# Jak popisovat elektrostatické pole

Elektrostatické pole jsme zatím popsali jeho **intenzitou** $\vec{E}$. Ta je funkcí místa[1]: $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r})$. Víme už, že elektrickou intenzitu v daném místě můžeme změřit tak, že změříme sílu $\vec{F}$, kterou pole působí na malý (testovací) náboj $q$, protože je

$$\vec{F} = q\,\vec{E} \ . \qquad (2.1)$$

Rozložením elektrické intenzity je elektrostatické pole plně popsáno. Protože intenzita je vektorová veličina, můžeme pole znázornit i graficky pomocí šipek ukazujících směr a velikost intenzity. Tím ale možnosti pro popis a znázornění pole nekončí.

Místo šipek, resp. spolu s nimi, je velmi názorným zobrazení pole pomocí **siločar**. A vedle intenzity je pro popis pole velmi důležitou a užitečnou veličinou **potenciál**. Ten nám poslouží i pro další grafické znázornění pole pomocí **ekvipotenciálních ploch**.

V souvislosti s uvedenými popisy pole nás mohou napadnout otázky nebo věci, které bychom se mohli dozvědět. Například:

- Je elektrická intenzita úměrná hustotě siločar?
  (Někdy se lze setkat s tvrzením, že tok elektrické intenzity plochou je úměrný počtu siločar, které plochu protínají. Je to pravda?)
- Proč je výhodné popisovat elektrické pole potenciálem?
- Lze si potenciál nějak názorně představit?
- A můžeme nějak názorně vidět a pochopit souvislost mezi potenciálem a intenzitou? Nebo to je dáno jen nějakými vzorečky, které je potřeba se naučit?
- Jak z ekvipotenciálních ploch „vyčíst“ co nejvíc o poli, které znázorňují?

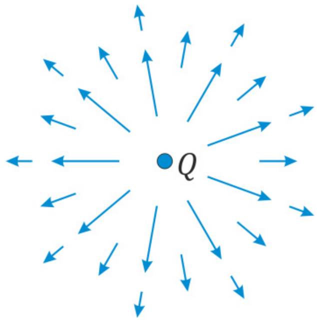
Na všechny tyto i otázky, a nejen na ně, se pokusíme na dalších stránkách nalézt odpověď.[2]

[1] V případě elektro*statického* pole nezávisí na čase. V obecném případě elektrické pole na čase samozřejmě závisí a je $\vec{E} = \vec{E}(\vec{r}, t)$ – konec konců, takhle to je už v případě, kdy nabitou tyč nedržíme v klidu, ale máváme s ní třeba nad hlavou…

[2] Pokud budete mít pocit, že jste se odpovědi nedobrali, zkuste v této kapitole zapátrat ještě jednou, ptejte se kolegů, přednášejících, vedoucích cvičení, či kohokoli dalšího, kdo bude ochoten s vámi o dané problematice diskutovat. (A hlavně do toho pátrání pořádně zapojte vlastní „šedé buňky mozkové“, jak říkal v detektivkách Agáty Christie pan Poirot.)

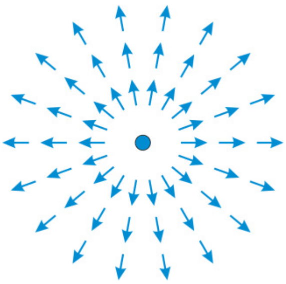
## 2.1 Siločáry

Elektrostatické pole můžeme znázornit pomocí šipek reprezentujících elektrickou intenzitu $\vec{E}$. Příkladem je pole bodového náboje, viz obrázek.



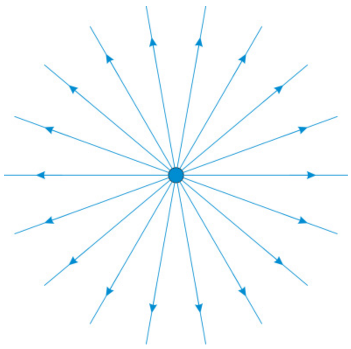

Analogické znázornění pole používají různé aplety.[3]

Někdy nepotřebujeme bezprostředně vidět velikost intenzity, naopak dlouhé šipky se nám v obrázku spíše pletou. V tom případě můžeme směr pole nakreslit jen pomocí krátkých, stejně dlouhých šipek. (Výsledek pro pole bodového náboje viz obrázek vlevo.)



V tom případě je výhodné jednotlivé šipky „propojit“ vždy do jedné čáry, nakreslit tedy do obrázku „čáry ve směru $\vec{E}$“. Takovým čarám říkáme ***siločáry.*** (Přesněji *elektrické siločáry* nebo *siločáry elektrického pole*, ale to, že jde o elektrické pole, většinou bude jasné z kontextu.)

V případě bodového náboje je tvar siločar jasný a mnohokrát ukazovaný v různých učebnicích, prostě jde o polopřímky vycházející z daného náboje, viz obrázek vpravo.



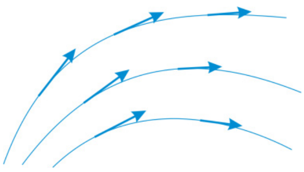
Jak přesně definovat siločáry?

Jsou to **křivky, k nimž je v každém jejich bodě elektrická intenzita tečná.**[4]

Pokud bychom je měli popsat vzorcem, šlo by o křivky $\vec{r} = \vec{r}(s)$, pro něž platí

$$\frac{d\vec{r}}{ds} \sim \vec{E}(\vec{r}) \,. \quad (2.2)$$ [5]

Názorně můžeme tento vztah chápat jednoduše: Abychom zkonstruovali siločáru, půjdeme prostě po malých krocích vždy ve směru elektrické intenzity.[6]



Poznámka: Při pokusech nám přibližnou představu o tvaru siločar mohou dát lehké tenké papírové fáborky, které přilepíme třeba ke kouli školního van de Graafova generátoru nebo k dalším předmětům. Ovšem siločáry ukazují opravdu jen přibližně. Jednak na ně působí gravitace a jednak se tím, že se samy nabíjejí, ovlivňují navzájem.[7]

[3] Viz například aplet Phet https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzika2elmag/Pomocne/charges-and-fields_en_ver11.html

[4] Jsme už ve druhém semestru, tak si nemusíme připomínat, že není účelem učit se takovéto definice „jako básničku“; podstatné je znát a pochopit jejich smysl. Ostatně, definice mohou být různé. V matematičtěji zaměřených výkladech se setkáte s tím, že elektrické siločáry jsou *integrální křivky elektrického pole*, někdy se také používá formulace *vektorové křivky elektrického pole*. Podstatné je, že tečna k siločáře má vždy směr elektrické intenzity v daném bodě.

[5] $s$ je parametr, jímž určujeme pozici na dané křivce. Může to být například délka křivky od nějakého zadaného bodu. Znak $\sim$ označuje, že veličiny jsou úměrné; v případě vektorových veličin tedy že mají stejný směr.

[6] V limitě jde samozřejmě o kroky „nekonečně malé“.

[7] Rozmyslete si sami, proč vlastně ty papírové fáborky ukazují směr elektrické intenzity.

## Vlastnosti siločar

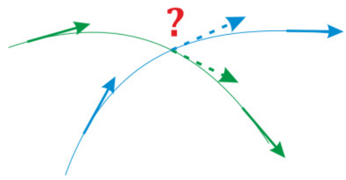
Při zkoumání vlastností siločar můžeme vyjít z několika jednoduchých otázek:

- Jsou siločáry jen „obyčejné čáry"? Nebo mají nějakou vlastnost navíc?

Siločáry určují směr elektrické intenzity. Ale už na obrázcích výše jsme viděli, že určují i orientaci vektoru intenzity; proto jsme k nim přikreslovali šipky. Jsou to tedy **orientované křivky**.

- Mohou se křížit?

Nemohou.

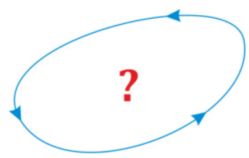



Siločáry určují směr $\vec{E}$. V místě křížení siločar bychom měli dva různé směry. Ovšem elektrická intenzita má v tomto bodě jen jeden směr. Situace znázorněná na obrázku vpravo tedy nemůže nastat.

- Kde začínají a končí?

