roste, klesá, nebo zůstává konstantní. S rovnicí kontinuity se setkáte ve fyzice ještě mnohokrát, například v oblasti elektřiny, tam vyjadřuje zákon zachování náboje.

Dodejme, že pokud se týče proudění tekutin, bývá rovnice kontinuity psána i v trochu odlišném tvaru, jako

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div}\vec{v} \;=\; 0 \;. \tag{11.56}$$

Proč je zde obyčejná derivace podle času místo derivace parciální a co to fyzikálně znamená, uvádí (spíše pro zájemce) druhá část Dodatku D.

---

[75] Pro zájemce dodejme náznak podrobnějšího odvození:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho dV = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{1}{\Delta t}\left(\int_V \rho(t+\Delta t)dV - \int_V \rho(t)dV\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\int_V \frac{1}{\Delta t}\big(\rho(t+\Delta t)-\rho(t)\big)dV = \int_V \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\rho(t+\Delta t)-\rho(t)}{\Delta t}dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV$$

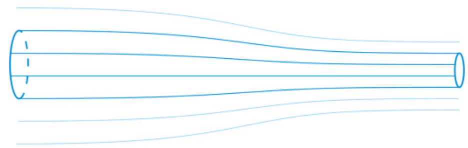
Krok, který není úplně samozřejmý, a matematika ho musí detailně zdůvodnit a dát k němu potřebné předpoklady, je záměna pořadí limity a integrálu. Podrobnosti necháme na matematické analýze; v situacích, které uvažujeme ve fyzice, jsou potřebné předpoklady příslušné matematické věty splněny.

Závěrečné poznámky k rovnici kontinuity

- Pro stacionární proudění plyne z (11.55), že $\operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0$.
- Pro proudění nestlačitelné kapaliny plyne z (11.56) (a ostatně i z předchozího řádku) $\operatorname{div}\vec{v} = 0$.
- „Středoškolský tvar“ rovnice kontinuity (11.42) pro stacionární proudění, $\rho_1 S_1 v_1 = \rho_2 S_2 v_2$, platí nejen pro proudění tekutiny v trubici, pro které jsme ho uvedli výše.

  Platí i v libovolné **proudové trubici**, tedy myšlené trubici, jejíž stěny tvoří proudnice.

Rychlost tekutiny je totiž tečná k proudnicím, takže „pláštěm“ proudové trubice žádná tekutina neprotéká, podobně jako stěnami pevné trubice, pro níž jsme rovnici kontinuity odvozovali.



Poznamenejme, že velmi tenké proudové trubici se někdy říká *proudové vlákno*.

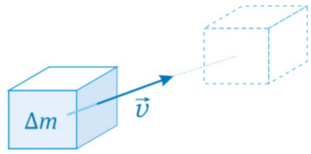
11.5 Proudění ideální tekutiny

V této části kapitoly odvodíme základní vztahy pro proudění ideální kapaliny: pohybovou rovnici (říká se jí Eulerova hydrodynamická rovnice) a z ní pak Bernoulliovu rovnici.

Eulerova hydrodynamická rovnice

Eulerova hydrodynamická rovnice je pohybová rovnice ideální tekutiny. Popisuje, jak pohyb tekutiny ovlivňují tlakové síly, tedy napětí v tekutině, a objemové síly.

V ideální tekutině neexistuje vnitřní tření, nejsou zde tedy ani za pohybu smyková napětí, a napětí v tekutině tedy popisuje jediná skalární veličina: tlak p působící vždy kolmo na plochu. Jako objemovou sílu budeme uvažovat gravitační, resp. tíhovou sílu.



Uvažujme pohyb určitého kousku tekutiny o hmotnosti Δm a budeme sledovat, jak se pohybuje. Hmotnost tohoto kousku je konstantní, protože jde o stále stejný kousek tekutiny. Daný kousek samozřejmě může měnit tvar, a pokud je tekutina stlačitelná, tak i objem, ten budeme označovat ΔV. Někdy se říká, že jde o „tekutý objem“; opravdu je tekutý a plyne s okolní tekutinou.

Pro pohyb daného kousku tekutiny musí platit druhý Newtonův zákon

$$\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = \Delta \vec{F} \ , \tag{11.57}$$

kde $\Delta \vec{F}$ je celková síla působící na daný kousek tekutiny. Ta je dána jednak tíhovou silou $\Delta m\, \vec{g} = \rho\, \vec{g}\, \Delta V$ (kde ρ je hustota tekutiny a $\vec{g}$ tíhové zrychlení) a jednak tlakovým působením okolní tekutiny.

V hydrostatice jsme uvažovali rovnováhu kousku tekutiny a dospěli jsme k rovnici rovnováhy (11.8): $\operatorname{grad} p = \rho\, \vec{g}$. Když ji vynásobíme ΔV a převedeme vše na jednu stranu rovnice, dostaneme

$$-\operatorname{grad} p\ \Delta V + \rho\, \vec{g}\, \Delta V = 0 \ .$$

Druhý člen je tíhová síla působící na daný kousek tekutiny, první člen je tedy zjevně síla daná tlakovým působením.[76] Ve statickém případě dá jejich součet nulu, obecně je ale celková síla

$$\Delta \vec{F} = -\operatorname{grad} p\ \Delta V + \rho\, \vec{g}\, \Delta V \ . \tag{11.58}$$

nenulová; právě ona udílí kousku tekutiny zrychlení. Dosazením (11.58) do (11.57) dostaneme už prakticky výslednou pohybovou rovnici: $\Delta m \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p\ \Delta V + \rho\, \vec{g}\, \Delta V$. Jen ji ještě vydělíme ΔV a vezmeme $\frac{\Delta m}{\Delta V} = \rho$. Výsledkem je **Eulerova hydrodynamická rovnice**:

$$\boxed{\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho\, \vec{g} \ .} \tag{11.59}$$

Jde o jednu vektorovou rovnici, čili o tři rovnice pro složky rychlosti.

[76] Působí z míst o vyšším tlaku do míst o nižším tlaku.

Člen $\rho\vec{g}$ je objemová hustota tíhové síly; místo něj se v učebnicích často píše obecně hustota objemových sil $\vec{G}$.[77] Na co ale v literatuře narazíme skoro vždy, je přepis rovnice (11.59) do složek. Navíc se od obyčejné derivace rychlosti podle času přechází k parciálním derivacím.

Přechod k vyjádření ve složkách a k parciální derivaci rychlosti podle času[78]

Mezi derivacemi $\frac{d}{dt}$ a $\frac{\partial}{\partial t}$ je významný rozdíl. Při „obyčejné“ derivaci rychlosti $\frac{d\vec{v}}{dt}$ ve druhém Newtonově zákoně počítáme rozdíl rychlostí určitého kousku tekutiny v časech t a $t+\Delta t$. V těchto časech je daný kousek tekutiny na různých místech. Když napíšeme závislost rychlosti na místě a času jako $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t)$, je tedy

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}\big(\vec{r}(t+\Delta t),\, t+\Delta t\big)-\vec{v}\big(\vec{r}(t),\, t\big)}{\Delta t} \;. \tag{11.60}$$

Naproti tomu při parciální derivaci rychlosti podle času sledujeme, jak se rychlost s časem mění na zvoleném pevném místě:

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{v}\big(\vec{r},\, t+\Delta t\big)-\vec{v}\big(\vec{r},\, t\big)}{\Delta t} \;. \tag{11.61}$$

Při „obyčejné“ derivaci (11.60) „plujeme s proudem“, říká se jí proto také derivace *konvektivní*. Počítat ji nemusíme limitou, stačí derivovat rychlost

$$\vec{v} = \vec{v}\big(\vec{r}(t),t\big) = \vec{v}\big(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, t\big) \tag{11.62}$$

jako složenou funkci více proměnných:

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\vec{v}\big(x_1(t),\, x_2(t),\, x_3(t),\, t\big) = \frac{\partial\vec{v}}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}\frac{dx_j}{dt}+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \,.$$

A protože $\frac{dx_j}{dt}=v_j$, je

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} \;. \tag{11.63}$$

Eulerovu hydrodynamickou rovnici (11.59) tedy můžeme přepsat na tvar

$$\rho\left(\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial\vec{v}}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}\right) = -\operatorname{grad}p+\rho\vec{g} \;. \tag{11.64}$$

Po vydělení ρ a zápisu i-té složky vektorů dostaneme konečně

$$\boxed{\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_i}{\partial x_j}v_j+\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i}+g_i \,.} \tag{11.65}$$

Jde o tři rovnice (pro i = 1,2,3), proto se jim říká v množném čísle **Eulerovy hydrodynamické rovnice**.

---

[77] V objemových silách by se kromě tíhové síly mohly projevovat i setrvačné síly, pokud bychom situaci popisovali například v rotující soustavě, jako jsme to dělali výše při popisu kapaliny v rotující nádobě.

[78] Rozdíl mezi tím, jaký význam má obyčejná a jaký parciální derivace podle času, je věc, kterou je třeba si dobře rozmyslet – když se s tím člověk seznamuje poprvé, leckdy se to zdá trochu zapeklité. V této kapitole daný rozdíl komentujeme také v Dodatku D. Ten jsme ale zmiňovali spíše jako dodatek pro zájemce; proto se dané problematice věnujeme i zde.

Neznámých, které je třeba při výpočtu proudění nalézt, je pět: tři složky rychlosti, tlak a hustota. K dispozici máme tři rovnice (11.65) a rovnici kontinuity (11.55). Potřebujeme tedy ještě jednu rovnici, abychom měli stejný počet rovnic, jako počet neznámých. Takovou rovnicí bývá vztah mezi tlakem a hustotou: $\rho = \rho(p)$. Když je hustota opravdu jen funkcí tlaku, označuje se daná tekutina jako *barotropní*. Příkladem je nestlačitelná kapalina, kdy $\rho = \mathrm{konst.}$[79] Pokud ale obecně vztah mezi tlakem a hustotou závisí na teplotě, je třeba počítat i rozložení teploty a výpočet je složitější.

