Bakalářské studium Matematické modelování
Garantující pracoviště: Matematický ústav UK
Garant oboru: prof. RNDr. Josef Málek, CSc., DSc.

Ústní část státní závěrečné zkoušky

Zkouška má přehledový charakter. Jsou kladeny jen širší otázky a žádá se, aby posluchač prokázal pochopení základních problémů, byl schopen je ilustrovat na konkrétních situacích a osvědčil určitou míru syntézy a hlubšího pochopení. Student zodpoví jednu otázku z každého níže uvedeného tematického okruhu.

1. Základy matematické analýzy, lineární algebry a funkcionální analýzy
Posloupnosti a řady čísel a funkcí, diferenciální a integrální počet funkcí jedné reálné proměnné, diferenciální počet funkcí více proměnných, křivkový a plošný integrál, Stokesova věta. Obyčejné diferenciální rovnice, variační počet. Konečně dimenzionální vektorové prostory, skalární součin, maticový počet, vlastní čísla matice, soustavy lineárních rovnic, lineární a bilineární formy. Funkce komplexní proměnné, holomorfní funkce, mocninné řady, reziduová věta. Lebesgueův integrál, Lebesgueova míra, prostory funkcí, Hilbertovy prostory, ortonormální systémy, Rieszova věta o reprezentaci, spojitý lineární operátor, kompaktní operátor, samoadjungovaný operátor, spektrum operátoru.

2. Základy klasické mechaniky a termodynamiky
Mechanika hmotného bodu a soustav hmotných bodů (Newtonovy zákony, variační formulace, Lagrangeovy rovnice, Hamiltonovy rovnice), kinematika a dynamika tuhého tělesa, kinematika a dynamika spojitého prostředí (tenzor malých deformací, Cauchyho tenzor napětí, Reynoldsova věta o transportu, bilanční rovnice, Eulerovy a Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice linearizované pružnosti). Klasická rovnovážná termodynamika (teplo, teplota, první a druhý zákon termodynamiky, termodynamické potenciály, stavová rovnice, ideální plyn).

3. Numerická analýza a rovnice matematické fyziky
Aproximace funkcí, numerická integrace, numerické řešení nelineárních algebraických rovnic, numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic, přímé a iterační metody řešení lineárních algebraických rovnic, LU a QR rozklady a jejich stabilita, problém nejmenších čtverců, Schurova věta, metody pro řešení částečného problému vlastních čísel. Klasická teorie lineárních parciálních diferenciálních rovnic a jejich numerického řešení, metoda charakteristik pro transportní rovnici, rovnice vedení tepla, vlnová rovnice, Poissonova rovnice, princip maxima pro eliptické a parabolické rovnice druhého řádu, metoda konečných diferencí, stabilita, konvergence.

Příklady otázek respektive podrobnější rozepsání požadavků

1. Základy matematické analýzy, lineární algebry a funkcionální analýzy

Posloupnosti a řady čísel a funkcí, diferenciální a integrální počet funkcí jedné reálné proměnné, diferenciální počet funkcí více proměnných, křivkový a plošný integrál, Stokesova věta. Obyčejné diferenciální rovnice, variační počet. Konečně dimenzionální vektorové prostory, skalární součin, maticový počet, vlastní čísla matice, soustavy lineárních rovnic, lineární a bilineární formy. Funkce komplexní proměnné, holomorfní funkce, mocninné řady, reziduová věta. Lebesgueův integrál, Lebesgueova míra, prostory funkcí, Hilbertovy prostory, ortonormální systémy, Rieszova věta o reprezentaci, spojitý lineární operátor, kompaktní operátor, samoadjungovaný operátor, spektrum operátoru.

PODROBNOSTI

- Posloupnosti a řady čísel a funkcí – číselné posloupnosti a řady (definice, $\liminf_{n\to\infty}$, $\limsup_{n\to\infty}$, konvergence, divergence, oscilace), Weierstrassova věta o výběru konvergující podposloupnosti, nutná podmínka konvergence řad, absolutní a neabsolutní konvergence, Leibnitzovo kritérium. Bodová a stejnoměrná konvergence posloupností a řad funkcí, kritéria. Mocninné řady. Poloměr konvergence. Abelovo kritérium konvergence na konvergenční kružnici.

- Diferenciální a integrální počet funkcí jedné reálné proměnné – vlastnosti spojitých funkcí na uzavřeném intervalu (nabývání maxima/minima, omezenost, nabývání mezihodnot, stejnoměrná spojitost), věty o střední hodnotě (Rolleova, Lagrangeova), Taylorův polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku, nutná a postačující podmínky pro lokální a globální extrémy. Riemannův (absolutní) a Newtonův (neabsolutní) integrál, základní věta diferenciálního a integrálního počtu a vysvětlení významu a důsledků této věty.

