Elektrostatika

od Coulombova zákona po Gaussovu větu

V začátcích seznamování s elektřinou a magnetismem zatím pomineme magnetismus a zaměříme se jen na jevy elektrické. A budeme se zabývat nejjednoduššími situacemi, v nichž netečou žádné elektrické proudy a nic se nemění s časem – tedy jevy a situacemi **statickými**.

S jevy z oblasti elektrostatiky máme určitě všichni nějakou zkušenost. Například někdy, když si sundáme svetr, slyšíme slabé praskání.[1] A můžeme si všimnout, že svetr se k nám trochu přitahuje.[2] Navíc, když si pak sáhneme na nějaký kovový předmět, dostaneme občas slabou „ránu“. Ve tmě si přitom můžeme všimnout, že mezi naší rukou a tím kovovým předmětem přeskočila jiskřička.

Na různých science show se při pokusech s van de Graaffovým generátorem ukazují jiskry výrazně větší a předvádějí se pokusy, kdy člověku, který je připojen k tomu generátoru (a stojí přitom na izolační podložce), krásně vstávají a vlají vlasy.[3]

Při popisu těchto jevů a pokusů se používají termíny jako *elektrický náboj*, *elektrické pole* a podobné. Jak moc jim vlastně rozumíme? Co když se nás někdo zeptá:

- Co je to vlastně elektrický náboj?
- Jak na sebe náboje působí?
- Co je to elektrické pole?
- Jak ho popsat?
- K čemu jsou nám tyhle pojmy dobré?

Na takovéto a podobné otázky se pokusíme v téhle i dalších kapitolách odpovědět – a to jak pomocí pokusů, tak s trochou teorie a příslušné matematiky.

Poznámka: Tato první kapitola je trochu delší, ale neděste se. Je to tím, že tyhle úvodní partie je vhodné maličko podrobněji komentovat, tak je text v některých místech trochu „povídavější“. Hned další kapitola už bude výrazně kratší…

[1] V parném létě se nám to nestane, ale v zimě, když je sucho, se to děje, zejména když má v sobě svetr nějaká plastická vlákna. (Taky nesmí být mokrý nebo propocený… ☺)

[2] U tlustého těžkého svetru si toho asi nevšimneme, u tenkých triček je to výraznější.

[3] Takové pokusy se dají dělat i se školním van de Graaffovým generátorem.

1.1 Od jednoduchých pokusů k Coulombovu zákonu

Kapitolu o elektrostatice můžeme začít známým slovním obratem…

… už staří Řekové…

Opravdu, už staří Řekové si všimli, že jantar po tření například vlnou přitahuje drobné předměty (slámu, vlákna, ptačí pírka apod.).[4]

Starořecký název jantaru je *elektron*[5] – a odtud pochází i sám název *elektřina.* Tento termín[6] zavedl ve svém díle z roku 1600 William Gilbert.

Dnes můžeme zkoumání elektrostatických jevů začít podobnými pokusy. Ovšem místo jantaru (nebo klasické ebonitové tyče třené liščím ohonem) budeme pracovat s novějšími materiály, většinou s plastickými hmotami.

Jednoduché úvodní pokusy

Levnými a spolehlivými pomůckami pro jednoduché elektrostatické pokusy jsou plastová brčka.[7] Brčko, které několikrát třeme kusem látky, kapesníkem nebo papírovým kapesníkem, se „zelektruje“ a můžeme s ním provádět následující pokusy. Zde je popíšeme jen stručně, trochu detailnější popis najdete v Dodatku A této kapitoly.

Pokus 1: **Brčko drží na stěně**, a nejen na ní

Plastové brčko zelektrované třením přiložíme ke stěně.
Výsledek: Brčko se ke stěně „přicvakne“ a drží na ní. Drží také na tabuli a na lecčem dalším.[8]

Pokus 2: **Dvojice brček se vzájemně odpuzuje**

Zelektrujeme třením dvě brčka a držíme je v prstech za jejich konce blízko u sebe. (Tak, aby brčka byla rovnoběžně centimetr až několik centimetrů od sebe. Podrobněji viz Dodatek A.)
Výsledek: Cítíme, že brčka se odpuzují.

$\boxed{?}$ Co jsme se z těchto pokusů dozvěděli? Dvě základní věci:

- Zelektrované brčko působí na okolní předměty silou.
- Síla, kterou brčko působí, může být přitažlivá nebo odpudivá.

Poznámka: Někdo by mohl říci, že Pokus 1 ukazuje, že stěna přitahuje brčko, ne že brčko přitahuje stěnu. Rozmyslete si, co byste mu řekli. (Rozmyslete si to dřív, než se podíváte na poznámku pod čarou.[9])

---

[4] Uvádí se, že bylo už v šestém století před naším letopočtem; prý to zmiňuje Thalés z Milétu.

[5] Chcete-li to mít s podrobnostmi ev. s výslovností, najděte si to na (anglické) Wikipedii, resp. na odkazu, na který vede: https://en.wiktionary.org/wiki/%E1%BC%A4%CE%BB%CE%B5%CE%BA%CF%84%CF%81%CE%BF%CE%BD#Ancient_Greek.

[6] Přesněji řečeno, jeho latinskou podobu *electricus*., viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Electricity .

[7] Plastová brčka se stále dají sehnat, i když jejich prodej je omezován. (Prý jsou k sehnání brčka určená „pro opakované použití“.) Až budou zcela nedostupná, budeme muset hledat jiné pomůcky. Mohlo by jít třeba o tenké průhledné plastové obaly na dokumenty, plastové lepicí pásky apod., prostě o materiály, které se snadno zelektrují třením.

[8] Vyzkoušejte, na čem všem drží.

[9] Jednak bychom mohli argumentovat principem akce a reakce. A za druhé můžeme udělat pokus dokazující, že zelektrované brčko přitahuje okolní předměty: můžeme jím například přitáhnout malý kousek papírku (třeba z papírového kapesníku) nebo kousek nitě. Jde o stejný jev, jako pozorovali staří Řekové u jantaru, který předtím třeli vlnou.

Obecně můžeme usoudit, že třením se na brčko dostalo „něco“, co na okolní předměty působí silou. Ve fyzice tomu „něčemu“ říkáme **elektrický náboj**.[10] Nejde nám ovšem o pojmenování, ale o to, jaké má elektrický náboj vlastnosti a jak na sebe náboje vzájemně působí silou.

Kvalitativně můžeme silové působení prozkoumat rozšířením pokusu 2 se dvěma brčky.

Pokus 3: **Odpuzování brček: síla závisí na vzdálenosti**

Už jsme si toho určitě všimli v pokusu 2: Když jsou brčka dál od sebe, je síla menší, když je k sobě přiblížíme, síla vzroste.[11]

Pokus 4: **Když několik brček odpuzuje jedno brčko, síla je větší**

Zkuste zelektrovat dvě nebo tři brčka, dát je co nejtěsněji k sobě a odpuzovat jimi jedno zelektrované brčko – ucítíte, že síla odpuzování je i při stejné vzdálenosti větší.[12]
Jak by to šlo vysvětlit? Na dvou či více brčkách je zřejmě dohromady více náboje, než na jednom. A tohle větší množství náboje odpuzuje to jediné brčko víc.

$\boxed{?}$ Co jsme zjistili?

- Větší množství náboje působí větší silou.
- S rostoucí vzdáleností síla vzájemného působení nábojů klesá.

Zatím šlo o kvalitativní zjištění. Ale i s jednoduchou pomůckou, kde nabíjíme jen kousky brček (viz Dodatek A) můžeme alespoň zhruba ověřit, že síla, kterou na určitý náboj (označme ho náboj 1) působí na nějaký jiný náboj, je

$$F \approx \frac{\text{náboj 1}}{(\text{vzdálenost nábojů})^2} \quad . \tag{1.1}$$

Náboje se ale odpuzují vzájemně, takže je logické, že síla musí být úměrná i druhému z nábojů. Lze to ověřit i přesnějšími kvantitativními pokusy.[13] Podobné pokusy prováděli fyzici v 18. století. Výsledný zákon pro sílu je spojen se jménem francouzského fyzika Coulomba.[14]

Coulombův zákon

Coulombův zákon obvykle bývá formulován pro ***bodové náboje***. Jestliže velikosti jejich nábojů jsou Q_1 a Q_2 [15] a jejich vzdálenost je r, je velikost síly mezi nimi rovna

$$F = k\,\frac{|Q_1 Q_2|}{r^2} \quad . \tag{1.2}$$

Absolutní hodnotu zde píšeme, aby velikost síly vyšla kladná, i když by se náboje lišily znaménkem.[16]
Náboje stejných znamének se odpuzují, náboje opačných znamének se přitahují. Síla má přitom směr spojnice obou nábojů.

---

[10] To samozřejmě dávno víte, ale teď tady budujeme elektrostatiku od základů.
Pozn.: Když už známe pojem náboj, tak místo „zelektrované brčko“ budeme dále často říkat „nabité brčko“.

[11] Těsně k sobě se brčkům „výrazně nechce“.

[12] Místo dvou či tří spojených brček můžete také zelektrovat větší plastovou tyč. Na ní je zřejmě více náboje než na tenkém brčku – a síla, kterou tyč odpuzuje nabité brčko je markantně větší.

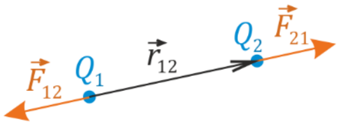
[13] Odkazy na jednodušší pokusy uvádíme v Dodatku A, odkazy na profesionální experimenty v Dodatku B.

[14] Charles-Augustin de Coulomb (1736-1806). Sílu měřil pomocí torzních vah; výsledek dnes známý jako Coulombův zákon publikoval v roce 1785. Závislost síly na vzdálenosti jako $1/r^2$ ovšem fyzikové předpokládali již dříve, někteří závislost na vzdálenosti i proměřovali, např. H. Cavendish (ten ale svá měření nepublikoval) nebo J. Robinson. Podrobněji viz Dodatek B.
(Viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Coulomb%27s_law#History .)

[15] Přecházíme už k běžnému značení, abychom nemuseli stále vypisovat „náboj 1“ apod.

[16] Ke znaménku náboje se dostaneme za chvíli.

Vše tohle dohromady vyjadřuje Coulombův zákon ve vektorovém zápisu:



$$\boxed{\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{(r_{12})^2}\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}}. \tag{1.3}$$

Jak ukazuje obrázek, síla $\vec{F}_{21}$ je síla, kterou první náboj působí na druhý. Síla $\vec{F}_{12}$, kterou druhý náboj působí na první, je samozřejmě opačná.[17] Velikost konstanty k je

$$\boxed{k \doteq 9\cdot 10^9\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}} \doteq 10^{10}\,\mathrm{N\,m^2C^{-2}}}. \tag{1.4}$$ [18]

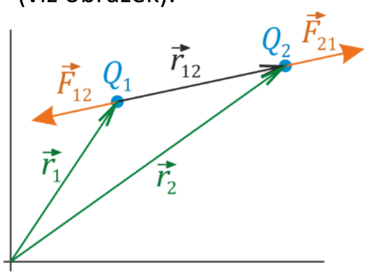
Místo konstanty k se v Coulombově zákoně často píše $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$, k tomu se ještě dostaneme dále.[19]

Hodnota (1.4) (resp. $1/(4\pi\varepsilon_0)$) platí pro náboje, které na sebe působí **ve vakuu**. A prakticky také ve vzduchu, konstanta k je v tomto případě menší jen asi o půl promile.[20]

Už výše jsme uvedli, že Coulombův zákon **platí pro bodové náboje**. Platí také pro sféricky symetricky nabité kuličky, k tomu se ještě vrátíme.[21]

Všimněte si, že Coulombův zákon ve tvaru (1.3) vystihuje i orientaci síly: pro náboje stejných znamének je $Q_1Q_2 > 0$, takže síla je odpudivá (míří ve směru jednotkového vektoru $\dfrac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}$), pro náboje opačných znamének je $Q_1Q_2 < 0$ a síla míří opačným směrem, je tedy přitažlivá.

Coulombův zákon je užitečné napsat i ve tvaru, v němž figurují polohové vektory obou nábojů $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ (viz obrázek):[22]



$$\vec{F}_{21} = k\frac{Q_1 Q_2}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}_2-\vec{r}_1}{\left|\vec{r}_2-\vec{r}_1\right|} \tag{1.5}$$

[17] Plyne to z principu akce a reakce, který elektrostatické síly mezi náboji splňují. Vyjde to také přímo ze vztahu (1.3), když zaměníme indexy 1 a 2. (Vektor $\vec{r}_{21}$ samozřejmě vychází z náboje 2 a končí v náboji 1, takže je opačný, než vektor $\vec{r}_{12}$: $\vec{r}_{12} = -\vec{r}_{21}$. Ale s takovýmto značením jste se již zřejmě setkali v přednášce z Mechaniky, takže vám je jeho význam zřejmý, dále ho už proto většinou už nebudeme komentovat.)

[18] Jde o hodnotu v soustavě SI. Přesněji je její číselná hodnota $8{,}98755179\cdot 10^9$, ale $9\cdot 10^9$ se pamatuje snáz… (A 10^{10} se pamatuje ještě lépe. ☺) Jednotku této konstanty si nemusíme pamatovat, ale jednoduše ji odvodíme přímo z Coulombova zákona: Síla musí vyjít v newtonech, musí se zkrátit metry na druhou a také coulomby na druhou.

[19] Dále se také budeme podrobněji věnovat jednotkám náboje; zatím jen připomínáme, že v soustavě SI je jednotkou náboje coulomb a jeho značka je C.

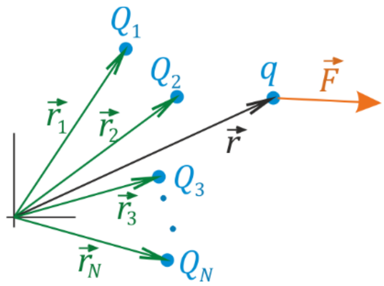
[20] Obecně Coulombův zákon platí i jiných (nevodivých, homogenních a izotropních) prostředích, konstanta k je v nich však obecně menší, k tomu se ještě dostaneme.

[21] Pozor, *neplatí přesně pro vodivé* nabité kuličky. Když je totiž přiblížíme k sobě, vlivem sil mezi náboji se náboje na vodivých kuličkách přesunou tak, že jejich rozložení už není sféricky symetrické.

[22] Polohové vektory samozřejmě vycházejí z počátku inerciálního systému, v němž situaci popisujeme; náboje jsou vůči tomuto systému v klidu. (Že situaci popisujeme z hlediska inerciálního systému, vůči němuž jsou náboje v klidu, budeme v elektrostatice předpokládat i nadále, i když to nebudeme explicite zdůrazňovat.) Pozn.: Uvědomte si, že (1.5) je přesně stejný vztah jako (1.3), jen v něm jsou polohy obou nábojů.

Skládání sil od více nábojů: princip superpozice

Zatím jsme uvažovali dva náboje. Co když jich bude víc? Tedy, když na náboj q v místě $\vec{r}$ [23] působí síly od nábojů Q_1, Q_2, … až Q_N a které jsou v místech $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, … až $\vec{r}_N$, jak to ukazuje obrázek.



Výsledek je naštěstí jednoduchý. Platí totiž **princip superpozice**, síly od jednotlivých nábojů se prostě sečtou:

$$\boxed{\vec{F} = k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i\,q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}} \qquad (1.6)$$

[23] Správnější by bylo psát „náboj v místě daném polohovým vektorem $\vec{r}$ – ale snad je kratší formulace stejně srozumitelná.
(Ještě formálně správnější by bylo napsat „náboj v místě daném polohovým vektorem $\vec{r}$ v inerciální soustavě S, v níž popisujeme danou situaci“, ale takové formulace by možná člověk musel číst několikrát, aby se rozebral v tom, oč vlastně jde. ☺)

1.2 Elektrický náboj: co o něm víme a jak ho popisujeme

V čem náboj měříme

Jak už jsme uvedli, jednotkou náboje v soustavě SI je coulomb, značkou této jednotky je C.[24] Pro elektrostatiku je to ovšem jednotka příliš velká: Pokud bychom drželi dva náboje, každý o velikosti 1 C, metr od sebe, byla by podle (1.2) síla, kterou by se odpuzovaly, rovna téměř 10^{10} N.[25]

V praxi se tedy používají násobky, např. mikrocoulomb (μC) nebo nanocoulomb (nC).

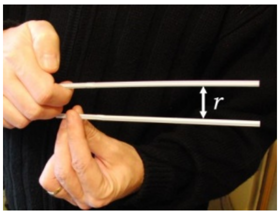
Historická poznámka (můžete přeskočit):

Dříve se v soustavě jednotek označované jako CGSE[26] psal Coulombův zákon jen jako $F = \frac{|Q_1 Q_2|}{r^2}$, tedy konstanta k byla rovna jedničce. Jednotkou náboje byl takzvaný *statcoulomb*. Jeho velikost byla taková, aby při jednotkové vzdálenosti (tedy při r = 1 cm) při dosazení $Q_1 = Q_2$ = 1 statcoulomb vyšla jednotka síly; ta se v soustavě CGS nazývala 1 dyn, v přepočtu do SI je 1 dyn = 10^{-5} N. Odtud lze velikost spočítat, je to asi (1/3) nC.[27]

Malá odbočka: konkrétní příklad velikosti náboje

Výše jsme pokusničili s nabitými brčky. Máme představu, jak velký náboj na nich byl?[28] Zkusíme ho alespoň přibližně určit z experimentu.

