Vodič v elektrostatickém poli

V této kapitole se budeme věnovat chování vodičů v elektrostatickém poli a tomu, jak vodiče ovlivňují pole ve svém okolí.

Na úvod jen stručně připomeneme rozdíl mezi izolanty a vodiči. Například když třením zelektrujeme kus plastové tyče, můžeme se přesvědčit, že náboj zůstává na tom „kousku“, nešíří se na další části tyče. Můžeme říci, že jednotlivé kousky tyče jsou vzájemně izolovány – materiály, které se takto chovají, nazýváme **izolanty**.[1] [2]

Naopak když nabijeme například kovovou plechovku, nezůstane náboj jen v místě, které jsme nabili, ale rozšíří se na celou plechovku. Můžeme říci, že materiál umožňuje náboj vést do celé plechovky; takovéto materiály tedy nazýváme **vodiče**.

V kovových vodičích jsou náboji, které se mohou přemisťovat, elektrony; v kapalinách to jsou ionty, v plynech (a v plazmatu) ionty ev. také elektrony. My se zatím budeme rozložení a pohybu náboje věnovat z makroskopického resp. fenomenologického hlediska, takže budeme mluvit o pohybu jak záporného, tak kladného náboje, i když víme, že reálně se v kovech přemisťují jen elektrony.[3]

Co nás v souvislosti s vodiči v elektrostatickém poli bude zajímat? Například následující otázky:

- Jak se náboj rozloží ve vodiči ev. na jeho povrchu?
- Jak je to s potenciálem na vodiči a ve vodiči?
- Jaká je elektrická intenzita ve vodiči? A co v dutině ve vodiči?
- Jak vodič ovlivňuje elektrostatické pole ve své blízkosti?
- Jak „uskladnit“ na vodiči co nejvíc náboje?
- Mají nabité vodiče nějakou energii? Jak velkou?

S tím, co už známe o náboji, potenciálu a intenzitě, dokážeme tyhle otázky postupně zvládnout.

---

[1] Samozřejmě už jsme je poznali. Když jsme například nabíjeli sami sebe z van de Graafova generátoru, stáli jsme na izolační podložce, abychom se nevybili „do země“. Podobně když chceme nabít kovovou plechovku (viz další text), dáváme ji také na izolační podložku; koule van de Graafova generátoru je také držena podpěrami z izolantů. Zkuste vymyslet další podobné příklady.

[2] Ve skutečnosti žádný izolant není úplně ideální (s výjimkou vakua – ale jak byste chtěli stát na izolační podložce z vakua? ☺). Vodivosti různých materiálů se budeme věnovat v kapitole o elektrickém proudu.

[3] Když třeba plechovku nabijeme kladným nábojem ze zelektrované skleněné tyče, řekneme, že kladný náboj se rozmístil po celé plechovce (říci, že se „rozlezl“ je už hodně hovorové a slangové, ale docela názorné) – i když reálně se elektrony i ze vzdálenějších částí plechovky přesunuly k té skleněné tyči a na ni.

3.1 Náboj, potenciál a intenzita na vodiči a v něm

Víme už, že náboj se může ve vodiči volně pohybovat. Jak se ve vodiči rozloží? Uvažujme pro začátek snad nejjednodušší případ: nabitou kouli.

Kde bude náboj v nabité kouli?

Mějme vodivou kouli nabitou nábojem Q. Možností, kde bude tento náboj rozložen, si můžeme představit mnoho. Náboj by mohl být například:

- rovnoměrně rozložen uvnitř koule,
- spíše u středu,
- spíše u povrchu,
- jen na povrchu,
- rozložen jinak.

? Tak kde je ve skutečnosti náboj? A proč?

Koule je sféricky symetrická, takže zřejmě rozložení náboje bude také sféricky symetrické.[4] Náboje stejného znaménka se odpuzují, takže kvalitativně můžeme usoudit, že se od sebe budou snažit dostat co nejdál, tedy k povrchu vodiče. Budou tedy na povrchu koule, nebo možná těsně u něj. Jejich rozložení tedy popíšeme plošnou hustotou náboje $\sigma = Q/(4\pi R^2)$, kde R je poloměr koule.[5]

Co když ale půjde o vodič jiného tvaru – třeba plechovku (tedy řekněme vodivý válec), kouli, z níž vybíhá hrot, nebo třeba člověka[6]?

Situace uvnitř vodiče

Pro pochopení situace ve vodiči vyjdeme z otázky:

? Může být uvnitř vodiče nenulová elektrická intenzita, tedy $\vec{E} \neq 0$? [7]
Jde nám přitom o situaci ve *statickém* případě.

[4] Pozor: Bude tohle platit vždycky? (Napsat do věty „zřejmě“ zní hrozně sugestivně, ale vůči takovýmto tvrzením musíme být obezřetní.)
Pokud by v blízkosti koule byly další náboje, mohly by rozložení náboje na naší kouli ovlivnit. (A skutečně také ovlivní, ještě se k tomu dostaneme.) Takže náboj bude rozložen sféricky symetricky, když široko daleko od koule žádné další náboje nebudou, ideálně když půjde o jedinou vodivou nabitou kouli v prázdném vesmíru. ☺
Reálně to znamená, že nějaké další náboje musí být dostatečně daleko, aby naši kouli prakticky neovlivňovaly, resp. abychom jejich vliv mohli zanedbat.

[5] Jak se můžeme poučit třeba ve *Feynmanových přednáškách z fyziky*, náboj je rozložen těsně u povrchu ve vrstvičce zahrnující jednu až dvě vrstvy atomů. Učebnice Jackson: *Classical electrodynamics* uvádí graf ukazující, že rozložení hustoty náboje elektronů je v rozmezí asi ±0,2 nm od povrchu kovu. Z makroskopického hlediska je proto rozumné popisovat ho plošným rozložením náboje.

[6] Lidské tělo je také docela dobrý vodič, a člověka můžeme nabít, třeba když stojí na izolační podložce. Ostatně, každý jsme asi zažili situaci, kdy jsme si třeba svlékli svetr a pak jsme dostali „ránu“, když jsme si sáhli například na kliku nebo jiný kovový předmět.

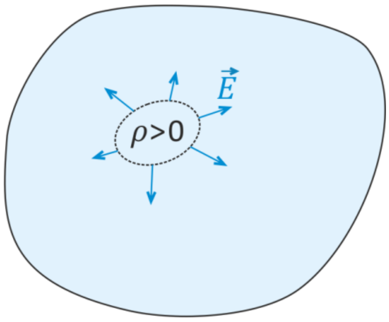
[7] Zkuste si na ni odpovědět sami dřív, než otočíte na další stránku.

Pokud je ve vodiči elektrické pole $\vec{E} \neq 0$, volné náboje se pod jeho vlivem pohybují. A to tak dlouho, dokud nenastane stav, kdy $\vec{E} = 0$.[8]

To znamená, že **uvnitř vodiče je ve statické situaci intenzita elektrického pole nulová**, $\vec{E} = 0$.

? Jak je to s hustotou náboje ve vodiči?

Hustotu náboje ϱ bereme jako spojitou veličinu.[9] Kdyby byla hustota náboje v nějakém bodě nenulová, řekněme konkrétně, že kladná, byla by proto kladná i v nějakém okolí tohoto bodu.



V daném okolí si zvolíme myšlenou Gaussovu plochu. Protože uvnitř ní by bylo $\rho > 0$, byl by i náboj uvnitř dané plochy

$$Q = \int_V \rho dV > 0 ,$$

takže i tok elektrické intenzity danou plochou by byl nenulový:

$$\int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\varepsilon_0} > 0 .$$

To znamená, že intenzita na dané ploše by musela být různá od nuly. Jenže výše jsme ukázali, že intenzita uvnitř vodiče je nulová. Čili náš výchozí předpoklad (nenulová hodnota ϱ) nemůže platit.

To znamená, že **uvnitř vodiče je ve statické situaci hustota elektrického náboje nulová**, $\rho = 0$.

Alternativně (a rychleji) tohle můžeme odvodit z Gaussovy věty elektrostatiky v diferenciálním tvaru, $\mathrm{div}\vec{E} = \rho/\varepsilon_0$. Z ní pro hustotu náboje plyne $\rho = \varepsilon_0 \mathrm{div}\vec{E}$. A když je ve vodiči $\vec{E} = 0$, je tam také $\mathrm{div}\vec{E} = 0$.[10] Takže okamžitě vidíme, že ve vodiči $\rho = 0$.

Můžeme tedy říci, že **v elektrostatice jsou náboje pouze na povrchu vodičů.**[11]

Rozložení náboje na povrchu vodiče ovšem může být složité, k tomu se ještě dostaneme. (Rozhodně *neplatí*, že by plošná hustota náboje na povrchu vodiče byla obecně konstantní!)