Již na obrázku na předchozí straně jsme viděli, že siločáry vycházely z bodového náboje. Právě tak mohou vycházet i z nabitých křivek a ploch. A také v nich mohou končit. (Když siločáry končí v náboji, jaké má tento náboj znaménko?[8]) Není to jediná možnost: výše jsme viděli, že třeba siločáry bodového náboje jdou radiálně do nekonečna. Můžeme tedy konstatovat, že s**iločáry začínají a končí v nábojích nebo v nekonečnu**.

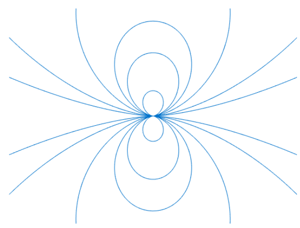
- Mohou být siločáry elektrostatického pole uzavřené?




Uzavřená siločára by nezačínala ani nekončila v nábojích. Ale šlo by třeba rozmístit elektrické náboje tak, aby siločára měla tvar znázorněný na obrázku vpravo? Nebo je něco takového nemožné?

Kdyby ovšem takové pole bylo možné, mohli bychom do něj dát nějaký náboj $q$. Síla elektrického pole by na něj působila vždy ve směru siločáry. Náš náboj by mohl za něco tahat a konat práci. Nakonec by se vrátil do výchozího bodu. A mohl by se po siločáře pohybovat znovu a znovu konat práci… Takže bychom měli perpetuum mobile! To by sice bylo výhodné pro řešení energetické krize – ale takhle bohužel příroda nefunguje. ***Elektrostatické pole je konzervativní***.[9] Proto **siločáry elektrostatického pole nemohou být uzavřené**.

? Protipříklad?



Někdo by mohl namítnout, že zná protipříklad: siločáry elementárního dipólu. Ty vypadají tak, jak ukazuje obrázek.[10] Siločáry jsou uzavřené, rozhodně tak vypadají. Znamená to, že naše předchozí úvaha neplatí? Nebo dokonce, že bychom pomocí dipólu mohli sestrojit perpetuum mobile? ( ☺ )

Ovšem siločáry uzavřené pouze vypadají. Ve skutečnosti začínají a končí na nábojích dipólu. Máme smůlu, perpetuum mobile nesestrojíme…

[8] Správně, záporné. Siločáry vycházejí z kladných nábojů a končí v záporných nábojích. (Tohle samozřejmě není žádný přírodní zákon, ale konvence, takhle jsme si směr siločar stanovili.)

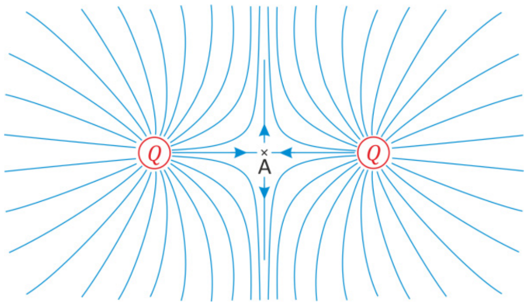
[9] Jak víme z mechaniky, integrál ze síly po uzavřené dráze dá nulu, $\oint_c \vec{F}\cdot d\vec{r} = 0$, a protože $\vec{F} = q\vec{E}$ , je také $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$.

[10] V obrázku není vyznačena orientace siločar, což snad nevadí.

- Kde všude jsou siločáry?

Nabízí se jednoduchá odpověď: všude. Ale pozor, musíme to trochu upřesnit. Například v oblasti, kde není elektrické pole, tedy kde $\vec{E} = 0$, žádné siločáry nejsou. (Víte proč?[11]) Také nemůžeme říci, že siločára prochází třeba bodovým nábojem nebo nabitou přímkou – v těchto bodech nemá $\vec{E}$ definovaný směr.[12] Formálně tedy můžeme shrnout, že **siločáry procházejí každým bodem, kde elektrická intenzita má definovaný směr** (tj. existuje a je různá od nuly). Je-li ovšem v určité oblasti elektrické pole, můžeme jednoduše říci, že siločáry procházejí „skoro každým bodem".

Příklad, kudy siločáry neprocházejí:

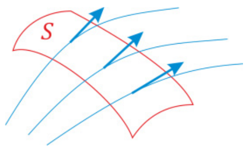



V bodě uprostřed mezi dvěma stejně velkými bodovými náboji je intenzita nulová. V tomto bodě (na obrázku označen jako bod A) tedy „siločára neví kudy dál". Mohli bychom říci, že siločára, která do tohoto bodu vede z náboje, v tomto bodě vlastně končí[13] a začínají zde siločáry, které na obrázku vedou nahoru a dolů.

Tento příklad ovšem neukazuje žádný strašně důležitý fyzikální fakt, je zde spíš jen pro zajímavost.[14]

- Je elektrická intenzita úměrná hustotě siločar?

Z obrázku siločar pole bodového náboje (viz s. 2) vidíme, že blízko náboje jsou siločáry hustěji u sebe, ve větší vzdálenosti dál od sebe. Někdy se přímo říká, že velikost elektrické intenzity je úměrná hustotě siločar. Lze se setkat i s tvrzením, že tok elektrické intenzity plochou je roven počtu siločar procházejících danou plochou. (Viz obrázek vlevo.)



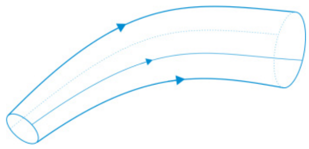

Proti tomuto tvrzení lze ovšem vznést vcelku přirozené námitky. Například:

‣ Tok elektrické intenzity plochou je reálné číslo. Co když má hodnotu třeba 3,5? Pak by plochou muselo procházet „tři a půl siločáry"… Není jasné, co by to znamenalo.

‣ Každým bodem (až na výjimky zmíněné výše) prochází siločára. Počet siločar procházejících plochou je tedy nekonečný. To by znamenalo nekonečně velký tok intenzity, což zjevně není pravda. Podobně hustota siločar, kdybychom ji brali jako počet siločar na jednotkovou plochu, by vyšla nekonečná.

S tvrzením typu „hustota siločar určuje velikost elektrické intenzity" to tedy není tak jednoduché. Přesto v jistém smyslu platí, jen ho musíme formulovat a používat mnohem opatrněji.

Uvažujme trubici složenou ze siločar, například takovou, jak ji ukazuje obrázek.[15] Plášť trubice je složen ze siločar. To znamená, že tok elektrické intenzity pláštěm je roven nule.[16] Jak to bude s tokem „podstavami" určité části trubice?



[11] Prostě proto, že tam nic neurčuje jejich směr.

[12] Siločáry tam začínají nebo končí, ale nepokračují v nich dál.

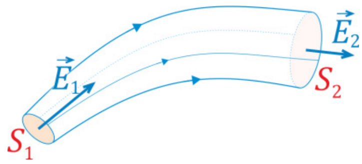
[13] Šlo by tedy o další příklad bodu, kde siločáry začínají a končí; navíc k výše uvedenému (začátky a konce v nábojích nebo v nekonečnu). Ale je to vlastně spíš takový detail a formalita…

[14] Poznámka: Pokud si chcete pohrát s tím, jak vypadají siločáry pole dvou nábojů, můžete využít nějaký aplet na webu, například [https://academo.org/demos/electric-field-line-simulator/](https://academo.org/demos/electric-field-line-simulator/).

[15] Jde samozřejmě o myšlenou trubici.

[16] Elektrická intenzita je tečná k plášti trubice, takže opravdu pláštěm trubice nic neprotéká.

Budeme uvažovat „podstavy" kolmé ke směru elektrické intenzity. Plochy podstav označíme $S_1$ a $S_2$. Trubici ze siločar budeme brát tenkou, takže elektrická intenzita na každé podstavě bude mít prakticky stejnou intenzitu, její velikosti označíme $E_1$ a $E_2$, viz obrázek.




Situaci uvažujeme ve vakuu, takže uvnitř dané části silové trubice nejsou žádné náboje. Podle Gaussovy věty tedy platí „co vteče, to vyteče". Čili tok podstavou $S_1$ se musí rovnat toku podstavou $S_2$:

$$E_1 S_1 = E_2 S_2 \tag{2.3}$$

Odtud okamžitě plyne

$$E_2 = \frac{1}{S_2} E_1 S_1 \ . \tag{2.4}$$

V tomto smyslu je velikost elektrické intenzity „úměrná hustotě siločar". Podél trubice ze siločar platí, že čím je plocha průřezu trubice větší, tím menší je intenzita.