Pokus 5: **Vznášení jednoho brčka nad druhým**



Zelektrujte třením dvě plastová brčka a držte je nad sebou tak, jak ukazuje fotografie. Dolní brčko držte pevně, horní jen lehce, jen aby nesklouzlo do strany. Uvidíte, že horní brčko se „vznáší“; je nad spodním drženo ve výšce několika cm díky elektrostatickému odpuzování. Je v klidu, takže odpudivá síle se musí rovnat tíze brčka.

Hmotnost brčka je asi 0,4 g, takže jeho tíha je asi $F_g = m\,g \doteq 0{,}4\cdot10^{-3}$ kg · 10 m/s^2 = $4\cdot10^{-3}$ N. Sílu elektrostatického odpuzování spočteme podle Coulombova zákona jako $F_e = k\,Q_1Q_2/r^2$, kde r je vzdálenost mezi brčky. Náboje obou brček jsou přibližně stejné, $Q_1 \approx Q_2$, označíme je prostě jako Q.

V rovnováze je $F_e = F_g$, čili $kQ^2/r^2 = F_e$. Odtud dostáváme $Q = r\sqrt{F_g/k}$. Výška, ve které se brčko vznáší, bývá 2 až 5 cm.[29] Vezměme hodnotu r =3 cm. Po dosazení vyjde Q ≐ $3\cdot10^{-2}\cdot\sqrt{(4\cdot10^{-3}/9\cdot10^{9})}$ C = = $2\cdot10^{-8}$ C = 20 nC.

Krásný a jednoduchý výpočet, že? Ale nedalo by se proti němu něco zásadního namítnout? (Zkuste si to rozmyslet sami, než otočíte na další stránku.)

---

[24] Formálně tohle píšeme jako $[Q]$ = 1 C.

[25] To odpovídá tíze závaží milión tun. To v rukou neudržíte…

[26] CGS znamená centimetr, gram, sekunda, to „E“ vyjadřuje, že jde o soustavu jednotek vhodnou pro elektrostatiku. S touto soustavou se můžete setkat v některých starých učebnicích.

[27] Pro zájemce: Pro $Q_1=Q_2$ (dále náboj označíme jen jako Q), plyne z Coulombova zákona $Q^2 = r^2\, F/k$, po dosazení $r=10^{-2}$ m, $F=10^{-5}$ N a $k \doteq 9\cdot10^9$ Nm^{2}C^{-2} dostaneme $Q^2 \doteq (10^{-2})^2\cdot10^{-5}/(9\cdot10^9)$ C^2 = $(1/9)\cdot10^{-18}$ C^2 .

[28] S velikostmi náboje většinou nemáme zkušenost, takže o tom, jak velký je náboj na brčku, nemáme nejmenší tušení. Ale z toho, že brčka udržíme v rukou, můžeme usoudit, že náboj bude výrazně menší než coulomb.

[29] Záleží na materiálu brčka, látce, kterou brčko třeme, podmínkách v místnosti, kde pokus děláme…

Proti našemu výpočtu lze vznést podstatnou námitku. Odpudivou sílu jsme určili z Coulombova zákona – ale ten přece platí pro bodové náboje![30] A to brčka zcela zjevně nejsou. Není tedy celý výpočet úplně nesmyslný a zcela špatně?

Námitka je oprávněná. Náš postup zjevně může dát jen hodně hrubý odhad velikosti náboje na brčku. Pro přesnější určení náboje bychom museli přesně spočítat sílu mezi dvěma nabitými tyčinkami.[31] Kupodivu, když to uděláme, zjistíme, že náš hrubý odhad užívající Coulombova zákona dává řádově správnou hodnotu náboje, jen ji poněkud podceňuje.[32]

Přes uvedené nepřesnosti můžeme říci, že velikost náboje brčka známe, vidíme, že je několik desítek nanocoulombů.

Náboje jsou kladné a záporné

Pokusem se dvěma brčky jsme zjistili, že náboje na nich se odpuzují. Ale co když míst jednoho brčka vezmeme skleněnou tyč a nabijeme ji třením?

Pokus 6: **Zelektrované plastové brčko a zelektrovaná skleněná tyč**

Když třením nabijeme kousek brčka visícího na tenké niti, vidíme, že od zelektrovaného brčka se odpuzuje, ale ke skleněné tyči nabité třením se naopak přitahuje.[33] Pokusem také můžeme ověřit, že dvě skleněné zelektrované tyče se odpuzují.

Z pokusu tedy vidíme, že zřejmě máme dva druhy náboje. Mohli bychom jim říkat třeba „náboj skleněný“ a „náboj brčkový“ ☺[34], ale užívá se pro ně pojmenování náboj **kladný** a **záporný**, ostatně jsme tyhle názvy požívali už výše. V souladu s ním bereme hodnoty náboje se znaménkem, tedy jako $Q > 0$ nebo $Q < 0$.[35]

Užívání kladných a záporných hodnot náboje je užitečné, protože v Coulombově zákonu vystihuje fakt, že náboje stejného znaménka se odpuzují a náboje opačných znamének přitahují, viz zmínku o orientaci síly nad vztahem (1.5). Který náboj označujeme jako kladný a který jako záporný, je ovšem věcí konvence.

Pozn.: K druhům elektrického náboje by bylo možné vznést „lstivou“ otázku: Jak víme, že druhy náboje jsou právě dva a ne třeba tři nebo víc?[36]

---

[30] Nebo sféricky symetricky nabité kuličky, ale to nám zde příliš nepomůže.

[31] To se dá udělat a může nám to být motivací například k tomu, počítat sílu na náboj od nabité přímky.

[32] O desítky procent. (Bližší informace mohou zájemci najít na https://kdf.mff.cuni.cz/lide/dvorak/papers/GIREP/GIREP_2010_LD_ElstatExperiments.pdf .)
Ovšem ani přesný výpočet síly mezi dvěma homogenně nabitými úsečkami vlastně úplně nevystihuje reálnou situaci – třením určitě nenabijeme brčko přesně rovnoměrně a obě brčka nemusí mít přesně stejný náboj – takže teoretickým výpočtem skutečný náboj brčka vždy určíme jen přibližně.

[33] Nemáme-li skleněnou tyč, stačí použít skleněnou zkumavku.

[34] Nebo červený a modrý nebo nějak jinak.

[35] Objekt, který není nabitý, má nulový náboj, $Q = 0$.

[36] Zkuste si ji rozmyslet sami… (Co kdyby se vás na něco takového jednou zeptal zvídavý žák.) Nejde jednoduše říct, že náboje musí být vždy jen dvou druhů. Třeba kvarky mají tzv. barevné náboje (ty nemají nic společného s elektrickým nábojem) a ty jsou tří druhů.

Náboj je diskrétní…[37]

Náboj opravdu není spojitou veličinou, nemůžeme ho mít libovolně malý. Je to dáno tím, že náboj mají elementární částice (elektron, proton, …), a těch je v nějakém tělese vždy celočíselný počet.[38]

Elementární náboj

Velikost náboje elektronu i protonu má hodnotu, které říkáme ***elementární náboj*** (a označujeme e). Pro zapamatování se hodí přibližná hodnota[39]

$$\boxed{e \doteq 1{,}602 \cdot 10^{-19}\ \mathrm{C}\ .} \tag{1.7}$$

Přesná hodnota elementárního náboje je

$$e = 1{,}602\,176\,634 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C} \quad \text{přesně}^{40}. \tag{1.8}$$

Náboje elektronu je co do velikosti roven elementárnímu náboji, ale je záporný, náboj protonu je stejně velký, ale kladný:

$$q_e = -e, \quad q_p = e \tag{1.9}$$

Náboje těles, s nimiž se setkáváme, jsou dány tím, jaký je v nich rozdíl počtu elektronů a protonů. Pokud je v tělese přebytek elektronů (tedy víc elektronů než protonů), je nabito záporně (tedy jeho celkový náboj je záporný); když je v tělese víc protonů než elektronů, je nabito kladně.[41] Když je v tělese stejný počet elektronů jako protonů, je jeho celkový náboj nulový.[42]

Celkový náboj tělesa tedy musí být celočíselným násobkem elementárního náboje.[43]

… a přesto ho často popisujeme jako spojitou veličinu

V elektrostatice i v dalších částech klasické teorie popisující elektřinu a magnetismus ovšem běžně pracujeme s nábojem jako se spojitou veličinou.[44] Jak si to můžeme dovolit?

Brát náboj jako spojitý je samozřejmě zjednodušení, ovšem v řadě případů přijatelné.

---

[37] Ne ve smyslu, že by nevyžvanil, když se mu s něčím svěříte. ☺ Diskrétní je zde míněno jako opak spojitého. Jak nás poučí třeba Wikipedie, *diskrétní* ve vědě a technice znamená „nespojitý (složený z izolovaných prvků), digitální, kvantovaný nebo vzorkovaný“.

[38] Pro puntičkáře: nezáporný počet… ☺

[39] Tu je fakt vhodné si pamatovat. I proto, že se také používá při převodu energie mezi jednotkami joule a elektronvolt (což je jednotka masivně používaná v částicové a jaderné fyzice).

[40] Podle nové definice základních jednotek v soustavě SI je od 20. 5. 2019 základní jednotka ampér definována právě tak, aby elementární náboj měl uvedenou hodnotu.

[41] Neutrony mají nulový náboj, takže k celkovému náboji těles nepřispívají.
A poznámka pro ty, jimž vrtá hlavou, proč je v tomto odstavci napsáno „náboje těles, s nimiž se setkáváme“: Inu, kromě elektronů a protonů mají náboj i další částice. Například pozitron (antičástice elektronu) má náboj $+e$, antiproton náboj $-e$. Ale s tělesy z antihmoty se běžně nesetkáváme…

[42] Když se nad tím zamyslíme, je zřejmé, že aby tohle bylo pravda, musí být náboj protonu ***přesně*** opačný, než náboj elektronu, $q_p = -q_e$. Tohle je ověřováno velice přesnými pokusy.

[43] Elementární náboj je také, co do velikosti, nejmenší náboj, který mohou nabité objekty mít. Můžete namítnout, že *kvarky* mají třetinové hodnoty elementárního náboje (tj. jejich velikosti náboje jsou $e/3$ a $2e/3$). To je pravda, ale kvarky neexistují izolovaně, vždy jsou seskupeny do částic, jejichž hodnota náboje je e nebo jeho násobek.

[44] Například až budeme popisovat nabíjení a vybíjení kondenzátoru, budeme přitom používat diferenciální rovnice; v nich bude vystupovat derivace náboje podle času; zjevně tam s nábojem budeme pracovat jako se spojitě se měnící veličinou.

Například výše jsme odhadli, že náboj na zelektrovaném plastovém brčku byl asi 20 nC, tedy $2 \cdot 10^{-8}$ C. Oproti hodnotě elementárního náboje, $e \doteq 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ C je to o jedenáct řádů víc. Na brčko jsme tedy při jeho zelektrováním třením přidali přes sto miliard elektronů.

Pokud nám nejde o jednotlivé atomy a molekuly nebo jejich malé soubory, nemusíme tedy uvažovat, jak se jejich náboj mění (třeba při ionizaci) o jednotlivé elementární náboje. Většinou nám bude stačit ***makroskopický přístup***, kdy se nebudeme starat o jednotlivé elektrony, ionty apod.[45]

I v našem seznamování s elektřinou a magnetismem proto nadále, pokud neřekneme jinak, budeme brát náboj jako veličinu, která může mít libovolnou hodnotu.[46]

Malá odbočka: porovnání elektrické a gravitační síly v mikrosvětě

V mikrosvětě jsou ovšem jednotlivé elementární náboje velmi významné. Spočtěme například velikost síly, kterou se elektrostaticky přitahují proton a elektron ve vzdálenosti r.[47] Z Coulombova zákona dostáváme

$$F_e = k\frac{e^2}{r^2} \doteq 10^{10} \cdot \frac{(1{,}6 \cdot 10^{-19})^2}{r^2} \doteq \frac{3 \cdot 10^{-28}\,\mathrm{Nm}^2}{r^2} \;.\quad ^{48} \tag{1.10}$$

Pro gravitační sílu mezi týmiž částicemi je

$$F_g = G \cdot \frac{m_e m_p}{r^2} \doteq 0{,}67 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{0{,}9 \cdot 10^{-30} \cdot 1{,}7 \cdot 10^{-27}}{r^2} \doteq \frac{10^{-67}\,\mathrm{Nm}^2}{r^2} \;.\quad ^{49} \tag{1.11}$$

Vidíme, že mezi velikostí obou sil je rozdíl 40 řádů! Gravitační síla je v mikrosvětě neporovnatelně slabší než síla elektrická.[50] Proto její vliv na strukturu atomů, molekul apod. můžeme vždy zanedbat.

---

[45] Byť samozřejmě mikroskopický výklad občas použijeme, třeba když půjde o vedení proudu v kapalinách a plynech.
Přístupu, kdy se nestaráme o mikroskopická vysvětlení, se také říká ***fenomenologický***, Prostě popisujeme jevy a děje, jak je pozorujeme či naměříme, a snažíme se je vystihnout obecně. (Ve fyzice samozřejmě s vydatnou pomocí matematiky.)

[46] Tohle bude platit třeba i u elektrických obvodů. Tam můžeme diskrétní charakter náboje ignorovat ještě smělejí než v elektrostatice. Například když vodičem protéká proud 1 ampér, proteče v určitém místě jeho průřezem 1 C, tedy řádově skoro 10^{19} elektronů. To opravdu nemá smysl počítat jednotlivé elektrony…

[47] Může jít třeba o sílu mezi elektronem a protonem v atomu vodíku, kde r ≈ 10^{-10} m. Můžete namítnout, že zde už jsme mimo oblast elektrostatiky, protože nejde o dva náboje v klidu. Ovšem elektrickou sílu, kterou stojící náboj (např. proton) působí na pohybující se náboj (např. obíhající elektron) dává Coulombův zákon správně. (S tím se seznámíme v dalších kapitolách, až dojde na tzv. Lorentzovu sílu.)

[48] Konkrétně pro $r \approx 10^{-10}$ m je $F_e \approx 3 \cdot 10^{-8}$ N.

[49] Konkrétně pro $r \approx 10^{-10}$ m je $F_g \approx 10^{-47}$ N.

[50] Pardon, takhle bychom to mohli říci v běžném životě, ne na Matfyzu… Samozřejmě, že je slabší *porovnatelně*, právě o těch skoro 40 řádů. (Pro ještě větší puntičkáře: asi o 39 a půl dekadických řádů. ☺)
Jen na okraj, pro představu, jak velký poměr těch 40 řádů představuje: Můžeme si spočítat, že je to zhruba poměr hmotnosti Země k hmotnosti malé bakterie. (Což ukazuje, že je to „opravdu šíleně hodně“. ☺ Sami si můžete vymyslet jiná vhodná srovnání.)

Další vlastnosti náboje (například invariantnost)

Vlastností náboje, kterou jsme v předchozích úvahách už využívali, je **aditivita**. Jednoduše znamená, že náboj můžeme sčítat: celkový náboj tělesa je roven součtu nábojů v něm obsažených.

Je ovšem třeba poznamenat, že celkový náboj tělesa může být roven nule, ale kladné a záporné náboje v něm mohou být rozděleny v jeho různých částech.[51] Takové těleso, přestože jeho náboj je nulový, *působí* silou na náboje ve svém okolí; za chvíli to uvidíme na příkladu elektrického dipólu.

Vlastností náboje, která nám asi připadá samozřejmá, je skutečnost, že jde o **skalár**.[52] To jednak znamená, že jeho hodnota je vyjádřena jediným číslem. Na druhou stranu s tím souvisí to, jak se chová při přechodu mezi různými soustavami souřadnic.

Naštěstí je to jednoduché: **náboj má ve všech inerciálních systémech stejnou hodnotu**. [53]

Formálně to můžeme vyjádřit konstatováním, že se náboj nemění při transformaci mezi inerciálními systémy, jinými slovy, že je při dané transformaci **invariantní**.[54]

* Poznámka zatím spíše rozšiřující a pro zájemce:
Velice zajímavé a důležité je, že invariantnost náboje platí nejen, když jsou vzájemné rychlosti inerciálních systémů malé, ale třeba i když se blíží rychlosti světla. A ještě zajímavější a důležitější je, že tohle platí nejen pro náboj: Rovnice elektromagnetismu jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci! To znamená, že tyto rovnice jsou v souladu se speciální teorií relativity.[55]

Prošli jsme řadu vlastností náboje. Ale jedna zcela zásadní nám ještě zbývá[56]:

Zákon zachování náboje

Podle všeho, co o světě víme, **náboj nelze vytvořit ani zničit**.

Náboj se může jen přenášet z jednoho tělesa na jiné nebo z jedné oblasti (části prostoru) do jiné.[57] V oblasti, z níž žádný náboj neodchází ani do ní nepřichází, zůstává celkový náboj konstantní, **zachovává se**.
Jak to víme? Je to fakt zjištěný z pokusů; nikdy jsme nenarazili na experiment nebo měření, v němž by se náboj nezachovával.

---

[51] Viděno na mikroskopické úrovni, rozdělena bude jen malá část nábojů. Určitě to nemůže být tak, že by na jednom konci tyče byly samé protony a na druhém samé elektrony. (Spočítejte si, jak obrovské náboje by byly na koncích takové tyče, třeba kdyby měla hmotnost 1 kg. Sílu, jakou by se přitahovaly, snad raději ani nepočítejte…)

[52] Jasně, řeknete si, náboj přece není vektor ani tenzor.