---

[8] Fakticky toto nastává, když třeba vodivou kouli nabijeme dotykem zelektrované tyče. Po nepatrnou chvilku se volné náboje v kouli pohybují, dokud se nedosáhne „rovnovážného“ rozložení nábojů, tedy rozložení, při němž je intenzita el. pole ve vodiči nulová. (Nesmíme si ovšem představovat, že po kouli se „rozlezou“ právě ty elektrony, které jsme na nějaké místo na kouli přidali třeba záporně nabitou tyčí. Pohnou se obecně všechny volné náboje v materiálu. Ostatně – ale to už jdeme za rámec úvodního kurzu elektřiny a magnetismu – kvantová fyzika nás naučí, že elektrony jsou nerozlišitelné, takže nemůžeme poznat ty, které jsme na kouli přidali od těch, které už v ní byly.) Statická situace se ovšem ustaví nesmírně rychle; dá se odvodit, že u dobrých vodičů je tzv. relaxační doba náboje (za níž se intenzita el. pole v daném místě vodiče sníží e-krát) řádu jen asi 10^{-18} s.

[9] To je rozumné, protože ji dostáváme středováním z nábojů v určitém okolí daného bodu a bereme ji tedy vlastně „rozmazanou“ resp. „vyhlazenou“ na škále větší než jsou rozměry atomů a molekul.

[10] Když jsou všechny složky $\vec{E}$ nulové, jsou nulové i jejich parciální derivace, takže i $\mathrm{div}\vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$.

[11] Ovšem pozor, tím míníme náboje „dodatečně přivedené“ na vodič. Ve vodiči je samozřejmě velice mnoho nábojů. (Odhadněte si celkový náboj všech protonů a celkový náboj všech elektronů v malé kovové kuličce!) Uvnitř vodiče se ale náboje protonů a elektronů vyrovnají – když mluvíme o tom, že náboje jsou jen na povrchu vodičů, tak tyhle vzájemně vyrovnané náboje elektronů a protonů nepočítáme.

V dalším chápání situace ve vodiči, na vodiči i v jeho okolí nám pomůže ještě jiná otázka:

? Je ve vodiči (ev. na vodiči) něco konstantní?

Ano, je, a to elektrický potenciál. Proč je tomu tak, můžeme dokázat například tak, že ze vztahu (2.6) spočteme rozdíl potenciálů ve dvou bodech:

$$\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{E} \cdot d\vec{r} \tag{3.1}$$

Když jsou body $\vec{r}_1$ a $\vec{r}_1$ uvnitř vodiče nebo na něm a křivkový integrál v (3.1) počítáme přes křivku ležící ve vodiči, je v integrálu všude $\vec{E} = 0$, takže dá nulu. Je tedy $\varphi(\vec{r}_2) - \varphi(\vec{r}_1) = 0 \;\Rightarrow\; \varphi(\vec{r}_2) = \varphi(\vec{r}_1)$.

Alternativně můžeme konstantnost potenciálu dokázat i bez křivkového integrálu:

Energie náboje q v místě $\vec{r}$ je $W = q\,\varphi(\vec{r})$. Kdyby potenciál nebyl konstantní, měl by náboj (například elektron) v různých místech vodiče různou energii. Tahle situace by ale nebyla statická – z míst o vyšší energii by se náboje přesouvaly do míst o nižší energii, dokud by nabyla ustavena rovnováha.[12]

Vidíme tedy, že:

Elektrický potenciál ve vodiči a na něm má ve statické situaci **všude stejnou hodnotu**.[13]

Tento výsledek můžeme potvrdit pokusem. Potenciál (tedy „napětí proti zemi“) v něm měříme elektrostatickým voltmetrem. Když se jeho sondou dotýkáme různých míst vodiče, třeba nabité plechovky, ukáže voltmetr vždy stejnou hodnotu.[14]

Ve vodiči je tedy vlastně elektrické pole docela „nezajímavé“. Podívejme se, jak je to v okolí vodičů.

[12] Dobrou analogií (kde místo elektrických sil jsou síly gravitační) je hladina klidné vody. Na té také nemůže být „kopeček“ nebo v ní být „díra“ – z míst výše (tedy o vyšší energii) by kapky vody stekly níže, tedy do míst o nižší energii.

[13] Podstatné je to ***ve statické situaci***. V obvodu s elektrickým proudem je tomu jinak. Například když proud z baterie prochází žárovičkou na napětí 3,5 V, liší se potenciál na obou vývodech žárovičky právě o těch 3.5 V, i když jsou vývody uvnitř spojeny vláknem žárovky, tedy vodičem. (Pozn.: Těch 3,5 V neberte nijak absolutně; jen proto, že je to na žárovičce napsáno. Tuhle žárovičku často napájíme třeba z ploché baterie, tedy napětím 4,5 V; žárovička to vydrží. Rozdíl potenciálů je pak samozřejmě 4,5 V.)

[14] Napětí zde musíme měřit elektrostatickým voltmetrem. Jednak běžný multimetr neměří tak vysoká napětí, jaká při elektrostatických pokusech máme, a jednak bychom jím třeba nabitou plechovku prakticky okamžitě vybili. (Jak rychle by to bylo, budeme umět spočítat, až se v kapitole 9 seznámíme s vybíjením kondenzátorů.)

3.2 Pole vně vodiče a jak ho určit

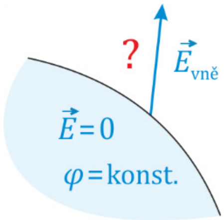
Na první pohled by se zdálo, že když elektrický náboj sídlí jen na povrchu vodičů, půjde elektrické pole v jejich okolí určit třeba ze vztahu (2.13), tedy $\varphi(\vec{r}) = k\int_S \sigma(\vec{r}') / |\vec{r} - \vec{r}_i'| \, dS'$. Ovšem pro výpočet bychom museli znát, jaká je plošná hustota $\sigma(\vec{r}')$, tedy jak je náboj na povrchu vodičů rozložen. Toto rozložení je ale ovlivněno okolními náboji; navíc náboje na vodičích se ovlivňují i vzájemně. Obecně tedy není výpočet pole buzeného nabitými vodiči úplně jednoduchý.[15] Naštěstí o chování elektrického pole v okolí vodičů můžeme leccos odvodit i bez toho, abychom pole přesně spočetli.

Elektrické pole v těsné blízkosti vodiče

Pojďme se podívat, co můžeme říct o elektrickém poli těsně u povrchu vodiče. Budeme přitom uvažovat vodič ve vakuu.[16]

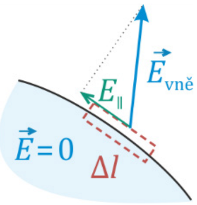
1) Směr elektrické intenzity

Jaký směr má elektrická intenzita těsně u povrchu vodiče? Může třeba mířit šikmo, jak to ukazuje obrázek?

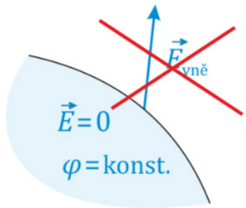


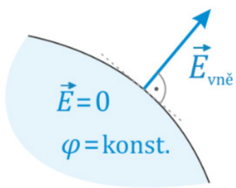
Jednoduchá úvaha nám napoví, že nemůže. Povrch vodiče je ekvipotenciální plocha – a elektrická intenzita je na ekvipotenciální plochy kolmá.

Pokud by se vám uvedená úvaha jevila příliš zkratkovitá[17], můžeme kolmost $\vec{E}$ na povrch vodiče dokázat i jinak. Elektrostatické pole je konzervativní, to znamená, že $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$, viz vztah (2.29) v předchozí kapitole. Za křivku c můžeme vzít malý obdélníček, jehož delší strany jsou rovnoběžné s povrchem vodiče; jedna strana je ve vodiči, druhá vně, těsně u povrchu, viz obrázek vlevo.[18] Strana obdélníka uvnitř vodiče dá k integrálu nulový příspěvek (protože je tam $E = 0$). Kratší strany dají zanedbatelný příspěvek, protože jejich délku budeme limitovat k nule.[19] Jediný příspěvek dá delší strana vně vodiče. Je-li obdélníček velmi malý, je elektrická intenzita na dané straně obdélníku prakticky konstantní a její příspěvek k integrálu je $E_\parallel \Delta l$, kde $E_\parallel$ je složka elektrické intenzity kolmá k rozhraní a Δl je délka strany obdélníka. Je tedy $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = E_\parallel \Delta l$.[20] Protože daný křivkový integrál musí být roven nule a $\Delta l \neq 0$, je nutně $E_\parallel = 0$.



Platí tedy:





---

[15] Ale nebojte se, ukážeme si, jak se to dá, byť třeba s pomocí výpočetní techniky, zvládnout. A konkrétně se v našem úvodním kurzu elektřiny a magnetismu budeme věnovat jen jednoduchým případům.

[16] Leccos pak půjde přenést i na vodič v nevodivém prostředí, tedy v dielektriku, až se s ním v další kapitole seznámíme.