Řešení Eulerových hydrodynamických rovnic ovšem není jednoduché ani v případě barotropní tekutiny. Rovnice (11.65), jak vidíme z jejich tvaru, jsou totiž *nelineární*.[80] To znamená, že ani v případě, kdy by tekutina nebyla v tíhovém poli (tj. bylo by $\vec{g} = 0$) by pro nějaké řešení jeho násobek už *nebyl* řešením rovnic. Podobně, kdybychom měli dvě řešení, jejich součet by nebyl řešením.

Přesto však jeden důležitý krok v popisu proudění můžeme udělat. Najdeme veličinu, která je alespoň podél dané proudnice konstantní (a někdy je konstantní v celé tekutině). Vystihuje to známá *Bernoulliova rovnice*.

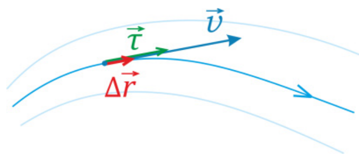
Bernoulliova rovnice[81]

Budeme uvažovat **stacionární proudění ideální tekutiny**. (Pro jednoduchost většinou půjde o ideální kapalinu, takže její hustota bude konstantní, ale není to nezbytné.) Vyjdeme z Eulerovy hydrodynamické rovnice (11.59),

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = -\mathrm{grad}\, p + \rho \vec{g} \ , \tag{11.66}$$

a budeme sledovat, jak se veličiny v ní mění, když se budeme posouvat podél proudnice.

Rychlost tekutiny v daném místě je $\vec{v}$. Je $\vec{v} = v\,\vec{\tau}$, kde v je velikost rychlosti a $\vec{\tau}$ jednotkový vektor ve směru rychlosti.[82] Za krátkou dobu Δt se kousek tekutiny z daného místa přesune o



$$\Delta\vec{r} = \vec{v}\,\Delta t\,.^{83} \tag{11.67}$$

Chceme-li zjistit, jak se veličiny mění při posunu podél proudnice, vynásobíme tedy (11.66) (vydělenou ρ) posunutím (11.67):

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho}\mathrm{grad}\, p + \vec{g} \qquad \Big/ \cdot \Delta\vec{r}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v}\,\Delta t = -\frac{1}{\rho}(\mathrm{grad}\, p)\cdot\Delta\vec{r} + \vec{g}\cdot\Delta\vec{r} \tag{11.68}$$

Levou stranu upravíme jako $\frac{d\vec{v}}{dt}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}v^2\right)$.[84] Na pravé straně (11.68) napíšeme

[79] Jiným příkladem je závislost mezi tlakem a hustotou ve tvaru *polytropy*, $p = k\rho^{\kappa}$.

[80] Je v nich součin složek rychlosti a jejich derivací.

[81] Někdy se její název používá ve tvaru *Bernoulliho rovnice*.

[82] $\vec{\tau}$ je vektor tečný k proudnici.

[83] Takhle zapsáno to samozřejmě není přesné. Z obrázku vidíme, že při velkém Δt by se kousek tekutiny přesunul mimo danou proudnici. My ale volíme Δt velmi malé a nakonec budeme limitovat $\Delta t \to 0$ (z Δt se tak fakticky stane diferenciál dt), takže opravdu půjde o posunutí po jedné a téže proudnici.

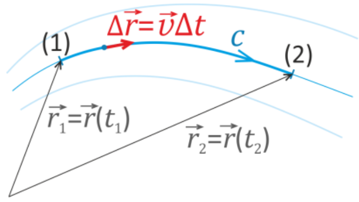
[84] Podobnou úpravu jsme dělali při zavádění kinetické energie hmotného bodu.

tíhové zrychlení $\vec{g}$ pomocí potenciálu gravitačního pole φ_g jako $\vec{g} = -\mathrm{grad}\,\varphi_g$.[85] Při dalším odvození budeme navíc pro jednoduchost předpokládat, že jde o **nestlačitelnou kapalinu**, tedy že $\rho = \mathrm{konst.}$[86] Pravou stranu tedy můžeme přepsat na

$$-\,\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi_g\right)\cdot \Delta\vec{r}\ . \tag{11.69}$$

Rovnice (11.68) bude mít po těchto úpravách tvar

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right)\Delta t \;=\; -\,\mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi_g\right)\cdot \Delta\vec{r} \tag{11.70}$$



Když chceme zjistit, jak se veličiny mění při posunu z místa (1) na proudnici do místa (2), musíme „sečíst malé změny“ na levé i pravé straně (11.70) – jinak řečeno, integrovat levou i pravou stranu této rovnice. Přitom nevadí, že na levé straně budeme integrovat přes čas (protože kousku tekutiny to chvíli trvá, než dopluje z (1) do (2)) a na pravé straně půjde o křivkový integrál podél úseku proudnice od (1) do (2). (Tuto křivku označujeme c, viz obrázek.) Uvažujeme totiž *stacionární proudění*, takže proudnice zůstává stále tatáž a nemění se ani rychlosti, tlaky a hustoty v bodech (1) a (2).

Integrování (11.70) dá[87]

$$\underbrace{\int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right) dt}_{=\left[\frac{1}{2}\upsilon^2\right]_{t_1}^{t_2}} \;=\; -\underbrace{\int_c \mathrm{grad}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi_g\right)\cdot d\vec{r}}_{=\left[\frac{p}{\rho}+\varphi_g\right]_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2}} \tag{11.71}$$

Když hodnoty veličin v místech (1) a (2) označíme příslušnými indexy, má výsledek tvar

$$\frac{1}{2}(\upsilon_2)^2 - \frac{1}{2}(\upsilon_1)^2 \;=\; -\left(\frac{p_2}{\rho} + \varphi_{g\,2}\right) + \left(\frac{p_1}{\rho} + \varphi_{g\,1}\right), \tag{11.72}$$

čili po úpravě

$$\frac{1}{2}(\upsilon_2)^2 + \frac{p_2}{\rho} + \varphi_{g\,2} \;=\; \frac{1}{2}(\upsilon_1)^2 + \frac{p_1}{\rho} + \varphi_{g\,1}\ . \tag{11.73}$$

Vidíme, že výraz $\frac{1}{2}\upsilon^2 + p/\rho + \varphi_g$ má stejnou hodnotu v bodech (1) a (2) – a protože šlo o libovolné body na dané proudnici, platí

$$\boxed{\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g \;=\; \mathrm{konst.}} \tag{11.74}$$

A právě to je **Bernoulliova rovnice** (pro stacionární proudění nestlačitelné kapaliny).

Obecně tato rovnice platí podél proudnice;

v případě nevířivého proudění platí v celém objemu kapaliny. (Odvození viz Dodatek E.)

---

[85] Pozn.: Pokud $\vec{g}$ je tíhové zrychlení, tak do φ_g započítáme i potenciál odstředivé síly daný rotací Země.

[86] Jak je tomu v obecnějším případě, je pro zájemce naznačeno v Dodatku E.

[87] Na levé straně je to jasné, tam integrujeme derivaci. Na pravé straně využíváme toho, že $\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\mathrm{grad}\, f)\cdot d\vec{r} = f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$. Blíže viz Dodatek F.

Interpretace Bernoulliovy rovnice

V homogenním gravitačním poli je potenciál $\varphi_g = g\,z$, kde z je výška. Bernoulliova rovnice se pak často (po vynásobení ρ) přepisuje do tvaru

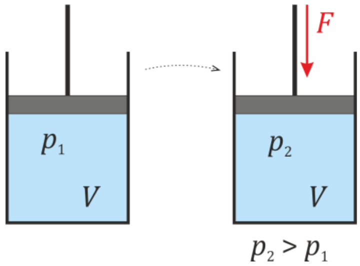
$$\boxed{\frac{1}{2}\rho\upsilon^2 + p + \rho\,g\,z = \text{konst.}} \qquad (11.75)$$

První člen připomíná výraz pro kinetickou energii – opravdu jde o objemovou hustotu kinetické energie proudící tekutiny. Poslední člen je analogicky hustota gravitační potenciální energie tekutiny (ve vnějším homogenním gravitačním poli).

Analogicky bývá často prostřední člen (tlak p) interpretován jako „hustota tlakové energie“.[88] Ovšem není to tak jednoduché! Takže **pozor**:

Rozhodně *neplatí*, že když má tekutina v nějakém objemu V tlak p, že by tam měla „tlakovou energii“ $p\,V$. Přesvědčí nás o tom jednoduchý **protipříklad**:

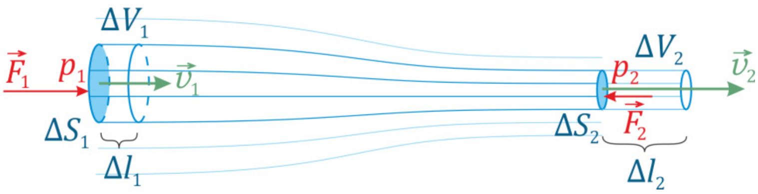
Uvažujme válec s pístem, ve válci je nestlačitelná kapalina o tlaku p_1.[89] Když na píst zatlačíme vnější silou F, tlak vzroste na hodnotu p_2. Objem zůstal stejný (protože kapalina je nestlačitelná), je tedy $p_2 V > p_1 V$. Kdyby bylo $p\,V$ částí celkové energie, musela by celková energie kapaliny vzrůst.[90]



Píst se ovšem vůbec nepohnul (vždyť kapalina je nestlačitelná), takže síla F nevykonala na kapalinu žádnou práci. Jak by tedy mohla energie vzrůst? To by bylo proti zákonu zachování energie! Z toho plyne, že $p\,V$ nemůže být částí celkové energie kapaliny.

$\boxed{?}$ Jaký je tedy význam tlakového členu v Bernoulliově rovnici?

Při proudění tekutiny obecně ***tlakové síly konají práci*** a tím mohou určitý kousek tekutiny zrychlovat nebo tlačit do výšky. Popsat to můžeme i kvantitativně, opět pro nestlačitelnou kapalinu:



Uvažujme proudovou trubici, jejíž průřez v místě 1 je ΔS_1 a v místě 2 je ΔS_2. Rychlosti v daných místech jsou υ_1 a υ_2, tlaky p_1 a p_2. Tlaková síla, kterou okolní kapalina působí na plochu ΔS_1 je $F_1 = p_1\Delta S_1$, analogicky v místě 2 je síla působící zprava $F_2 = p_2\Delta S_2$.