- Diferenciální a integrální počet funkcí více proměnných – Definice totálního diferenciálu a směrové derivace pro funkce více proměnných a vysvětlení, ve kterém směru má funkce nejmenší/největší směrovou derivaci. Lagrangeova věta o střední hodnotě, Taylorův polynom s Lagrangeovým tvarem zbytku, nutné a postačující podmínky lokálních a globálních extrémů (maxim/minim). Věta o implicitní funkci. Regulární zobrazení, věty o inverzním zobrazení (lokální a globální verze).

- Křivkový a plošný integrál – Křivky a k-dimenzionální plochy v$\mathbb{R}^d$. Zavedení křivkového a plošného integrálu pro regulární krřivky a plochy, vztahy mezi integrály 1. a 2. druhu. Gauss-Ostrogradského věta a integrace per-partes pro funkce více proměnných. Kritéria potenciálnosti vektorového pole.

- Obyčejné diferenciální rovnice - formulace počáteční úloh a okrajových úloh pro rovnice 2. řádu, definice maximálního řešení pro systém obyčejných diferenciálních rovnic 1. řádu, Picard-Lindelöfova věta a její důsledky pro systém lineárních rovnic 1. řádu. Vlastnosti $(C(\Omega), \|\cdot\|_\infty)$, $(C(\Omega), \|\cdot\|_1)$. Banachova věta o pevném bodě. Řešitelnost $y' + a(x)y = b(x)$, $y(0) = y_0$.

- Konečně dimenzionální vektorové prostory, skalární součin a norma (definice, příklady), konstrukce ortonormální báze (Gramm-Schmidtův proces), lineární a bilineární formy – Cauchy-Schwarzova nerovnost a podmínky, kdy v ní nastává rovnost.
- Maticový počet (jádro a obor hodnot, regularita, determinant, inverze), vlastní čísla a vlastní vektory matice a souvislost s charakteristickým polynomem, singulární rozklad, spektrální rozklad, Jordanův tvar, soustavy lineárních algebraických rovnic (existence a jednoznačnost řešení).
- Kompaktnost – metrická definice pomocí konvergečních vlastností posloupností, topologická definice/charakterizace v úplném metrickém prostoru a kompaktní množiny v $\mathbb{R}^d$.
- Funkce komplexní proměnné, holomorfní funkce, reziduová věta – definice, charakterizace (Cauchy-Riemannovy podmínky) a vlastnosti funkcí holomorfních na otevřené množině. Komplexní křivkový integrál, definice, a vztah ke křivkovému integrálu druhého druhu, primitivní funkce, korektnost definice pro holomorfní funkce.
- Lebesgueův integrál, Lebesgueova míra, L^p prostory. – Leviho, Lebesgueova a Fatuova věta. Fubiniho věta. Věta o substituci. Geometrický význam determinantu. L^p prostory jako příklad Banachových prostorů: definice, Hölderova a Minkovského nerovnost, úplnost, separabilita, duály, reflexivita.
- Hilbertovy prostory, ortonormální systémy. – Definice Hilbertova prostoru, Cauchy-Schwarzova nerovnost, úplný ortonormální systém separabilního Hilbertova prostoru a charakterizace úplnosti, abstraktní Fourierova řada (nejlepší aproximace prvku separabilního Hilberova prostoru na podprostoru generovaném prvními n prvky ortonormálního systému), klasická Fourierova řada, definice, přehled konvergenčních vlastností za různých předpokladů na funkci f.
- Spojitý lineární operátor na Hilbertově protoru, Rieszova věta o reprezentaci – definice, znění, řešitelnost $Lx = f$ pro striktně positivní operátory (tj. splňující $(Lu, u) \geq \beta \|u\|_H^2$), Lax-Milgramova věta.
- Spektrum lineárních operátorů, kompaktní operátor, samoadjungovaný operátor – Resolventní množina, spektrum, bodové a esenciální (spojité a residuální) spektrum. Definice a příklady kompatních a samodajungovaných operátorů a vlastnosti jejich spekter.