[17] Ale ona je korektní, rozmyslete si, že v ní není žádný „podfuk“.

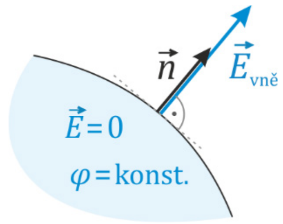
[18] Povrch vodiče může být samozřejmě zakřivený, ale pokud zvolíme náš obdélník velmi malý, lze zakřivení povrchu zanedbat a delší strany obdélníku „připlácnout“ těsně k povrchu.

[19] Jak jsme uvedli, delší strany „připlácneme“ k povrchu, jednu zevnitř, druhou zvenku.

[20] Striktně vzato bychom zde měli psát přibližnou rovnost, ale poté co rozměry obdélníčku budeme limitovat k nule, bude daný vztah přesný.

Elektrická intenzita u povrchu vodiče je kolmá na povrch.

U povrchu vodiče má tedy elektrická intenzita směr normálového vektoru k povrchu:[21]

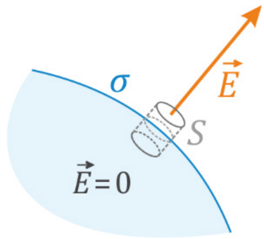


$$\vec{E}_{\text{u povrchu}} = E_n \vec{n}\,. \tag{3.2}$$

Symbolem E_n zde označujeme *normálovou složku* elektrické intenzity, tedy

$$E_n = \vec{E}\cdot\vec{n}\,.^{22} \tag{3.3}$$

2) Velikost elektrické intenzity



Velikost intenzity u povrchu určíme pomocí Gaussovy věty. Gaussovu plochu zvolíme ve tvaru maléhoválečku jehož osa je kolmá na povrch vodiče. Jadna podstava válečku je uvnitř vodiče, druhá vně vodiče, těsně u povrchu. Tok pláštěm válečku je nulový[23], tok podstavou uvnitř vodiče je také nulový[24]. Takže celkový tok z válečku je roven toku podstavou vně vodiče, tedy $E_n{\cdot}S$.[25]

Náboj uvnitř válečku je dán plošnou hustotou σ na povrchu: $Q = \sigma\,S$. Z Gaussovy věty elektrostatiky dostaneme

$$E_n S = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S\,,^{26}$$

takže

$$E_n = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma\,. \tag{3.4}$$

Dosazením do (3.2) dostaneme pro elektrickou intenzitu na povrchu vodiče

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}\,.} \tag{3.5}$$

Tento výsledek je znám pod názvem **Coulombova věta**.[27]

Příklad: Vodivá sféra nebo koule o poloměru R ve vakuu (v jejímž okolí nejsou žádné náboje) nabitá nábojem Q bude mít na povrchu plošnou hustotu náboje $\sigma = Q/(4\pi R^2)$. Podle Coulombovy věty bude elektrická intenzita u jejího povrchu $\vec{E} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{Q}{4\pi R^2}\frac{1}{\varepsilon_0}\vec{n} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}\frac{\vec{r}}{r}$, což je výsledek shodný s tím, co už o poli sféricky symetricky nabité koule víme.[28]

---

[21] Normálový vektor orientujeme ***ven*** z vodiče.

[22] E_n může být kladné i záporné. Pro $E_n < 0$ míří elektrická intenzita k vodiči, tedy opačně, než je nakreslena na obrázku.

[23] Protože intenzita je k plášti tečná.

[24] Protože ve vodiči je intenzita nulová.

[25] Plochy S bereme tak malou, že je na ní intenzita prakticky konstantní, Takže pro výpočet toku nemusíme integrovat, stačí plochu intenzitou násobit. Ve vztahu vyjde E_n protože: $\int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS \approx \vec{E}\cdot\vec{n}\,S = E_n S$. Nakonec budeme plošku S zmenšovat k nule, takže v limitě se přibližná rovnost stanou přesnou.

[26] Podrobněji: $E_n S = \int_S \vec{E}\cdot\vec{n}\,dS = \int_{\substack{\text{povrch}\\ \text{G. plochy}}} \vec{E}\cdot d\vec{S} = \frac{1}{\varepsilon_0}Q = \frac{1}{\varepsilon_0}\sigma S\,.$

[27] V ní už u intenzity nevyznačujeme, že je vně vodiče a těsně u povrchu.
Všimněte si, že intenzita míří od vodiče, když je plošná hustota náboje kladná, do vodiče, když je σ<0.

[28] Viz (1.49). Normálový vektor má radiální směr: $\vec{n} = \vec{r}/r$, intenzitu vyčíslujeme ve vzdálenosti $r = R$ od středu koule.

Jak je náboj rozložen na povrchu vodiče

Jak je náboj rozložen na vodiči, to zatím nevíme. Víme už ale, že jeho rozložení je svázáno s velikostí elektrické intenzity u povrchu. A pokusů víme, že intenzita souvisí s tím, jak je povrch vodiče zakřiven. U hrotů vodičů totiž náboj často srší a snadněji tam přeskočí jiskra než třeba mezi koulemi o velkém poloměru. Zřejmě je tedy u hrotů silnější elektrické pole.

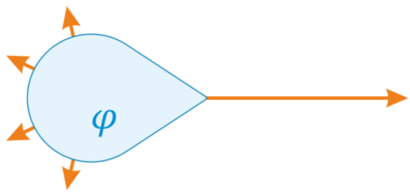
Určitou představu, proč je u zakřivenějšího povrchu silnější pole, nám může poskytnout modelová situace: dvě vodivé koule nabité tak, aby měly stejný potenciál φ.[29] Elektrostatický potenciál koule o poloměru R a náboji Q a radiální složka elektrické intenzity u jejího povrchu jsou

$$\varphi = k\frac{Q}{R}, \qquad E_r(R) = k\frac{Q}{R^2} \,. \tag{3.6}$$

Odtud plyne, že intenzita na povrchu koule je $E_r(R) = \frac{\varphi}{R}$. Čili na povrchu dvakrát menší koule je dvakrát větší elektrická intenzita, jak to ukazuje obrázek.[30]

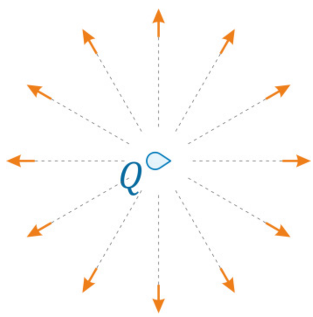
U desetkrát menší koule (tedy u koule desetkrát víc zakřivené[31]) je intenzita desetkrát větší. Ostré hroty mají malý poloměr křivosti, tedy velkou křivost, takže zřejmě u nich bude vysoká intenzita.

Úplně zřejmé to ovšem není. V našem příkladu šlo o dvě vzdálené koule, které se nijak neovlivňovaly. Reálně ale obvykle jde o jeden vodič s jedním nebo více hroty. Pro jednoduchost si můžeme představit modelový příklad nabitého tělesa třeba takového, jako je na obrázku.[32]



Kvalitativně můžeme pochopit, proč je u hrotu velká intenzita, na základě chování elektrického toku. Podívejme se nejprve na situaci z velké vzdálenosti. Hodně daleko se elektrické pole prakticky chová jako pole bodového náboje.

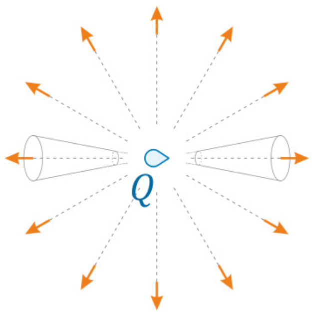
To znamená, že daleko od daného vodiče je velikost elektrické intenzity ve všech směrech prakticky stejná, tak jak to naznačuje obrázek.[33]



Podíváme se teď na tok elektrické intenzity v (myšlených) trubicích, jejichž plášť je tvořen siločarami.

---

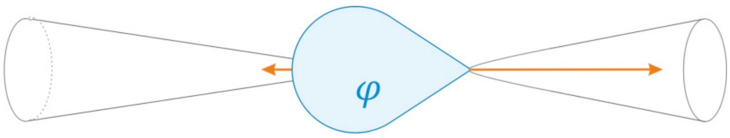
[29] Uvažujeme je přitom tak daleko od sebe, aby se vzájemně neovlivňovaly, rozložení náboje na každé kouli tedy bereme jako sféricky symetrické.
[30] I když náboj na menší kouli je menší, to vidíme z prvního vztahu v (3.6).
[31] Křivost sféry o poloměru R je $1/R^2$. (Přesněji jde o tzv. Gaussovu křivost, s tím se blíže seznámíte v matematice.)
[32] Na obrázku je vyznačena intenzita elektrického pole jen v několika bodech. (Samozřejmě je nenulová u celého povrchu tělesa.) Délka úsečky vyznačující velikost intenzity není úplně v měřítku, šipka označující intenzitu u hrotu by měla být ještě výrazně delší.
[33] Samozřejmě ve stejné vzdálenosti od našeho kousku vodiče.