Za krátkou dobu Δt se kapalina v místě 1 posune o $\Delta l_1 = \upsilon_1\Delta t$. Práce, kterou vykonala síla F_1 je $\Delta W_1 = F_1\Delta l_1 = p_1\Delta S_1\Delta l_1 = p_1\Delta V_1$, protože $\Delta V_1 = \Delta S_1\Delta l_1$. Práce síly F_2 je $\Delta W_2 = -F_2\Delta l_2 = -p_2\Delta V_2$. (Je záporná, protože síla působí proti pohybu kapaliny.) Pro nestlačitelnou kapalinu je $\Delta V_1 = \Delta V_2$. Celková práce tlakových sil na kapalinu ve vnitřku proudové trubice je tedy $\Delta W = (p_1 - p_2)\,\Delta V$.[91]

[88] Po vynásobení (11.75) objemem ΔV kousku tekutiny dostaneme $\frac{1}{2}(\rho\Delta V)\upsilon^2 + p\,\Delta V + (\rho\Delta V)\,g\,z = C$. Všechny členy mají rozměr energie. První člen je zjevně kinetická energie daného kousku, poslední člen gravitační potenciální energie tohoto kousku. Svádí to tedy k tomu, říci, že prostřední člen $p\Delta V$ je „tlaková energie“ daného kousku a konstanta C je jeho celková energie.

[89] Tento „počáteční“ tlak může být způsoben třeba tíhou pístu; rozdíly tlaku díky hydrostatickému tlaku pro jednoduchost zanedbáváme. (Odvození lze udělat i pro případ, kdy hydrostatický tlak nezanedbáme.)

[90] Není zde žádná část energie, která poklesla, aby vzrůst pV kompenzovala.

[91] Když se ΔV_1 a ΔV_2 neliší, značíme je prostě jediným symbolem ΔV.

Jak se za Δt změní kinetická energie kusu kapaliny, který byl na začátku uvnitř daného úseku proudové trubice? Kinetická energie se zmenší o kousek v místě 1, $\Delta T_1 = -\frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_1)^2$, a naopak zvětší o kousek v místě 2, $\Delta T_2 = \frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_2)^2$. Celkově se tedy změna kinetické energie rovná $\Delta T = \frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_2)^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_1)^2$. Gravitační potenciální energie se změní o $\Delta V = \rho\Delta V g\,(z_2 - z_1)$. Změna součtu kinetické energie a gravitační potenciální energie se musí rovnat práci, kterou vykonaly tlakové síly, $\Delta T + \Delta V = \Delta W$, tedy

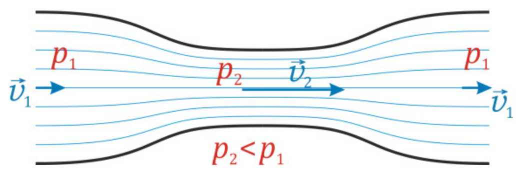
$$\frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_2)^2 - \frac{1}{2}\rho\Delta V\,(v_1)^2 + \rho\Delta V g\,z_2 - \rho\Delta V g\,z_1 = \left(p_1 - p_2\right)\Delta V \;.$$

Po vykrácení ΔV a převedení členů odpovídajících stejnému místu k sobě dostáváme

$$\frac{1}{2}\rho\,(v_2)^2 + \rho g\,z_2 + p_2 = \frac{1}{2}\rho\,(v_1)^2 + \rho g\,z_1 + p_1 \;, \tag{11.76}$$

a to už je fakticky Bernoulliova rovnice (11.75).

Tlakový člen má tedy význam nikoli energie, ale práce: $p\cdot\Delta S\cdot v\cdot\Delta t$ je práce vykonaná tlakem p na tekutinu v proudové trubici o průřezu ΔS při posunutí tekutiny rychlostí v za dobu Δt.



Když tekutina proudí trubicí, jejíž průřez se mění, v zúženém místě musí mít v důsledku rovnice kontinuity vyšší rychlost. Podle Bernoulliovy rovnice zde proto musí mít nižší tlak.

Ze vzorce je to jasné, přesto se však na první pohled tento výsledek může zdát divný a paradoxní. Intuitivně nám může připadat, že:

V užším místě se proudění tekutiny „zahušťuje“, tak by tam přece měl být vyšší tlak, no ne?

Jenže on je tam tlak nižší. Tento paradox má dokonce svůj název, říká se mu ***hydrodynamický paradox***.

Vysvětlit i bez rovnic, proč je ve zúženém místě nižší tlak, a proč se po opětovném rozšíření trubice tlak zase zvýší, ale není složité:

V zúženém místě se tekutina pohybuje rychleji. Něco ji muselo zrychlit. A to něco je rozdíl tlaků před zúžením (na obrázku výše tlak p_1 v levé části trubice) a ve zúženém místě (tlak p_2). Proto musí být tlak v samotném zúžení nižší než před ním.[92]

Po průchodu zúžením se v rozšířené části trubice tekutina opět zpomalí. Něco ji tedy muselo zpomalit – opět to je rozdíl tlaků působící proti pohybu tekutiny. Tlak za zúžením tedy musí být vyšší.

Poznámka k užití Bernoulliovy rovnice pro stlačitelné tekutiny

Zatím jsme Bernoulliovu rovnici formulovali jen pro nestlačitelné kapaliny. Učebnice mechaniky kontinua nás ale poučí, že pokud rychlost proudění tekutiny je mnohem menší než rychlost zvuku v dané tekutině, jsou změny hustoty malé[93] a Bernoulliovu rovnici ve tvaru (11.74) ev. (11.75) můžeme alespoň přibližně použít.

[92] Fakticky tady na kvalitativní úrovni užíváme tytéž úvahy a argumenty, jaké jsme výše užívali při odvozování (11.76).

[93] Uvádí se, že $\Delta\rho/\rho \approx \left(v/v_{\text{zvuku}}\right)^2$.

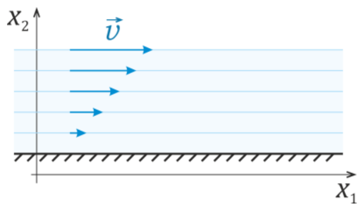
11.6 Reálné tekutiny

Viskozita

Ve skutečných tekutinách za pohybu existuje vnitřní tření. Projeví se tím, že v tekutině jsou nenulová smyková napětí. Pro newtonovské kapaliny jsou napětí úměrná tenzoru rychlosti deformace. Například

$$\tau_{12} = \eta \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} + \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) . \tag{11.77}$$

Konkrétně třeba pro vodu protékající v kanále podle obrázku je těsně u dna rychlost nulová, směrem nahoru vzrůstá. Zjevně je $\frac{\partial v_1}{\partial x_2} > 0$,[94] takže (11.77) můžeme napsat jednoduše jako[95]



$$\boxed{\tau = \eta \, \frac{\partial v_1}{\partial x_2} .} \tag{11.78}$$

Veličina η je **viskozita**,[96] přesněji řečeno ***dynamická viskozita***. Její jednotkou je Pa·s.[97] Můžeme se přesvědčit, že Pa·s = kg/(m·s).

Používá se rovněž veličina ***kinematická viskozita***, definovaná jako

$$\boxed{\nu = \frac{\eta}{\rho} ,} \tag{11.79}$$

její jednotkou je m^2/s.

V tabulkách[98] můžeme najít, že dynamická viskozita vody při 20°C je asi 10^{-3} Pa·s; její kinematická viskozita je tedy asi 10^{-6} m^2/s. Existují kapaliny, jejichž dynamická viskozita je výrazně vyšší; např. pro glycerol je asi 1,5 Pa·s; pro med se uvádí 2 až 10 Pa·s, pro kečup ještě víc.[99] S rostoucí teplotou obecně dynamická viskozita vody i jiných kapalin klesá. U plynů naopak viskozita s teplotou roste. Vzduch má za normálních podmínek dynamickou viskozitu asi $2 \cdot 10^{-5}$ Pa.

Laminární a turbulentní proudění

Při proudění vody v kanále, které jsme uvažovali (viz obrázek), se jednotlivé vrstvy vody nemísily, prostě po sobě klouzaly. Takové proudění nazýváme **laminární**.[100] Podobně je tomu v trubicích i v jiných situacích: při laminárním proudění se proudová vlákna nemísí, jen po sobě kloužou.

Naopak při **turbulentním proudění** se vrstvy a proudová vlákna výrazně promíchávají.[101]

---

[94] $v_2 = 0$, takže je $\frac{\partial v_2}{\partial x_1} = 0$.

[95] U smykového napětí zde už zvlášť nevyznačujeme, že jde o složku τ_{12}.

[96] Česky se také někdy používá název *vazkost*, proto o tekutinách s vnitřním třením také mluvíme jako o *vazkých* tekutinách. (Dodejme navíc, že někdy se v literatuře používá pro viskozitu symbol μ.)

[97] To je vidět už z (11.78): Napětí musí vyjít v pascalech, v derivaci jde rozměrově o dělení m/s metry, takže co se jednotek týče, má derivace jednotku 1/s.

[98] Nebo na webu, viz např. http://www.converter.cz/tabulky/dynamicka-viskozita.htm.

[99] Viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Viscosity.

[100] Z latinského *lamina* = plátek, vrstvička. (Podobný význam má v angličtině.)

[101] Podívejte se na vodu pod jezem, zejména při velkém průtoku, to je dobrý příklad turbulentního proudění.

Při malých rychlostech, zejména v úzkých trubicích, je proudění laminární. Při vyšších rychlostech přechází v turbulentní.

Zda tekutina bude proudit v trubici laminárně nebo turbulentně, lze rozhodnout podle velikosti **Reynoldsova čísla**. To je bezrozměrné číslo definované jako

$$\boxed{Re = \frac{\upsilon R}{\nu} = \frac{\upsilon R \rho}{\eta}} , \tag{11.80}$$

kde υ je rychlost tekutiny a R poloměr trubice.[102] Je-li Reynoldsovo číslo menší než kritická hodnota Re_k, je proudění laminární, pro $Re > Re_k$ je proudění turbulentní.

Toto kritérium je ovšem značně neostré; kritická hodnota Reynoldsova čísla se uvádí asi 1 000 až 2 000 i více.