[53] Je vidět, že se zde dostáváme mimo oblast elektrostatiky. (Náboj, který je v jednom inerciálním systému v klidu, se vůči jiným inerciálním systémům pohybuje.) Ale fakticky všechny vlastnosti náboje, které zde probíráme, se týkají celé oblasti elektromagnetismu, nejsou omezeny jen na elektrostatiku.
Pozn.: Laskavý čtenář snad promine, že se zde omezujeme na inerciální systémy. (O tom, jak vypadají rovnice pro elektromagnetismus v neinerciálních soustavách, existují vědecké články, ale v běžných VŠ učebnicích se vždy rovnice píšou a vše se řeší jen v inerciálních soustavách. Takže čtenáře, kterému by inerciální soustavy nestačily, odkazujeme na ty vědecké články…)

[54] Nebo ještě jinými slovy, že je **invariantem** dané transformace.

[55] No není to nádhera? Zatím tomu sice do hloubky nerozumíme, ale můžeme tušit, že to znamená, že klasická elektrodynamika (tak se nazývá teorie popisující elektromagnetické jevy na klasické úrovni) se nemusela měnit s příchodem speciální teorie relativity. (Na rozdíl od klasické mechaniky, ta změnit potřebovala.) Blíže se s tím seznámíte ve vyšším ročníku v přednášce věnované speciální teorii relativity.
Je ovšem třeba připomenout, že některé vzorce, s nimiž se v tomto studijním textu seznámíme, se budou týkat jen pohybu malými rychlostmi nebo statických situací. (Ostatně už Coulombův zákon je toho příkladem.)

[56] Inu, nejlepší na konec…

[57] Například dotykem, tokem elektronů ve vodiči nebo proudem letících nabitých částic. (Třeba v elektronkách nebo v rentgence, když letí elektrony od katody.)

Můžete namítnout, že existují situace, kdy se „zničí“ elementární částice, které mají náboj. Například při anihilaci elektronu a pozitronu.[58] Ale i zde se náboj zachovává. Elektron má náboj $-e$, pozitron náboj $+e$, takže celkový náboj obou částic je nulový. Anihilací vzniknou dva fotony záření gama, jejichž náboj je nulový. Celkový náboj před anihilací a po ní tedy zůstává stejný.[59]

Nemusíme snad zdůrazňovat, že zákon zachování náboje neplatí jen v elektrostatice, ale pro všechny elektrické a magnetické děje.[60] Zkrátka, zákon zachování náboje (podobně jako další zákony zachování) patří k zákonům, které fyzici považují za nejzákladnější, a o jejichž platnosti jsou přesvědčeni.[61]

Jak je to při nabíjení třením (a co to je triboelektrická řada)

Když plastovou tyč[62] nabíjíme třením třeba kapesníkem, děje se to, že elektrony přecházejí z kapesníku na tyč. Tyč se nabíjí záporně, kapesník kladně.[63]

Když kapesníkem třeme skleněnou tyč, přecházejí elektrony z povrchu tyče na kapesník. V tyči je potom o něco méně elektronů než protonů, a proto je celkový náboj tyče kladný. V kapesníku je naopak přebytek elektronů, a proto je nabit záporně.

K nabíjení třením je potřeba dodat dvě věci:

1) Důležité není ani tak tření, ale vzájemný *kontakt* materiálů. Například když odtrháváte izolepu od nějakého povrchu (stačí, když ji odvíjíte ze spodních vrstev této lepicí pásky), tak se také nabije.[64] Čili je potřeba vzájemný kontakt a pak odtržení obou povrchů.[65]

2) Při nabíjení třením záleží na *obou* materiálech, které se vzájemně třou. Například, když plastovou tyč třeme kapesníkem, nabije se záporně. Ale když tutéž tyč třeme teflonovou fólií, nabije se *kladně* (a teflon záporně).

Které materiály budou po vzájemném tření nabity kladně a které záporně, nám umožní zjistit tzv. **triboelektrická řada**. V ní jsou materiály seřazeny podle toho, jak se nabíjejí. Kratší podobu této řady a odkazy na další zdroje najdete v Dodatku C.

Závěrem k náboji a jeho vlastnostem

Co si z toho odnést? Náboj je neoddělitelnou vlastností elementárních částic (podobně jako hmotnost). Částice mohou mít náboj kladný a záporný, vždy je ale násobkem elementárního náboje e. (Až na kvarky, ty se ale nevyskytují samostatně.) Protonů a elektronů, a tedy i jejich nábojů ($+e$ a $-e$) je v látce ohromný počet, ale když je jejich počet stejný, je celkový náboj nulový. Přebytek nebo nedostatek elektronů způsobí, že látka je nabitá (záporně ev. kladně). Makroskopicky náboj obvykle bereme jako spojitou veličinu (což si můžeme dovolit, protože náboj jednotlivých částic je velmi malý).

---

[58] To není zas tak strašně exotická věc, využívá se v medicíně při pozitronové emisní tomografii.
[59] Stejně je tomu, když kreací vznikne pár elektron a pozitron.
[60] A nejen při klasickém popisu, tedy v klasické elektrodynamice; platí i v kvantové fyzice a kvantové elektrodynamice. Prostě platí v přírodě…
[61] Či trochu nadneseně řečeno, na jejichž platnost přísahají.
[62] Nebo plastové brčko nebo třeba plastové desky na papíry.
[63] Že je kapesník nabitý kladně, lze ověřit pokusem. (Ovšem museli bychom ten kapesník držet v nějaké izolační rukavici, jinak se jeho náboj vybíjí do našeho těla.)
[64] Můžeme si všimnout, že se přitahuje k blízkým předmětům.
[65] Proč se to děje, tedy proč elektrony přecházejí z jednoho povrchu na druhý, je již mimo rámec našeho seznamování s elektřinou a magnetismem. Pro zájemce jsou odkazy na některé zdroje uvedeny v Dodatku C.

1.3 Elektrické pole

Coulombův zákon vystihuje, jak na sebe dva náboje v určité vzdálenosti působí silou. Přitom působí silou ***přes prázdný prostor***.[66] A to je vlastně divné. Jak na sebe mohou náboje působit na dálku?[67] Nešlo by to působení popsat nějak jinak?

Myšlenka:[68]

Náboj kolem sebe v prostoru ***něco*** vytváří, to „něco“ pak působí na jiné náboje.

Náboje tedy na sebe nepůsobí přímo, ale prostřednictvím *něčeho*.

Tomu „něčemu“ říkáme **elektrické pole**.[69]

S elektrickým polem a jeho popisem se budeme seznamovat postupně. Ale několik kvalitativních věcí o něm můžeme říci hned:

- Zřejmě je v každém bodě prostoru.[70]
- Nevidíme ho.
- Ale můžeme indikovat, že je přítomno.[71]

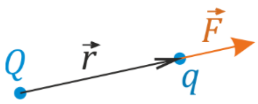
Pokus 7: **Zelektrovaná tyč nad hřbetem ruky**

Když zelektrovanou plastovou tyčí přejedeme nad hřbetem ruky, něco cítíme. S trochou nadsázky můžeme říci, že cítíme elektrické pole. (Přesněji řečeno, cítíme vliv elektrického pole na hřbet naší ruky.[72])

Elektrická intenzita

Myšlenka, že kolem nábojů je elektrické pole, je možná přitažlivá, ale nesmí zůstat na úrovni mlhavého konstatování. Děláme fyziku, a tak se musíme ptát, jak to elektrické pole popsat, jak a čím ho měřit.

Začněme tím, jak charakterizovat pole jednoho bodového náboje Q. Můžeme přitom vyjít z Coulombova zákona. Náboj Q působí na náboj q (viz obrázek) silou



$$\vec{F} = k\,\frac{Q\,q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{1.12}$$

Velikost této síly ovšem záleží na náboji q. My ale chceme charakterizovat *pole* náboje Q, to nezávisí na tom, jestli měříme sílu na náboj q, 2 q, 10 q apod. Nabízí se tedy možnost vydělit (1.12) hodnotou q a zavést novou veličinu

$$\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q} = k\,\frac{Q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right). \tag{1.13}$$

[66] Připomeňme, že pořád popisujeme vzájemné působení nábojů ve vakuu.

[67] Někdy se pro to používá termín „působení přímo do dálky“.

[68] Je to vlastně „šílená myšlenka“… Ale uvidíme, že je šíleně dobrá, přínosná a užitečná.
(Takovýchto „šílených myšlenek“ potkáme při našem seznamování s elektřinou a magnetismem víc.)

[69] S touto myšlenkou přišel Michael Faraday.

[70] Ovšem pozor: V některých bodech nebo oblastech může být intenzita pole nulová.

[71] Tím, jak působí na nějaké náboje.

[72] Fakticky jde samozřejmě o to, že nabitá tyč přitahuje chloupky na hřbetu ruky, podobně jako přitahovala papírky či kousky nitě. A právě jejich pohyb cítíme.

Této veličině říkáme **intenzita elektrického pole**, nebo krátce **elektrická intenzita**.[73]

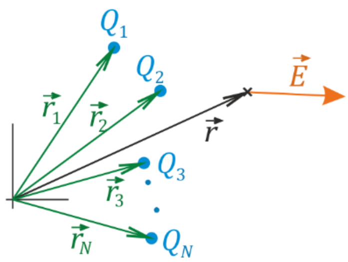
Analogicky definujeme elektrickou intenzitu i v obecném případě[74]. Chceme-li zjistit, jaká je intenzita elektrického pole v daném místě, dáme tam náboj q a změříme sílu $\vec{F}$ na něj působící. Elektrická intenzita je

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}\ .} \tag{1.14}$$

? Můžeme tedy říci, že „elektrická intenzita je síla působící na náboj 1 coulomb"?

Raději ne. Už víme, že 1 C je (v elektrostatice) nesmírně velký náboj. Jednak bychom ho těžko realizovali, a i kdyby to nějak šlo, působil by na okolní náboje tak obrovskými silami, že by nejspíš úplně změnil celou situaci.[75] Naopak musíme vzít náboj q co nejmenší. Chceme jím jen testovat, jaké je v nějakém místě elektrické pole – někdy se proto pro něj užívá termín ***testovací náboj***.[76]

Elektrické pole buzené více náboji



Elektrickou intenzitu pole buzeného několika bodovými náboji Q_1 až Q_N lehce určíme ze síly, kterou tyto náboje působí na náboj q, viz (1.6):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|} \tag{1.15}$$

Podobně jako pro sílu, platí zde **princip superpozice**: Celková intenzita je dána součtem intenzit od jednotlivých nábojů.[77]

Výpočet můžeme zobecnit a počítat pole nabitých křivek, ploch i objemově rozloženého náboje. Rozložení náboje v tomto případě charakterizujeme **hustotou náboje**[78]:

- Rozložení náboje na křivkách udává **délková hustota náboje**. Budeme ji označovat η.
  Náboj malého kousku křivky o délce Δl je $\Delta Q = \eta\ \Delta l$.
- Rozložení náboje na plochách charakterizuje **plošná hustota náboje**. Tu budeme označovat σ.
  Náboj malého kousku plochy o velikosti (=plošném obsahu) ΔS je $\Delta Q = \sigma\ \Delta S$.
- Rozložení náboje v prostoru popisuje **(objemová) hustota náboje**, označovaná ρ.
  Náboj malého kousku látky o objemu ΔV je $\Delta Q = \rho\ \Delta V$.

---

[73] Takže veličina *elektrická intenzita* charakterizuje fyzikální objekt *elektrické pole*. Rozlišovat objekt (to, co existuje v přírodě) a veličinu (tedy to, co jsme si zavedli ve fyzice) je fajn, neplete se nám to dohromady.
V angličtině je to horší; tam výraz *electric field* označuje jak elektrické pole, tak elektrickou intenzitu. Pokud budete dohledávat informace z anglických zdrojů, dejte si pozor, co je kde výrazem „electric field" míněno.
Ještě poznámka k jednotce intenzity: Ze vztahu (1.14) vychází N/C, běžně se ale užívá V/m – to poznáme v příští kapitole. Jde o tutéž jednotku, jen jinak vyjádřenou; po převodu na základní jednotky se lze přesvědčit, že N/C = V/m.

[74] Tedy pole „od mnoha nábojů" – abychom to nemuseli říkat takto kostrbatě, používá se formulace ***pole buzené náboji***.

[75] Některé náboje by přitáhl, jiné odpudil, mohl by vytrhávat náboje z blízkých materiálů… radši ani nemyslet.

[76] Aby testovací náboj nic neovlivňoval, bylo by ideální zmenšovat jeho velikost limitně k nule. Ale samozřejmě nemůžeme q zmenšit pod velikost elementárního náboje.

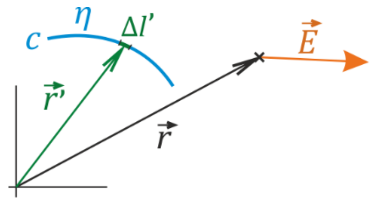
[77] Ono není divu, když princip superpozice platil pro sílu a intenzitu dostaneme ze síly dělením nábojem q.

[78] Je to podobné, jako když jsme v mechanice počítali hustotu hmotnosti, případně třeba délkovou hustoty hmotnosti, když šlo o tyč. I zde hustotu bereme jako spojitou veličinu.
Poznamenejme, že hustota náboje je obecně funkcí místa.

Pole nabitých křivek, ploch a objemového rozložení náboje[79]

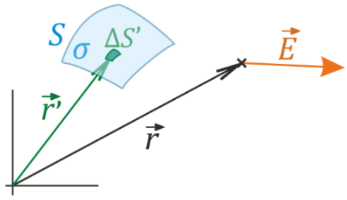
Ve všech následujících vztazích a výpočtech budeme polohovým vektorem $\vec{r}$ označovat místo, v němž určujeme intenzitu elektrického pole $\vec{E}$, vektor $\vec{r}\,'$ bude označovat místo na křivce, ploše či v objemu, kde jsou náboje budící pole.[80]

Pole nabité křivky



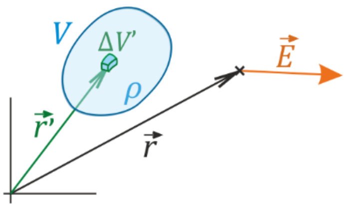
$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_C \frac{\eta(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dl' \tag{1.16}$$

Pole nabité plochy



$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dS' \tag{1.17}$$

Pole prostorového rozložení náboje



$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{|\vec{r}-\vec{r}\,'|}\,dV' \tag{1.18}$$

Vidíme, že struktura všech vztahů je stejná a fakticky kopíruje strukturu vztahu (1.15) pro pole soustavy bodových nábojů. Je to proto, že ve všech případech sčítáme příspěvky k intenzitě od „kousků náboje" na různých místech.

Pro úplnost zde napíšeme ještě vztahy pro celkový náboj křivky, plochy a objemu, byť je asi zcela jasné, jak vypadají:

$$Q_{\text{křivky}} = \int_C \eta(\vec{r}\,')\,dl'\,, \quad Q_{\text{plochy}} = \int_C \sigma(\vec{r}\,')\,dS'\,, \quad Q_{\text{objemu}} = \int_C \rho(\vec{r}\,')\,dV' \tag{1.19}$$

Není snad nutno připomínat, že reálně v přírodě neexistují nekonečně tenké nabité křivky a plochy. Výše uvedené vztahy se však hodí pro výpočet pole buzeného třeba tenkými nabitými dráty[81] nebo nabitými fóliemi. Pokud tedy dále budeme mluvit třeba o poli nabité úsečky, přímky, desky nebo roviny, jsme si vědomi, že jde o modely reálných existujících objektů, a že tyto modely umožňují s rozumnou přesností spočítat elektrické pole buzené skutečnými nabitými objekty.[82]

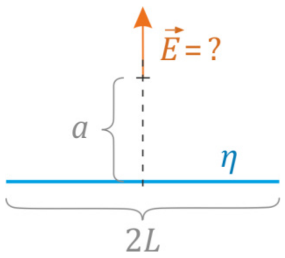
[79] Přesněji bychom měli říkat „elektrické pole buzené nabitými křivkami…"

[80] To znamená, že koncový bod vektoru $\vec{r}\,'$ probíhá danou křivku, plochu či objem. Čárkou budeme označovat i příslušné diferenciály v integrálech, budeme tedy psát dl', dS' a dV'. Křivku označujeme c, plochu S, objem V.

[81] Ale i tenkými věcmi z izolantů; konec konců, nejsme-li příliš blízko k povrchu, tak třeba i k výpočtu pole nabitého plastového brčka…

[82] Možná byste chtěli namítnout, že přímka není modelem ničeho reálného, protože v přírodě nemáme nekonečně dlouhé věci. Ovšem pole poblíž dlouhé tyče (ne moc blízko jejích konců) může být docela dobře popsáno vztahem pro pole nabité přímky. Za chvilku to uvidíme na příkladu.

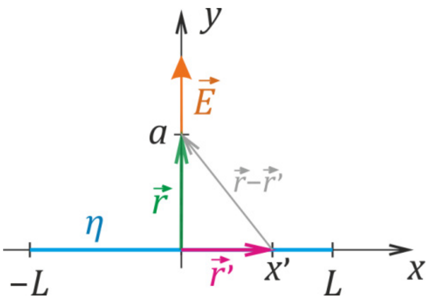
Příklad: pole na ose nabité úsečky



Mějme homogenně nabitou úsečku, délková hustota náboje je η., délka úsečky je $2L$.[83] Zajímá nás, jaká je elektrická intenzita $\vec{E}$ na ose úsečky ve vzdálenosti a, viz obrázek.

Ze symetrie je zřejmé, že elektrická intenzita má směr osy úsečky[84], takže stačí určit její velikost.