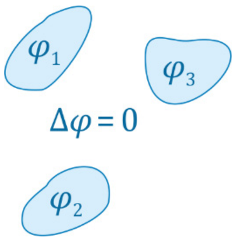
V dané trubici ze siločar je tok ve všech průřezech stejný.[34] Tok je roven $E{\cdot}S$ [35], takže čím menší je plocha průřezu S, tím vyšší je elektrická intenzita.

Na obrázku vlevo je vidět, že toky oběma vyznačenými silovými trubicemi budou stejné. Všimněme si teď, jak budou dané silové trubice pokračovat směrem k povrchu vodiče.

Silová trubice mířící na část vodiče, kde není hrot[36] „vytkne" na povrchu vodiče mnohem větší plochu než silová trubice, která končí na hrotu. Tok oběma trubicemi je stejný, intenzita u hrotu tedy musí být mnohem vyšší než na málo zakřivené části vodiče.



Naše úvaha je sice názorná, ale jen kvalitativní. Skutečnost, že u hrotů je elektrická intenzita výrazně vyšší než na méně zakřivených částech povrchu vodiče, vychází i z přesných výpočtů založených na rovnicích pro elektrostatické pole.



Rovnicí, která se užívá, je Laplaceova rovnice, $\Delta\varphi = 0$. Obrázek vlevo naznačuje možnou situaci: několik vodičů, jejichž potenciály jsou zadány, v prostoru kolem nich je vakuum a platí tam tedy Laplaceova rovnice. Jejím vyřešením získáme potenciál $\varphi(\vec{r})$ [37] a z něj pak elektrickou intenzitu.

Pro vodiče s hrotem a podobné tvary Laplaceovu rovnici řešit nebudeme.[38] Za chvíli nám ale pomůže pochopit, jak je to s elektrickým polem v dutině vodiče.

Praktická poznámka k provádění pokusů:
Na skutečnost, že u hrotů (a také ostrých hran) je elektrostatické pole silné a může z nich sršet náboj, je potřeba myslet při provádění pokusů. Ostrých hrotů a hran je třeba se vyvarovat (pokud nechceme předvádět pokusy ukazující právě to sršení a jeho důsledky), protože díky nim náboj z nabitých kovových předmětů snadno „utíká" a pokusy se pak nedaří.

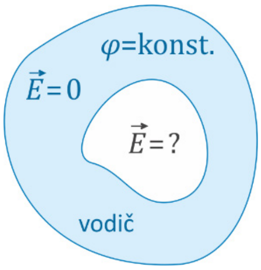
Praktická poznámka týkající se hromosvodů:
Že se k ochraně před bleskem používají hromosvody, všichni víme. Často vidíme jejich nejvyšší část jako svislou kovovou tyč.[39] Člověk by se mohl domnívat, že horní konec tyče hromosvodu by měl být co nejostřejší, „aby dobře sršel". Podle dostupných informací je ale vhodnější mírné zaoblení vrcholu tyče.[40]

---

[34] Pláštěm trubice je tok nulový, protože el. intenzita je k plášti tečná, a celkový tok z Gaussovy plochy tvořené pláštěm a dvěma průřezy („podstavami") je roven nule, protože uvnitř této plochy není žádný náboj. Takže, názorně řečeno, „co vteče jednou podstavou, musí vytéct druhou". Ostatně jsme se s tím setkali už v minulé kapitole.
[35] Plochu bereme tak malou, že elektrická intenzita na ní bude prakticky konstantní. Vše by šlo matematicky zpřesňovat (např. brát zde střední hodnotu el. intenzity), ale pro naši kvalitativní úvahu to není nezbytné.
[36] Na obrázku je to levá silová trubice.
[37] Zde je to řečeno tak, jako by řešení Laplaceovy rovnice byla trivialita, kterou zvládne každý žák základní školy. ☺ Tak to samozřejmě není. Za chvíli si ukážeme řešení v jednom konkrétním jednoduchém případě a naznačíme, jak jde Laplaceova rovnice řešit numericky pomocí počítače. Do složitějších metod
[38] Teď jste si možná oddechli, že? ☺
[39] Ta musí být vyvýšena nad střechu objektu, aby případný blesk zasáhl ji a ne střechu, a musí být dobře vodivě spojena se zemí.
[40] Viz např informace na https://en.wikipedia.org/wiki/Lightning_rod.

Elektrostatické pole v dutině vodiče

Podívejme se na situaci, kdy ve vodiči je dutina, viz obrázek. Vodič přitom může být nabitý, vně něj mohou být nějaké náboje (které tam vytvářejí elektrické pole) – ale v dutině samotné je vakuum a žádné náboje v ní nejsou.

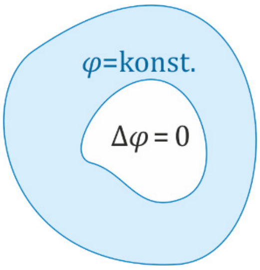


Už víme, že ve vodiči samotném je intenzita nulová, takže jeho potenciál je konstantní. A náboje na vodiči sídlí jen na povrchu.

Povrchem vodiče je ovšem i povrch dutiny. Mohly by i na něm sídlit nějaké náboje? A jak je to s elektrickým polem uvnitř dutiny?[41]

Situaci můžeme zkoumat experimentálně. Pokusem se můžeme přesvědčit, že na vnitřním povrchu vodiče (tedy na rozhraní vodič-dutina) žádné náboje nejsou.[42] Pomůže nám teorie pochopit, proč tomu tak je?

Pomůže. V dutině, kde nejsou žádné náboje, totiž musí platit Laplaceova rovnice



$$\Delta\varphi = 0 \ . \tag{3.7}$$

Okrajem dutiny je vnitřní povrch vodiče. Na něm (stejně jako v celém vodiči) je potenciál konstantní. Na okraji dutiny tedy platí

$$\varphi = \text{konst.} \ .^{43} \tag{3.8}$$

Elektrické pole v dutině tedy najdeme řešením rovnice (3.7) s okrajovou podmínkou (3.8).[44]

Řešení je velice jednoduché, prostě

$$\varphi = \text{konst.} \ \ \text{všude v dutině.}^{45} \tag{3.9}$$

Matematici nás navíc poučí, že řešení Laplaceovy rovnice se zadanými hodnotami potenciálu na okrajích příslušné oblasti je ***jednoznačné***.[46] To znamená, že když je potenciál na okrajích dutiny konstantní, *nemůže být uvnitř dutiny jiný než konstantní*.

Odtud okamžitě plyne, že **intenzita uvnitř dutiny vodiče je nulová**, $\vec{E} = 0$.[47]

---

[41] Jinými slovy, jaká je uvnitř dutiny elektrická intenzita?

[42] Pokus se obvykle dělá tak, že malou vodivou kuličkou na izolační tyčce přenášíme náboj třeba na elektroskop nebo na jiný indikátor náboje. Náboj přenášíme z nabité vodivé sféry na izolačním podstavci. (V případě jednoduchých pomůcek může jít místo sféry o plechovku na kusu polystyrénu.) Sféra má přitom otvor, abychom mohli náboj přenášet i z její vnitřní strany. (U plechovky otvor je, prostě má sundané víčko.) Fakticky tedy nejde o dutinu zcela obklopenou vodičem, ale pokud je otvor malý a saháme dovnitř daleko od jeho okraje, výsledky prakticky odpovídají situaci s uzavřenou dutinou. Když sféru nebo plechovku nabijeme, dotykem kuličky na vnější stěnu a přenesením na elektroskop ukážeme, že nějaký náboj kulička měla, tedy že na vnější stěně sféry nějaký je. Kulička, která se dotýkala vnitřní stěny, ale žádnou reakci elektroskopu nevyvolá – zjevně na vnitřní stěně nebyl žádný náboj.

[43] Třeba φ=0 nebo φ = 15 kV, podle toho, na jaký potenciál je vodič nabit.

[44] Tohle je řečeno tak pěkně matematicky… Prostě potenciál musí být takový, aby $\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$ bylo v celém objemu dutiny rovno nule a na okraji dutiny bylo φ všude stejné (tedy rovno konstantě).

[45] Samozřejmě, druhé derivace konstanty podle x, y i z dají všechny nulu; splnění okrajové podmínky je také jasné.

[46] Zde se nebudeme věnovat podrobnostem; z čeho jednoznačnost řešení plyne, je pro zájemce nastíněno v Dodatku A.