Pohybové rovnice reálné tekutiny

Pro proudění tekutiny s vnitřním třením platí pohybová rovnice

$$\rho \frac{d\vec{\upsilon}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho \vec{g} + \eta \Delta \vec{\upsilon} + \frac{\eta}{3} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{\upsilon}) . \tag{11.81}$$ [103]

Nazývá se **Navierova-Stokesova rovnice**. Vidíme, že se podobá Eulerově hydrodynamické rovnici (11.59), má ale dva členy navíc.

V literatuře se většinou uvádí ve složkách, podobně jako tomu bylo u rovnic (11.65). Pak mluvíme o ***Navierových-Stokesových rovnicích***:

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_j + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i + \frac{\eta}{\rho} \Delta \upsilon_i + \frac{\eta}{3\rho} \frac{\partial (\operatorname{div} \vec{\upsilon})}{\partial x_i} . \tag{11.82}$$

Oba tvary Navierových-Stokesových rovnic zde uvádíme jen pro úplnost.[104] Jde ovšem o rovnice velmi důležité; pomocí nich se opravdu počítá třeba obtékání těles v technických problémech. Jde ovšem o složitou soustavu nelineárních parciálních diferenciálních rovnic, takže ani numerické řešení na počítačích není vůbec jednoduchou záležitostí.

Zajímavé je, že Navierovy-Stokesovy rovnice představují výzvu i pro matematiku.[105]

Opusťme ale Navierovy-Stokesovy rovnice a podívejme se ještě na jeden jednoduchý a prakticky důležitý problém, který budeme umět vyřešit.

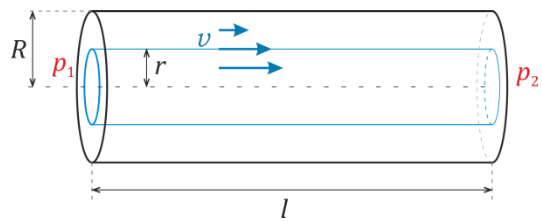
[102] Jde o charakteristické hodnoty těchto veličin v dané situaci. Pokud například nepůjde o proudění tekutiny trubicí, ale o obtékání nějakého tělesa, bude R rovno charakteristickým rozměrům tělesa.

[103] Symbol Δ zde znamená Laplaceův operátor, na vektor $\vec{\upsilon}$ působí po složkách. (Poznamenejme, že rovnice (11.82) je již poněkud zjednodušena: v úplném tvaru je ve členu $\eta/(3\rho)$ v čitateli k viskozitě přičtena ještě veličina vystihující efekty viskozity při objemových změnách.)

[104] Dobrá zpráva: rozhodně se nevyžadují u zkoušky.

[105] Obecně ještě za určitých počátečních podmínek není dokázána existence hladkých řešení těchto rovnic. Tento problém je uváděn jako jeden ze sedmi nejdůležitějších otevřených problémů soudobé matematiky a na jeho řešení je vypsána odměna milión dolarů. (Pro úvodní informaci viz např. [Problémy tisíciletí – Wikipedie (wikipedia.org)](https://cs.wikipedia.org) .)

Tok viskózní tekutiny trubicí



Mějme trubici o poloměru R a délce l, kterou protéká tekutina; proudění je stacionární a laminární. Na začátku trubice je tlak p_1, na konci p_2. Tekutina má viskozitu η. Těsně u stěny má (právě díky viskozitě, tedy díky tření) nulovou rychlost, směrem k ose trubky rychlost roste. Problém má válcovou symetrii, takže rychlost tekutiny závisí jen na vzdálenosti od osy: $v = v(r)$. Smykové napětí mezi jednotlivými vrstvami tekutiny – tedy na plášti válečku o poloměru r, viz obrázek – je (viz (11.78)):

$$\tau = \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| . \tag{11.83}$$

Celková smyková síla na plášti daného válečku má tedy velikost

$$F = S_{\text{pláště}} \tau = 2\pi r\, l\, \tau = 2\pi r\, l\, \eta \left| \frac{dv}{dr} \right| . \tag{11.84}$$

Tato síla[106] se snaží zpomalit pohyb tekutiny v daném válečku. Protože rychlost tekutiny se nemění, musí proti „zpomalovací“ síle působit jiná – a to je rozdíl tlakových sil na začátku a na konci válečku:

$$F_{\text{tlaková}} = p_1 S_{\text{podstavy}} - p_2 S_{\text{podstavy}} = (p_1 - p_2)\pi r^2 \tag{11.85}$$

Z rovnosti obou sil dostaneme

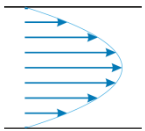
$$2\pi r\, l\, \eta \frac{dv}{dr} = -(p_1 - p_2)\pi r^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dr} = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} r \;.^{107} \tag{11.86}$$

Integrace (11.86) podle r dá

$$v(r) = -\frac{p_1 - p_2}{2l\eta} \int r\, dr = -\frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \left(r^2 + C \right)$$

a z okrajové podmínky $v(R) = 0$ pak hodnota konstanty C vyjde $-R^2$. Výsledný profil rychlosti je tedy

$$v(r) = \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \left(R^2 - r^2 \right) , \tag{11.87}$$



čili tvoří parabolu. Mezikruží mezi vzdálenostmi od osy $\langle r, r + \Delta r \rangle$ má plochu $\Delta S = 2\pi r \Delta r$ a za čas Δt jím proteče objem $\Delta S\, v(r)\, \Delta t = 2\pi r \frac{p_1 - p_2}{4l\eta} \left(R^2 - r^2 \right) \Delta r\, \Delta t = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2l\eta} \left(R^2 r - r^3 \right) \Delta r\, \Delta t$.

Celkový objem proteklý za Δt celým průřezem trubice spočteme integrací

$$\Delta V = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2l\eta} \Delta t \int_0^R \left(R^2 r - r^3 \right) dr = \frac{\pi (p_1 - p_2)}{2l\eta} \Delta t \frac{R^4}{4}$$

Objemová rychlost průtoku trubicí je tedy

$$\boxed{\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{\pi R^4}{8\, l\, \eta} (p_1 - p_2) \;.} \tag{11.88}$$

Tento výsledek je znám jako ***Poiseuillův zákon***. Vidíme z něj, jaký rozdíl tlaků je potřebný, když chceme, aby trubkou protekl za sekundu požadovaný počet litrů – a že, názorně řečeno, úzkou trubkou se tekutina velmi špatně „procpává“.

[106] Fakticky jde o sílu tření mezi válečkem a tekutinou kolem něj.

[107] Znaménko mínus je zde proto, že směrem ke stěně trubky rychlost klesá.

11.7 Aplikace hydrodynamiky

Aplikací hydrodynamiky je samozřejmě nepřeberné množství. Zmiňme stručně, bez bližšího vysvětlování, alespoň některé:

- **Pitotova trubice** umožňuje na základě Bernoulliho rovnice měřit rychlost pohybu proudící tekutiny. Používá se například v letadlech při měření rychlosti letadla vůči okolnímu vzduchu.
- **Venturiho trubice**, rovněž na základě Bernoulliho rovnice, umožňuje měřit rychlost průtoku tekutiny trubkou.
- **Vodní vývěva** využívá poklesu tlaku ve zúženém místě trubice k vysávání vzduchu. Na stejném principu jsou založené rozprašovače.
- Zapomenout nesmíme ani na tak samozřejmou věc, jako je **tryska**, která díky zúžení profilu vystřikuje kapalinu velkou rychlostí. (Jde samozřejmě o jednoduchou aplikaci rovnice kontinuity.)
- **Aerodynamická vztlaková síla** nadnáší křídla letadel za letu. Někdy bývá vykládána jednoduše jako důsledek Bernoulliovy rovnice, kdy při obtékání horní vyklenuté plochy křídla zde vzduch proudí vyšší rychlosti, v důsledku toho je v něm menší tlak a rozdíl tlaků na dolní a spodní ploše křídlo nadnáší. Ve skutečnosti je to poněkud komplikovanější – podstatné je, že za křídlem letadla vzduch proudí šikmo *dolů*. Jednoduše lze říci, že křídlo tlačí proudící vzduch dolů – a vzduch proto naopak tlačí křídlo nahoru.[108]
- **Magnusův jev** nastává v situaci, kdy například vítr fouká na rotující válec nebo kouli, a to kolmo k ose rotace. Kromě toho, že na dané těleso proudící vzduch působí silou ve směru větru (což nás nepřekvapí), působí také silou *kolmo na směr větru*. Právě to se nazývá Magnusův jev. Stejný efekt nastává při letu rotujícího fotbalového míče nebo tenisového či pingpongového míčku. (Nefyzikální terminologií řečeno takové míčky mají „faleš“.)
- **Odpor prostředí** při pohybu těles závisí na řadě faktorů, především na rychlosti tělesa. Pro pohyb koule malou rychlostí v platí pro odpor prostředí ***Stokesův vztah*** $F = 6\pi R\eta v$. (R je poloměr koule, η viskozita prostředí.) Při vyšších rychlostech je síla úměrná druhé mocnině rychlosti; užívá se ***Newtonův vzorec*** $F = \frac{1}{2} C\rho S v^2$. ($S$ je čelní průřez vystavený proudu tekutiny, ρ její hustota, koeficient C závisí na tvaru tělesa, pro polokouli působící jako padák je asi 1,3; pro aerodynamický tvar mnohem nižší, až jen asi 0,02.) Pro ještě vyšší rychlosti je závislost odporové síly na rychlosti složitější.[109]
- To, že se hydrodynamika uplatňuje při transportu tekutin (od ropovodů po vodovody a leckde jinde), u čerpadel, turbín apod., už asi není třeba zdůrazňovat.

[108] Trochu „techničtěji“ bychom mohli konstatovat, že se mění hybnost vzduchu ve svislém směru – a časová změna hybnosti se rovná síle, kterou působí křídlo na vzduch. Podle zákona akce a reakce vzduch působí stejně velkou silou vzhůru na křídlo.
Obrázky, které se někdy kreslí tak, že proudnice vzduchu jsou před křídlem vodorovně a za křídlem v nějaké vzdálenosti také vodorovně, tedy určitě nejsou dobře. Podle první věty impulzové když tíhová síla táhne letadlo směrem k zemi, ale letadlo nepadá směrem dolů, tak *něco* získávat hybnost směrem dolů musí – a to něco je vzduch.