Pro výpočet si vhodně zvolíme soustavu souřadnic. Například tak, jak ukazuje následující obrázek: počátek ve středu úsečky, osu x ve směru úsečky, osu y ve směru k bodu, kde chceme určit intenzitu.[85]



Obrázek ukazuje i vektor $\vec{r}$, v jehož koncovém bodě intenzitu určujeme, a vektor $\vec{r}'$, jehož koncový bod určuje místo na nabité úsečce. (Při integraci tento bod probíhá celou úsečku.) Daný bod je určen souřadnicí x'.

Intenzitu pole nabité úsečky určuje vztah (1.16), tedy

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_C \frac{\eta(\vec{r}')}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|}\,dl' \,.$$

Při výpočtu je vhodné začít tím, že si napíšeme (ve složkách) vektory $\vec{r}$ a $\vec{r}'$, jejich rozdíl a jeho absolutní hodnotu[86]:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= (0,\, a,\, 0)\\ \vec{r}' &= (x',\, 0,\, 0)\\ \vec{r}-\vec{r}' &= (-x',\, a,\, 0)\\ \left|\vec{r}-\vec{r}'\right| &= \sqrt{x'^2+a^2}\end{aligned} \tag{1.20}$$

Proměnnou, přes kterou budeme integrovat, je x'.[87] Počítat budeme jen y-ovou složku intenzity. Pro ni z (1.16) po dosazení (1.20) a zadání mezí dostaneme

$$E_y(\vec{r}) = k\int_{-L}^{L}\frac{\eta}{x'^2+a^2}\frac{a}{\sqrt{x'^2+a^2}}\,dx' = k\eta a\int_{-L}^{L}\frac{1}{\left(x'^2+a^2\right)^{3/2}}\,dx' \tag{1.21}$$

A teď už stačí spočítat obyčejný integrál…

---

[83] Protože jde o úsečku homogenně nabitou, je η = konst. (Jak už jsme uvedli výše, reálně může jít o homogenně nabitou tenkou tyčinku.)

[84] Neexistuje žádný důvod, proč by se směr intenzity měl naklánět směrem k jednomu nebo druhému konci úsečky nebo „vyklánět“ z roviny, ve které je situace na obrázku nakreslena.
Orientace elektrické intenzity na obrázku odpovídá kladně nabité úsečce, η>0, pro záporně nabitou úsečku (např. plastové brčko zelektrované třením kapesníkem) by byla opačná.

[85] Obrázek tedy ukazuje situaci v rovině z=0. (Rozmyslete si, že to je „bez újmy na obecnosti“.)

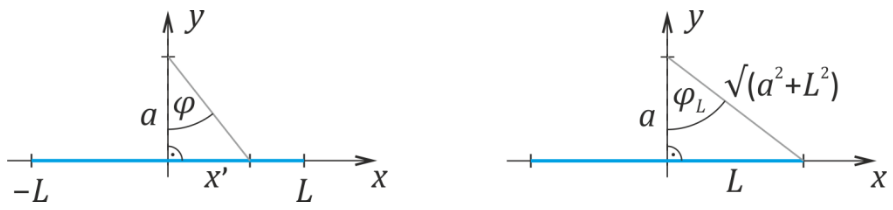
[86] Tedy to, co se vyskytuje v integrálu.

[87] Místo dl' tedy budeme psát dx'.
Pozn.: Proměnnou x bychom zde i ve vztazích (1.20) nemuseli psát s čárkou. (Když si výpočet budete dělat sami, klidně čárku vynechte.) Ale až budete počítat intenzitu v obecném bodě $\vec{r}$ je pak přirozené psát $\vec{r}=(x,y,z)$ a pak je samozřejmě potřeba rozlišovat souřadnice bodu, kde intenzitu počítáme a bodu, s nímž „probíháme“ úsečkou nebo jinou oblastí, kde jsou rozloženy náboje.

Využijeme substituce $x' = a \cdot \mathrm{tg}\varphi$. Je totiž $x'^2 + a^2 = a^2 \cdot \left(\mathrm{tg}^2\varphi + 1\right) = \dfrac{a^2}{\cos^2\varphi}$ a $dx' = \dfrac{a}{\cos^2\varphi} d\varphi$ [88]. Je tedy

$$\int_{-L}^{L} \frac{1}{\left(x'^2 + a^2\right)^{3/2}} dx' = \int_{\varphi_{-L}}^{\varphi_L} \frac{a \dfrac{1}{\cos^2\varphi}}{a^3 \dfrac{1}{\cos^3\varphi}} d\varphi = \frac{1}{a^2} \int_{\varphi_{-L}}^{\varphi_L} \cos\varphi \, d\varphi = \frac{1}{a^2} \left[\sin\varphi\right]_{\varphi_{-L}}^{\varphi_L} = \frac{1}{a^2}\left(\sin\varphi_L - \sin\varphi_{-L}\right) . \qquad (1.22)$$

Hodnoty φ_L a φ_{-L} odpovídají krajním bodům úsečky, tedy hodnotám x' rovným L a $-L$. Hodnoty sinů těchto úhlů určíme buď výpočtem[89], nebo jednodušeji a názorněji z geometrie (tedy z obrázku):



Názorně vidíme význam úhlu φ, zavedeného při substituci, a také to, že $\sin\varphi_L = L\big/\sqrt{L^2 + a^2}$. Je též zřejmé, že $\varphi_{-L} = -\varphi_L$. Integrál (1.22) je tedy roven $\left(1/a^2\right) 2\sin\varphi_L = \left(1/a^2\right) 2L\big/\sqrt{L^2 + a^2}$ a po dosazení do (1.21) dostáváme výsledek

$$E_y(\vec{r}) = \frac{2k\eta}{a} \frac{L}{\sqrt{a^2 + L^2}} . \qquad (1.23)$$

Je zajímavé podívat se na dva extrémní případy:

a) Velmi krátká úsečka, $L \ll a$. Pak z (1.23) plyne $E_y \approx k\dfrac{\eta \cdot 2L}{a^2}$.[90] Přitom $\eta \cdot 2L = Q$ je celkový náboj úsečky. Takže elektrická intenzita je $E_y \approx k\dfrac{Q}{r^2}$. Dostali jsme prakticky vztah pro bodový náboj[91]

b) Velmi dlouhá úsečka ($L \gg a$). Z (1.23) je $E_y \approx 2k\dfrac{\eta}{a}$. V limitě $L \to \infty$, tedy **pro nabitou přímku**, je přesně

$$E_y = 2k\frac{\eta}{a} . \qquad (1.24)$$ [92]

Vidíme, že intenzita pole nabité přímky klesá se vzdáleností a jako $1/a$, tedy s *první* mocninou.

---

[88] Protože $\mathrm{tg}^2\varphi + 1 = \dfrac{\sin^2\varphi}{\cos^2\varphi} + 1 = \dfrac{\sin^2\varphi + \cos^2\varphi}{\cos^2\varphi} = \dfrac{1}{\cos^2\varphi}$ a $dx = \dfrac{dx}{d\varphi} d\varphi = a\dfrac{d(\mathrm{tg}\varphi)}{d\varphi} d\varphi = a\dfrac{1}{\cos^2\varphi} d\varphi$.

[89] Je $a\,\mathrm{tg}\varphi_L = L \;\Rightarrow\; \mathrm{tg}\varphi_L = L/a$. Platí $\sin\varphi = \mathrm{tg}\varphi\big/\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2\varphi}$. Takže $\sin\varphi_L = L\big/\sqrt{L^2 + a^2}$.
Podobně pro φ_{-L}; vyjde $\sin\varphi_{-L} = -\sin\varphi_L$.

[90] Už zde nevyznačujeme, ve kterém bodě tato intenzita je.

[91] A není to překvapivé. Krátká úsečka je „skoro bodovým nábojem“, takže její pole se ve větší vzdálenosti prakticky rovná poli bodového náboje. (Přesně by se rovnalo v limitě $L \to 0$, ovšem s tím, že náboj Q je nenulový.)

[92] Z (1.23) přitom můžeme zjistit, jak přesně (resp. s jakou chybou) lze pole nabité úsečky aproximovat polem nabité přímky.

Příklad: pole na ose dipólu

Podívejme se ještě na jeden příklad. Tentokrát půjde o pole buzené dvojicí nábojů stejné velikosti, ale opačného znaménka. Takové dvojici nábojů říkáme **elektrický dipól**.

Náboje budou $+Q$ a $-Q$, jejich vzdálenost je d, viz obrázek. Spočteme pole na jejich spojnici, tedy na ose dipólu.[93]

Počátek soustavy souřadnic umístíme do středu dipólu, osu x orientujeme ve směru osy dipólu. Intenzitu spočteme v bodě o souřadnici x. (Bereme $x>d/2$.) Ze symetrie (i z toho, kam míří intenzita od bodových nábojů) je zřejmé, že intenzita má směr osy x, budeme tedy počítat složku E_x.[94]

Intenzita se skládá z příspěvků od obou nábojů:

$$E_x(x) = k\left[\frac{Q}{(x-d/2)^2}+\frac{-Q}{(x+d/2)^2}\right] = kQ\left[\frac{1}{(x-d/2)^2}-\frac{1}{(x+d/2)^2}\right]$$

Po vcelku přímočarých úpravách[95] dostaneme

$$E_x(x) = 2k\frac{Qd\,x}{\left(x^2-d^2/4\right)^2} \ ,$$

Součin náboje Q a vzdálenosti nábojů d se nazývá **elektrický dipólový moment**:[96]

$$\boxed{p = Q\,d \ .} \qquad (1.25)$$

Výsledný vztah pro elektrický dipólový moment tedy můžeme zapsat jako

$$E_x(x) = 2k\frac{p\,x}{\left(x^2-d^2/4\right)^2} \qquad (1.26)$$

Pro intenzitu daleko od dipólu, $x \gg d$, je výsledek ještě jednodušší[97]:

$$E_x(x) \approx 2k\frac{p}{x^3} \ . \qquad (1.27)$$

Vlevo od dipólu (daleko, pro $x \ll -d/2$) vyjde $2kp/|x|^3$, takže obecně je na ose $E_x \approx 2kp/r^3$, kde r je vzdálenost od středu dipólu.

Přesně vztah $E_x = 2k\dfrac{p}{r^3}$ platí pro **elementární dipól**, tedy pro idealizovaný případ, kdy $d \to 0$ (ovšem dipólový moment p je nenulový). Jak ukazuje (1.27), pole elementárního dipólu je dobrým modelem pole skutečného dipólu (alespoň dále od něj.)

Povšimněte si, že zatímco intenzita elektrického pole bodového náboje klesá s druhou mocninou vzdálenosti, intenzita pole dipólu klesá se třetí mocninou. Uvidíme, že toto platí i mimo osu dipólu.

---

[93] Půjde to jednoduše, bez integrálů, postupem, který můžeme označit za středoškolský. Elektrickou intenzitu můžeme podobně jednoduchým postupem počítat i v bodech mimo osu, je to ale trochu delší výpočet. Ten je pro zájemce uveden v Dodatku D.
K poli dipólu se ještě vrátíme, až půjde o potenciál, výpočet se jeho pomocí bude o něco kratší.

[94] Orientace intenzity nakreslená na obrázku (tj. $E_x>0$) platí pro $Q>0$. Rozmyslete si, že tohle můžeme tvrdit i bez výpočtu, jen na základě kvalitativní úvahy. (Nápověda: Kam směřují příspěvky k intenzitě od jednoho a druhého náboje? A který z nábojů je blíž? Čí příspěvek tedy bude výraznější?)

[95] $\dfrac{1}{(x-d/2)^2}-\dfrac{1}{(x+d/2)^2} = \dfrac{(x+d/2)^2-(x-d/2)^2}{(x-d/2)^2\cdot(x+d/2)^2} = \dfrac{x^2+xd+d^2/4-\left(x^2-xd+d^2/4\right)}{\left((x-d/2)\cdot(x+d/2)\right)^2} = \dfrac{2xd}{\left(x^2-d^2/4\right)^2}$

[96] Elektrický dipólový moment má například molekula, která je polární, třeba molekula vody.

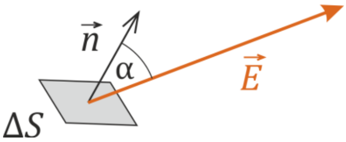
[97] V závorce ve jmenovateli zanedbáme $d^2/4$ oproti x^2.

1.4 Gaussova věta elektrostatiky

Teď se seznámíme s velice užitečným „nástrojem“, který nám jednak umožní spočítat v některých případech elektrickou intenzitu výrazně jednodušeji než pomocí integrálů, ale hlavně umožní hlouběji pochopit vlastnosti elektrického pole. Nejprve ale zavedeme důležitou veličinu:

Tok elektrické intenzity plochou

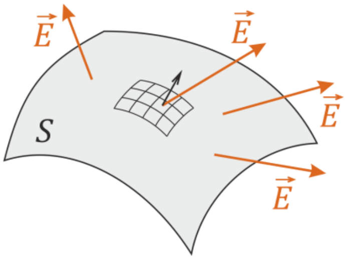
V mechanice jste se seznámili s tokem tekutiny plochou.[98] Takže víme, že tok tekutiny o hustotě ρ a rychlosti $\vec{v}$ malou plochou obsahu ΔS s normálovým vektorem $\vec{n}$ je $\rho\vec{v}\cdot\vec{n}\Delta S$. Analogicky se definuje **tok elektrické intenzity** $\vec{E}$ plochou ΔS, jejíž normálový vektor je $\vec{n}$ [99], viz obrázek, jako



$$\boxed{\Delta\phi = E\,\Delta S\cos\alpha = \vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S} \tag{1.28}$$

Na první pohled se to zdá zvláštní. Plochou ΔS teď přece reálně žádná tekutina ani nic podobného neteče, jen je v bodech plochy nenulová elektrická intenzita. Přesto se pojem „tok elektrické intenzity“ používá a jak uvidíme dále, je to velice užitečný koncept.[100]

Zatím jsme zavedli tok elektrické intenzity malou ploškou. **Celkový tok plochou** S dostaneme „posčítáním kousků toku“ tedy integrálem



$$\boxed{\phi = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \equiv \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S}\ .\ ^{101}} \tag{1.29}$$

V každém bodě plochy může mít $\vec{E}$ různou velikost a směr, jak to ukazuje obrázek.[102]

Poznamenejme ještě jednu věc:

Plochy, jimiž uvažujeme tok intenzity, jsou ***myšlené***, nemusí jít třeba o povrch nějakého tělesa. Tak tomu bude i v následujících úvahách.

V dalším odvozování půjde o tok elektrické intenzity ***uzavřenou plochou***, tedy plochou, která je hranicí nějakého objemu. Začneme jednoduchým příkladem.

[98] Bylo to v kapitole o hydrodynamice. Nějakou plochou, např. průřezem trubice, přitom protékala třeba voda nebo vzduch.

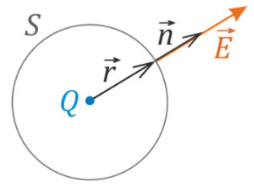
[99] Jistě netřeba připomínat, že jde o jednotkový vektor, $|\vec{n}| = 1$.

[100] Podobně se v oblasti magnetismu zavádí a užívá *magnetický indukční tok*, s tím už jste se asi na střední škole potkali. (A jeho zavedení také neznamená, že by magnetické pole někam teklo.)

[101] °Nemusíme asi připomínat, že $d\vec{S} = \vec{n}dS$, což je, nepřesně ale názorně řečeno, „infinitesimální kousek plochy včetně směru“.

[102] Vztah (1.29) bychom tedy mohli přesněji psát $\phi = \int_S \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{S}$, ale i když závislost intenzity na poloze explicite nevyznačujeme (tedy v zápisu (1.29)), chápeme, že intenzita na poloze obecně závisí.

Jednoduchý příklad: tok sférou



Spočtěme **tok elektrické intenzity sférou** o poloměru r; elektrické pole je buzeno nábojem Q ve středu sféry.

Elektrická intenzita v místě vyznačeném na obrázku je $\vec{E}(\vec{r}) = k\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$.

Normálový vektor ke sféře má radiální směr, $\vec{n} = \dfrac{\vec{r}}{r}$. Tok $\vec{E}$ plochou S je tedy

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \oint_S k\frac{Q}{r^2}\underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\cdot\frac{\vec{r}}{r}\right)}_{1}dS = k\frac{Q}{r^2}\oint_S 1\,dS = k\frac{Q}{r^2}4\pi r^2 = 4\pi kQ \ . \tag{1.30}$$

Součin $4\pi k$, respektive jeho převrácená hodnota, má zvláštní označení a pojmenování:

$$4\pi k = \frac{1}{\varepsilon_0}\ , \quad \text{odtud: } \boxed{k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}}. \tag{1.31}$$

Konstanta ε_0 se nazývá ***permitivita vakua*** a má hodnotu

$$\varepsilon_0 \doteq 8{,}85\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\,m^2)}\ .\ ^{103} \tag{1.32}$$

Poznamenejme, že s využitím označení (1.31) můžeme Coulombův zákon psát ve známém tvaru

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 Q_2}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\ ,\ ^{104}} \tag{1.33}$$

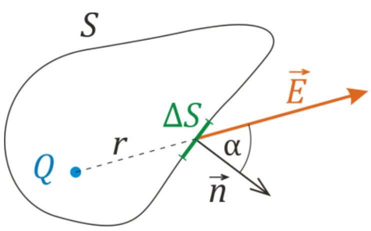
podobně bude výraz pro intenzitu pole buzeného nábojem Q: $\boxed{\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}}$.