[47] Je $\vec{E} = -\text{grad}\,\varphi = -\text{grad(konst.)} = 0$

Z Coulombovy věty (3.5), tedy ze vztahu mezi elektrickou intenzitou u povrchu vodiče a plošnou hustotou náboje σ na povrchu vodiče plyne $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E} \cdot \vec{n}$. Intenzita u vnitřního povrchu vodiče je nulová, takže na tomto povrchu je σ = 0. Takže už chápeme, proč **na vnitřním povrchu vodiče plošné náboje nejsou**.

Aplikace:

Těchto výsledků využívá **van de Graafův generátor**.[48] Nevodivý pás[49] svým pohybem přivádí náboj do vnitřku vodivé sféry. Tam je elektrické pole prakticky nulové, takže náboj z pásu snadno „vysrší“ do vodivých kartáčků spojených s vnitřním povrchem sféry. Na vnitřním povrchu ovšem nezůstane[50] a přejde na vnější povrch sféry, takže ta se stále víc a víc nabíjí.[51]

Uvedeného chování pole v dutině využívá i **Faradayova klec**. Do dutiny vodiče elektrostatické pole z nábojů vně vodiče nepronikᬠČasto se to formuluje slovy, že vodič vše v dutině od vnějšího elektrostatického pole ***odstíní***.

Nejde-li o celistvý vodič, ale skutečně o klec, jejíž stěny tvoří kovové pletivo, pak samozřejmě pole dovnitř zčásti proniká, ale typicky jen do vzdáleností srovnatelných s otvory v pletivu.

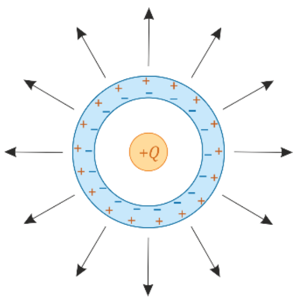
Často se uvádí, že Faradayova klec chrání i proti zásahu blesku, že jí dovnitř nepronikne ani elektromagnetické záření apod. Zde ovšem už nejde o statické elektrické pole a výsledky závisí na řadě okolností, například na tloušťce stěn, vodivosti materiálu, z něhož jsou a na velikosti otvorů (jde-li o stěny z pletiva).

Uvádí se například, že kovová karoserie auta či plášť letadla jsou ochranou proti blesku – ovšem při zásahu blesku bude karoserií protékat velký proud, takže mezi částmi karoserie může být krátkodobě vyšší napětí. A nápad chránit se proti blesku tím, že bychom se v bouřce zabalili do alobalu zřejmě není nic doporučeníhodného…

Pokud jde o elektromagnetické záření, jsme již hodně daleko od elektrostatiky a můžete si vyzkoušet, že třeba mobilní telefon přikrytý kovovým cedníkem nepřestane přijímat signál.[52]

Upozornění – jak je to se stíněním…

Vodič „nepustí“ do své dutiny elektrostatické pole zvenku. Ovšem pozor: Pokud dáme náboj **do dutiny** vodiče, v dutině samozřejmě elektrické pole bude. Ale navíc (pokud vodič není uzemněn), bude pole i vně vodiče! Příklad ukazuje obrázek: ve středu dutiny kulového vodiče je náboj Q (>0).



Na vnitřní stranu vodiče přitáhne záporné náboje, na vnější odpudí kladné. Kdybychom uvažovali sférickou Gaussovu plochu, tak tok $\vec{E}$ (krát ε_0) je roven celkovému náboji uvnitř – ale to je právě náboj Q. (Náboj stínítka je nulový.) Takže intenzita vně stínítka musí být stejná, jako by zde stínítko vůbec nebylo. (Rozmyslete si tento argument.)

Jiná situace by nastala, pokud bychom stínítko uzemnil (tedy přivedli na potenciál φ=0). Pak by pole vně stínítka bylo nulové.

[48] Nákres i princip viz např. https://cs.wikipedia.org/wiki/Van_de_Graaff%C5%AFv_gener%C3%A1tor.

[49] Nabitý u spodního okraje generátoru třením (u školní verze generátoru) nebo tím, že na něj náboj nasrší (u velkých van de Graafových generátorů).

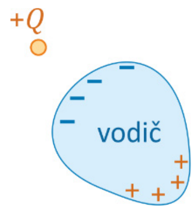
[50] V elektrostatice na vnitřním povrchu (a tedy ani na těch vodivých kartáčcích) žádné náboje nejsou.

[51] Kdybychom se snažili pásem dopravovat náboje na vnější povrch sféry, byly by odpuzovány (náboji, které už na sféře jsou) a na sféru už by přecházely jen „neochotně“ nebo vůbec ne. Uvnitř sféry je nic neodpuzuje, takže na její vnitřní povrch přecházejí stále „stejně ochotně“. (Fakticky „stejně ochotně“, jako bychom tento pás vybíjeli do nenabitého vodiče – rozmyslete si, proč je tomu tak.)

[52] A konec konců, světlo je také elektromagnetické záření a pletivem prochází…

3.3 Náboj v blízkosti vodiče, elektrostatická indukce, metoda obrazů

Uvažujme kus vodiče, který jsme nijak nenabili.[53] Celkový náboj takového vodiče je tedy nulový. Ovšem když poblíž vodiče umístíme náboj[54], ovlivní to rozložení náboje na povrchu vodiče. Celkový náboj zůstane nulový, ale kladné a záporné náboje se přerozdělí. Je-li $Q > 0$, přitáhne k bližšímu okraji vodiče záporné náboje, ty kladné odpudí na vzdálenější okraj, zhruba tak, jak to ukazuje obrázek.

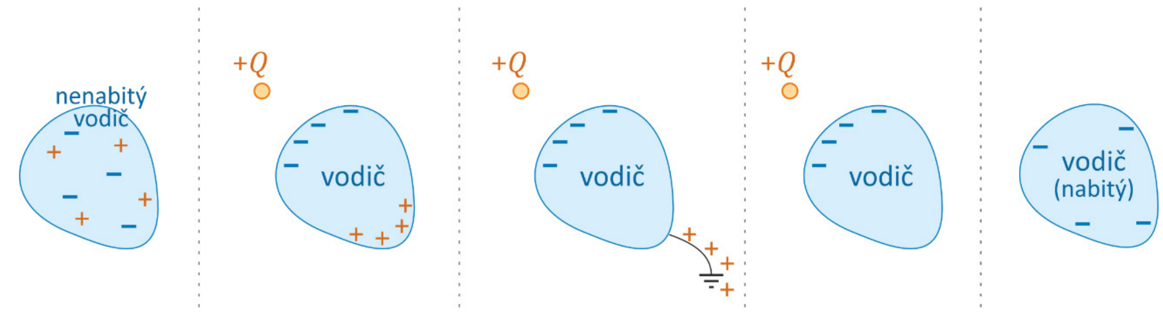


Z této úvahy můžeme hned odvodit, že náboj a vodič se budou přitahovat.[55] Tohle jsme viděli už v úvodních pokusech s nabitým brčkem: přitahovalo se i ke kovovým předmětům, tedy k vodičům. Podobně třeba zelektrovaná plastová tyč přitahuje lehkou kovovou plechovku.[56]

Elektrostatická indukce

Jev, která jsme popsali, se označuje termínem *elektrostatická indukce*: Přiblížením nabitého tělesa se ve vodiči „indukuje“ (tedy „vyvolá“) elektrický náboj.[57]

Elektrostatická indukce se používá i k nabíjení vodičů. Stačí náboje na opačné straně vodiče odvést. Jednotlivé fáze nabíjení indukcí ilustruje obrázek:



Vidíme, že vodič se při tomto ději nabije nábojem opačné polarity, než má náboj, který jsme přiblížili.[58]
Na stejném principu funguje ***Wimshurstova indukční elektrika***[59], což je oblíbený školní zdroj pro nabíjení na vysoké napětí. V ní se proti sobě otáčejí nevodivé kotouče s vodivými polepy ve tvaru proužků; její funkce je výrazně sofistikovanější, než výše uvedený příklad s jedním vodičem, princip je však stejný.[60]

---

[53] Třeba nenabitou plechovku stojící na kusu polystyrénu. Nebo člověka, stojícího na izolační podložce, kterého jsme také nijak nenabili.

[54] Třeba zelektrovanou plastovou nebo skleněnou tyč.

[55] Záporné náboje na vodiči jsou kladnému náboji Q blízko, kladné jsou dál, takže vliv těch záporných převládne.

[56] Můžeme takto plechovku „na dálku“ koulet po stole, což je známý ale stále atraktivní pokus. („Na dálku“ ovšem neznamená moc velkou dálku, typicky to funguje zhruba do deseti centimetrů.)

[57] „Indukuje“ zní vědecky, to, že se náboj „vyvolá“ zas zní trochu jako vyvolávání duchů… ☺. Vidíme ale, že náboj se jen tak „nevyvolá z ničeho“ (ani ze záhrobí ☺), ale prostě se na vodiči přerozdělí.