[109] Například pro kouli v určité malé oblasti rychlostí odpor při zvýšení rychlosti dokonce poklesne.

Shrnutí

Ideální tekutina: bez vnitřního tření. Tenzor napětí ideální tekutiny $\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$, $\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$

Napětí v ideální tekutině je charakterizováno jedinou skalární veličinou p (tlakem).

V hydrostatice totéž platí i pro reálnou tekutinu (také je v ní $\tau_{ij} = -p\,\delta_{ij}$).

Ideální kapalina: bez vnitřního tření, nestlačitelná (=> ρ = konst.)

Hydrostatika

Rovnice rovnováhy: $\boxed{\operatorname{grad} p = \rho\,\vec{g}}$ K hustotě síly $\rho\,\vec{g}$ se ev. přičtou i další objemové síly (např. setrvačné).

Hydrostatický tlak: $p = p_0 + \rho g\,(z_0 - z) = p_0 + h\rho g$

Pascalův zákon: Změna tlaku v jednom místě kapaliny vyvolaná vnější tlakovou silou způsobí stejnou změnu tlaku v celém objemu kapaliny.

Aplikace: hydrostatický lis, hydrostatický paradox, spojené nádoby, izotermická atmosféra: $p(z) = p_0\, e^{-\frac{\mu g}{RT} z}$,
hladina vody v rotující nádobě ($\operatorname{grad} p = \rho\,\omega^2 \vec{R} + \rho\,\vec{g}$ => rotační paraboloid $z = R^2\omega^2/(2g) + z_0$)

Archimedův zákon: Vztlaková síla na těleso se rovná tíze kapaliny, která se vejde do prostoru, který toto těleso v kapalině zaujímá.

Hydrodynamika

Proudění tekutiny – Eulerův popis: $\vec{v} = \vec{v}(\vec{r},t),\quad \rho = \rho(\vec{r},t),\quad p = p(\vec{r},t)$

Proudnice: orientované křivky, k nimž rychlost je v každém bodě tečná

Stacionární proudění: veličiny se nemění s časem

Nevířivé proudění: $\operatorname{rot}\vec{v} = 0$ (existuje pro něj potenciál rychlosti, $\vec{v} = \operatorname{grad}\Phi_v$)

Rovnice kontinuity: vyjadřuje zákon zachování hmotnosti

V integrálním tvaru: $\boxed{\dfrac{d}{dt}\int_V \rho\, dV + \oint_S \rho\,\vec{v}\cdot d\vec{S} = 0}$

V diferenciálním tvaru: $\boxed{\dfrac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0}$, jiný tvar (s konvektivní derivací): $\dfrac{d\rho}{dt} + \rho\operatorname{div}\vec{v} = 0$

Ideální tekutiny

Eulerova hydrodynamická rovnice: $\boxed{\rho\,\dfrac{d\vec{v}}{dt} = -\operatorname{grad} p + \rho\,\vec{g}}$ $\displaystyle\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_j} v_j + \frac{\partial v_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i$

Bernoulliova rovnice pro stacionární proudění a nestlačitelnou kapalinu:

$\boxed{\dfrac{1}{2}v^2 + \dfrac{p}{\rho} + \varphi_g = \text{konst.}}$ (obecně podél proudnice, pro nevířivé proudění v celé kapalině)

Reálné tekutiny

Smykové napětí: $\tau = \eta\,\dfrac{\partial v_1}{\partial x_2}$. η je (dynamická) **viskozita**; kinematická viskozita $\nu = \eta/\rho$.

Proudění: **laminární** ($Re < Re_k$), **turbulentní** ($Re > Re_k$). Reynoldsovo číslo: $Re = \dfrac{v R}{\nu} = \dfrac{v R \rho}{\eta}$

Pohybové rovnice: Navierovy-Stokesovy rovnice.

Poiseuillův zákon: $\dfrac{\Delta V}{\Delta t} = \dfrac{\pi R^4}{8 l \eta}(p_1 - p_2)$

Dodatek 11.A0 K tenzoru napětí ideální tekutiny

V úvodu kapitoly jsme uvedli, že tenzor napětí ideální tekutiny má tvar (11.2), tedy

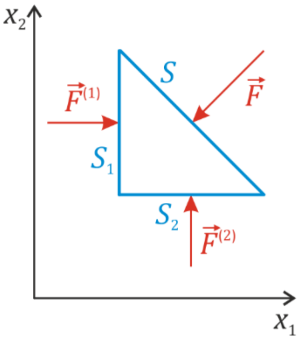
$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{pmatrix}. \tag{11.A0.1}$$

Že tenzor napětí ideální tekutiny nemá žádné nediagonální složky, je jasné: nejsou zde žádná smyková napětí.[110] Ale pozorný čtenář by se mohl zeptat, ***proč jsou hodnoty na diagonále stejné***. Nemohl by tenzor napětí vypadat takto:

$$\tau_{ij} = \begin{pmatrix} -p_1 & 0 & 0 \\ 0 & -p_2 & 0 \\ 0 & 0 & -p_3 \end{pmatrix}, \qquad \boxed{???} \tag{11.A0.2}$$

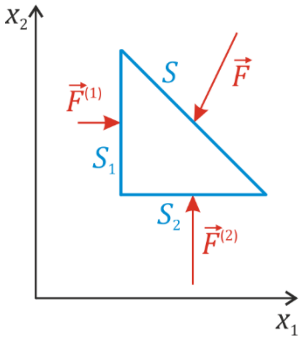
kde p_1, p_2 a p_3 by byly různé hodnoty?

Jednoduše lze ale ukázat, že tak tomu být nemůže. Uvažujme malý trojboký hranolek, který ukazují následující obrázky.[111] Plochy S_1 a S_2 jsou stejně velké a v levém obrázku na ně působí i stejně velké kolmé síly. (Jde tedy o případ, kdy tlak na obě plochy je stejný, tedy v (11.A0.2) je $p_1 = p_2$.) Na šikmou stěnu působí síla $\vec{F}$, která musí vyrovnávat působení sil $\vec{F}^{(1)}$ a $\vec{F}^{(2)}$, aby hranolek nebyl nikam urychlován, je tedy $\vec{F}^{(1)} + \vec{F}^{(2)} + \vec{F} = 0$. Vidíme, že síla působí kolmo na šikmou stěnu.[112]



Takto působí síly na hranolek v ideální tekutině.

(Všechny síly působí kolmo na plochu.)



Takto NE !

(Síla $\vec{F}$ by měla složku tečnou k ploše, tak ale ideální tekutina působit nemůže.)

Pravý obrázek ukazuje situaci, kdy by tlaky p_1 a p_2 (tedy tlaky na plochy 1 a 2) byly různé. Síla $\vec{F}$ by v tomto případě netlačila na stěnu kolmo, ale šikmo. To ale není možné: Ideální tekutina nemá žádné vnitřní tření, takže nemůže na stěnu působil ve směru tečném k ploše. Vidíme tedy, že hodnoty tlaku p_1 a p_2 se nemohou lišit.[113]

---

[110] Totéž platí pro reálnou tekutinu ve statickém případě. Pokud by v tekutině byla nějaká smyková napětí, vrstvy tekutiny by po sobě klouzaly, dokud by se neobnovila rovnováha.

[111] Šikmá stěna svírá s kolmými stěnami 1 a 2 úhel 45°.

[112] Podrobněji to ukáže zápis ve složkách: $\vec{F}^{(1)} = \left(\tilde{F}, 0\right)$, $\vec{F}^{(^\circ 2)} = \left(0, \tilde{F}\right)$, $\vec{F} = -\vec{F}^{(1)} - \vec{F}^{(2)} = \left(-\tilde{F}, -\tilde{F}\right)$, síla je tedy kolmá na šikmou stěnu. Podobně by tomu bylo, i kdyby šikmá stěna svírala s kolmými stěnami jiný úhel než 45°, ovšem složky síly $\vec{F}$ by už neměly stejnou velikost. Síla $\vec{F}$ by i v tomto případě vyšla kolmá na stěnu. (Ověření necháváme na laskavém čtenáři…)

[113] Stejně je tomu v případě reálné tekutiny ve statickém případě: Ve statické situaci nemůže tekutina na stěnu působit tečnou silou.

Formálnější odvození *

Výše uvedený důkaz, že všechny diagonální složky tenzoru napětí v ideální tekutině jsou stejné, je snad dostatečně názorný. Pokud někomu ze čtenářů připadá až příliš jednoduchý a „obrázkový", dodejme důkaz trochu formálnější.

Složky tenzoru napětí (11.A0.2) přetransformujeme do jiné soustavy souřadnic, konkrétně do soustavy otočené kolem osy x_3 o úhel α. Transformace souřadnic je

$$\begin{aligned} x_1' &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \\ x_2' &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \quad , \\ x_3' &= a_{33}x_3 \end{aligned} \tag{11.A0.3}$$

kde $$a_{11} = \cos\alpha,\quad a_{12} = \sin\alpha,\quad a_{21} = -\sin\alpha,\quad a_{22} = \cos\alpha,\quad a_{33} = 1 \quad .^{114} \tag{11.A0.4}$$

Transformace složek tenzoru napětí je

$$\tau_{ij}' = \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} a_{ik}a_{jl}\tau_{kl} \,. \tag{11.A0.5}$$

Konkrétně pro složku τ_{12}' po dosazení (11.A0.4) a (11.A0.2) dostaneme

$$\begin{aligned} \tau_{12}' &= a_{11}a_{21}\tau_{11} + a_{11}a_{22}\underbrace{\tau_{12}}_{=0} + a_{12}a_{21}\underbrace{\tau_{21}}_{=0} + a_{12}a_{22}\tau_{22} = \\ &= \cos\alpha\left(-\sin\alpha\right)\tau_{11} + \cos\alpha\,\sin\alpha\,\tau_{22} = \cos\alpha\,\sin\alpha\left(\tau_{11} - \tau_{22}\right) \end{aligned} \tag{11.A0.6}$$

čili, po dalším dosazení z (11.A0.2),

$$\tau_{12}' = \cos\alpha\,\sin\alpha\left(p_2 - p_1\right) \,. \tag{11.A0.7}$$

Pokud by tlaky p_1 a p_2 na stěny 1 a 2 byly různé, měl by tenzor napětí v otočené soustavě souřadnic[115] nenulovou nediagonální složku – čili v tekutině by bylo nenulové smykové napětí. To ovšem v ideální tekutině není možné.[116]

To znamená, že členy $-p_1$ a $-p_2$ v tenzoru napětí (11.A0.7) se musí rovnat. Podobně bychom dokázali rovnost i třetího diagonálního členu. Tenzor napětí tedy musí mít tvar (11.A0.1).