Kvalitativně tedy: Když se od sebe siločáry vzdalují, intenzita slábne, když se k sobě přibližují, intenzita roste.[17]

Poznámka:
Nakreslit ovšem obrázek siločar, aby jejich „hustota" rozumně odpovídala velikosti elektrické intenzity (nejenom při postupu podél jedné siločáry, ale i v různých místech obrázku) nemusí být úplně jednoduché. Navíc si musíme uvědomit, že obrázek na papíře či na obrazovce počítače je jen dvourozměrným „řezem" celé situace a že tedy vzdálenost siločar na obrázku *není* úměrná převrácené hodnotě intenzity.[18]

[17] Míněno samozřejmě, když se posunujeme po siločáře. (Nejde o žádný časový vývoj, pole je statické!)

[18] Poznámka pro „šťouraly": Lze vymyslet situaci, kdy úměrná bude. (Když zdroji pole budou rovnoběžné homogenně nabité přímky nebo nekonečné tyče a náš obrázek bude znázorňovat pole v rovině kolmé na tyto přímky.) Ale to je opravdu situace dost speciální…

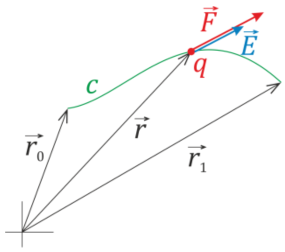
## 2.2 Potenciál

V klasické mechanice se zavádí potenciální energie v silovém poli $\vec{F} = \vec{F}(\vec{r})$ jako

$$V(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{F}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + V_0 \ .$$ [19]

V oblasti elektřiny a magnetismu ovšem bývá zvykem označovat potenciální energii symbolem $W$. [20]

Na náboj $q$ působí v elektrostatickém poli síla $\vec{F} = q\,\vec{E}$. Potenciální energie náboje v elektrickém poli je tedy




$$W(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} q\,\vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + V_0 \ .$$

Od $\vec{r}_0$ do $\vec{r}_1$ přitom můžeme integrovat po libovolné křivce *c*, výsledek vyjde stejný. Uvědomte si, proč. [21]

Po vydělení nábojem $q$ získáme

$$\varphi(\vec{r}_1) = \frac{W(\vec{r}_1)}{q} = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r}) \cdot d\vec{r} + \underbrace{\frac{V_0}{q}}_{\text{označíme } \varphi_0} \ . \tag{2.5}$$

Trochu zkráceně[22] můžeme tento výsledek napsat jako

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E} \cdot d\vec{r} + \varphi_0 \ .} \tag{2.6}$$ [23]

Veličina $\varphi$ už nezávisí na náboji $q$, charakterizuje tedy samotné elektrostatické pole. Nazývá se ***potenciál elektrostatického pole***.[24] Jde o skalární veličinu, která, stejně jako intenzita, plně popisuje dané pole. Z (2.6) vidíme, že **potenciál je určen až na konstantu**. Konstantu $\varphi_0$ totiž můžeme volit libovolně.

Potenciální energie náboje $q$ v místě $\vec{r}$ v poli o potenciálu φ je, jak plyne z (2.5),

$$\boxed{W(\vec{r}) = q\,\varphi(\vec{r}) \ .} \tag{2.7}$$

[19] Tohle jsme poznali v přednáškách předmětu Mechanika. Jde o potenciální energii hmotného bodu, na který působí dané silové pole, v místě $\vec{r}_1$. $V_0$ je potenciální energie tohoto hmotného bodu v nějakém výchozím bodě $\vec{r}_0$. Připomeňme, že potenciální energie je určena až na konstantu. $V_0$ tedy můžeme zvolit libovolně; často ji volíme tak, aby energie daného bodu v nekonečnu byla nulová, není to ovšem nezbytné.

[20] Možná proto, že třeba v anglosaské literatuře se symbolem $V$ často označuje napětí.

[21] Ano, je to proto, že elektrostatické pole je konzervativní. K této jeho vlastnosti se ještě v dalším textu vrátíme.

[22] A s mírnou obměnou značení. Bod, v němž určujeme potenciál, teď označujeme jen $\vec{r}$, bez indexu 1.

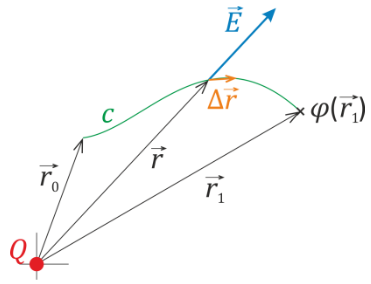
[23] Podrobněji bychom tento vztah zapsali $\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{\tilde{r}}) \cdot d\vec{\tilde{r}} + \varphi_0$. Musíme totiž odlišit polohu bodu, v němž potenciál $\varphi$ určujeme (tu zde značíme $\vec{r}$), a integrační proměnnou, tedy vektor, jehož koncový bod probíhá po křivce *c* od $\vec{r}_0$ do $\vec{r}$ (tento vektor zde značíme $\vec{\tilde{r}}$).

[24] Připomeňme, že v mechanice jsme se už setkali s potenciálem gravitačního pole. Ten byl roven potenciální energii hmotného bodu v gravitačním poli dělené hmotností daného bodu.

## Potenciál bodového náboje a soustavy nábojů

Známe-li intenzitu, můžeme elektrický potenciál určit přímým výpočtem pomocí vztahu (2.6). Pojďme si to ukázat na příkladech.

### Potenciál pole bodového náboje

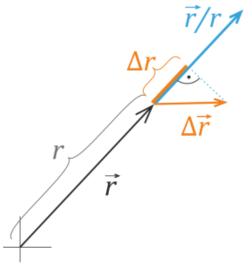



Mějme bodový náboj, pro jednoduchost v počátku souřadnic. Intenzita elektrostatického pole, které budí, je

$$\vec{E}(\vec{r}) = k\frac{Q}{r^2}\frac{\vec{r}}{r} .$$

Potenciál v místě $\vec{r}_1$ určíme pomocí (2.6) jako [25]

$$\begin{aligned}\varphi(\vec{r}_1) &= -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}(\vec{r})\cdot d\vec{r} + \varphi_0 = -kQ\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \frac{1}{r^2}\underbrace{\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)\cdot d\vec{r}}_{=dr \text{ (viz text)}} + \varphi_0 = -kQ\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1}\frac{1}{r^2}dr + \varphi_0 = \\ &= kQ\left[\frac{1}{r}\right]_{r_0}^{r_1} + \varphi_0 = k\frac{Q}{r_1} + \underbrace{\left(-k\frac{Q}{r_0} + \varphi_0\right)}_{\substack{\text{tohle bude 0} \\ \text{(díky vhodné volbě } \varphi_0\text{)}}}\end{aligned} \tag{2.8}$$




Poznámka: Proč je $(\vec{r}/r)\cdot d\vec{r} = dr$, ukazuje obrázek. Místo diferenciálu $d\vec{r}$ je v něm ovšem zobrazeno konečné posunutí $\Delta\vec{r}$. Skalární součin $(\vec{r}/r)\cdot\Delta\vec{r} = 0$ je projekce vektoru $\Delta\vec{r}$ na jednotkový vektor $\vec{r}/r$. To je ale posunutí v radiálním směru, tedy změna $\Delta r$ radiální souřadnice $r$.

Důležitá poznámka:

Z odvození výše je vidět, že integrál v (2.8) *nezávisí na křivce*, po níž integrujeme, ale jen na koncovém (a samozřejmě počáteční) bodě. Dokázali jsme tak, že ***elektrostatické pole bodového náboje je konzervativní***.