[58] Záporně nabitou plastovou tyčí tak například plechovku nabijeme kladně. Tyč přitom můžeme zasunout dovnitř plechovky (ale tak, aby se plechovky nedotkla); místo uzemnění drátem se vnějšího okraje plechovky prostě dotkněme rukou, tím náboj odvedeme. Pak musíme ruku oddálit a pak teprve dát pryč nabitou tyč.

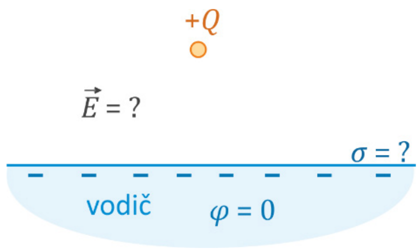
[59] Místo „indukční“ se také někdy říká *influenční*. Na webu je na řadě stránek tato pomůcka nazývána „indukční elektřina“, což mi osobně přijde jako přílišná, a ne příliš vhodná snaha o jazykovou korektnost. (Termín elektřina je lépe nechat pro označení celého souboru elektrických jevů.

[60] Popis a stručné vysvětlení činnosti viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Wimshurst_machine .

Metoda obrazů

Vypočítat rozložení náboje na vodiči obecného tvaru by bylo složité.[61] V jednoduchých případech nám ale může pomoci hezký „trik“, kterému se říká *metoda obrazů*.

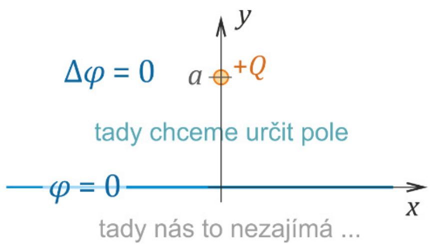
Ukažme si ji na nejjednodušším případě: náboje v blízkosti nekonečné vodivé roviny, tak jak nám situaci ukazuje obrázek.[62]



Na vodivé desce (a v ní) je konstantní potenciál; bez újmy na obecnosti ho můžeme vzít roven nule.[63]

Řekněme konkrétně, že náboj Q je kladný.[64] Z vodivé desky si na povrch blíže k sobě přitáhne záporné náboje.[65]

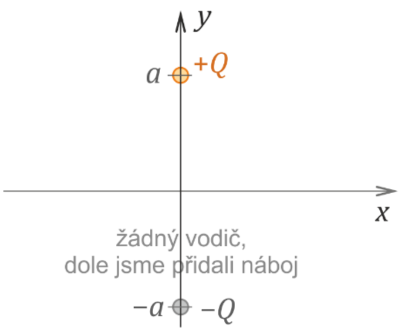
Záporné náboje rozložené na povrchu vodiče (s plošnou hustotou σ) spolu s nábojem Q jsou zdroji elektrického pole. Ovšem: rozložení náboje na povrchu neznáme![66] Tak jak máme určit, jaké je nad deskou elektrické pole, tedy jaká je tam intenzita $\vec{E}$?[67]



Úlohu budeme řešit pomocí potenciálu. Pro ten totiž víme, co máme splnit: V poloprostoru nad deskou musí být splněna Laplaceova rovnice $\Delta\varphi = 0$ a na desce samotné je $\varphi = 0$.

Obrázek ukazuje, jak můžeme v našem problému zavést souřadnice[68]. Problém nám stačí vyřešit v rovině xy, tedy pro $z = 0$.[69] Potřebujeme zjistit, jaký je potenciál $\varphi = \varphi(x, y)$ pro $y > 0$.

Co musí potenciál splňovat, je jasné: Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$ všude (kromě bodu, kde je náboj) a $\varphi = 0$ pro $y = 0$.



A teď přijde ten „trik“: Uvažujme situaci, kdy zde nebude *žádný vodič* (vše je ve vakuu) a *dva bodové náboje*, Q a $-Q$ na ose y, symetricky rozmístěné vůči rovině xz (tedy na souřadnicích $+a$ a $-a$), jak to ukazuje obrázek. ***Pole těchto dvou nábojů splňuje vše, co od řešení našeho problému požadujeme***: splňuje Laplaceovu rovnici i podmínku $\varphi = 0$ na rozhraní $y = 0$.

---

[61] Jediný schůdný způsob by zřejmě bylo nechat počítač numericky řešit Laplaceovu rovnici v okolí vodiče.

[62] Vodič může být v celém poloprostoru nebo může jít o tenkou vodivou desku, to je jedno. (Jaká je situace na druhé straně desky nás nezajímá, názorně můžeme říci, že oblast na druhé straně je vodivou deskou odstíněna. Zajímá nás jen, jaké je pole, které je v situaci dle obrázku nad deskou.)

[63] Konec konců, potenciál je určen až na konstantu, tak si ji zafixujeme právě tak, že na desce je $\varphi = 0$.

[64] Opět je to bez újmy na obecnosti. Kdyby byl záporný, v následujícím výpočtu by se jen změnilo znaménko.

[65] Ty kladné, co odpudí, odejdou do nekonečna. (Když půjde o reálnou desku konečných rozměrů, tak odejdou někam k okrajům, případně, pokud je deska uzemněná, „utečou do země“, prostě pryč, daleko, takže už pole v blízkosti náboje neovlivní.)

[66] σ rozhodně není konstantní! (Záporné náboje, které si Q přitáhne, budou spíš v jeho blízkosti, dál od Q půjde plošná hustota σ zřejmě k nule.)

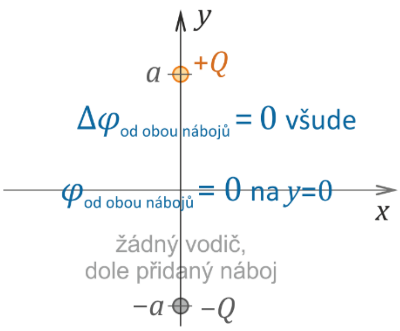
[67] Kdybychom znali rozložení σ, mohli bychom intenzitu určit integrováním příspěvků od jednotlivých kousků náboje. Naopak, kdybychom znali intenzitu (alespoň u povrchu vodiče), mohli bychom σ určit z Coulombovy věty (3.4). Ovšem my neznáme ani jedno. ☹ (Ale přece to nevzdáme…)

[68] Souřadnice z je kolmá na plochu obrázku.

[69] Protože situace je symetrická vzhledem k otočení kolem osy y.

Jak to, že jsou tyto podmínky splněny? Podívejme se na to podrobněji.

Pole bodového náboje ve vakuu splňuje Laplaceovu rovnici., pole buzené několika bodovými náboji také.[70] Takže pole buzené našimi dvěma náboji také určitě splňuje Laplaceovu rovnici.[71]



Pole splňuje i podmínku, že $\varphi = 0$ pro y = 0. Libovolný bod na y=0 je stejně vzdálen od obou nábojů, takže příspěvky k potenciálu od nich se odečtou.[72]

Takže jsme vlastně našli řešení původního problému!

Napoprvé se tento „trik" řadě lidí zdá zvláštní a těžko pochopitelný. Snad pomůže shrnout, co zde děláme:

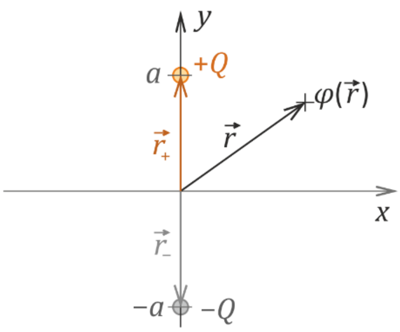
Označme si původní problém jako ***Situaci 1***: rovná (nekonečná) vodivá deska a nad ní náboj Q. Trik spočívá v tom, že uvažujeme ***Situaci 2***: žádný vodič, ale dva náboje (Q a -Q) symetricky umístěné vzhledem k rovině, v níž původně byla deska.

Víme, že pole v *Situaci 2* splňuje vše, co splňuje (na desce a nad ní) pole v *Situaci 1*.

Takže: Pole nad deskou v *Situaci 1* musí být přesně stejné, jako pole nad rovinou y=0 v *Situaci 2*.[73]

To znamená, že potenciál v bodě $\vec{r} = (x, y, z)$ je (i v *Situaci 1*!) pro $y \geq 0$ roven

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}_+|} - \frac{kQ}{|\vec{r} - \vec{r}_-|} = = kQ \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + (y-a)^2 + z^2}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + (y+a)^2 + z^2}} \right) . \tag{3.10}$$



Z potenciálu můžeme vypočítat složky intenzity[74]. Zajímavá je intenzita těsně nad vodivou deskou, tj pro y = 0. Vyjde E_x = 0 a E_z = 0 (samozřejmě, uvědomte si, proč[75]) a

$$E_y(y=0) = -\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{a}{\left(R^2 + a^2\right)^{3/2}}, \quad \text{kde } R^2 = x^2 + z^2 . \tag{3.11}$$

Z Coulombovy věty, resp. ze vztahu (3.4) odtud můžeme určit plošnou hustotu náboje, který se indukuje ve vodivé desce. (Tedy který si náboj +Q přitáhne na desce do své blízkosti „z nekonečna".) Tuto hustotu lze integrovat přes celou desku a získat tak náboj na desce. Výsledek (jak si laskavý čtenář jistě sám rád vypočte a zdůvodní ☺) je $-Q$.[76]

[70] Je vám jasné, proč tomu tak je? Zdůvodnění z „fyzikálního náhledu" i podrobnější matematické odvození najdete v dodatku B této kapitoly.