V daném označení je tok sférou (tedy výsledek (1.31)):

$$\phi = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \frac{Q}{\varepsilon_0}\ . \tag{1.34}$$

Tok sférou, když je pole buzeno nábojem v jejím středu je ale hodně speciální případ. Podívejme se, jak je to obecně.

Tok elektrické intenzity obecnou uzavřenou plochou – a vlastní Gaussova věta



Mějme obecnou uzavřenou plochu S [105]; v objemu, který uzavírá, je na nějakém místě náboj Q. Příklad takové situace ukazuje obrázek. Na něm je vyznačen i malý kousek plochy ΔS, normálový vektor k tomuto kousku plochy a intenzita $\vec{E}$ v příslušném bodě.[106]

Tok intenzity daným kouskem plochy je (viz (1.28))

$$\Delta\phi = \vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S = E\,\Delta S\cos\alpha\ . \tag{1.35}$$

Ovšem $\Delta S\cos\alpha$ má rozumný geometrický význam. Stačí, když se na situaci podíváme v detailu.

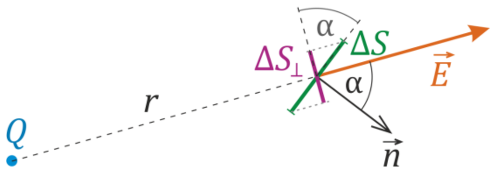
---

[103] Přesněji (jak si lze vygooglit): $\varepsilon_0 \doteq 8{,}854\,187\,813\cdot 10^{-12}\ \mathrm{C^2/(N\,m^2)}$. Jednotkou, která se přitom uvádí, je F/m. Proč tomu tak je, bude jasné, až se seznámíme s kapacitou kondenzátoru. Platí přitom $\mathrm{C^2/(Nm^2)}$ = F/m.

[104] Odtud můžeme také jednoduše odvodit jednotku permitivity vakua.

[105] Takovou, abychom přes ni mohli integrovat, tedy hladkou, resp. alespoň po částech hladkou.

[106] Kousek plochy považujeme za velmi malý (v limitě by byl infinitesimální), takže ho můžeme brát jako prakticky rovinný a elektrickou intenzitu na celém daném kousku za konstantní.
Obrázek je zde kreslen jen ve „2D“, tedy řekněme v řezu. Z kousku plochy ΔS tedy na obrázku vidíme jen jeden rozměr, druhý by byl kolmý na rovinu obrázku.



Z obrázku je vidět, že

$$\Delta S_\perp = \Delta S \cos \alpha \tag{1.36}$$

je průmět plochy ΔS do roviny kolmé ke směru elektrické intenzity, což je také směr spojnice s bodem, kde je náboj Q.

Tok intenzity kouskem plochy ΔS je tedy[107]

$$\Delta \phi = E\, \Delta S_\perp \ . \tag{1.37}$$

Poznamenejme, že symbol E zde (i výše v (1.35) a dále v (1.38)) znamená *velikost elektrické intenzity případně až na znaménko*. Pro $Q < 0$ totiž míří intenzita opačně, než je nakresleno na obrázku, takže tok $\Delta\phi$ je záporný.[108]

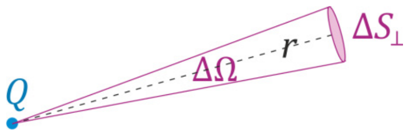
Elektrická intenzita v bodech plošky, tedy ve vzdálenosti r od náboje, je (viz výše po (1.33)):

$$E = \frac{1}{4\pi \varepsilon_0} \frac{Q}{r^2} \ . \tag{1.38}$$

Tok intenzity uvažovanou ploškou tedy je

$$\Delta \phi = E\, \Delta S_\perp = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{\Delta S_\perp}{r^2} \ . \tag{1.39}$$

Velikost plošky $\Delta S_\perp$ můžeme určit ze vzdálenosti r od náboje a z prostorového úhlu $\Delta\Omega$, pod nímž tuto plošku z bodu, kde je náboj, vidíme, viz obrázek. Platí



$$\Delta S_\perp = r^2 \Delta\Omega \ .^{109} \tag{1.40}$$

Po dosazení (1.40) do (1.39) vidíme, že tok elektrické intenzity uvažovanou ploškou je

$$\Delta \phi = \frac{Q}{4\pi \varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \cdot r^2 \Delta\Omega = \frac{Q}{\varepsilon_0} \frac{\Delta\Omega}{4\pi} \ , \tag{1.41}$$

to znamená, že je dán ***nábojem*** a ***prostorovým úhlem***, pod nímž vidíme plošku $\Delta \vec{S}$.[110]

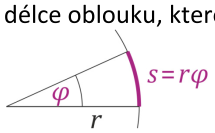
A teď se podíváme, jaký je tok celou uzavřenou plochou. V tomto případě musíme sečíst příspěvky toku přes všechny kousky této plochy, tedy všechny jim příslušné prostorové úhly, jak to naznačuje obrázek na další straně.[111]

---

[107] Jak dostaneme dosazením (1.36) do (1.35).

[108] Pro Q<0 je tedy $E = -|\vec{E}|$. Pardon, že se zde odchylujeme od obecného pravidla, že symbol bez šipky nahoře znamená velikost vektoru. Přesně vzato, bychom zde měli psát $E_{\text{ve směru od náboje}}$.

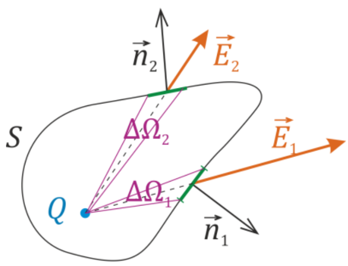
[109] Prostorový úhel je přitom ve steradiánech. Pokud jste pozapomněli, co je prostorový úhel, tak si připomeňte, jak je to s „normálním“ úhlem. Jeho hodnota v radiánech je rovna délce oblouku, kterou úhel vytkne na jednotkové kružnici. Oblouk na kružnici o poloměru r je r-krát delší:



S prostorovým úhlem je to podobné, jen tentokrát je hodnota prostorového úhlu ve *steradiánech* rovna velikosti plochy vytknuté na jednotkové *sféře*. Plocha na sféře o poloměru r je samozřejmě r^2-krát větší.

[110] Uvědomte si, že plošku $\Delta S_\perp$ (kolmou ke směru našeho pohledu od náboje) a plošku $\Delta \vec{S}$ (natočenou, proto ji zde píšeme se šipkou) vidíme pod stejným prostorovým úhlem. (Obě plošky vidíme „v zákrytu“.)

[111] Nemůžeme na něm ovšem vyznačit všechny kousky plochy a k nim příslušné veličiny, to bychom ho celý začmárali, tak jsou tam vyznačeny kousky jen dva.



Z (1.41) je vidět, že faktor $Q/(4\pi\varepsilon_0)$ je pro všechny příspěvky společný, sčítáme tady vlastně jen prostorové úhly $\Delta\Omega$.

Sečtením všech prostorových úhlů $\Delta\Omega$, pod nimiž vidíme kousky plochy, dostaneme celkový prostorový úhel, pod nímž vidíme celou plochu. Ale když jsme uvnitř uzavřené plochy[112], vidíme plochu kolem sebe ve všech směrech. Celkový prostorový úhel je tedy *plný prostorový úhel*, jeho hodnota je 4π steradiánů.

To znamená, že celkový tok el. intenzity je

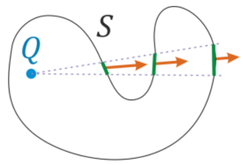
$$\phi = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi}\Omega_{\text{plný}} = \frac{Q}{\varepsilon_0}\frac{1}{4\pi}\cdot 4\pi = \frac{Q}{\varepsilon_0} \ . \tag{1.42}$$

Takže můžeme uzavřít: Je-li náboj Q v objemu ohraničeném plochou S, je celkový tok elektrické intenzity (způsobené daným nábojem) danou plochou roven

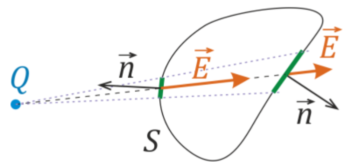
$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \ . \tag{1.43}$$

Důležité poznámky:

- Tento výsledek platí, i pokud je plocha S všelijak „pokroucená“. V příkladu na obrázku jde (pro Q>0) nejdřív kouskem plochy tok ven z objemu, pak zase dovnitř[113], a pak zase ven, celkově jde tedy o jediný příspěvek $(Q/\varepsilon_0)\,\Delta\Omega$.



- **Náboj, který je vně, k celkovému toku nepřispívá**!
  Jak ukazuje obrázek, tok elektrické intenzity od náboje venku plochou na jedné straně vtéká a na druhé straně vytéká, takže příspěvek k celkovému toku je nulový.



- **Když je uvnitř** oblasti uzavřené plochou **více nábojů, jejich příspěvky se sečtou.**[114]

Celkově tedy dostáváme výsledek

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\varepsilon_0} \ ,} \tag{1.44}$$

což už je kýžená **Gaussova věta elektrostatiky**. $Q_{\text{uvnitř}}$ je celkový náboj v objemu ohraničeném plochou S. Může přitom jít o bodové náboje, o nabité křivky, plochy, i o náboje rozložené v prostoru.[115]

Dodejme ještě, že vztah (1.44) se přesněji nazývá **Gaussova věta elektrostatiky v integrálním tvaru.**[116]

---

[112] Tedy někde v části prostoru, který plocha ohraničuje.

[113] Tyhle dva příspěvky se odečtou, protože příslušné prostorové úhly jsou stejné.

[114] Je to díky principu superpozice. Sčítáme intenzity od jednotlivých nábojů, a tedy i jejich příspěvky k toku ϕ. Příspěvek od i-tého náboje Q_i k celkovému toku je Q_i/ε_0.

[115] Výše jsme Gaussovu větu odvodili pro bodové náboje, ale stejnou úvahu můžeme zopakovat i pro jiná rozložení náboje, prostě bychom třeba náboje na kouscích křivek vzali jako jednotlivé náboje přispívající k celkovému toku. (Navíc víme, že reálně i náboje rozložené na křivkách, plochách či v prostoru jsou složeny z jednotlivých nábojů elementárních částic, v běžných látkách tedy protonů a elektronů.)

[116] Existuje ještě Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru, k té dojdeme za chvíli.

Elektrická indukce (a jiný zápis Gaussovy věty)

Při popisu elektromagnetických jevů se kromě elektrické intenzity hodí veličina zvaná **elektrická indukce**; označuje se $\vec{D}$. Ve vakuu je jednoduchým násobkem elektrické intenzity:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}\,.^{117}} \tag{1.45}$$

Zatím si s její pomocí jen přepíšeme Gaussovu větu elektrostatiky do ekvivalentního tvaru[118]:

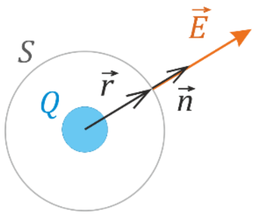
$$\boxed{\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q_{\text{uvnitř}}} \tag{1.46}$$

Využití Gaussovy věty: pole nabité koule, přímky a roviny

Gaussovu větu elektrostatiky můžeme samozřejmě využít k určení celkového náboje v prostoru uvnitř uzavřené plochy ze znalosti intenzity na této ploše – jde o přímočaré využití vztahu (1.44).

V některých případech ale můžeme naopak **ze znalosti náboje určit pole**. Jde to, když daná situace má vhodnou symetrii. Ukážeme si, to na příkladech, když symetrie bude sférická, válcová a rovinná.

a) Pole vně nabité koule nebo sféry (v nichž je náboj rozložen sféricky symetricky)



Protože náboj je rozložen sféricky symetricky[119] bude mít elektrická intenzita stejnou symetrii. Musí být tedy dána výrazem

$$\vec{E}(\vec{r}) = E(r)\frac{\vec{r}}{r}\,. \tag{1.47}$$

$\frac{\vec{r}}{r}$ je jednotkový vektor v radiálním směru. Gaussova plocha S je myšlená plocha a můžeme si ji zvolit jakkoli. My si ji zde volíme jako sféru poloměru r se středem v počátku souřadnic (tedy ve středu nabité koule). Normálový vektor k dané Gaussově ploše je $\vec{n} = \frac{\vec{r}}{r}$.[120]

Zapíšeme Gaussovu větu pro plochu S a výraz pro tok el. intenzity upravíme:

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_S \vec{E} \cdot \vec{n}\, dS = \oint_S E(r) \underbrace{\frac{\vec{r}}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}}_{1} dS = E(r) \oint_S 1\, dS = E(r)\, 4\pi r^2 \tag{1.48}$$

Odtud $E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}$ a po dosazení do (1.47) pak

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r}\,, \tag{1.49}$$

což je stejný výraz jako pro pole bodového náboje.[121]

---

[117] Obecně to může být o něco složitější. Například v anizotropním dielektriku mají vektory $\vec{E}$ a $\vec{D}$ obecně dokonce různý směr.

[118] Prostě vynásobíme (1.44) ε_0. Tohle zatím vypadá jako čistě formální úprava, ale elektrická indukce se opravdu bude hodit a nakonec ji budeme užívat i při zápisu Maxwellových rovnic.

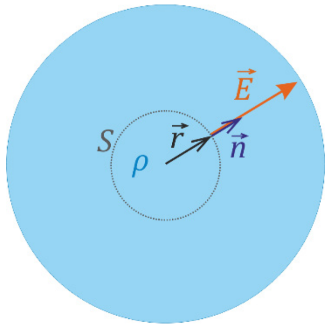
[119] Viz obrázek; počátek systému souřadnic jsme umístili do středu nabité koule (resp. sféry), z tohoto počátku tedy také vychází vektor $\vec{r}$.

[120] Samozřejmě míří **ven** z dané uzavřené plochy. (Tak je tomu vždy, tok elektrické intenzity bereme kladný, když jde ven z objemu uzavřeného plochou.)

[121] Kdybychom tento výsledek měli odvodit výpočtem intenzity pomocí integrálu (1.18), bylo by to podstatně náročnější.

Čili: elektrické pole *vně* sféricky symetricky nabité koule nebo sféry ***je stejné jako pole bodového náboje***.[122] Podívejme se teď na pole *uvnitř* nabité koule.

b) Pole uvnitř homogenně nabité koule



Stejně jako výše, je

$$\frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E(r)\oint_S dS = E(r)\,4\pi r^2 . \qquad (1.50)$$

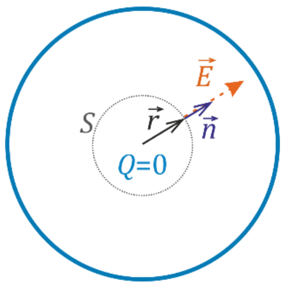
Náboj Q teď ovšem není náboj celé koule, ale jen náboj uvnitř Gaussovy plochy, ta má obecný poloměr r.[123] Hustota náboje je ρ, takže

$$Q = \rho V = \rho \tfrac{4}{3}\pi r^3 . \qquad (1.51)$$

Po dosazení do (1.50) a jednoduché úpravě dostaneme

$$E(r) = \frac{1}{3\varepsilon_0}\rho r . \qquad (1.52)$$

c) Pole uvnitř homogenně nabité sféry



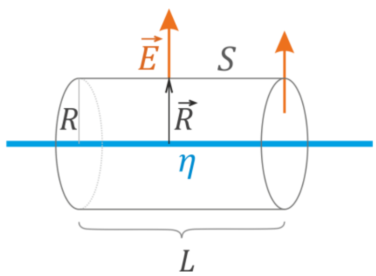
Za Gaussovu plochu opět zvolíme sféru o poloměru r. Jde o myšlenou plochu, její poloměr je menší než poloměr nabité sféry, viz obrázek.

Uvnitř Gaussovy plochy ovšem žádný náboj není, takže nyní platí

$$0 = \oint_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = E(r)\oint_S dS = E(r)\,4\pi r^2 .$$

Odtud ihned $E(r) = 0$. To znamená, že **uvnitř homogenně nabité sféry je elektrické pole nulové.**[124]

d) Pole homogenně nabité přímky



Uvažujme přímku nabitou s délkovou hustotou náboje η = konst. Situaci ukazuje obrázek.[125] Díky válcové symetrii musí elektrická intenzita mít v každém bodě směr kolmice k dané přímce. Gaussovu plochu zvolíme ve tvaru válce o délce L a poloměru R. (R je vzdálenost bodu, v němž chceme spočíst intenzitu, od dané přímky.[126])

Tok podstavami válce je nulový, protože el. intenzita je k nim tečná. Veškerý tok je tedy jen pláštěm válce.

---

[122] Náboje, který by byl v místě středu koule resp. sféry a měl by stejně velký náboj jako daná nabitá koule či sféra.
Poznámka: Když si uvědomíme, že vztahy pro elektrostatické pole a pro gravitační pole v Newtonově teorii gravitace jsou analogické, tak odtud vidíme, že gravitační pole Země (brané jako koule se sféricky symetrickým rozložením hmoty) je stejné, jako by bylo pole hmotného bodu v jejím centru. Proto můžeme Newtonův gravitační zákon, který platí pro hmotné body, využívat i pro kulová tělesa.

[123] Přičemž r<R, kde R je poloměr celé nabité koule.

[124] Opět můžeme udělat analogii s gravitačním polem: Kdyby byla uvnitř sféricky symetrické Země sféricky symetrická dutina (neřešme teď, jak by se materiál na stěně takové dutiny udržel), byl by uvnitř té dutiny beztížný stav.