Transformací tenzoru napětí (11.A0.1) navíc můžeme ukázat, že v (libovolně) natočené soustavě souřadnic má tenzor napětí stále tvar (11.A0.1), a to se stejným tlakem p.[117] Odtud je vidět, že na libovolně natočenou plošku působí ideální tekutina stejným tlakem.[118]

---

[114] Ostatní složky a_{ij} transformační matice jsou rovny nule. Viz Dodatek A kapitoly 10; v něm je i vztah pro transformaci složek tenzorů použitý dále.

[115] Uvažujeme zde úhel otočení různý od násobků 90°.

[116] A ve statické situaci ani v reálné tekutině.

[117] Zkuste si s využitím (11.A0.5) a (11.A0.4) spočítat konkrétně třeba složku τ_{11}'.

Pro kontrolu: $\tau_{11}' = a_{11}a_{11}\tau_{11} + a_{11}a_{12}\underbrace{\tau_{12}}_{0} + a_{12}a_{11}\underbrace{\tau_{21}}_{0} + a_{12}a_{12}\tau_{22} = \left(\cos\alpha\right)^2\left(-p\right) + \left(-\sin\alpha\right)^2\left(-p\right) = -p$.

Obecně je stejný tvar tenzoru napětí zřejmý z toho, že (11.A0.1) zapsaný ve formě matice je násobkem jednotkové matice – a ta se při otočení soustavy souřadnic transformuje opět na jednotkovou matici.

[118] Máme-li v tekutině libovolně natočenou plošku, můžeme soustavu souřadnic natočit tak, aby na danou plošku byla kolmá osa x_1'; tlak na tuto plošku je pak až na znaménko složkou tenzoru napětí τ_{11}'.

Dodatek 11.A Řešení problémů týkajícím se Archimedova zákona

K problémům uvedeným na straně 15 zde pro kontrolu uvádíme správná řešení, resp. odpovědi. (Vzhůru nohama, abyste je okamžitě nepřečetli při prvním pohledu na tuto stránku.)

- Loď ve vaně: Může plavat.
- Údaj na digitálních vahách stoupne.
- Sklenice s vodou, v níž plave led: hladina zůstane stejně vysoko.
- Totéž, v ledu bublina vzduchu: hladina zůstane stejně vysoko.
- Totéž, v ledu zamrzlý kámen: hladina klesne.
- Po vyhození zátěže hladina klesne.
- Akvadukt: most nespadne, síla na pilíře zůstane stejná.

Zdůvodnění tu zatím neuvádíme. (Bylo by škoda přečíst si je hned a připravit se o radost z přemýšlení…)

Dodatek 11.B Gradient, divergence a rotace

Gradient

S **gradientem** jsme se potkali už ve třetí kapitole.[119] Gradient působí na skalární funkci proměnných x, y a z a dělá z ní vektor:[120]

$$f = f(x, y, z), \qquad \operatorname{grad} f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) . \tag{11.B.1}$$

Význam gradientu už známe.[121] Pojďme se podívat, jak jej lze alternativně vyjádřit.
Hodí se k tomu operátor[122] ***nabla***. Značí se ∇ a je definován jako

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) . \tag{11.B.2}$$

Taková definice se na první pohled může zdát divná: Na co ty parciální derivace působí? Inu na to, co napíšeme vpravo od ∇. Například takto můžeme zapsat právě gradient:

$$\nabla f = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) . \tag{11.B.3}$$

Gradient lze tedy jednoduše zapsat jako

$$\boxed{\operatorname{grad} f = \nabla f \ .} \tag{11.B.4}$$

Divergence

Operátor nabla má charakter vektoru. Když jím zapůsobíme na vektorovou funkci polohy a mezi oběma vektory napíšeme skalární součin, dostaneme

$$\vec{a} = \vec{a}(x, y, z), \qquad \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial}{\partial x} a_x + \frac{\partial}{\partial y} a_y + \frac{\partial}{\partial z} a_z \equiv \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ . \tag{11.B.5}$$

Tomuto výsledku říkáme **divergence** vektoru $\vec{a}$, příslušný operátor značíme div:

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{a} = \nabla \cdot \vec{a} = \frac{\partial a_x}{\partial x} + \frac{\partial a_y}{\partial y} + \frac{\partial a_z}{\partial z} \ .} \tag{11.B.6}$$

Operátor divergence tedy působí na vektorovou funkci a dělá z ní skalární.
Když souřadnice x, y, z označíme x_1, x_2, x_3, můžeme vztah pro divergenci zapsat jako

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{a} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \ .} \tag{11.B.7}$$

[119] Viz Dodatek 3.D.

[120] Přesněji řečeno, dělá ze skalární funkce funkci vektorovou.

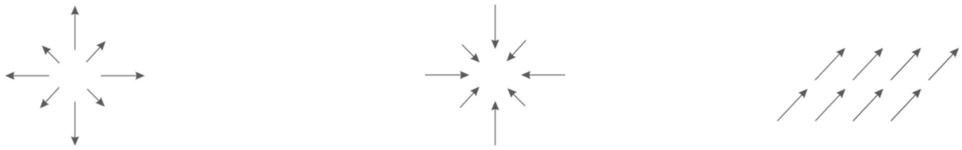
[121] Míří směrem, kterým hodnoty funkce *f* nejvíce stoupají, a jeho velikost je úměrná strmosti nárůstu *f*, když jdeme tímto směrem. (V dvourozměrném případě: Pokud je funkcí *f* výška terénu, pak gradient nám říká, kterým směrem svah nejvíc stoupá a jak je strmý.)

[122] Gradient a podobné „předpisy“ obsahující parciální derivace se souhrnně nazývají *diferenciální operátory*. (Diferenciální proto, že obsahují derivace a operátory proto, že „operují“ na funkcích více proměnných.)

Poznamenejme, že se při zápisu tohoto vztahu někdy užívá *Einsteinovo sumační pravidlo* a suma se vynechává, tedy že píšeme prostě

$$\operatorname{div}\vec{a} = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} \,.\text{[123]} \tag{11.B.8}$$

Divergence vektoru nás informuje, názorně řečeno, jestli vektory z okolí daného bodu spíše vycházejí (takto je to při $\operatorname{div}\vec{a} > 0$)nebo do něj vstupují (pak je $\operatorname{div}\vec{a} < 0$). $\operatorname{div}\vec{a} = 0$ je např. pro homogenní pole.



Rotace

Jestliže operátor nabla a funkci $\vec{a}$ spolu vynásobíme vektorově, dostaneme **rotaci** funkce $\vec{a}$:

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a} = \nabla\times\vec{a} \quad .} \tag{11.B.9}$$

Rotace dělá z vektorové funkce funkci vektorovou. Pro vyjádření rotace ve složkách je vhodné napsat si operátor nabla i vektorovou funkci $\vec{a}$ ve složkách pod sebe a normálně provést vektorový součin:

$$\begin{aligned} \nabla &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ \vec{a} &= \left(a_x,\ a_y,\ a_z \right) \end{aligned} \tag{11.B.10}$$

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{a} = \left(\frac{\partial a_z}{\partial y} - \frac{\partial a_y}{\partial z},\ \frac{\partial a_x}{\partial z} - \frac{\partial a_z}{\partial x},\ \frac{\partial a_y}{\partial x} - \frac{\partial a_x}{\partial y}\right)} \tag{11.B.11}$$

Když souřadnice označíme x_1, x_2, x_3, můžeme vztah pro rotaci zapsat pomocí ***Levi-Civitova symbolu*** ε_{ijk} :

$\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1,\ \ \varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1,\quad \varepsilon_{ijk} = 0$, když se hodnoty dvou indexů rovnají.

i- tá složka rotace vektoru je

$$\boxed{\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_i = \sum_{j=1}^{3}\sum_{k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j}} \tag{11.B.12}$$

Při použití Einsteinova sumačního pravidla nepíšeme sumy; navíc můžeme derivace zapsat tak, aby se dobře pamatovalo pořadí indexů:

$$\left(\operatorname{rot}\vec{a}\right)_i = \varepsilon_{ijk}\frac{\partial a_k}{\partial x_j} \equiv \varepsilon_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}a_k \tag{11.B.13}$$

Rotace vektoru nás informuje, zda vektorové pole má vírový charakter. Je tomu tak například v případech, které ukazují obrázky:

[123] To, že v tomto vztahu sčítáme, poznáme z toho, že se v něm opakuje index *i*. (Index může být samozřejmě označen libovolným jiným písmenem.) To, že sčítáme od 1 do 3, je jasné, jde o rozsah indexu souřadnic.

Rotace gradientu

Pro libovolnou funkci $f = f(x, y, z)$ [124] platí

$$\boxed{\operatorname{rot}\operatorname{grad} f = 0\,.} \tag{11.B.14}$$

Toto se dokáže snadno, prostým dosazením.[125] Platí i obrácené tvrzení:

Když pro vektorovou funkci $\vec{a}$ platí $\operatorname{rot}\vec{a} = 0$, pak existuje funkce f taková, že $\vec{a} = \operatorname{grad} f$.

Důkaz je náročnější a nebudeme ho zde uvádět.

Divergence rotace

Pro libovolnou[126] funkcí $\vec{a} = \vec{a}(x, y, z)$ platí

$$\boxed{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{a} = 0\,.} \tag{11.B.15}$$

Dokázat jej lze opět pouhým dosazením.[127]Platí také obrácené tvrzení:

Když pro vektorovou funkci $\vec{b}$ platí $\operatorname{div}\vec{b} = 0$, pak existuje funkce $\vec{a}$ taková, že $\vec{b} = \operatorname{rot}\vec{a}$.