Konstantu $\varphi_0$ můžeme zvolit libovolně. Obvykle se volí tak, aby poslední člen dal nulu, jak už je ve (2.8) naznačeno. Potenciál je pak roven nule „v nekonečnu“, tedy pro $r_1 \to \infty$. [26]

Potenciál pole buzeného bodovým nábojem v počátku je tedy

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{Q}{r} \tag{2.9}$$

Výsledek jednoduše zobecníme pro náboj, který je v bodě $\vec{r}\,'$. Ve jmenovateli je prostě vzdálenost náboje a bodu, v němž určujeme potenciál:

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} \tag{2.10}$$

[25] V následujícím vztahu snad nemusíme připomínat, že $r_1 = |\vec{r}_1|$. Označení velikosti vektoru symbolem bez šipky jsme používali už dříve a budeme ho používat i nadále.

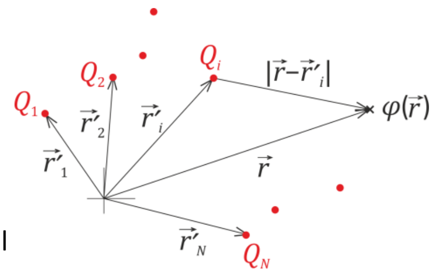
[26] Používá se také formulace, že *nulová hladina potenciální energie je v nekonečnu*.

**Potenciál pole soustavy bodových nábojů**

Jestliže intenzitu elektrického pole buzeného soustavou nábojů dostaneme součtem intenzit od jednotlivých nábojů, musí totéž platit i pro potenciál. (Rozmyslete si, jak toto plyne z (2.6).) To znamená, že i **pro potenciál platí princip superpozice**.

Pro potenciál elektrostatického pole buzeného soustavou nábojů $Q_1$, $Q_2$, … $Q_N$ v bodech $\vec{r}_1'$, $\vec{r}_2'$, … , $\vec{r}_N'$ tedy platí

$$\boxed{\varphi(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}\ .} \tag{2.11}$$




Podobně na základě principu superpozice můžeme spočítat potenciál nabitých křivek a ploch.

**Potenciál pole nabitých křivek, ploch a objemového rozložení náboje**

Jde opět o sečtení příspěvků od jednotlivých částí zdroje. Toto „sečtení“ má samozřejmě formu integrálu:[27]

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_c \frac{\eta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dl' \tag{2.12}$$

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dS' \tag{2.13}$$

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dV' \tag{2.14}$$

Pokud by zdroji náboje v určité situaci byly jak nabité křivky, plochy i objemová rozložení náboje, a navíc třeba i hmotné body, prostě bychom sečetli všechny příspěvky (2.12), (2.13), (2.14) a (2.11).

## Výpočet intenzity z potenciálu

Vztah (2.6) uvedený výše umožňuje vypočítat potenciál ze známé intenzity elektrického pole. Co když budeme postaveni před obrácený problém: známe potenciál a chceme určit intenzitu?

I tohle jde, a velmi jednoduše. Z mechaniky víme, že sílu $\vec{F}$ z potenciální energie $W$ určíme jako $\vec{F} = -\mathrm{grad}\,W$ . Síla na náboj $q$ v elektrickém poli je $\vec{F} = q\vec{E}$ , potenciální energie náboje je (viz (2.7)) $W = q\varphi$. Platí tedy $q\vec{E} = -\mathrm{grad}\,(q\varphi)$ . Po vydělení $q$ odtud okamžitě dostáváme

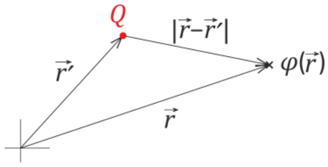
$$\boxed{\vec{E} = -\,\mathrm{grad}\,\varphi\ .} \tag{2.15}$$

Vyjádřeno ve složkách to je

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x},\quad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y},\quad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}\ . \tag{2.16}$$

[27] Značení je zde stejné, jako když jsme počítali intenzitu $\vec{E}$ od těchto zdrojů: $\eta$ je délková hustota náboje na křivce $c$, σ plošná hustota náboje na ploše $S$, ρ objemová hustota náboje v objemu $V$. Vektor $\vec{r}'$ probíhá při integraci celý zdroj, tedy celou nabitou křivku, plochu nebo objem.

*Příklad:* ***Intenzita pole bodové náboje vypočtená z potenciálu***




Potenciál v bodě $\vec{r} = (x, y, z)$ pole bodového náboje $Q$, který je v místě $\vec{r}' = (x', y', z')$ je (viz (2.10)):

$$\varphi(\vec{r}) \;=\; k\,\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|} \;=\; k\,\frac{Q}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}} \;.$$

$x$-ovou složka intenzity vypočteme dle (2.16) jako

$$\begin{aligned} E_x &= -\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{kQ}{\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}}\right) = \\ &= -kQ\frac{\partial}{\partial x}\Big((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\Big)^{-1/2} = \\ &= kQ\frac{1}{2}\Big((x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2\Big)^{-3/2}\,2(x-x') = \\ &= kQ\frac{x-x'}{\left(\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2}\right)^3} = kQ\frac{x-x'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3} \end{aligned} \qquad (2.17)$$

Analogicky bychom vypočetli $E_y$ a $E_z$ [28], celkově tedy dostáváme

$$\vec{E} \;=\; kQ\,\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}\;\;, \qquad (2.18)$$

tedy výsledek, který už známe. Z potenciálu (2.10) jsme opravdu dostali správný vztah pro intenzitu.

[?] O čem jsme se tím přesvědčili?

- Jednak jsme vlastně provedli kontrolu, že jsme z intenzity pole bodového náboje správně vypočetli potenciál.
- A hlavně: Teď jsme si jisti, že pole bodového náboje má potenciál.[29] Takže dané pole určitě je **konzervativní**.[30]

Díky principu superpozice (který platí jak pro intenzitu, tak pro potenciál) je jasné, že z potenciálů soustavy bodových nábojů a dalších rozložení náboje (viz (2.11) až (2.14)) dostaneme správné vztahy pro intenzitu. Můžeme si tedy být jisti, že **elektrostatické pole buzené libovolným rozložením nábojů je konzervativní**.

[28] Vyšlo by $E_y = kQ\dfrac{y-y'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$, $E_z = kQ\dfrac{z-z'}{|\vec{r}-\vec{r}'|^3}$.

[29] Spočetli jsme z něj intenzitu a vyšla nám správně.

[30] Rozmyslete si, že to je pravda. (Pro kontrolu je zdůvodnění uvedeno níže; ale abyste si ho jen rychle nepřečetli a nepřipravili se o potěšení z vlastního přemýšlení, je vzhůru nohama. ☺)

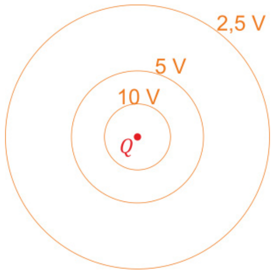
Pole má potenciál, ten je funkcí polohy, $\varphi = \varphi(\vec{r})$. Náboj $q$ má tedy v tomto poli potenciální energii $W$, která je také funkcí (pouze) polohy. Integrál ze síly po křivce je práce, ta je rovna rozdílu potenciálních energií v počátečním a koncovém bodě. Nezávisí tedy na tvaru křivky – a právě tím jsme definovali konzervativní síly.

## 2.3 Ekvipotenciální plochy (a leccos dalšího)

Ekvipotenciální plochy jsou plochy konstantního potenciálu. Každá taková plocha má tedy rovnici

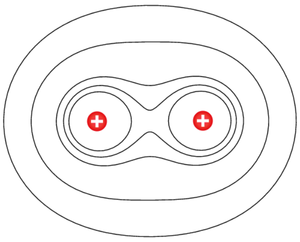
$$\varphi(\vec{r}) = \text{konst.} \tag{2.19}$$

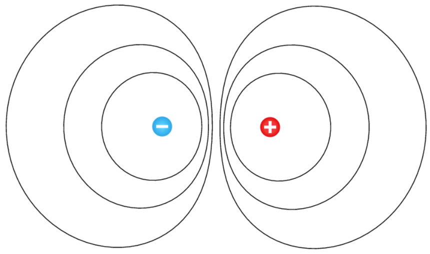
Pro různé hodnoty konstanty (např. 10 V, 20 V, 30 V, …) dostáváme různé ekvipotenciální plochy. Ekvipotenciální plochy nám dávají dobrou představu o rozložení potenciálu.[31]




V případě jednoho bodového náboje je $\varphi = kQ/r$, takže je jasné, že ekvipotenciální plochy jsou sféry $r$ = konst. Ve dvourozměrném obrázku obvykle zobrazujeme jenom řez, takže ekvipotenciální plochy jsou znázorněny kružnicemi.