[125] Jen ta přímka na něm není nakreslena nekonečně dlouhá. ☺

[126] Daný bod tedy leží na plášti válce. (Připomínáme, že Gaussova plocha je *myšlená plocha*, volíme ji tak, abychom jednoduše spočetli to, co chceme spočítat.) Délku L můžeme voli libovolnou (kladnou).

K plášti válce je $\vec{E}$ ve všech bodech kolmá, navíc má ve všech bodech pláště stejnou velikost.[127] Tok pláštěm je tedy

$$\oint_{\text{plášť}} \vec{E}\cdot d\vec{S} \;=\; E(R)\oint_{\text{plášť}} dS \;=\; E(R)\cdot 2\pi R\,L\;.^{128} \tag{1.53}$$

Náboj v části přímky uzavřené Gaussovou plochou je $Q = \eta\,L$, takže Gaussova věta dá

$$E(R)\cdot 2\pi R\,L = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\eta}{\varepsilon_0}L\;. \tag{1.54}$$

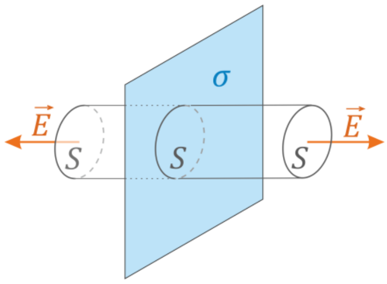
Odtud už okamžitě

$$E(R) = \frac{\eta}{2\pi\varepsilon_0 R}\;.^{129} \tag{1.55}$$

Zkontrolujte si, že tento výsledek odpovídá intenzitě (1.24), kterou jsme spočetli integrálem pro pole velmi dlouhé nabité úsečky.[130]

e) Pole homogenně nabité roviny

Mějme rovinu nabitou konstantní plošnou hustotou σ. Vzhledem k rovinné symetrii celé situace bude elektrická intenzita $\vec{E}$ kolmá na rovinu, viz obrázek.[131] Navíc je jasné, že velikost intenzity na obou stranách plochy je stejná.[132]



Gaussovu plochu tedy bude vhodné zvolit jako povrch válečku, jehož osa je kolmá na rovinu. Tok pláštěm válečku je nulový[133], takže celý tok Gaussovou plochou se rovný toku podstavami, navíc je tok oběma podstavami stejný. Když S je plocha jedné podstavy, je tedy tok Gaussovou plochou

$$\oint_{\text{podstavy}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = 2ES\;. \tag{1.56}$$

Náboj uzavřený Gaussovou plochou je $\sigma\,S$ (viz obrázek). Z Gaussovy věty tedy dostaneme

$$2ES = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \frac{\sigma S}{\varepsilon_0}$$

a odtud

$$\boxed{E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.} \tag{1.57}$$

Vidíme, že intenzita el. pole buzeného homogenně nabitou rovinou ***nezávisí na vzdálenosti***.[134]

---

[127] Díky válcové symetrii závisí velikost el. intenzity jen na vzdálenosti R od nabité přímky. (Rozmyslete si, proč nezávisí na tom, jestli se posuneme ve směru přímky.)

[128] Zde už ve výpočtu explicite nevypisujeme jednotkový vektor ve směru $\vec{E}$ a normálový vektor $\vec{n}$ k plášti válce (oba to jsou totožné vektory $\vec{R}/R$, jejich skalární součin je samozřejmě 1) – zkuste si to podrobněji napsat sami, podobně jako je tomu výše v (1.48).

[129] Připomeňme, že $E(R)$ je velikost el. intenzity *až na znaménko*: vektor intenzity je $\vec{E} = E(R)\dfrac{\vec{R}}{R}$; podle znaménka $E(R)$ (čili podle znaménka η) míří el. intenzita od přímky nebo k ní.

[130] Vidíme přitom, že výpočet pomocí Gaussovy věty je podstatně jednodušší.

[131] Pro $\sigma > 0$ míří od plochy, jak je nakresleno na obrázku, pro $\sigma < 0$ by mířila k ploše. (Pro $\sigma = 0$ by plocha nebyla nabitá, takže by žádné pole nebudila a intenzita by byla nulová. Ale takhle jednoduchý případ po vás nikdo nebude chtít řešit… ☺)

[132] Rozhodně pokud jsme ve stejných vzdálenostech od plochy. (Jak je to se závislostí na vzdálenosti, uvidíme za chvíli.)

[133] Protože intenzita je k plášti tečná.

[134] Je to dáno tím, že rovina je nekonečná. Rozmyslete si, jak to asi bude pro konečnou nabitou desku.

Souvislost Gaussovy věty a Coulombova zákona

Při odvozování Gaussovy věty se nám ve vztahu (1.41) vykrátil faktor $1/r^2$ z Coulombova zákona a r^2 ze vztahu pro velikost plošky počítané z prostorového úhlu. Právě díky tomuto vykrácení zůstal ve výsledku právě prostorový úhel a po sečtení přes celou uzavřenou plochu faktor 4π – a z toho vyšla Gaussova věta.

Vidíme, že pokud by závislost síly na vzdálenost nebyla *přesně* $1/r^2$, Gaussova věta by neplatila! Takže ověřováním Gaussovy věty (resp. jejích důsledků, jak uvidíme dále) prověřujeme i Coulombův zákon.

Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru

Gaussovu větu nemusíme vyjadřovat jen pro nějaký velký objem a jeho hranici, ale i „lokálně".[135] Pojďme si tuto lokální podobu Gaussovy věty odvodit.

Víme, že v matematice platí Gaussova věta (matematiky):

$$\oint_S \vec{a}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{a}\, dV\,. \tag{1.58}$$

Zde S je plocha ohraničující objem V; $\vec{a}$ je nějaké vektorové pole[136]. Za $\vec{a}$ teď vezmeme elektrickou intenzitu $\vec{E}$:

$$\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV\,. \tag{1.59}$$

Levá strana je podle Gaussovy věty elektrostatiky rovna Q/ε_0 . Když je náboj Q v objemu V rozložen s objemovou hustotou ρ, je $Q=\int_V \rho dV$. Gaussova věta elektrostatiky v kombinaci s (1.59) tedy dává

$$\int_V \frac{1}{\varepsilon_0}\rho dV = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_V \rho dV = \frac{Q}{\varepsilon_0} = \oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV\,.\ ^{137} \tag{1.60}$$

Dostáváme tedy $\int_V \frac{\rho}{\varepsilon_0} dV = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\, dV$. Integrály jsou přes stejný objem, takže je můžeme spojit do jednoho:

$$\int_V \left(\mathrm{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = 0\,. \tag{1.61}$$

Teď přijde podstatná úvaha: Vztah (1.61) platí pro *libovolný objem*.[138] To lze zajistit jedině tak, že výraz v závorce v integrálu je roven nule (blíže viz Dodatek E):

$$\mathrm{div}\,\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0\,. \tag{1.62}$$

[135] Ono je to velmi podobné rovnici kontinuity, jak jsme ji poznali v mechanice (konkrétně v hydrodynamice). Tu jsme také zapisovali nejen v integrálním tvaru, ale i v diferenciálním tvaru. S Gaussovou větou to bude podobně – ve skutečnosti jde matematicky o totéž.

[136] Tedy vektor definovaný v každém bodě (alespoň v objemu V a na ploše S), tj. vektorová funkce $\vec{a}=\vec{a}(\vec{r})$, ta může být libovolná, ale samozřejmě taková, aby měla potřebné derivace.

[137] Gaussova věta elektrostatiky je zde zvýrazněna barevně, napravo od ní je úprava daná (1.59).

[138] Samozřejmě takový, aby přes něj šlo integrovat, a aby šlo v předchozích vztazích integrovat přes jeho hranici; nepůjde tedy třeba o nějaký fraktál…

Platí tedy

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \,.\text{[139]} \tag{1.63}$$

A tohle už je vyjádření Gaussovy věty elektrostatiky v diferenciálním tvaru.[140]

Poznamenejme, že tento vztah platí v bodech, kde nejsou bodové náboje, nabité křivky nebo plochy.[141]

Když vztah (1.63) vynásobíme ε_0, můžeme ho zapsat v ještě jednodušším tvaru pomocí elektrické intenzity $\vec{D}$:

$$\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho \,.} \tag{1.64}$$

S tímto vztahem se potkáme ještě mnohokrát. Platí totiž nejen v elektrostatice, ale obecně – jde o jednu z **Maxwellových rovnic**.[142]

[139] Tento vztah můžete potkat také ve tvaru $\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$. Jde jen o jiný zápis operátoru divergence.

[140] Dalo by se říci, že Gaussovu větu vyjadřuje lokálně.

[141] Těmto bodům bychom se při odvozování vyhnuli.

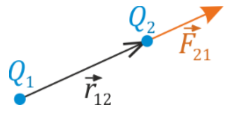
[142] To jsme se s ní potkali docela brzy, že?

Shrnutí

Coulombův zákon (ve vakuu)

$$F = k\frac{Q_1 Q_2}{r^2}, \quad k \doteq 9{\cdot}10^9\ \mathrm{Nm^2/C^2} \approx 10^{10}\ \mathrm{Nm^2/C^2}, \quad \text{vektorově:} \quad \vec{F} = k\frac{Q_1 Q_2}{r_{12}{}^2}\left(\frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}}\right)$$

$$k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}, \quad \varepsilon_0 \doteq 8{,}85\times10^{-12}\ \mathrm{C^2/(Nm^2)}$$



síla: odpudivá, přitažlivá

Síly od více nábojů se sčítají (princip superpozice).

Náboj Q, jednotka: C (coulomb) .... v elektrostatice hodně velká jednotka ... menší: μC, nC, ...

elementární náboj $e \doteq 1{,}602{\cdot}10^{-19}$ C, náboje elektronu a protonu: $q_e = -e$, $q_p = e$

síla mezi e a p: gravitační o 40 řádů menší než elektrická

Makroskopicky s nábojem pracujeme jako se spojitou veličinou.

zákon zachování náboje: Náboj nejde zničit ani vytvořit.

Elektrická intenzita $\vec{E}$ – popisuje ***elektrické pole*** v prostoru kolem nábojů; jednotka: V/m

síla na náboj q: $\vec{F} = q\vec{E}$

pole bodového náboje: $\vec{E}(\vec{r}) = k\dfrac{Q}{r^2}\dfrac{\vec{r}}{r}$, pole více nábojů: $\vec{E}(\vec{r}) = k\sum\limits_{i=1}^{N}\dfrac{Q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\dfrac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$

pole nabitých křivek, ploch a prostorově rozloženého náboje:

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\int_C \frac{\eta(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dl', \quad \vec{E}(\vec{r}) = k\int_S \frac{\sigma(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dS', \quad \vec{E}(\vec{r}) = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}dV'$$

Pole nabité roviny: $E =$ konst., přímky: $E \sim 1/r$, bod. náboje: $E \sim 1/r^2$, dipólu: $E \sim 1/r^3$

tok elektrické intenzity $\phi = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} \equiv \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS$

Gaussova věta elektrostatiky (ve vakuu)

$$\boxed{\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\varepsilon_0}}$$

... s její pomocí lze odvodit např.:

- Pole vně sféricky symetricky nabité koule či sféry = poli bodového náboje
- Pole uvnitř symetricky nabité sféry je nulové
- Pole buzené homogenně nabitou rovinou: $\vec{E}$ °je kolmá k rovině, $E = \sigma/(2\varepsilon_0)$

Elektrická indukce $\vec{D} = \varepsilon_0\vec{E}$ (ve vakuu)

Zápis Gaussovy věty pomocí el. indukce: $\boxed{\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q_{\text{uvnitř}}}$

Gaussova věta elektrostatiky v diferenciálním tvaru:

$\operatorname{div}\vec{E} = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, zápis pomocí el. indukce: $\boxed{\operatorname{div}\vec{D} = \rho}$ (to je jedna z Maxwellových rovnic)

Dodatek 1.A: Jednoduché elektrostatické pokusy

Pro úvodní pokusy s elektrostatikou se hodí plastová brčka. Zelektrujeme je třením papírovým nebo obyčejným kapesníkem.[143]

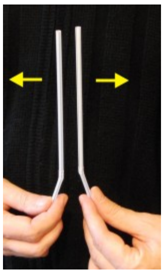
Přitahování předmětů

Zelektrované brčko přitahuje lehké předměty, například kousky nitě nebo tenké papírky. Nejjednodušší a přitom překvapivý pokus spočívá v tom, že brčko přiložíme ke stěně nebo k nějakému předmětu. Přitáhne se k němu a drží.[144]

Drží pozoruhodně dlouho, dokonce i na kovových předmětech.[145]

Technická poznámka: Když dáte brčko třeba na sklo okna vodorovně, má tendenci se „kutálet" dolů. Takže ho tam dávejte svisle nebo ho v kloubu trochu ohněte, aby se kutálet nemohlo.

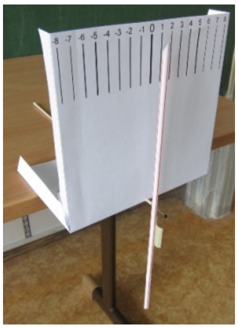
Odpuzování stejně nabitých předmětů



Dvě třením nabitá brčka vezměte za jejich konce do prstů, jak to ukazuje fotografie. V prstech jasně cítíte sílu, kterou se brčka odpuzují. Síla je větší, když jsou brčka blízko sebe.[146]

Poznamenejme, že důvod, proč při tomto uspořádání pokusu cítíme i slabou sílu, je mechanický: Brčka držíme na malém kousku, dlouhá část brček působí jako delší ramena páky, síla působící na naše prsty na kratším rameni je větší.

Demonstrace Coulombova zákona



Dlouhé plastové brčko, které se může otáčet kolem vodorovné osy tvořené špendlíkem, může sloužit jako pomůcka k demonstraci Coulombova zákona.[147]

Horní konec brčka zastřižený do tvaru šipky ukazuje na stupnici vytištěnou na papíře. Dolní konec brčka nabijeme třením kapesníkem. (Jen krátký kousek, aby nešlo o dlouhou nabitou tyčku, ale spíše o něco, co se blíží bodovému náboji.) Budeme ho ze strany odpuzovat brčkem, jehož konec také zelektrujeme třením.

Snadno si lze spočíst, že tangenta úhlu, o který se brčko vychýlí, je úměrná síle elektrostatického odpuzování. A údaj úměrný té tangentě ukazuje špička brčka na stupnici.

[143] Je třeba vyzkoušet; některá brčka se třením nabíjejí hůře.

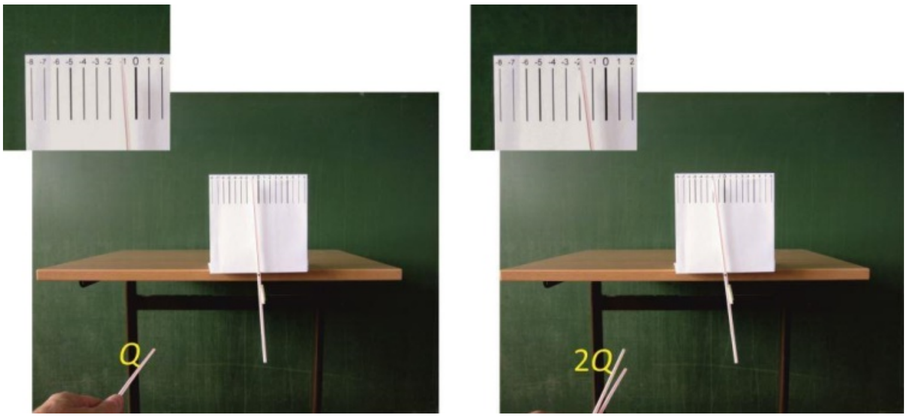
[144] Brčko přitahuje stěnu a ta podle principu akce a reakce zase přitahuje brčko.

[145] Vysvětlení, proč se přitahuje ke kovovým předmětům, bude jasnější, až v jedné z dalších kapitol probereme vodiče. Pro nedočkavé: Brčko je záporně nabité, ve vodiči k sobě blíž přitáhne kladné náboje (přesněji řečeno odpudí elektrony, které jsou záporně nabité, tím blízko něj ve vodiči bude přebytek kladných nábojů). A tyto kladné náboje ho přitahují. Vysvětlení, proč brčko drží na nevodičích, je podobné, jen tam jde o to, že materiál nevodiče se polarizuje; blíže viz kapitolu o dielektrikách.

[146] Když se je snažíme přiblížit, „nechtějí k sobě".

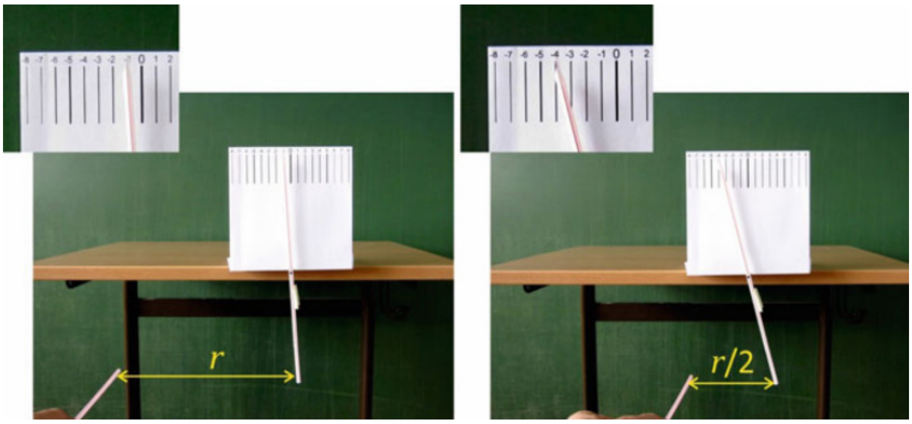
[147] Brčko propíchneme silnějším špendlíkem, otáčí se pak kolem slabšího špendlíku zabodnutého do špejle.