[71] S výjimkou bodů, kde „sedí" dané náboje.

[72] Jestliže vzdálenost nějakého bodu v rovině y=0 od náboje Q je rovna r, je tento bod stejně vzdálen i od náboje -Q. Potenciál v daném bodě je tedy $\varphi = kQ/r + k(-Q)/r = 0$.

[73] Co pro *Situaci 2* vyšlo „pod deskou", tedy pro y<0, nemá pro *Situaci 1* žádný význam. (V *Situaci 1* je tam vodič, resp. část prostoru odstíněná vodičem.)

[74] Nebo rovnou napsat vztah pro intenzitu pole dvou bodových nábojů.

[75] Intenzita u vodiče je kolmá k jeho povrchu.

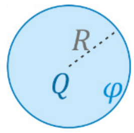
[76] Zkuste si to. (Výpočet i úvahu, proč tento výsledek očekáváme, si můžete zkontrolovat v Dodatku B.)

3.4 Kapacita vodiče, kondenzátor

Co je kapacita vodiče, můžeme „na vlastní kůži“ pocítit v jednoduchém pokusu. Postavíme malou a velkou plechovku na izolační podložky a nabijeme je na stejný potenciál.[77] Když si pak sáhneme na malou plechovku a pak na velkou, dostaneme v obou případech „ránu“ – ale od větší plechovky bude „rána“ větší. Přitom potenciál obou plechovek byl stejný; co na nich mohlo mít různou hodnotu, je náboj.[78]

Je tedy rozumné říci, že větší plechovka má větší ***kapacitu***, tedy schopnost pojmout při stejném potenciálu více náboje.

Pojďme si to ukázat i kvantitativně na jednoduchém příkladu: vodivé kouli resp. sféře o poloměru R.[79] Víme už (viz (3.6)), že když je nabita nábojem Q, je její potenciál[80]



$$\varphi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R} \; .$$

Odtud okamžitě

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 R\,\varphi \; . \tag{3.12}$$

Kapacitou vodiče[81] nazýváme poměr náboje a potenciálu:

$$\boxed{C = \frac{Q}{\varphi} \, .^{82}} \tag{3.13}$$

Pro kouli máme z (3.12) $Q = \underbrace{4\pi\varepsilon_0 R}_{C}\,\varphi$, takže **kapacita vodivé koule** je

$$\boxed{C = 4\pi\varepsilon_0 R \, .^{83}} \tag{3.14}$$

Jednotkou kapacity je 1 **farad**, značka F. Kapacitu 1 farad by měl vodič, který kdybychom nabili nábojem 1 coulomb, tak by měl potenciál 1 V.

Kapacita 1 F je ovšem hodně velká. Je totiž $4\pi\varepsilon_0 \doteq 1{,}11\cdot 10^{-10}$ F/m,[84] takže koule, která by měla kapacitu 1 F, by musela mít poloměr skoro 10^{10} m, tedy 10 miliónů km. Proto se v praxi užívají jednotky menší: mF (milifarad), ale zejména µF, nF a pF, tedy mikrofarad[85], nanofarad a pikofarad.

---

[77] Buď ze školního zdroje vysokého napětí (kde si zvolíme napětí třeba 10 kV), nebo plechovky spojíme kusem vodiče, nabijeme je zelektrovanou plastovou tyčí a vodič pak odstraníme (pomocí něčeho nevodivého, abychom plechovky nevybili).

[78] A opravdu je tomu tak, můžeme se o tom přesvědčit třeba měřičem náboje.

[79] Půjde přitom o vodivou kouli v prázdném prostoru. (Jestli jde o kouli nebo prázdnou vodivou sféru, je jedno. Náboj je v obou případech jen na vnějším povrchu, pole vně j v obou případech stejné a stejný je tedy i potenciál koule a sféry, samozřejmě když mají stejný poloměr.)

[80] Potenciál je samozřejmě určen až na konstantu. Zde i v následujících vztazích a úvahách tuto konstantu fixujeme tak, že potenciál v nekonečnu je roven nule.

[81] Značíme ji symbolem C.

[82] Takhle je tomu pro jeden vodič. (Případ, kdy je více vodičů, stručně zmíníme za chvíli.)
Rozmyslete si, že vztah (3.13) vystihuje výše uvedenou kvalitativní představu o pojmu *kapacita*: Na vodiči s větší kapacitou je při stejném potenciálu větší náboj.

[83] Poznamenejme, že odsud vidíme, proč jednotku permitivity ε_0 můžeme psát F/m. Když jsme v kapitole 1 pojem permitivita zaváděli, netušili jsme, odkud se tato jednotka vzala, teď už je to jasnější.

[84] Z kapitoly 1 víme, že $k = 1/(4\pi\varepsilon_0) \doteq 9\cdot 10^9$ (příslušných jednotek SI), převrácenou hodnotu odtud snadno určíme.

[85] Dosazením do (3.14) zjistíme, že Země braná jako vodivá koule má kapacitu asi 700 µF.

Menší jednotky než pikofarady (tj. 10^{-12} F) nejsou v praxi potřeba.[86]

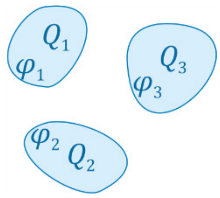
Poznamenejme ještě, že z (3.13) plyne pro jednotku farad, že F = C/V (tj. coulomb/volt). Samozřejmě všechny jednotky (tedy i C, V a F) můžeme také vyjádřit pomocí základních jednotek SI. Zde se ale příslušnými přepočty většinou nebudeme zabývat.[87]

$\boxed{?}$ Zatím jsme odvodili, že pro nabitou vodivou kouli platí lineární vztah mezi potenciálem a nábojem: $Q = C\varphi$. Platí to ale i pro jiný tvar vodiče?

Platí – a dokonce se to dá vcelku jednoduše zdůvodnit. (Zkuste si to sami, než se podíváte na poznámku pod čarou[88]. Nápověda: Vycházíme přitom z linearity Laplaceovy rovnice a vztahů mezi potenciálem a intenzitou a také intenzitou u povrchu vodiče a plošnou hustotou náboje na vodiči.)

$\boxed{?}$ A co když bude vodičů víc?

Opět platí lineární vztah mezi potenciály a náboji na vodičích:



$$\begin{aligned} \varphi_1 &= C_{11}Q_1 + C_{12}Q_2 + C_{13}Q_3 + \dots \\ \varphi_2 &= C_{21}Q_1 + C_{22}Q_2 + C_{23}Q_3 + \dots \\ &\dots \end{aligned} \tag{3.15}$$

Tento výsledek zde nebudeme odvozovat[89], odvození se opět zakládá na linearitě všech příslušných vztahů. Jen malá poznámka k názvům koeficientů C_{ij}, pokud na ně někde narazíte: Koeficientům se stejnými indexy (C_{ii}) se říká *kapacitní koeficienty*, koeficientům s různými indexy (C_{ij}, $i \neq j$) *influenční koeficienty*.[90]

Probereme si ale konkrétní případy, kdy půjde o dva vodiče.

Motivací nám může být otázka:

$\boxed{?}$ **Jak „uskladnit" na vodiči co nejvíc náboje?**

Samozřejmě, více náboje je na vodiči, když má velký potenciál φ. Ale s potenciálem asi nechceme jít do extrémních hodnot. Takže: $\boxed{?}$ Jak to udělat, abychom „uskladnili" co nejvíc náboje při dané hodnotě potenciálu? Jak jsme viděli, samotná koule pro to není příliš vhodná; pro uskladnění velkého náboje by musela být obrovská. Zkusme to trochu jinak.

---

[86] Jak plyne z (3.14), vodivá koule o poloměru 1 cm má kapacitu asi 1,1 pF. Ve starší literatuře (z první poloviny 20 století) byste mohli narazit na to, že se kapacita vyjadřovala v centimetrech. Pokud byste se s tím někde setkali, přepočet je jednoduchý: co centimetr, to asi 1,1 pF.

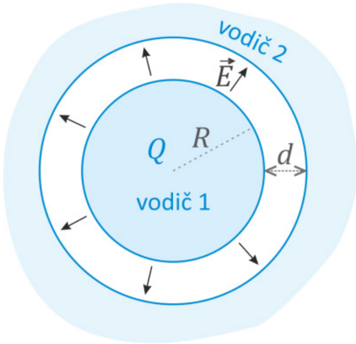
[87] Vyjádření v základních jednotkách najdete v tabulkách nebo si je lehce „vygooglíte".