Když jde o pole buzené více náboji, je obvykle třeba vykreslovat ekvipotenciální plochy (resp. jejich řezy pro dvourozměrný obrázek) pomocí počítače. Lze to například pomocí apletu Charges and Fields, který jsme používali už dříve.[32] Příklady ekvipotenciálních ploch pro dva stejně velké náboje a pro dva náboje opačného znaménka (a stejné absolutní velikosti) ukazují následující obrázky.[33]





### Ekvipotenciální plochy a siločáry

Graficky můžeme elektrostatické pole popsat jak ekvipotenciálními plochami (ty určují jaký je kde potenciál), tak siločarami (ty určují směr elektrické intenzity). Jaký je mezi nimi vztah? Můžeme to zjistit buď trochu formálněji pomocí vysokoškolské matematiky, nebo jednodušší úvahou.

Známe-li už z matematiky totální diferenciál funkce více proměnných, můžeme ho spočítat pro potenciál $\varphi = \varphi(x, y, z)$ :

$$d\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial \varphi}{\partial y}dy + \frac{\partial \varphi}{\partial z}dz = \underbrace{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)}_{\operatorname{grad}\varphi = -\vec{E}} \cdot \underbrace{(dx, dy, dz)}_{d\vec{r}} = -\vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{2.20}$$

Když postupujeme po ekvipotenciální ploše z bodu $\vec{r}$ do $\vec{r} + d\vec{r}$, je $d\varphi = 0$.[34] Z (2.20) proto plyne $\vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. To znamená, že **elektrická intenzita je kolmá na ekvipotenciální plochu.**[35]

[31] Tedy o tom, kde je jaký potenciál.

[32] https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzika2elmag/Pomocne/charges-and-fields_en_ver11.html

[33] Hodnoty potenciálů pro ekvipotenciální plochy na levém a pravém obrázku jsou ovšem různé.

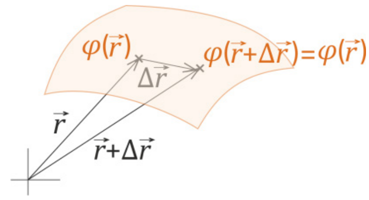
[34] $d\vec{r}$ je „nekonečně malé“ posunutí „podél plochy“, je to tedy vektor tečný k ekvipotenciální ploše. A když jdeme po ekvipotenciální ploše, potenciál se nemění: $0 = \varphi(\vec{r} + d\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = d\varphi$ .

[35] $d\vec{r}$ totiž můžeme volit do kteréhokoli směru tečného k ploše.

A protože elektrická intenzita určuje směr siločar, vidíme, že:

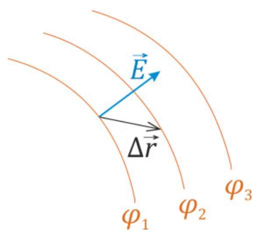
**Siločáry jsou kolmé na ekvipotenciální plochy.**

Méně formální odvození:




Názorně (a bez znalosti totálních diferenciálů) si můžeme představit, že se na ekvipotenciální ploše posuneme o malý kousek $\Delta\vec{r}$. Potenciál je v obou bodech stejný. Posunujeme-li se s malým nábojem $q$, je tedy stejná i jeho potenciální energie. Na náboj přitom působí síla $\vec{F} = q\vec{E}$. Když potenciální energie zůstala stejná, síla nemohla konat práci – to znamená, že musí být kolmá k posunutí $\Delta\vec{r}$. K posunutí je proto kolmá i intenzita $\vec{E}$. A protože posunutí může být všemi směry v ploše, musí být $\vec{E}$ kolmé na ekvipotenciální plochu. Čili také siločára musí být v daném bodě kolmá na ekvipotenciální plochu. A protože náš původní bod byl libovolný bod na libovolné ekvipotenciální ploše, musí být siločáry kolmé na ekvipotenciální plochy všude.

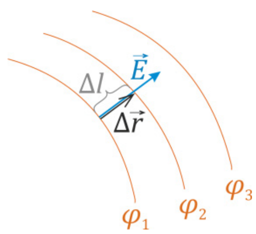
## Změna potenciálu při posunu libovolným směrem




Když se při posunu o $\Delta\vec{r}$ posuneme na jinou ekvipotenciální plochu (viz obrázek), změní se potenciální energie náboje $q$ z $q\varphi_1$ na $q\varphi_2$, tedy o $\Delta W = q(\varphi_2 - \varphi_1)$. Práce, kterou na náboj $q$ vykonala elektrická intenzita $\vec{E}$ je $\vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = q\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$. Tato práce se rovná $-\Delta W$.[36] Je tedy $q(\varphi_2-\varphi_1) = -q\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} \;\Rightarrow\; \varphi_2-\varphi_1 = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$. Obecně tedy

$$\Delta\varphi = \varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} \,. \tag{2.21}$$ [37]

## Změna potenciálu při posunu ve směru siločáry




Pokud se posuneme ve směru elektrické intenzity (tedy ve směru siločáry), plyne z (2.21)

$$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) = -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} = \; = -E\left|\Delta\vec{r}\right| = -E\,\Delta l \,, \tag{2.22}$$

kde délku posunutí jsme označili $\Delta l$, a samozřejmě $E = \left|\vec{E}\right|$. V situaci dle obrázku je tedy

$$\boxed{E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l}\,.} \tag{2.23}$$

Vidíme, že **intenzita je rovna spádu potenciálu.**[38]

---

[36] Připomeňme, proč je zde znaménko mínus. (Známe to už z mechaniky, ale ono se to znaménko občas plete.) Změna potenciální energie $\Delta W$ je dána prací, kterou vykonáme my, když náboj posunujeme: $\Delta W = \vec{F}_{\text{naše}}\cdot\Delta\vec{r}$. My ale působíme opačnou silou než elektrické pole, $\vec{F}_{\text{naše}} = -q\vec{E}$, náboj totiž posunujeme velmi pomalu (někdy se říká *kvazistaticky*), není nikam urychlován. Alternativní vysvětlení: Když síla elektrického pole vykoná na náboj kladnou práci ($\vec{E}\cdot\Delta\vec{r} > 0$), musí potenciální energie náboje *poklesnout*, takže $\Delta W<0$.

[37] Pozor, zde $\Delta\varphi$ *neznamená* Laplaceův operátor aplikovaný na $\varphi$, ale prostě změnu potenciálu. Vztah také platí jen v případě, že $\left|\Delta\vec{r}\right|$ je dostatečně malé, a i tehdy jen přibližně (ač tuto přibližnost ve (2.21) explicite nevyznačujeme). Přesně vztah platí jen pro nekonečně malá posunutí, tedy pro diferenciály, viz (2.20).

[38] Názorně bychom mohli říci, že intenzita vystihuje, jak rychle klesá potenciál, když jdeme po siločáře.

## Napětí

Rozdíl potenciálů se nazývá **napětí**; přesněji **elektrické napětí**. Obvykle se značí symbolem $U$, jednotkou je **volt** (V). Ve výše popsané situaci je mezi ekvipotenciálními plochami napětí

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 \ .$$

Aby bylo jasné, mezi kterými místy napětí uvažujeme nebo měříme, často se k symbolu $U$ připojují indexy označující místa, tedy např.

$$\boxed{U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) \ .^{39}} \tag{2.24}$$

Když (2.24) vynásobíme nábojem $q$, dostaneme na pravé straně rozdíl potenciálních energií náboje v daných místech:

$$qU_{12} = q\varphi(\vec{r}_1) - q\varphi(\vec{r}_2) = W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_2) \ . \tag{2.25}$$

Tento rozdíl potenciálních energií je *práce*, kterou síla elektrického pole na daný náboj vykoná při přesunu z $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$. Takže ***napětí*** vynásobené nábojem je rovno ***práci sil elektrického pole***.