Příklady otázek

- Kompaktní množiny a kompaktní operátory. *Definice topologická, definice metrická a jejich vztah/ekvivalence v metrických prostorech. Charakterizace kompaktních množin v vektorových protorech konečné dimenze. Kompaktnost uzávěru jednotkové koule (charakterizace konečně dimensionálních prostorů. Definice kompaktního operátoru. Příklady. Kritérium kompaktnosti v* $\mathcal{C}(K)$, $K \subset \mathbb{R}^d$ *kompaktní, (tzv. Arzelà-Ascoliho věta), aplikace.*

- Křivkový integrál prvního a druhého druhu. Komplexní křivkový integrál. *Definice a jejich korektnost. Vztahy mezi nimi. Kritéria potenciálnosti vektorového pole.*

- Riemannův, Newtonův a Lebesgueův integrál. *Stručné zavedení. Výhody a nevýhody (absolutně/neabsolutně konvergentní integrál, limitní přechody). Vzájemné vztahy (kdy se shodují, příklady, které je odlišují).*

- Spektrum lineárních operátorů v Hilbertových prostorech konečné a nekonečné dimenze. *Definice resolventní množiny a spektra. Typy spektra. Resolventa operátoru v λ. Vlastnosti. Spektrum operátorů v konečné dimenzi. Spektrum kompaktních, samoadjungovaných a samoadjungovaných kompatních operátorů.*

- Hilbertovy prostory. *Definice (prostor se skalárním součinem, který je vůči normě generované skalárním součinem úplný). Příklady. Duál a jeho ztotožnění s původním prostorem. Reflexivita. Silná a slabá konvergence a jejich vlastnosti.*

2. Základy klasické mechaniky a termodynamiky

Mechanika hmotného bodu a soustav hmotných bodů (Newtonovy zákony, variační formulace, Lagrangeovy rovnice, Hamiltonovy rovnice), kinematika a dynamika tuhého tělesa, kinematika a dynamika spojitého prostředí (tenzor malých deformací, Cauchyho tenzor napětí, Reynoldsova věta o transportu, bilanční rovnice, Eulerovy a Navierovy-Stokesovy rovnice, rovnice linearizované pružnosti). Klasická rovnovážná termodynamika (teplo, teplota, první a druhý zákon termodynamiky, termodynamické potenciály, stavová rovnice, ideální plyn).

PODROBNOSTI

- Mechanika hmotného bodu a soustav hmotných bodů – Newtonovy zákony, inerciální/neinerciální vztažná soustava, zdánlivé síly (Coriolisova síla, Eulerova síla, odstředivá síla) – včetně odvození, vazby, zobecněné souřadnice a přechod k Eulerovým–Lagrangeovým rovnicím – včetně odvození, Lagrangeova funkce – umět napsat Lagrangeovu funci pro jednoduché soustavy, variační principy – odvození Eulerových–Lagrangeových rovnic z funkcionálu akce, zobecněná hybnost, Legendreova transformace a přechod od Lagrangeovy funkce k Hamiltonově funkci, Hamiltonovy pohybové rovnice.

- Kinematika a dynamika tuhého tělesa – zavedení tenzoru setrvačnosti, vektor úhlové rychlosti, formulace v inerciální vztažné soustavě a v soustavě rotující s tělesem, Eulerovy rovnice, popis rotace v $\mathbb{R}^3$ pomocí matic.

- Kinematika a dynamika spojitého prostředí – pojem spojitého prostředí, deformace, deformační gradient, Eulerův a Lagrangeův popis – vyajsnit si zejména rychlostní pole, Reynoldsova věta o transportu – včetně odvození, pojem Cauchyho tenzoru napětí, formulace bilančních rovnic (hmota, hybnost, energie) v Eulerově popisu, rovnice linearizované pružnosti – popis stlačiteného a nestlačitelného izotropního elastického materiálu, Laméovy parametry, Youngův modul a Poissonův poměr – rámcová představa o experimentech k měření těchto konstant. Stlačitelné a nestlačitelné Navier–Stokesovy rovnice.

- Klasická rovnovážná termodynamika – koncepce toku tepla, teplo, mechanický ekvivalent tepla – Jouleův experiment, zavedení teploty – empirická teplota, absolutní (termodynamická) teplota, první zákon termodynamiky, motivace k zavedení entropie, druhý zákon termodynamiky, přechod od vnitřní energie k dalším termodynamickým potenciálům (Helmholtz, Gibbs, entalpie), umět napsat stavovou rovnici ideálního plynu a umět ukázat jak ji lze odvodit z experimentálních dat (inženýrská stavová rovnice, Jouleův-Thomsonův experiment). Měrné teplo při konstantním objemu a měrné teplo při konstantním tlaku a jejich výpočet derivováním termodynamických potenciálů.