Jestliže místo jednoho nabitého brčka dáme do stejné vzdálenosti brčka dvě[148], výchylka se zdvojnásobí:



Z toho lze usoudit, že síla je úměrná náboji.

Když brčko přiblížíme do poloviční vzdálenosti, výchylka se zvětší čtyřikrát:



Naměřili jsme tedy, že poloviční vzdálenosti nábojů odpovídá čtyřnásobná síla – což odpovídá tomu, že síla závisí na vzdálenosti jako $1/r^2$.

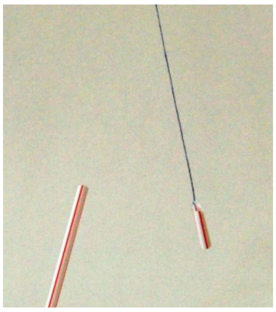
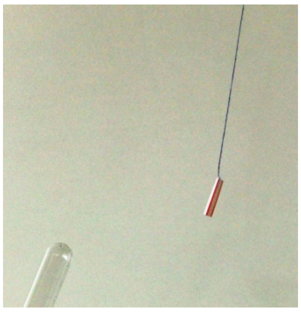
Výrazně přesněji lze Coulombův zákon ověřovat měřením síly mezi nabitými kuličkami pomocí digitálních vah. Tento pokus je popsán a dokumentován ve webové *Sbírce fyzikálních pokusů* v části *Elektřina a magnetismus*.[149]

[148] To, že jsou nabita (alespoň přibližně) stejným nábojem, můžeme ověřit tak, že nejprve dáme do dané vzdálenost jedno brčko, pak druhé; výchylka „měřicího brčka" je zhruba stejná.

[149] Konkrétně na webové stránce https://fyzikalnipokusy.cz/1713/coulombuv-zakon.

Dva druhy náboje

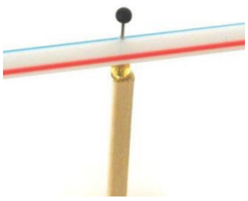
Sílu působící na náboj může demonstrovat i kousek plastového brčka na niti zelektrovaný třením. Od nabitého brčka se odpuzuje, ke skleněné zkumavce zelektrované třením se odpuzuje.

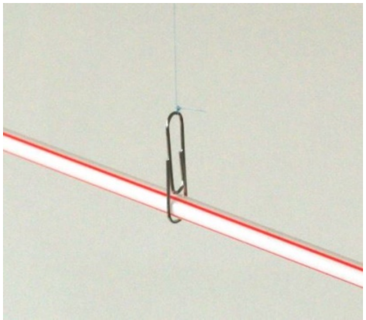
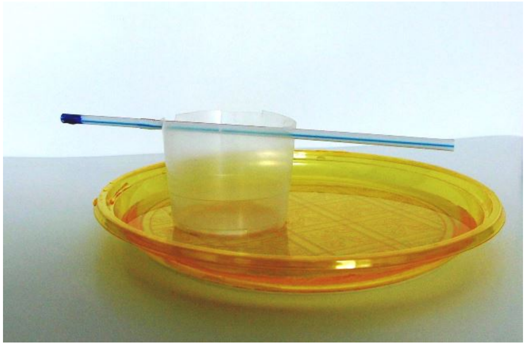
To ukazuje na existenci existenci dvou druhů náboje.

Jednoduché indikátory elektrického pole (resp. vzájemného působení nábojů)

Elektrické pole může indikovat plastové brčko otáčející se kolem svislého špendlíku. Jeden konec brčka označíme barvou, druhý zelektrujeme třením. Konec označený barvou pak míří ve směru elektrické intenzity. Brčko funguje analogicky jako magnetka v kompasu, jen reaguje na elektrické pole.[150]

Brčko jde také zavěsit v prostředku na nit, třeba pomocí sponky, nebo dát na seříznutý plastový kalíšek a ten položit na hladinu vody.

[150] Osobně mu proto říkám „elektretka“, ale není to žádný běžně užívaný název.

Dodatek 1.B (pro zájemce)**: Jak moc je Coulombův zákon potvrzen?**

Zvídavý čtenář si může celkem přirozeně položit otázku, jak moc je Coulombův zákon potvrzen. Když si to rozmyslíme, jde vlastně o dvě otázky:

1. Jak přesně je potvrzen?
2. V jakém rozsahu vzdáleností je potvrzen?

První z otázek se ještě může rozpadnout na dvě dílčí:

a. Jak přesně víme, že exponent v závislosti síly na vzdálenosti $1/r^2$ je roven právě dvěma? (Jinak řečeno, co když závislost je $1/r^{2+\delta}$; jak velké může být δ?)
b. Co když závislost není typu $1/r^2$, ale navíc klesá třeba ještě exponenciálně?

Naše pokusy s plastovými brčky mohou maximálně naznačit, že závislost síly na vzdálenosti není $1/r$ nebo $1/r^3$. Originální Coulombova měření byla přesnější, ale také ne příliš.[151]

Měření, jak síla závisí na vzdálenosti, prováděl už před Coulombem (roku 1796) John Robinson. Jeho měření dala pro exponent hodnotu 2,06.

Podstatně přesnější ověření toho, že síla je úměrná $1/r^2$, se nedělají přímým měřením síly, ale ověřováním důsledků Coulombova zákona.[152] První takové měření uskutečnil Henry Cavendish již v roce 1773 (tedy také před Coulombovými měřeními), ale své výsledky nepublikoval. Zjistil, že odchylka exponentu od 2 (tedy výše zmíněné δ [153]) nepřesahuje v absolutní hodnotě 0,02.

Přesnější měření uskutečnil v roce 1873 J. C. Maxwell. Zjistil, že $|\delta| \le 5\times 10^{-5}$. Často citovaný je experiment Plimtona a Lawtona z roku 1936; citlivost jejich měření umožnila určit, že $|\delta| \le 2\times 10^{-9}$.

Novější měření se více zaměřují na zjištění, jestli v závislosti síly na vzdálenosti nemůže být i exponenciální pokles.[154] Přesto lze najít údaje, které se týkají odchylky δ exponentu od dvojky. Williams, Faller a Hill v roce 1971 uvádějí, že z jejich měření plyne $\delta = (2{,}7 \pm 3{,}1)\cdot 10^{-16}$.

U ještě novějších měření se už dostáváme daleko od odpuzování nabitých kuliček a chování elektrostatického pole v dutině, proto je zmíníme jen velmi stručně.

---

[151] Uvádí se, že výsledek pro odpuzování nábojů odvodil z pouhých tří měření; navíc tato měření jsou dodnes občas předmětem diskusí. (Pro zájemce viz např. článek A. A. Martínez: *Replication of Coulomb's Torsion Balance Experiment*. Archive for History of Exact Sciences, (November 2006), pp. 517-563, dostupné online: https://www.jstor.org/stable/41134234 .)

[152] Konkrétně jde o to, že elektrické pole v dutině vodiče je nulové, k tomu se dostaneme v kapitole 3. Popis příslušných experimentů najdeme jednak v učebnicích (Sedlák, Štoll: *Elektřina a magnetismus*, Academia, Praha 1993; Purcell, Morin: *Electricity and Magnetism*, 3rd edition, Cambridge Univ.Press, 2013; Jackson: *Classical Electrodynamics*, 3rd edition, Willey, 1999). Podrobně, s řadou dalších odkazů, pak v článku Liang-Cheng Tu, Jun Luo: *Experimental tests of Coulomb's Law and the photon rest mass*, Metrologia 41 (2004) S136–S146, dostupné online: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0026-1394/41/5/S04/meta. Z těchto zdrojů jsou čerpány údaje o příslušných měřeních a jejich výsledcích uvedené v tomto dodatku.

[153] V článku uvedeném v předchozí poznámce, se odchylka exponentu od 2 označuje symbolem q; zde, aby se nám to nepletlo s nábojem, ji raději značíme δ.

[154] Uvádí se, že toto by nastalo, kdyby (klidová) hmotnost fotonu byla různá od nuly, takže tato měření dávají meze na maximální hmotnost fotonu – ale to už jsme hodně daleko od elektrostatiky… (Jen pro představu, jaké omezení dnešní experimenty na hmotnost fotonu dávají: článek uvedený v jedné z předchozích poznámek uvádí, že je to asi 10^{-50} gramu.)

Nejpřesnější moderní měření využívají méně zřejmých důsledků Coulombova zákona, týkajících se magnetických polí či šíření elektromagnetických vln. (Fakticky můžeme říci, že zde jde o ověřování důsledků Maxwellových rovnic popisujících chování elektromagnetického pole. Pokud by Coulombův zákon neplatil přesně resp. platil v modifikované formě, musely by se modifikovat i Maxwellovy rovnice.) A výsledky se interpretují jako horní hranice na hmotnost fotonu. Přesto se lze setkat s přepočtem na hodnotu δ. Článek[155] uvádí pro měření z přelomu století omezení na $|\delta|$ řádu 10^{-19}.

A jak je to s rozsahem vzdáleností, v nichž Coulombův zákon platí?

Naprostá většina výše uvedených pokusů ověřovala Coulombův zákon na vzdálenostech řádu centimetrů až asi metru. Co nás přesvědčuje o tom, že platí i v menších a větších vzdálenostech?

Pro menší vzdálenosti může jít o sílu mezi atomovým jádrem a elektrony v atomovém obalu. Z Coulombova zákona (resp. z něj odvozené energie elektronů v poli jádra) jsou v kvantové fyzice vypočteny energetické hladiny a z nich vlnové délky spektrálních čar – a experimentálně zjištěné hodnoty souhlasí s hodnotami vypočtenými z teorie.[156] Takže na vzdálenostech řádu 10^{-10} m Coulombův zákon úspěšně funguje.

Na ještě menší vzdálenost (až řádu 10^{-13} m) se při Rutherfordově pokusu přibližují částice alfa k jádrům zlata.[157] A opět zde teorie souhlasí s výsledky experimentu. A srážky elektronů ve velkých urychlovačích jsou vlastně testováním i na vzdálenostech řádu 10^{-18} m.[158]

Pro velké vzdálenosti je prověřování platnosti Coulombova zákona založeno na jeho „vzdálenějších“ důsledcích, jak už jsme zmínili výše. Jde například o to, jak se vzdáleností ubývá magnetické pole planety (zde se uvádí měření magnetického pole Jupitera provedené sondou Pioneer 10), či o šíření vln v magnetosféře a v meziplanetárním prostředí. Uvádí se, že je tak Coulombův zákon ověřen do vzdálenosti asi 10^{8} m.[159]

Ufff! Vidíme, že do modernějších a vysoce přesných metod ověřování Coulombova zákona není příliš názorně vidět. Ale snad je z přehledu výše zmíněných měření zřejmé, že Coulombův zákon byl prověřen mnohem přesněji a mnohem více způsoby než jen historickým pokusem s torzními váhami.

Na otázku, jak moc je potvrzen, tedy můžeme směle odpovědět: opravdu hodně![160]

---

[155] Spavieri et. al: *Physical implications of Coulomb's Law*, Metrologia 41 (2004) S159–S170, dostupné online: https://iopscience.iop.org/article/10.1088/0026-1394/41/5/S06/meta

[156] Samozřejmě, pro přesné výsledky se musí započítat i další „jemnosti“ elektromagnetické interakce elektronů s polem jádra týkající se například spinu, ale to vše vychází z rovnic, které jsou ve shodě nijak nemodifikovaným Coulombovým zákonem.

[157] Pohyb částic v Rutherfordově pokusu si klasicky budete počítat v přednášce Teoretická mechanika.

[158] Zde se samozřejmě nemůžeme dívat na elektrony jako na „klasické kuličky“. Teorií, která popisuje dané interakce je kvantová elektrodynamika. Ale opět – kdyby byl Coulombův zákon modifikován, musely by být jiné i příslušné vztahy kvantové elektrodynamiky. (Tam by se právě projevila výše zmíněná případná nenulový hmotnost fotonu.)

[159] V jednom z článků citovaných výše se mluví až o vzdálenostech 10^{11} m.

[160] Můžeme říci, že je pevnou součástí klasické teorie elektřiny a magnetismu. Na druhou stranu, kdyby někdo v budoucnu zjistil, že třeba klidová hmotnost fotonu je sice nepatrná, ale přece jen různá od nuly, museli bychom přiznat, že naše současné teorie nepopisují přírodu přesně, a museli bychom je modifikovat. Ovšem i kdyby to nastalo, pro popis běžných elektromagnetických jevů a dějů kolem nás (od nabíjení plastových tyčí třením přes funkci elektromotorů a polovodičových součástek v mobilech a počítačích) bychom stávající teorie bez problémů používali i nadále. (Podobně je tomu i v jiných oblastech fyziky. Pro jevy v běžném životě nemusíme užívat teorii relativity a bohatě vystačíme s klasickou mechanikou.)

Dodatek 1.C: Triboelektrická řada

V tzv. *triboelektrické řadě* jsou materiály seřazeny podle toho, „jak ochotně" předávají kladný nebo záporný náboj. Když se dva materiály o sebe třou[161], pak jeden z nich se nabije kladně a druhý záporně podle toho, jaká je jejich pozice v triboelektrické řadě.

Zde uvádíme pouze stručný příklad triboelektrické řady zahrnující několik vybraných materiálů.

Příklad jak triboelektrickou řadu použít:
Když třeme papírovým nebo bavlněným kapesníkem plastovou tyč, nabíjí se tyč záporně a kapesník kladně. Když ale stejným kapesníkem třeme skleněnou tyč, nabíjí se tyč kladně a kapesník záporně. A když plastovou tyč třeme teflonem[162], nabije se tyč kladně a teflon záporně.

Takhle to celé vypadá jednoduše a přímočaře, ale pozor, nespoléhejte vždy na triboelektrickou řadu, kterou si „vygooglíte" a stáhnete z webu. Ne všechny údaje se totiž ve zveřejněných řadách shodují. Například slída, která je ve většině zdrojů uváděna v tabulce „pod" sklem (tedy tak, že se při vzájemném tření se sklem nabíjí záporně), je v některých zdrojích uvedena v tabulce nad ním (měla by se tedy nabíjet kladně). Podobně jsou někdy výše v tabulce uváděny vlasy. A nejednoznačností je víc.[163] I pořadí plastů, které jsme zde oddělili do detailnější tabulky, se ne vždy v dostupných zdrojích shoduje.

Triboelektrická řada, která je v tabulkách vpravo, vznikla výběrem a souhrnem z několika zdrojů[164]; jsou v ní uvedeny materiály, na jejichž pořadí v tabulce se převážná většina zdrojů shodne.[165]

Ovšem s nabíjením třením je to ještě trochu složitější a ukazuje se, že seřazení materiálů do jediné triboelektrické řady nevystihuje všechny situace. Wikipedie i přehledový článek citovaný v poznámce pod čarou uvádějí případ *cyklické* řady kdy při tření materiálů A a B se A nabíjí kladně a B záporně, při tření B a C pak B kladně a C záporně, atd., ale nakonec se při tření materiálů F a A překvapivě F nabíjí kladně a A záporně. Takže je vidět, že nabíjení třením opravdu není jednoduchá záležitost…

Nabíjí se kladněji

suché ruce
králičí srst
sklo
slída
vlasy
vlna
kočičí srst
hedvábí
papír
dřevo
bavlna
jantar
guma
plasty *)
křemík
teflon

Nabíjí se záporněji

*) plasty podrobněji:

polyester (PET)
polystyrén
polyuretan
PVC
polyetylén
polypropylén

[161] Často se nemusí přímo třít, stačí, když jsou v těsném kontaktu, a pak je od sebe oddělíme.

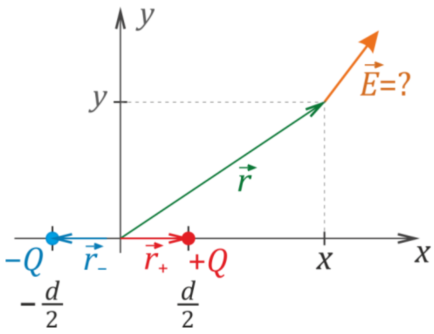
[162] Raději teflonovou fólií než teflonovou pánví… ☺

[163] Například nylon (který zde neuvádíme), je někde v tabulce uváděn nad vlnou, někde pod ní. Dokonce i samotná vlna (často braná jako výchozí bod tabulky), se v jednom zdroji uvádí o několik příček níž.

[164] Pro zájemce: Základní informace a odkazy na další zdroje lze najít na anglické stránce Wikipedie https://en.wikipedia.org/wiki/Triboelectric_effect ; přehledový článek o nabíjení třením: Pan, S., Zhang, Z. *Fundamental theories and basic principles of triboelectric effect: A review*. Friction 7, 2–17 (2019). https://doi.org/10.1007/s40544-018-0217-7. Další zdroje uvádějící výsledky kvantitativních měření jsou články https://doi.org/10.1038/s41467-019-09461-x, https://doi.org/10.1038/s41467-020-15926-1. a také stránka https://www.alphalabinc.com/triboelectric-series/. Pro tabulku uvedenou výše byly využity i další zdroje.

[165] Ale i tak ji berte spíš jako vodítko než jako něco, na co bychom se mohli stoprocentně spolehnout. (Určitě na ni nespoléhejte tak, jako na zákon zachování náboje…) Samozřejmě, u skla a teflonu je to při tření papírovým kapesníkem jasné. Ovšem i zde pozor – například pod názvem sklo se skrývá řada materiálů. A jeden z pramenů uvádí nějaké speciální křemenné sklo pro vysoké teploty, a umisťuje ho v triboelektrické řadě až za teflon!