Stejný výsledek můžeme odvodit i formálněji, když do (2.24) dosadíme vztah (2.6) pro potenciál:

$$U_{12} = \varphi(\vec{r}_1) - \varphi(\vec{r}_2) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0 - \left( -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0 \right) = \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$$

Napětí mezi body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_2$ bychom tedy mohli také definovat integrálem

$$\boxed{U_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}} \tag{2.26}$$

Po vynásobení $q$ dostaneme

$$qU_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} q\vec{E}\cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}\cdot d\vec{r} \ , \tag{2.27}$$

tedy opravdu práci elektrických sil při přesunu náboje z $\vec{r}_1$ do $\vec{r}_2$.

### Potenciál lze chápat jako napětí (například „vůči nekonečnu“)

Výše jsme zavedli napětí jako rozdíl potenciálů. Naopak z definice potenciálu (2.6) vidíme, že v bodě $\vec{r}_1$ je potenciál $\varphi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_1} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0 = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0$. Jestliže v bodě $\vec{r}_0$ zvolíme nulovou hladinu potenciálu, bude $\varphi_0 = 0$.[40] Pak bude (s využitím označení dle (2.26))

$$\varphi(\vec{r}_1) = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{E}\cdot d\vec{r} = U_{10} \tag{2.28}$$

Potenciál v určitém bodě tedy můžeme chápat jako napětí mezi tímto bodem a „referenčním bodem“ $\vec{r}_0$, například bodem v nekonečnu.

[39] Poznamenejme, že znaménková konvence se v některých pramenech užívá obráceně. Zde (ve shodě např. s učebnicí *Sedlák, Štoll: Elektřina a magnetismus*) bereme napětí od bodu 1 do bodu 2 kladné, když je v bodě 2 potenciál nižší, než v bodě 1. (Tedy když, názorně byť nepřesně řečeno, „elektrická intenzita míří od bodu 1 k bodu 2“.) Ke znaménkové konvenci napětí se ještě vrátíme například u elektrických obvodů.

[40] Například v případě bodového náboje volíme nulovou hladinu potenciálu v nekonečnu, tedy pro $|\vec{r}_0| \to \infty$, prakticky to bude znamenat, že bod 0 bude hodně daleko.

Možná nám tenhle pohled může pomoci překonat představu, že potenciál je něco záhadného a abstraktního, daného „jen nějakými integrály". Napětí je přece něco, co známe, s čím máme zkušenost. (Tužkový článek má napětí 1,5 V, plochá baterie 4,5 V, pak máme baterie 9 V, v elektrické síti je napětí 230 V.[41]) A napětí můžeme jednoduše měřit voltmetrem.

Praktické poznámky:

Připojovat jeden pól voltmetru „do nekonečna" se může zdát nerealizovatelné.[42] Prakticky tento pól voltmetru „uzemníme", tedy připevníme k vodiči spojenému se zemí.[43]

Nesmíme si ovšem představovat, že jednu svorku voltmetru spojíme se zemí a od druhé vedeme vodič do prostoru na místo, kde chceme měřit potenciál (tedy napětí vůči zemi). Ale když tuto svorku voltmetru vodivě spojíme například s nabitou plechovkou, změříme tím potenciál na této plechovce. Ovšem je nutno přidat ještě jedno důležité „technické upřesnění":

Pokud k měření použijeme třeba běžný multimetr (přepnutý na měření napětí), nenaměříme nic! Přes běžný voltmetr se totiž nabitá plechovka prakticky okamžitě vybije; její náboj odteče do země. K měření musíme použít tzv. elektrostatický voltmetr, přes ten se plechovka nevybíjí.[44]

## V jakých jednotkách měříme intenzitu?

Ze vztahu $\vec{F} = q\vec{E}$ jsme mohli už dříve odvodit, že jednotkou elektrické intenzity je N/C, ale intenzita se většinou vyjadřuje v jiných jednotkách.

Intenzitu můžeme určit jako spád potenciálu, viz (2.23): $E = (\varphi_1 - \varphi_2)/\Delta l$. Potenciál, stejně jako napětí, měříme ve voltech, $\Delta l$ je v metrech. Intenzita odtud vychází ve voltech na metr. Takže používanou **jednotkou elektrické intenzity je volt na metr**: V/m .[45]

Příklady:

Je vhodné uvědomit si, jaké hodnoty může mít elektrická intenzita v konkrétních případech. Například kulička nabitá nábojem $Q$ = 30 nC = $3\cdot 10^{-8}$ C (takovým nábojem můžeme nabít malou kuličku třeba zelektrovaným brčkem) budí ve vzdálenosti $r$ = 10 cm = 0,1 m elektrickou intenzitu velikosti $E = k\,Q/r^2 \doteq 10^{10}\cdot 3\cdot 10^{-8}/(0{,}1)^2\ \mathrm{V/m} = 3\cdot 10^4\ \mathrm{V/m}$, tedy 30 kilovoltů na metr (!). To není zrovna málo, že?[46]

A co teprve intenzita těsně u povrchu nabitého plastového brčka! Můžeme ji odhadnout ze vztahu pro intenzitu pole nabité přímky, $E = \eta/(2\pi\varepsilon_0 R)$. Délková hustota náboje $\eta$ je asi $10^{-7}$ C/m,[47] poloměr brčka je řekněme $R$ = 2 mm = $2\cdot 10^{-3}$ m, $1/(2\pi\varepsilon_0) \doteq 2\cdot 10^{10}$ Vm / C. Po dosazení dostaneme, že intenzita je asi $10^6$ V/m, tedy megavolt na metr! (To samozřejmě neznamená, že brčko má potenciál megavolt, takhle velká intenzita je jen těsně u něj.)

---

[41] Pravda, síťové napětí je střídavé, ale k tomu se také dostaneme.

[42] Nemáme tak dlouhý drát… ☺

[43] Při pokusech třeba ve třídě můžeme jako uzemnění využít vodič spojený s vodovodem.

[44] No… ještě musíme přidat jednu upřesňující poznámku: I do elektrostatického voltmetru přeteče z plechovky část náboje. Takže bychom museli brát v úvahu kapacitu plechovky i kapacitu elektrostatického voltmetru – ale ke kapacitě se dostaneme až v příští kapitole.

[45] Přitom jde o stejnou jednotku, jako jsme uvedli o odstavec výše, V/m = N/C. (Můžete si to ověřit, když si všechny jednotky vyjádříte v základních jednotkách SI. V obojím případě nám vyjde $\mathrm{kg\cdot m\cdot A^{-1}\cdot s^{-3}}$. Ufff, to je jednotka… Volt na metr je vyjádření rozhodně jednodušší.)

[46] Ostatně, spočtěte si třeba potenciál, který by měla kovová kulička o poloměru 3 cm nabitá nábojem 30 nC.

[47] Na 20 cm dlouhém brčku jsme zelektrováním dostali náboj 20nC i víc.

Praktický důsledek:

Skutečnost, že intenzita pole u brčka je řádu $10^6$ V/m, může působit těžko představitelně až abstraktně. Má ale jednoduchý praktický důsledek. Ukazuje, proč nemůžeme brčko třením nabít na víc než několik desítek nanocoulombů.

Kdyby náboj brčka (dlouhého 20 cm) byl 60 nC, dosáhla by intenzita u jeho povrchu $3{\cdot}10^6$ V/m, tedy 3 kV/mm. Ale je známo, že při intenzitě pole asi 3 kilovolty na milimetr ve vzduchu přeskočí jiskra.[48] Takže víc brčko nabít nemůžeme; jednoduše lze říci, že „přebytečný" náboj prostě vysrší pryč. (Reálně do látky, kterou třeme brčko.) Plastovou tyč o větším průměru samozřejmě můžeme nabít větším nábojem (rozmyslete si, proč).

## Ekvipotenciální plochy a intenzita

Výše jsme odvodili, že když jdeme po siločáře, platí vztah (2.23), tedy $E = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{\Delta l}$, kde $\Delta l$ je vzdálenost ekvipotenciálních ploch odpovídajících potenciálům $\varphi_1$ a $\varphi_2$. Je vidět, že tam, kde jsou ekvipotenciální plochy blíže u sebe, je intenzita větší než tam, kde jsou od sebe dále.

Pokud budeme mít ekvipotenciální plochy kresleny tak, že rozdíly potenciálů mezi nimi jsou stejné (např. jde o plochy pro potenciály 100 V, 200 V, 300 V, atd.), pak z jejich hustoty můžeme přímo odečítat velikost intenzity.