Divergence gradientu (Laplaceův operátor)

Divergence gradientu funkce $f = f(x, y, z)$ se už obecně nerovná nule. Ale jde o velmi užitečný a často používaný operátor, pro který se užívá speciální symbol Δ. Nazývá se **Laplaceův operátor**[128]:

$$\Delta f = \operatorname{div}\operatorname{grad} f\,. \tag{11.B.16}$$ [129]

Vyjádřeno ve složkách, je

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}\,.} \tag{11.B.17}$$

---

[124] Takovou, že existují její druhé derivace a jsou spojité.

[125] Například pro první složku: $\left(\operatorname{rot}\operatorname{grad} f\right)_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\operatorname{grad} f\right)_3 - \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\operatorname{grad} f\right)_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\frac{\partial f}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_3}\frac{\partial f}{\partial x_2} = 0$ díky záměnnosti smíšených parciálních derivací.

[126] Opět takovou, že má druhé parciální derivace a ty jsou spojité.

[127] Jak se často píše: Důkaz si laskavý čtenář snadno provede sám. Ale opravdu, stačí rozepsat divergenci podle (11.B.6) a dosadit (11.B.11); u smíšených parciálních derivací nezáleží na pořadí derivování a díky tomu se všechny tyto derivace odečtou a výsledkem je nula. Zkuste si to.

[128] Familiárně označovaný jako Laplace, s výslovností „laplas“.

[129] Pozor, symbolem Δ už jsme často označovali přírůstek nějaké hodnoty, proměnné nebo funkce. Aby se to nepletlo, musíme si být z kontextu jisti, zda jde o přírůstek nebo o Laplaceův operátor; případně to raději explicite napsat.

Dodatek 11.C Gaussova věta

Jestliže $\vec{a} = \vec{a}(\vec{r})$ je vektorová funkce[130], která má spojité parciální derivace[131], a uzavřená plocha S je hranicí objemu V,[132] pak platí

$$\boxed{\oint_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_V \operatorname{div}\vec{a}\, dV \, .} \qquad (11.C.1)$$

Této větě se říká ***Gaussova věta*** (*matematiky*)[133], někdy též *Gaussova-Ostrogradského věta*. Jde o jednu z vět matematické analýzy. (Lze ji zobecnit na libovolný počet dimenzí ≥2, ale to zde nebudeme potřebovat.)

Slovně se dá vyjádřit formulací:

Tok vektorového pole uzavřenou plochou je roven integrálu z divergence daného pole přes objem, který daná plocha uzavírá.

Poznámka:

Někdy se Gaussova věta využívá pro alternativní definici divergence. Objem V volíme velmi malý, označíme ho ΔV a následně ho budeme limitovat k nule.[134] Hodnota $\operatorname{div}\vec{a}$ v tomto objemu je prakticky konstantní. Díky tomu se integrál na pravé straně (11.C.1) rovná

$$\int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{a}\, dV \approx (\operatorname{div}\vec{a})\, \Delta V \ ,$$

kde hodnotu divergence bereme uvnitř objemu ΔV. (Když nakonec ΔV limitujeme k nule, dostaneme hodnotu v jednom bodě a rovnost bude přesná.) Dosazením do (11.C.1) dostaneme

$$\int_{\partial \Delta V} \vec{a} \cdot d\vec{S} = \int_{\Delta V} \operatorname{div}\vec{a}\, dV \approx (\operatorname{div}\vec{a})\, \Delta V \ ,$$ [135]

kde jsme plochu S, tj. hranici ΔV označili $\partial \Delta V$. Po vydělení ΔV a limitě:

$$\operatorname{div}\vec{a} = \lim_{\Delta V \to 0} \left(\frac{1}{\Delta V} \int_{\partial \Delta V} \vec{a} \cdot d\vec{S} \right) \qquad (11.C.2)$$

[130] Používá se také název ***vektorové pole***.

[131] Musí být spojité ve všech bodech nějaké otevřené množiny v $\mathbb{E}_3$; objemy V a plochy S, které budeme dále uvažovat, budou patřit do této množiny.

[132] Plocha S je přitom orientována tak, že vektor normály míří ven z objemu V. (Předpokládáme, že plocha S má „rozumné" vlastnosti, je tedy hladká nebo po částech hladká.)

[133] Existuje ještě Gaussova věta elektrostatiky – ta s tou matematickou těsně souvisí, ale týká se konkrétně elektrického pole. (V angličtině se rozdíl pozná už z krátkého názvu: matematické větě říkají *Gauss theorem*, té v elektrostatice *Gauss law*.)

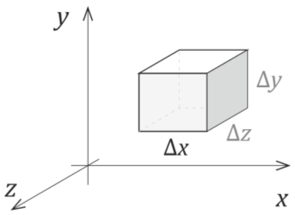
[134] Můžete si představovat malou kouli, jejíž poloměr budeme limitovat k nule, nebo malou krychličku, jejíž stranu budeme limitovat k nule.

[135] Symbol $\partial \Delta V$ značí hranici objemu ΔV .

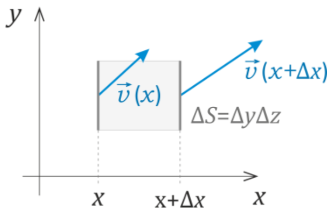
Dodatek 11.D K rovnici kontinuity

Názorné odvození rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru

Gaussovu větu matematiky jsme výše uvedli jako výsledek, o němž nás poučila matematická analýza. Jde tedy o nástroj, který zatím tak trochu „spadl z nebe“.[136] Je proto vhodné podívat se na alternativní názorné odvození rovnice kontinuity – byť předem nutno upozornit, že nebude příliš exaktní.



Uvažujme malý kousek tekutiny v kvádříku o stranách Δx, Δy a Δz.[137] Objem kvádříku je $\Delta V = \Delta x\,\Delta y\,\Delta z$, takže hmotnost daného kousku tekutiny je $\Delta m = \rho \Delta V$, kde ρ je hustota tekutiny v daném místě.[138]
Podívejme se na kvádřík ze směru osy z; uvidíme tedy průmět na rovinu xy.



Spočtěme, kolik tekutiny vyteče za Δt pravou stranou kvádříku. Plocha pravé strany je $\Delta S = \Delta y \Delta z$. V toku se uplatní jen x-ová složka rychlosti, tj. $\upsilon_x(x+\Delta x)$. Za dobu Δt tedy vyteče objem $\Delta S\, \upsilon_x(x+\Delta x)\,\Delta t = \upsilon_x(x+\Delta x)\,\Delta y \Delta z\,\Delta t$. Hmotnost tekutiny, která vyteče, je $\Delta m_{\text{vpravo}} = \rho(x+\Delta x)\,\upsilon_x(x+\Delta x)\,\Delta y \Delta z\,\Delta t$.[139]

Levou stranou vyteče za stejnou dobu $\Delta m_{\text{vlevo}} = -\rho(x)\,\upsilon_x(x)\,\Delta y \Delta z\,\Delta t$.[140] Celkově tedy oběma stěnami vyteče

$$\Delta m_{\text{stěnami kolmými na osu x}} = \big(\rho(x+\Delta x)\,\upsilon_x(x+\Delta x) - \rho(x)\,\upsilon_x(x)\,\big)\Delta y \Delta z\,\Delta t \tag{11.D.1}$$

Rozdíl funkčních hodnot υ_x vyjádříme pomocí derivace: $\rho(x+\Delta x)\upsilon_x(x+\Delta x) - \rho(x)\upsilon_x(x) \approx \dfrac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x}\Delta x$.
Vztah (11.D.1) pak dá

$$\Delta m_{\text{stěnami kolmými na osu x}} \approx \frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z\,\Delta t \;=\; \frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x}\Delta V\,\Delta t \;.$$ [141]

Podobně vyjdou hmotnosti, které vytečou stěnami kolmými na osy y a z; zjevně v nich budou derivace $\dfrac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y}$ a $\dfrac{\partial(\rho\upsilon_z)}{\partial z}$. Celkově tedy za dobu Δt vyteče z kvádříku

$$\Delta m_{\text{vyteklé všemi stěnami}} \doteq \left(\frac{\partial(\rho\upsilon_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho\upsilon_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho\upsilon_z)}{\partial z}\right)\Delta V\,\Delta t \;=\; \operatorname{div}(\rho\vec{\upsilon})\;\Delta V\,\Delta t \;. \tag{11.D.2}$$

Změnu hmotnosti v kvádříku vyjádříme pomocí časové derivace hustoty: $\Delta m \approx \dfrac{\partial(\rho\,\Delta V)}{\partial t}\,\Delta t = \dfrac{\partial \rho}{\partial t}\Delta V\,\Delta t$.
S využitím (11.D.2) je $\Delta m = -\Delta m_{\text{vyteklé všemi stěnami}} = -\operatorname{div}(\rho\vec{\upsilon})\;\Delta V\,\Delta t$, takže po vydělení ΔV a Δt (a limitování $\Delta V \to 0$, $\Delta t \to 0$, aby se z přibližných vztahů staly přesné) dostaneme

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} \;=\; -\operatorname{div}(\rho\vec{\upsilon}) \;, \tag{11.D.3}$$

což už je rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru.

---

[136] Je hrozně užitečný a brzy si na něj zvyknete. (Je tak užitečný, že jeho použití je přímo „návykové“. ☺)
[137] Jde o myšlený kvádřík, který je v klidu ve zvolené soustavě souřadnic, neposouvá se spolu s tekutinou.
[138] Přesněji řečeno, průměrná hustota tekutiny v daném kvádříku.
[139] Srovnejte výše vztah (11.43), vyjde z něj totéž.
[140] Znaménko mínus je zde proto, že při $\upsilon_x > 0$ tekutina z kvádříku nevytéká, ale vtéká do něj.
[141] Kritický čtenář si už asi všiml, že odvození opravdu není exaktní. Rychlost a hustotu jsme brali jen jako funkci x, ve skutečnosti na pravé i levé stěně obecně závisí i na y a z. Dalo by se říci, že v našem odvození bereme střední hodnotu $\rho\upsilon_x$ na pravé i na levé stěně. Odvození by šlo dělat přesněji (s využitím plošných integrálů na stěnách a s následným středováním), výsledek by nakonec po limitě na nekonečně malý kvádřík vyšel stejný. My zde zůstaneme u jednoduššího postupu; chcete-li, chápejte ho spíše jako náznak odvození.