3. Numerická analýza a rovnice matematické fyziky
Aproximace funkcí, numerická integrace, numerické řešení nelineárních algebraických rovnic, numerické řešení obyčejných diferenciálních rovnic, přímé a iterační metody řešení lineárních algebraických rovnic, LU a QR rozklady a jejich stabilita, problém nejmenších čtverců, Schurova věta, metody pro řešení částečného problému vlastních čísel. Klasická teorie lineárních parciálních diferenciálních rovnic a jejich numerického řešení, metoda charakteristik pro transportní rovnici, rovnice vedení tepla, vlnová rovnice, Poissonova rovnice, princip maxima pro eliptické a parabolické rovnice druhého řádu, metoda konečných diferencí, stabilita, konvergence.

PODROBNOSTI

- Lagrangeova interpolace, definice a konstrukce interpolačního polynomu. Odhad chyby Lagrangeovy interpolace. Lineární a kubický spline, definice a konstrukce.

- Numerické řešení nelineárních algebraických rovnic, Newtonova metoda, metoda sečen. Řád konvergence. Věta o lokální konvergenci Newtonovy metody. Soustavy nelineárních rovnic.

- Numerická kvadratura, řád metody. Newton-Cotesovy a Gaussovy kvadraturní vzorce. Volba uzlů Gaussovy kvadratury. Odhad chyby. Složené kvadraturní vzorce.

- Numerické řešení ODR. Jednokrokové metody. Konzistence a řád metody, lokální diskretizační chyba a odhad globální chyby. Eulerova a Runge-Kuttovy metody. Vícekrokové explicitní a implicitní metody, řád a stabilita metody.

- Schurova věta a její důsledy pro normální a unitární matice (diagonalizovatelnost, ortogonalita vlastních vektorů).

- Výpočet maticových rozkladů (LU rozklad bez pivotace a s pivotací, Choleského rozklad, QR rozklad) – algoritmy, výpočetní náklady, stabilita.

- Řešení soustav lineárních rovnic pomocí přímých metod (Gaussova eliminace a její varianty, QR rozklad) a iteračních metod (stacionární metody, metoda CG a GMRES).

- Problém vlastních čísel – mocninná, Arnoldiho a Lanczošova metoda.

- Problém nejmenších čtverců – existence a jednoznačnost řešení, metody výpočtu (QR a SVD rozklad, normální rovnice).

- Metoda charakteristik pro transportní rovnici – lineární transportní rovnice a řešitelnost počáteční úlohy.

- Vlnová rovnice - Cauchyho úloha v jedné dimenzi, řešení a důsledky D'Alembertova vzorečku a rozdíly, které nastanou ve dvou a třech dimenzích (porovnání s Kirchhoffovým a Poissonovým vzorcem).

- Rovnice vedení tepla - formulace Cauchyho a počáteční a okrajové úlohy v omezené oblasti. Základní vlastnosti klasického řešení.
- Bilance energie pro klasické řešení počáteční a okrajové úlohy vlnové a tepelné s nulovou pravou stranou a homogenními okrajovými podmínkami Dirichletova či Neumannova typu. Jednoznačnost klasického řešení nehomogenní úlohy.
- Věta o průměru a její důsledky pro harmonické funkce s důkazem (slabý a silný princip maxima, slabý a silný princip minima, hladkost/regularita řešení, Liouvilleova věta).
- Metoda konečných diferencí pro transportní rovnici. Centrální diference, upwind schémata. Chyba diskretizace. Stabilita, von Neumannova analýza stability.

Příklady otázek

- Newtonova metoda: *Odvození Newtonovy metody. Věta o lokální konvergenci Newtonovy metody a její řád (okomentovat předpoklady věty a jejich význam). Globální chování Newtonovy metody. Modifikace Newtonovy metody (zejména metoda sečen). Newtonova metoda pro soustavy nelineárních rovnic.*
- QR rozklad a jeho využití pro numerické výpočty: *Definice QR rozkladu a jeho ekonomické varianty, vztah k ortonormální bázi oboru hodnot matice. Výpočet pomocí Givensových rotací a Householderových reflexí. Využití QR pro řešení soustavy rovnic s regulární maticí a lineární aproximační úlohy. Diskuse zpětné stability a výpočetních nákladů.*
- Soustavy lineárních rovnic se symetrickou maticí: *Řešení pomocí Choleského rozkladu – existence, algoritmus a jeho zpětná stabilita, zaplnění při práci s řídkými maticemi, řádková pivotace. Iterační metoda sdružených gradientů – předpoklady, vlastnosti (optimalita), algoritmus, konvergence v konečné aritmetice, odhady chyby, idea předpodmínění.*
- Transportní rovnici: *Metoda charakteristik pro lineární rovnic s konstantními koeficienty. Metoda konečných diferencí: Odvoďte upwind schéma pro lineární transportní rovnici. Odvoďte diskretizační chybu tohoto schématu. Proveďte von Neumannovu analýzu stability.*