### Analogie s krajinou resp. s mapou

Pro názornou představu o ekvipotenciálních plochách a siločarách nám dobře poslouží jednoduchá analogie.[49]

Ekvipotenciální plochy jsou analogické vrstevnicím na mapě. Z hustoty vrstevnic můžeme odečíst strmost svahu, z hustoty ekvipotenciálních ploch zase spád potenciálu, tedy intenzitu.

V této analogii hodnotě potenciálu odpovídá nadmořská výška daného místa v krajině, elektrické intenzitě pak strmost svahu. ($\vec{E}$ přitom míří ve směru, kterým svah nejvíce spadá.) Elektrickým siločarám odpovídají spádnice, tedy čáry probíhající ve směru největšího sklonu terénu.

Rozdílu výšek v krajině odpovídá rozdíl potenciálů, tedy *napětí*.

Z analogie je dobře vidět, že potenciál je určen až na konstantu: Nadmořská výška stejného místa také může být různá, podle toho, ke kterému moři ji vztahujeme.[50] Rozdíl výšek dvou bodů v krajině na tom ale už nezávisí; právě tak napětí mezi dvěma body nezávisí na tom, kde vezmeme nulovou hladinu potenciálu.

---

[48] Tato hodnota se uvádí pro suchý vzduch za atmosférického tlaku a pro homogenní elektrické pole. Pro intenzitu, kterou izolanty vydrží, aniž by se „prorazily" (což v plynech znamená přeskok jiskry) se užívá termín *elektrická pevnost*. (Zadáte-li do Googlu termín „elektrická pevnost vzduchu", dostanete řadu odkazů vedoucích na podrobnější informace.) Uvádí se, že v nehomogenním poli je elektrická pevnost vzduchu ještě menší než zmíněné 3 kV/mm.

[49] Tuto analogii v pracovních listech pro středoškoláky rozpracovala V. Koudelková. Stojí za to, podívat se na dané materiály; jsou dostupné na stránce https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzika2elmag/.

[50] Zvlášť pokud bychom za „moře" brali třeba i Lipno nebo plesa ve Vysokých Tatrách… ☺

## 2.4 Rovnice pro elektrostatické pole

### Rovnice pro intenzitu

Víme už, že elektrostatické pole je konzervativní. To znamená, že integrál ze síly $\vec{F}$ (kterou $\vec{E}$ působí na náboj) přes libovolnou uzavřenou křivku je roven nule, $\oint_c \vec{F} \cdot d\vec{r} = 0$. Protože ale $\vec{F} = q\vec{E}$, dostáváme odsud okamžitě

$$\boxed{\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0} \tag{2.29}$$

Z matematiky víme, že platí *Stokesova věta*:

$$\oint_c \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S (\mathrm{rot}\, \vec{a}) \cdot d\vec{S} \;, \tag{2.30}$$

kde uzavřená křivka $c$ je hranicí plochy $S$, $\vec{a}$ je libovolné[51] vektorové pole. Jestliže tímto polem bude pole elektrické intenzity, dostaneme z (2.30) a (2.29)

$$\int_S (\mathrm{rot}\, \vec{E}) \cdot d\vec{S} \;=\; \oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} \;=\; 0 \tag{2.31}$$

Protože plocha $S$ je libovolná, jediná možnost, jak splnit (2.31) je, že musí platit

$$\boxed{\mathrm{rot}\, \vec{E} \;=\; 0\,.} \tag{2.32}$$

Vidíme, že **elektrostatické pole je nevírové**.[52]

Rovnice (2.32) je hodně důležitá rovnice!

Je to totiž už „skoro jedna z Maxwellových rovnic"; v případě obecného (nestacionárního) elektromagnetického pole do ní ale budeme muset přidat ještě jeden člen.

Výše jsme odvodili (2.32) z integrálního vyjádření (2.29). Ovšem jde to i naopak, tedy z toho, že $\mathrm{rot}\, \vec{E} = 0$, plyne (2.29).[53] Oba vztahy jsou tedy ekvivalentní.

Poznamenejme, že rovnici (2.32) můžeme odvodit i jednodušeji, bez použití Stokesovy věty. Stačí vyjít ze vztahu propojujícího intenzitu a potenciál elektrostatického pole a aplikovat na něj rotaci:

$$\vec{E} \;=\; -\mathrm{grad}\,\varphi \quad \Big/\; \mathrm{rot}$$

$$\mathrm{rot}\, \vec{E} = -\mathrm{rot\ grad}\ \varphi = 0\,.$$ [54]

[51] „Libovolné" ve smyslu, který zde často používáme, tedy pole splňující předpoklady příslušné matematické věty; zejména dostatečně diferencovatelné. Vhodné podmínky musí splňovat i plocha $S$ a křivka $c$, vyhoví hladké ev. po částech hladké plochy a křivky.

[52] V mechanice jsme se setkali s nevírovým prouděním tekutiny, teď pojem *nevírové* zobecňujeme i na silová pole.

[53] Rozmyslete si sami, jak to dokázat. (Nápověda: Využijte (2.31).)

[54] Protože rotace gradientu libovolné funkce je nula. (Můžete se o tom přesvědčit výpočtem ve složkách.)

## Rovnice pro potenciál

V minulé kapitole jsme z Gaussovy věty elektrostatiky odvodili „lokální" vztah pro elektrickou intenzitu:

$$\operatorname{div}\vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \tag{2.33}$$

Když do něj dosadíme $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$, dostaneme vztah pro potenciál:

$$\frac{\rho}{\varepsilon_0} = \operatorname{div}\vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad}\varphi) = -\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi = -\Delta\varphi \ .$$

Výsledkem je znám pod názvem **Laplaceova-Poissonova rovnice**:

$$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0} \ .} \tag{2.34}$$

Jde o velmi důležitou a užitečnou rovnici, jejímž řešením dostaneme elektrostatické pole buzené náboji rozloženými s objemovou hustotou $\rho$.

? K čemu tahle rovnice?

Mohli byste namítnout, že řešení už známe, výše jsme přece pro potenciál buzený náboji s objemovou hustotou $\rho$ odvodili vzorec (2.14). Ovšem může nastat situace, kdy na některých plochách bude zadána hodnota potenciálu $\varphi$. To se na první pohled může zdát jako „naprostá vymyšlenost", ale už v příští kapitole uvidíme, že přesně tak je to na povrchu vodičů. A pak nám vzorec (2.14) nestačí. [55] A abychom získali odpověď, jaké je v tomto případě elektrické pole, musíme řešit Laplaceovu-Poissonovu rovnici.

Často se setkáme se situací, kdy máme nabitý vodič nebo několik nabitých vodičů, a mezi nimi je vakuum. Pak se rovnice, kterou je třeba řešit, zjednoduší, protože ve vakuu je $\rho = 0$.

Výsledkem je **Laplaceova rovnice**

$$\boxed{\Delta\varphi = 0 \ .} \tag{2.35}$$

Zapsána ve složkách, má tvar

$$\boxed{\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0 \ .} \tag{2.36}$$

S její pomocí se dá vyřešit řada důležitých a zajímavých úloh elektrostatiky.[56]

[55] Protože platí jen v situaci, kdy je mimo objemové rozložení náboje vakuum a žádné vodiče tam rozložení potenciálu neovlivňují.

[56] Nebojte se, rozhodně „nestrávíme mládí" ani převážnou část semestru jejím řešením. Ani vás nebudu přesvědčovat, že by se měla učit ve fyzice na střední škole. ☺ Ale je dobře mít trochu nadhled a vidět, že tato jediná rovnice vystihuje všechna možná rozložení potenciálu ve vakuu.
(Mám chuť sem napsat „No není to paráda?", ale to se asi do seriózního učebního textu o elektřině a magnetismu nehodí. ☺ Ale ona je to opravdu krása, že se všechna elektrostatická pole ve vakuu dají postihnout jedinou jednoduchou rovnicí!)