Jiný tvar rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru

Rovnice kontinuity (11.55) má tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v}) = 0 \ . \qquad (11.D.4)$$

Někdy se však s ní setkáme ve tvaru

$$\frac{d\rho}{dt} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \ . \qquad (11.D.5)$$

Zde nevystupuje parciální derivace ρ podle času, ale derivace „obyčejná“.[142] Co zde znamená a jak se liší od derivace parciální?

Hustota tekutiny je funkcí polohy a času:

$$\rho = \rho(\vec{r}, t) \ . \qquad (11.D.6)$$

Při parciálním derivování držíme $\vec{r} = \mathrm{konst.}$, čili zjišťujeme, jak se ρ mění s časem na daném pevném místě.

Můžeme ale také zvolit jeden konkrétní kousek tekutiny, plout spolu s ním, a sledovat, jak se mění jeho hustota.[143] Hustotu v tomto případě vyjádříme jako

$$\rho = \rho(\vec{r}(t), t) = \rho(x_1(t), x_2(t), x_3(t), t) \ , \qquad (11.D.7)$$

kde $\vec{r} = \vec{r}(t)$ popisuje pohyb tekutiny. Derivací (11.D.7) podle času[144] dostaneme

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{dt} &= \frac{\partial \rho}{\partial x_1}\frac{dx_1}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x_2}\frac{dx_2}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial x_3}\frac{dx_3}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \\ &= \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \frac{\partial \rho}{\partial t} \end{aligned} \ , \qquad (11.D.8)$$

protože derivace souřadnic daného kousku vody podle času jsou samozřejmě složky rychlosti vody v daném místě a čase.

Člen $\operatorname{div}(\rho \vec{v})$ v (11.D.4) můžeme rozepsat jako

$$\operatorname{div}(\rho \vec{v}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i}(\rho v_i) = \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i + \rho \operatorname{div} \vec{v} \qquad (11.D.9)$$

Z rovnice kontinuity (11.D.4) po dosazení (11.D.9) dostaneme

$$\underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial \rho}{\partial x_i} v_i}_{(*)} + \rho \operatorname{div} \vec{v} = 0 \qquad (11.D.10)$$

a díky (11.D.8) vidíme, že první dva členy (označené $(*)$) dávají $\frac{d\rho}{dt}$. Takže z (11.D.10) dostáváme (11.D.5).

---

[142] Někdy se používá název *totální derivace*.

[143] Dané derivaci se proto také říká *konvektivní*.
(Pozn.: V mechanice tekutin se také někdy v tomto případě setkáme s názvem „materiální derivace“; parciální derivace se pak někdy nazývá „lokální“. Ale to zmiňujeme jen pro případ, že byste se s těmito názvy setkali.)

[144] A to derivací „obyčejnou“, kdy $\vec{r}$ nedržíme konstantní, ale mění se, tak jak daný kousek tekutiny mění polohu vůči soustavě, v níž proudění popisujeme (například vůči břehům řeky nebo vůči trubici, jíž proudí tekutina).

Dodatek 11.E K odvození Bernoulliovy rovnice: další podrobnosti *

Podrobnosti v tomto dodatku přidáváme spíše jako rozšiřující učivo pro zájemce.

Formálnější odvození Bernoulliovy rovnice (podél jedné proudnice)

Vyjdeme z Eulerových hydrodynamických rovnic (11.65):

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_j + \frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x_i} + g_i \tag{11.E.1}$$

Pro **stacionární proudění** je $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = 0$. Navíc budeme předpokládat **nestlačitelnou kapalinu**, tedy $\rho = \mathrm{konst.}$ Navíc tíhové zrychlení má potenciál φ_g, je tedy $g_i = -\frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i}$ Z (11.E.1) dostaneme

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_j = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i} \qquad \Big/ \cdot \upsilon_i \tag{11.E.2}$$

a po naznačeném násobení υ_i a úpravě (a s využitím Einsteinova sumačního pravidla)[145]

$$\underbrace{\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_i}_{= \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right)} \upsilon_j = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho} + \varphi_g\right) \upsilon_i \tag{11.E.3}$$

Levou stranu můžeme po záměně indexů přepsat na $\frac{\partial\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right)}{\partial x_i}\upsilon_i$, takže v (11.E.3) můžeme všechny členy spojit do jedné derivace. Dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g\right) \upsilon_i = 0 \tag{11.E.4}$$

Složky rychlosti vyjádříme jako $\upsilon_i = \upsilon \vec{\tau}$, kde $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor k proudnici. Velikost rychlosti vykrátíme a z (11.E.4) dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g\right) \tau_i = 0 \tag{11.E.5}$$

Výraz na levé straně (11.E.5) představuje ***derivaci ve směru*** vektoru $\vec{\tau}$, tedy derivaci ve směru proudnice.[146] Tato derivace je nulová, to znamená, že se výraz v závorce podél proudnice nemění – a to je právě Bernoulliova rovnice (11.74).

Obecně nemůžeme říci, jakou hodnotu má daný výraz na jiných proudnicích. Ale pro nevířivé proudění to jde.

---

[145] Na levé straně se sčítá pro *i* a *j* od 1 do 3, na pravé straně přes *i* od 1 do 3.

[146] Pokud bychom proudnici parametrizovali délkou *s* podél proudnice (od nějakého bodu na proudnici), bylo by $\tau_i = \frac{dx_i}{ds}$, takže levá strana (11.E.5) by byla po úpravě $\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g\right)\frac{dx_i}{ds} = \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g\right)$.

Bernoulliova rovnice pro nevířivé proudění

Opět půjde o stacionární proudění nestlačitelné kapaliny, ale tentokrát navíc o proudění **nevířivé**, tedy takové, že $\mathrm{rot}\,\vec{\upsilon} = 0$. Zapsáno ve složkách (viz (11.B.11) to znamená, že

$$\left(\frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_3},\ \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \upsilon_3}{\partial x_1},\ \frac{\partial \upsilon_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \upsilon_1}{\partial x_2} \right) = 0 \ . \tag{11.E.6}$$

Odsud vidíme, že pro složky rychlosti v případě nevířivého proudění platí

$$\frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} = \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \ . \tag{11.E.7}$$

Vyjdeme opět z Eulerových hydrodynamických rovnic, již konkrétně ve tvaru (11.E.2): [147]

$$\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_j = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3 \tag{11.E.8}$$

Levou stranu upravíme s využitím (11.E.7): $\sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_i}{\partial x_j} \upsilon_j = \sum_{j=1}^{3} \frac{\partial \upsilon_j}{\partial x_i} \upsilon_j = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{3} \upsilon_j \upsilon_j\right) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right)$.
Dostaneme

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2\right) = -\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{p}{\rho}\right) - \frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i}, \quad i = 1,2,3$$

a odtud po úpravě

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g\right) = 0 \,, \quad i = 1,2,3 \tag{11.E.9}$$

To znamená, že výraz v kulaté závorce nezávisí na souřadnicích. Vidíme, že

$$\frac{1}{2}\upsilon^2 + \frac{p}{\rho} + \varphi_g = \text{konst.} \tag{11.E.10}$$

v celém objemu tekutiny. Bernoulliova rovnice tedy platí nejen pro jednu proudnici, konstanta je stejná v celé tekutině.

Když je tekutina stlačitelná (ale barotropní)

V případě, kdy $\rho \neq \text{konst.}$, nelze ρ „vtáhnout“ dovnitř parciální derivace, jak jsme to dělali výše. V tom případě se zavádí *tlaková funkce*

$$P = \int \frac{dp}{\rho(p)} \ . \tag{11.E.11}$$ [148]

Pak platí $\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} = \frac{\partial P}{\partial x_i}$ a odvození Bernoulliho rovnice už lze provést; ve výsledku bude na místě $\frac{p}{\rho}$ právě tlaková funkce P. (Pro podrobnosti zde odkážeme na učebnice mechaniky kontinua.)

---

[147] Tedy pro $\frac{\partial \upsilon_i}{\partial t} = 0$, $\rho = \text{konst.}$ a $g_i = -\frac{\partial \varphi_g}{\partial x_i}$.

[148] Podrobněji: $P(\vec{r}) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \frac{1}{\rho(p)} \frac{\partial p}{\partial x_i} dx_i$.

Dodatek 11.F Křivkový integrál z gradientu funkce

Jestliže $f = f(x, y, z)$, pak platí

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\vec{r} \;=\; f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1) \tag{11.F.1}$$

Jde vlastně o zobecnění známého vztahu pro určitý integrál,

$$\int_a^b \frac{df}{dx} dx = \left[f(x) \right]_a^b \;=\; f(b) - f(a)\ . \tag{11.F.2}$$

Důkaz (11.F.1) si může laskavý čtenář provést sám…[149]

[149] Takováto formulace v učebním textu jistě potěší. ☺ Ale alespoň náznak důkazu není obtížný:
Z bodu $\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ do $\vec{r}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ půjdeme nejdřív ve směru osy *x*, tedy do bodu $\vec{\vec{r}}_1 = (x_2, y_1, z_1)$. V tomto případě jde vlastně o integrál funkce jedné proměnné (konkrétně proměnné *x*; *y* a *z* držíme konstantní). Příslušný křivkový integrál tedy můžeme vypočítat podle (11.F.2) jako

$$\int_{\vec{r}_1}^{\vec{\vec{r}}_1} (\mathrm{grad}\, f) \cdot d\vec{r} \;=\; \int_{\vec{r}_1}^{\vec{\vec{r}}_1} \frac{\partial f}{\partial x} dx \;=\; f(\vec{\vec{r}}_1) - f(\vec{r}_1)$$

Pak podobně půjdeme ve směru osy *y* a poté ve směru osy *z*. Nakonec opravdu dostaneme $f(\vec{r}_2) - f(\vec{r}_1)$. A proč jsme mohli volit integrační cestu libovolně? Je to proto, že integrovaná funkce má potenciál. (Tuto situaci už jsme poznali v případě konzervativních sil.) Tímto potenciálem je právě samotná funkce *f*.