Dodatek 1.D: Pole elementárního dipólu



V části 1.3 této kapitoly jsme spočetli intenzitu elektrického pole na ose dipólu. Teď výpočet zobecníme pro případ obecného bodu, viz obrázek.[166]

Budeme přitom předpokládat, že bod, v němž pole počítáme, je výrazně dál, než je vzdálenost nábojů v dipólu, tedy že $r \gg d$. Fakticky tak získáme výsledek pro pole elementárního dipólu.

Počítat budeme „v podstatě středoškolsky“ s tím, že potřebná zanedbání či rozvoj některých členů během výpočtu vysvětlíme.[167]

Nejprve si vypíšeme polohy nábojů a bodu, kde pole počítáme:

$$\begin{aligned} \vec{r} &= (x, y, 0), \qquad r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ r_{\pm}^2 &= (\pm d/2, 0, 0) \\ \vec{r} - r_{\pm}^2 &= (x \mp d/2, y, 0), \quad \left|\vec{r} - r_{\pm}^2\right| = \sqrt{(x \mp d/2) x^2 + y^2} \end{aligned} \tag{1.65}$$

Elektrickou intenzitu $\vec{E}$ získáme sečtením příspěvků od obou nábojů (viz (1.15)):

$$\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{Q}{\left|\vec{r} - \vec{r}_+\right|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_+}{\left|\vec{r} - \vec{r}_+\right|} + k \frac{(-Q)}{\left|\vec{r} - \vec{r}_-\right|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}_-}{\left|\vec{r} - \vec{r}_-\right|} \ . \tag{1.66}$$

Intenzitu budeme počítat ve složkách. Pro x-ovou složku dává (1.66) po dosazení (1.65) a úpravách[168]:

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}) &= kQ\left[\frac{x - d/2}{\left((x-d/2)^2 + y^2\right)^{3/2}} - \frac{x + d/2}{\left((x+d/2)^2 + y^2\right)^{3/2}}\right] = kQ\left[\frac{x - d/2}{\left(x^2 - xd + \cancel{d^2/4} + y^2\right)^{3/2}} - \ldots\right] \approx \\ &\approx \frac{kQ}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\left[\frac{x - d/2}{\left(1 - \frac{xd}{x^2+y^2}\right)^{3/2}} - \ldots\right] = \frac{kQ}{r^3}\left[\frac{x - d/2}{\left(1 - \frac{xd}{r^2}\right)^{3/2}} - \ldots\right] \approx \frac{kQ}{r^3}\left[\frac{x - d/2}{1 - \frac{3}{2}\frac{xd}{r^2}} - \ldots\right] \approx \\ &\approx \frac{kQ}{r^3}\left[(x - d/2)\left(1 + \frac{3}{2}\frac{xd}{r^2}\right) - (x + d/2)\left(1 - \frac{3}{2}\frac{xd}{r^2}\right)\right] = \\ &= \frac{kQ}{r^3}\left[\left(x - d/2 + \frac{3}{2}\frac{x^2 d}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{x d^2}{r^2}\right) - \left(x + d/2 - \frac{3}{2}\frac{x^2 d}{r^2} - \frac{3}{4}\frac{x d^2}{r^2}\right)\right] = \frac{kQ}{r^3}\left[-d + 3\frac{x^2 d}{r^2}\right] = \\ &= \frac{kQd}{r^3}\left(3\frac{x^2}{r^2} - 1\right) \end{aligned} \tag{1.67}$$

Součin $Q\,d$ je dipólový moment, $Qd = p$, takže výsledná hodnota E_x je

[166] Bez újmy na obecnosti přitom situaci řešíme v rovině $z = 0$. (Rozmyslete si, proč to opravdu je „bez újmy na obecnosti“. Nápověda: Jakou symetrii má elektrické pole, když dipól míří ve směru osy x?)

[167] Ale obejdeme se bez derivací.

[168] Pro přehlednost vypisujeme většinu úprav jen pro člen odpovídající náboji $+Q$, úpravy druhého členu jsou analogické. Při úpravách využíváme toho, že $d^2 \ll x^2 + y^2$ a že pro $\varepsilon \ll 1$ platí $(1+\varepsilon)^n \approx 1 + n\varepsilon$ (konkrétně pro $n = 3/2$) a $1/(1+\varepsilon) \approx 1 - \varepsilon$. V předposledním řádku jsou barevně vyznačeny členy, které se navzájem odečtou.

$$E_x(\vec{r}) \approx k\frac{p}{r^3}\left(3\frac{x^2}{r^2}-1\right).\qquad (1.68)$$ [169]

y-ovou složku intenzity dostaneme z (1.67) po analogických úpravách:

$$E_y(\vec{r}) = kQ\left[\frac{y}{\left(\left(x-d/2\right)^2+y^2\right)^{3/2}} - \frac{y}{\left(\left(x+d/2\right)^2+y^2\right)^{3/2}}\right] = kQ\left[\frac{y}{\left(x^2-xd+\cancel{d^2/4}+y^2\right)^{3/2}} - \ldots\right] \approx$$

$$\approx \frac{kQy}{\left(x^2+y^2\right)^{3/2}}\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{xd}{x^2+y^2}\right)^{3/2}} - \ldots\right] = \frac{kQy}{r^3}\left[\frac{1}{\left(1-\dfrac{xd}{r^2}\right)^{3/2}} - \ldots\right] \approx \frac{kQy}{r^3}\left[\frac{1}{1-\dfrac{3}{2}\dfrac{xd}{r^2}} - \ldots\right] \approx$$

$$\approx \frac{kQy}{r^3}\left[1+\frac{3}{2}\frac{xd}{r^2} - \left(1-\frac{3}{2}\frac{xd}{r^2}\right)\right] = k\frac{Qd}{r^3}3\frac{xy}{r^2}$$

Výsledek opět zapíšeme pomocí dipólového momentu:

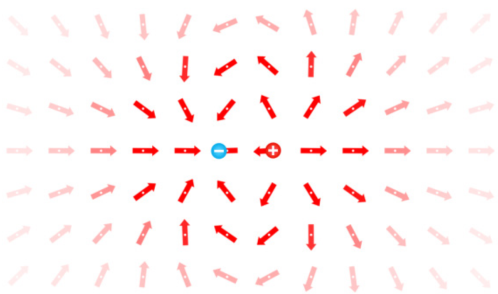
$$E_y(\vec{r}) \approx k\frac{p}{r^3}\,3\frac{xy}{r^2}\,.\qquad (1.69)$$

Připomeňme, že vztahy (1.68) a (1.69) platí přesně pro pole elementárního dipólu[170]. Pro dipól konečné velikosti popisují pole dipólu daleko od něj.[171] Jak moc přesně ho popisují, můžeme odhadnout ze vztahu (1.26) pro pole konečného dipólu v bodě na ose dipólu[172] (tedy na ose x, budeme přitom předpokládat $x > 0$). Vztah (1.26) můžeme upravit na

$$E_x(x) = 2k\frac{px}{\left(x^2-d^2/4\right)^2} = 2k\frac{p}{x^3}\frac{1}{\left(1-d^2/\left(4x^2\right)\right)^2} \approx 2k\frac{p}{x^3}\frac{1}{1-2d^2/\left(4x^2\right)} \approx 2k\frac{p}{x^3}\left(1+\frac{d^2}{2x^2}\right).\qquad (1.70)$$

Modře zbarvený člen vystihuje relativní odchylku, s jakou se výsledek pro elementární dipól liší od intenzity pro konečný dipól. Vidíme, že například pro $x = 10\,d$ je odchylka jen asi 0,5 %.[173]

Elektrické pole dipólu (konečného, ne elementárního) si můžeme znázornit v apletu Charges and Fields.[174] Příklad výsledku ukazuje obrázek. (Velikost elektrické intenzity se v apletu znázorňuje nikoli délkou, ale sytostí barvy šipek.)



[169] Pro bod na ose dipólu je $x^2 = r^2$ a můžeme si zkontrolovat, že (1.68) dá stejný výsledek jako (1.27).

[170] Tj. pro pole elementárního dipólu je v nich rovnítko = místo symbolu přibližné rovnosti $\approx$.

[171] Tedy pro $r \gg d$, jak jsme uvedli už na začátku. Že dávají intenzitu s určitým přiblížením, je vyznačeno právě znakem $\approx$.

[172] Tedy na ose x, budeme přitom předpokládat $x > 0$, aby byl daný bod daleko, bude $x \gg d$.

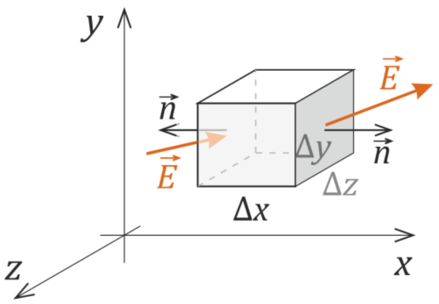
[173] Pro zájemce: Chcete-li, spočtěte si intenzitu pole (buzeného konečným dipólem) na ose y a porovnejte výsledek s (1.69). Odchylka vyjde analogicky s odchylkou na ose x.

[174] Je dostupný na https://phet.colorado.edu/sims/html/charges-and-fields/latest/charges-and-fields_all.html . (Funguje i na tabletech a mobilech, vyzkoušeno v Androidu.)

Dodatek 1.E: K odvození diferenciálního tvaru Gaussovy věty

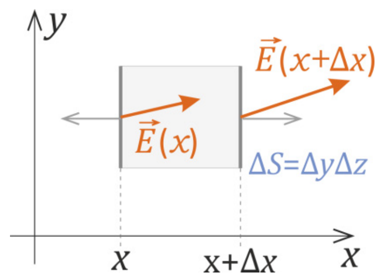
Názorné odvození

Lokální vyjádření Gaussovy věty elektrostatiky (tedy její zápis v diferenciálním tvaru) lze odvodit i názorně. Jde vlastně o stejný postup, jaký jste poznali v přednášce z Mechaniky v kapitole o hydrodynamice, když se odvozoval její diferenciální tvar.[175]



Okolo bodu, který nás zajímá, si zvolíme malý kvádřík o stranách Δx, Δy, Δz, viz obrázek.[176] Gaussova plocha bude povrch tohoto kvádříku.[177] Budeme počítat tok elektrické intenzity touto plochou, tedy ven z kvádříku.

Nejprve určíme tok elektrické intenzity bočními plochami, tedy plochami kolmými na osu x.[178] Plocha levé i pravé boční stěny je $\Delta S = \Delta y\, \Delta z$. Průměrnou intenzitu na levé boční stěně označíme $\vec{E}(x)$, průměrnou intenzitu na pravé stěně $\vec{E}(x+\Delta x)$.



V toku stěnami kolmými na osu x se uplatní jen x-ová složka intenzity, tedy E_x.[179] Celkový tok oběma bočními stěnami (ven z kvádříku) je tedy

$$\int\limits_{\substack{\text{bočními}\\ \text{stěnami}}} \vec{E}\cdot\vec{n}\; dS = -E_x(x)\Delta S + E_x(x+\Delta x)\Delta S = \left(E_x(x+\Delta x) - E_x(x)\right)\Delta y \Delta z \qquad (1.71)$$

Rozdíl hodnot E_x ve dvou blízkých bodech můžeme aproximovat pomocí derivace:[180]

$$E_x(x+\Delta x) - E_x(x) \approx \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \ , \qquad (1.72)$$

takže celkový tok bočními stěnami je

$$\int\limits_{\substack{\text{bočními}\\ \text{stěnami}}} \vec{E}\cdot\vec{n}\; dS \approx \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial E_x}{\partial x}\Delta V \ , \qquad (1.73)$$

kde $\Delta V = \Delta x \Delta y \Delta z$ je objem kvádříku. Podobně je tomu u toků přes horní a dolní plochu kvádříku a přes přední a zadní plochu – v těchto případech vyjdou ve výsledcích parciální derivace podle y a z.

---

[175] $\mathrm{div}\left(\rho\vec{v}\right) + \frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, vzpomínáte?

[176] Hrany kvádříku jsou rovnoběžné s příslušnými osami souřadnic.

[177] Takhle si prostě Gaussovu plochu vybereme. Kvádřík nemusí být z žádného materiálu, je jenom myšlený. (Může v něm ovšem být rozložen nějaký náboj s prostorovou hustotou ρ, to se nám bude za chvíli hodit.) Myšlená je samozřejmě i Gaussova plocha, tedy povrch kvádříku.

[178] Toky spodní a horní stěnou a přední a zadní stěnou pak určíme analogicky.

[179] Tok je $\vec{E}\cdot\vec{n}\,\Delta S = E_x \Delta S$, protože $\vec{E} = \left(E_x, E_y, E_z\right)$ a $\vec{n} = (1,0,0)$ pro pravou stěnu resp. $\vec{n} = (-1,0,0)$ pro levou stěnu, viz obrázky. (Na spodním jsou vektory $\vec{n}$ bez označení, písmenek už bylo v obrázku moc…)

[180] Přiznejme, že v celém postupu zde jde hlavně o názornost a hlavní myšlenku, nikoli o exaktní matematické odvození. Například od rozdílu průměrných (tj. středních) hodnot intenzity na pravé a levé stěně přecházíme k parciální derivaci samotné intenzity (v centru kvádříku, to ani nevypisujeme) a bereme to jako „intuitivně zřejmé" – s tím, že všechny přibližné rovnosti se nakonec stanou přesnými, když budeme rozměry kvádříku limitovat k nule. Provádět všechny podobné kroky rigorózně by fakticky znamenalo provést důkaz Gaussovy věty matematiky, což je daleko mimo možnosti a zaměření tohoto textu. Zájemce proto odkážeme na zdroje z oblasti matematické analýzy.

Celkový tok povrchem kvádříku tedy je

$$\oint \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \approx \left(\frac{\partial E_x}{\partial x}+\frac{\partial E_y}{\partial y}+\frac{\partial E_z}{\partial z}\right)\Delta V = \mathrm{div}\vec{E}\,\Delta V \ , \tag{1.74}$$

Náboj předpokládáme rozložený s prostorovou hustotou ρ.[181] Celkový náboj v kvádříku je tedy

$$Q_{\text{uvnitř}} = \int_{\Delta V} \rho dV \approx \rho\,\Delta V \ , \tag{1.75}$$

kde ρ je nyní hustota v centru kvádříku.[182]

Z Gaussovy věty elektrostatiky v integrálním tvaru (1.44), $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{Q_{\text{uvnitř}}}{\varepsilon_0}$, po dosazení dostaneme

$$\mathrm{div}\vec{E}\,\Delta V = \frac{1}{\varepsilon_0}\rho\,\Delta V \ . \tag{1.76}$$

Po zkrácení ΔV můžeme rozměry kvádříku limitovat k nule, $\Delta V\to 0$. Díky tomu se z přibližných rovností v našem odvození stanou přesné a divergence $\vec{E}$ a hustota náboje budou v témže bodě. Dostáváme tak Gaussovu rovnici elektrostatiky v diferenciálním tvaru,

$$\boxed{\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \ .} \tag{1.77}$$

K odvození Gaussovy věty elektrostatiky v diferenciálním tvaru z matematické Gaussovy věty

Výše jsme v kapitole 1.4 odvodili vztah (1.77) z matematické Gaussovy věty použité na elektrickou intenzitu: $\oint_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = \int_V \mathrm{div}\vec{E}\,dV$. To nám umožnilo přepsat integrální tvar Gaussovy věty elektrostatiky na

$$\int_V \left(\mathrm{div}\vec{E} - \frac{\rho}{\varepsilon_0}\right) dV = 0 \,. \tag{1.78}$$

Podívejme se trochu podrobněji, jak odtud odvodit vztah (1.77). Podstatné je, že (1.78) platí pro *libovolný objem V*. Jak hustota náboje ρ, tak $\mathrm{div}\vec{E}$ jsou spojité funkce polohy.[183]

Výsledek (1.77) odvodíme sporem:

Předpokládejme, že by v nějakém bodě bylo $\mathrm{div}\vec{E}-\rho/\varepsilon_0$ různé od nuly, třeba $\mathrm{div}\vec{E}-\rho/\varepsilon_0 > 0$. Díky spojitosti celého výrazu musí být $\mathrm{div}\vec{E}-\rho/\varepsilon_0 > 0$ i v nějakém okolí daného bodu. A právě tohle okolí vezmeme za objem V, přes který budeme počítat integrál na levé straně (1.78). Integrál z kladné funkce přitom musí dát kladný výsledek: $\int_V (\mathrm{div}\vec{E} - \rho/\varepsilon_0)\,dV > 0$. Ovšem dle (1.78) je tento integrál roven nule. *A právě to je spor*. Musí tedy platit $\mathrm{div}\vec{E}-\rho/\varepsilon_0 = 0$, čili (1.77).

[181] Místům, kde jsou bodové náboje a nabité křivky nebo plochy, se s naším kvádříkem vyhýbáme.

[182] Zde využíváme toho, že ρ je spojitá funkce polohy. (Toto předpokládáme, podobně jako u ostatních veličin, například u parciálních derivací intenzity.) Alternativně bychom mohli ρ brát jako průměrnou hustotu náboje v kvádříku.

[183] Tohle předpokládáme, a je to rozumný předpoklad. (Jak už jsme poznamenali výše, vyhýbáme se bodovým nábojům a místům na nabitých křivkách a plochách – tedy místům, kde obecně jsou nespojitosti.)