# Shrnutí

**Siločáry** (přesněji *elektrické siločáry*) jsou čáry ve směru elektrické intenzity: $\frac{d\vec{r}}{ds} \sim \vec{E}(\vec{r})$

Jsou to orientované křivky, začínají a končí v nábojích nebo v nekonečnu, nemohou být uzavřené, nemohou se křížit, procházejí každým bodem, kde $\vec{E}$ má definovaný směr.
V (tenké) trubici ze siločar je $E$ nepřímo úměrná ploše průřezu trubice.

**Potenciál** (přesněji *potenciál elektrostatického pole*): $\boxed{\varphi(\vec{r}) = -\int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}} \vec{E}\cdot d\vec{r} + \varphi_0}$, je určen až na konstantu

Potenciální energie náboje: $\boxed{W(\vec{r}) = q\,\varphi(\vec{r})}$ Výpočet intenzity z potenciálu: $\boxed{\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi}$

Potenciál bodového náboje a soustavy bodových nábojů: $\varphi(\vec{r}) = k\,\frac{Q}{|\vec{r}-\vec{r}'|}$, $\varphi(\vec{r}) = k\sum_{i=1}^{N}\frac{Q_i}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}$,

nabitých křivek, ploch a objemového rozložení náboje:

$$\varphi(\vec{r}) = k\int_c \frac{\eta(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dl' \;,\; \varphi(\vec{r}) = k\int_S \frac{\sigma(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dS' \;,\; \varphi(\vec{r}) = k\int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r}-\vec{r}_i'|}dV'$$

**Ekvipotenciální plochy**: $\varphi(\vec{r}) = \text{konst.}$

$\vec{E}$ je kolmá na ekvipotenciální plochy => siločáry jsou kolmé na ekvipotenciální plochy

$\varphi(\vec{r}+\Delta\vec{r}) - \varphi(\vec{r}) \doteq -\vec{E}\cdot\Delta\vec{r}$, při posunu ve směru $\vec{E}$: $E \doteq (\varphi_1-\varphi_2)/\Delta l$

( intenzita = spád potenciálu, jednotkou $E$ je V/m )

**Napětí** je rozdíl potenciálů: $U = \varphi_1 - \varphi_2$ , $U_{12} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E}\cdot d\vec{r}$

Práce sil pole je $W(\vec{r}_1) - W(\vec{r}_2) = qU_{12}$

---

**Rovnice pro elektrostatické pole**:

$\boxed{\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0}$ , **elektrostatické pole je konzervativní**

$\Leftrightarrow$ $\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} = 0}$ (elektrostatické pole je **nevírové**)

$\boxed{\Delta\varphi = -\frac{\rho}{\varepsilon_0}}$ (Laplaceova-Poissonova rovnice); ve vakuu ( $\rho = 0$ ): $\boxed{\Delta\varphi = 0}$ (Laplaceova rovnice)

čili $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$

# Dodatek 2.A: Potenciál nabité koule, přímky a roviny

## **Potenciál nabité koule** (náboj na ní je rozložen sféricky symetricky)

### Vně koule

Elektrická intenzita vně koule je stejná jako intenzita buzená bodovým nábojem, takže potenciál je stejný jako potenciál bodového náboje:

$$\varphi(\vec{r}) = k\frac{Q}{r} \ . \tag{2.A.1}$$

Zde $Q$ je celkový náboj koule, $r$ vzdálenost od jejího středu a $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Vztah platí pro $r \geq R$, kde $R$ je poloměr koule.

### **Uvnitř koule** (homogenně nabité s hustotou náboje $\rho$)

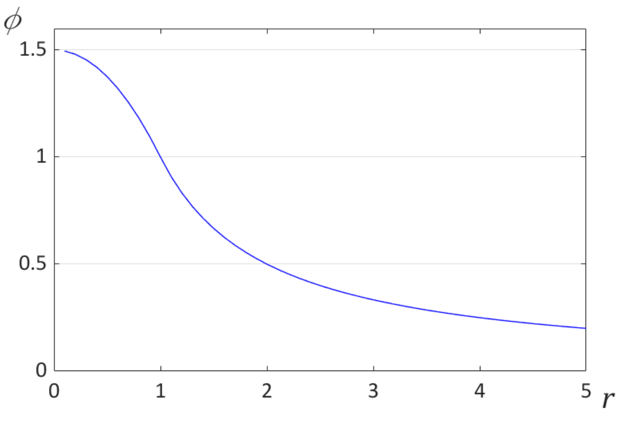
Elektrická intenzita má radiální směr a je $E_r = \frac{1}{3}\frac{\rho}{\varepsilon_0}r = \frac{1}{3\varepsilon_0}\frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}r = k\frac{Q}{R^3}r$, kde $R$ je poloměr koule. Potenciál získáme integrací:

$$\varphi(r) = -\int_0^r E_r(\tilde{r})d\tilde{r} + \varphi_0 = -k\frac{Q}{R^3}\int_0^r \tilde{r}d\tilde{r} + \varphi_0 = -k\frac{Q}{2R^3}r^2 + \varphi_0 \tag{2.A.2}$$

Toto platí pro $r \leq R$. Pro povrch koule, $r = R$, dává (2.A.2) hodnotu $\varphi(R) = -k\frac{Q}{2R} + \varphi_0$. Z (2.A.1), tedy z potenciálu vně koule, dostaneme $\varphi(R) = k\frac{Q}{R}$. Potenciál musí být na povrchu koule spojitý , takže $k\frac{Q}{R} = -k\frac{Q}{2R} + \varphi_0 \Rightarrow \varphi_0 = \frac{3}{2}k\frac{Q}{R}$ . Dosazení do (2.A.2) dá konečný výsledek

$$\varphi(r) = k\frac{Q}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right) \ . \tag{2.A.3}$$

Průběh potenciálu buzeného homogenně nabitou koulí o poloměru 1 ukazuje graf:[57]




[57] V grafu neuvádíme jednotky, protože jde jen o ukázku typického průběhu. (Odpovídá hodnotám $kQ$ = 1, $R$ = 1 ve vzorci (2.A.3).)

## Potenciál nabité přímky

Předpokládáme homogenně nabitou přímku, délková hustota náboje je tedy $\eta = \mathrm{konst.}$ Vzdálenost od přímky budeme označovat $R$. Intenzita v radiálním směru (tedy kolmo na přímku) je $E_R = 2k\dfrac{\eta}{R}$.
Potenciál závisí jen na $R$, dostaneme ho integrací

$$\varphi(R) = -\int_{R_0}^{R} E_R(\tilde{R})\,d\tilde{R} + \varphi_0 = -2k\eta\int_{R_0}^{R}\frac{1}{\tilde{R}}\,d\tilde{R} + \varphi_0 = -2k\eta\ln\left(\frac{R}{R_0}\right) + \varphi_0 \ ,$$

takže

$$\varphi(R) = 2k\eta\ln\left(\frac{R_0}{R}\right) + \varphi_0 \ . \tag{2.A.4}$$

Upozornění: V tomto případě nemůžeme volit nulovou hladinu potenciální energie v nekonečnu.

## Potenciál nabité roviny

Uvažujeme homogenně nabitou rovinu, plošná hustota náboje $\sigma = \mathrm{konst.}$ Souřadnici kolmou na rovinu označíme $x$. Intenzita je kolmá k rovině a nezávisí na vzdálenosti od roviny. Její složka je $E_x = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}\dfrac{x}{|x|}$. Potenciál dostaneme integrací:

$$\varphi(x) = -\int_0^x E_x(\tilde{x})\,d\tilde{x} + \varphi_0 = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\int_0^x \frac{\tilde{x}}{|\tilde{x}|}\,d\tilde{x} + \varphi_0$$

Integraci je vhodné rozdělit na případy $x$>0 a $x$<0:

pro $x$>0: $$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^x 1\,d\tilde{x} + \varphi_0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}x + \varphi_0$$

pro $x$<0: $$\varphi(x) = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\int_0^x (-1)\,d\tilde{x} + \varphi_0 = -\frac{\sigma}{2\varepsilon_0}(-x) + \varphi_0$$

Pro oba případy můžeme výsledek zapsat jediným výrazem:

$$\varphi(x) = \varphi_0 - \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}|x| \ . \tag{2.A.5}$$

Potenciál klesá lineárně se vzdáleností od roviny. Ani v tomto případě nemůžeme volit nulovou hladinu potenciálu v nekonečnu.