[88] Potenciál vně vodiče (ve vakuu) splňuje Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$. Při nějaké konkrétní hodnotě potenciálu na vodiči, označme ji třeba φ_0, je řešením Laplaceovy rovnice potenciál $\varphi(\vec{r})$. (Teď nepotřebujeme znát, jak konkrétně vypadá.) Z něj plyne elektrická intenzita $\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi$, z hodnot intenzity u povrchu vodiče pak plošná hustota náboje na povrchu vodiče $\sigma = \varepsilon_0 \vec{E}\cdot\vec{n}$ a její integrací nakonec celkový náboj Q_0 na vodiči. Všechny tyto vztahy jsou lineární, takže když bude potenciál vodiče dvojnásobný, tedy $2\varphi_0$, bude potenciál také dvojnásobný, tedy $2\varphi(\vec{r})$. Dvojnásobná bude i elektrické intenzita a tedy i plošná hustota náboje na vodiči, takže celkový náboj vodiče bude $2Q_0$. Podobně tomu bude pro libovolný násobek výchozího potenciálu φ_0. To znamená, že náboj na vodiči je přímo úměrný potenciálu vodiče.
(Na první pohled se možná tahle úvaha může zdát trochu zdlouhavá; rozmyslete si, že je v pořádku.)

[89] Zájemci mohou odvození a další podrobnosti najít například v již výše zmíněné učebnici Sedlák, Štoll: *Elektřina a magnetismus*.

[90] Naopak lze ze zadaných nábojů určit potenciály vodičů; příslušné vztahy jsou také lineární, $\varphi_1 = B_{11}Q_1 + B_{12}Q_2 + \dots$, $\varphi_2 = \dots$, koeficienty B_{ij} se nazývají *potenciální*.

Kulový kondenzátor



Co když vodivou kouli soustředně umístíme do kulové dutiny dalšího vodiče, jak to ukazuje obrázek?

Když vnitřní vodič bude nabit nábojem Q, bude v dutině elektrická intenzita mířit radiálním směrem.[91] Její radiální složka ve vzdálenosti r od středu bude

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r} \ . \tag{3.16}$$

Jestliže je vzdálenost d mezi vodiči malá ($d<<R$), můžeme pro první úvahu vzít ve vztahu (3.16) $r \approx R$, tedy vzít radiální složku intenzity jako přibližně konstantní[92]:

$$E_r \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2} = \text{konst.} \tag{3.17}$$

Vzdálenost mezi oběma vodiči je d, takže napětí U mezi nimi je

$$U = E_r d \approx \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R^2}d \ . \tag{3.18}$$

Když odtud vyjádříme náboj v závislosti na napětí,

$$Q \approx 4\pi\varepsilon_0 \frac{R^2}{d}U = 4\pi\varepsilon_0 R\frac{R}{d}U \ , \tag{3.19}$$

vidíme, že je přímo úměrný napětí. A navíc se nám podařilo „uskladnit“ výrazně víc náboje. Samotná vodivá koule nabitá na potenciál φ (což je vlastně napětí mezi koulí a nekonečnem) „uskladnila“ náboj $Q = 4\pi\varepsilon_0 R\,\varphi$ (viz (3.12)), nyní dvojice vodičů „uskladnila“ náboj (3.19), tedy R/d –krát větší.

Naše dvojice vodičů je příkladem zařízení[93], kterému se říká ***kondenzátor***. V našem případě jde o *kulový kondenzátor*. Obecně se kondenzátor skládá ze dvou vodičů, mezi nimiž je mezera[94]. Vodiče se obvykle označují jako *elektrody*.

Kapacita kondenzátoru je poměr náboje a napětí mezi elektrodami:

$$C = \frac{Q}{U} \ , \tag{3.20}$$

pro náš kulový kondenzátor je tedy

$$C \approx 4\pi\varepsilon_0 R\frac{R}{d} \ . \tag{3.21}$$

Obecně kapacita kondenzátoru závisí na tvaru a velikosti elektrod a vzdálenosti mezi nimi (tedy na geometrii celé konstrukce.[95]

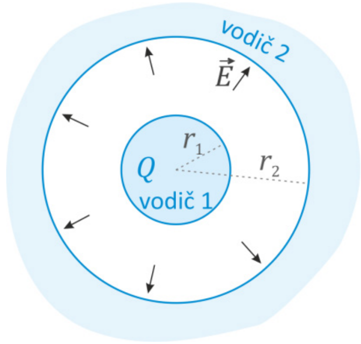
[91] Pro Q>0 bude mířit od středu, jak to ukazuje obrázek. Navíc si na okraj vnějšího vodiče (tj. na vnější okraj dutiny) přitáhne opačný náboj v celkové hodnotě–Q, ten není v obrázku zakreslen.

[92] Za chvíli vše spočteme přesněji, pro první úvahu se však spokojíme spíše se středoškolským přístupem bez použití integrálů.

[93] „Zařízení“ možná není nejvhodnější slovo, ale přece ve studijním textu nelze použít slovo „udělátko“. ☺ Asi bychom mohli říci „konstrukce ze dvou vodičů“; při použití v elektrických a elektronických obvodech mluvíme o „součástce“.

[94] V našem případě je v mezeře vakuum, v praxi většinou mezeru vyplňuje nějaký nevodič (dielektrikum, viz následující kapitolu).

[95] A jak uvidíme v příští kapitole, i na vlastnostech dielektrika v mezeře mezi elektrodami. Ale pozor, vzhledem k náboji a napětí je to konstanta, ne abyste na základě (3.20) řekli, že kapacita je úměrná náboji nebo nepřímo úměrná napětí!



Zatím jsme kapacitu kulového kondenzátoru spočetli jen přibližně, pro malou vzdálenost elektrod. Není ale problém spočítat ji obecně. Radiální složka el. intenzity je

$$E_r = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r^2}\,, \tag{3.22}$$

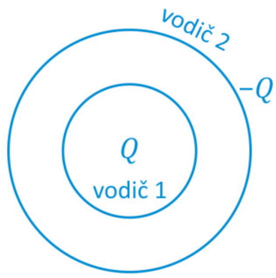
kde r je vzdálenost od středu. Napětí mezi vodiči (tedy rozdíl potenciálů) získáme integrací

$$U = \varphi_1 - \varphi_2 = \int_{r_1}^{r_2} E_r dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{r_1}^{r_2}\frac{1}{r^2}dr = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_{r_1}^{r_2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(-\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r_1}\right) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r_2-r_1}{r_1 r_2}\,, \tag{3.23}$$

kde r_1 a r_2 jsou poloměry vodičů, viz obrázek. Odtud $Q = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} U$, takže kapacita kulového kondenzátoru je

$$C = 4\pi\varepsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}\,. \tag{3.24}$$ [96]

Mít jako vnitřní vodič plnou kouli a jako vnější vodič, který by vyplňoval celý vesmír vně dutiny, by nebylo příliš praktické. ☺ Stačí samozřejmě mít dvě soustředné vodivé sféry, jak to ukazuje obrázek.



Jak už jsme uvedli, náboj na vnitřním vodiči přitáhne na druhý (vnější) vodič stejně velký náboj opačného znaménka.[97] Vně kulového kondenzátoru je pak elektrické pole nulové. Tohle je charakteristické i pro další typy kondenzátorů (nejen pro kulový kondenzátor):

Kondenzátor má dvě elektrody, a když ho nabijeme, jsou na elektrodách stejně velké opačné náboje.[98] Elektrické pole je pak jen v prostoru mezi oběma elektrodami.[99]

Kondenzátory jsou velmi užitečné součástky, jak uvidíme v dalších kapitolách. Ale mít je jen ve tvaru soustředných kulových sfér by bylo nepraktické. Výrazně jednodušší je použít elektrody ve tvaru rovinných desek. Získáme tak *deskový kondenzátor*.

---

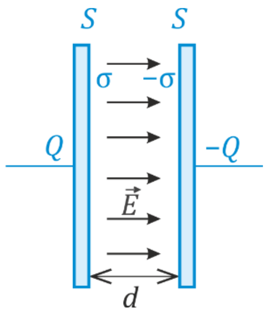
[96] Ne že bychom se tenhle vztah měli učit zpaměti (proto není v rámečku…), ale odvodit ho není problém. Všimněte si, že, že pro malou mezeru mezi elektrodami, tedy pro $|r_2 - r_1| \ll r_1$, dostaneme přibližný vztah (3.21).

[97] Předpokládáme přitom, že má odkud přijít, například když vnější vodič spojíme „se zemí“. (Prakticky s nějakým vzdáleným vodivým tělesem – při školních pokusech nám jako vhodné uzemnění poslouží například vodovod.)

[98] Takto to je při běžném zapojení kondenzátoru do nějakého elektrického obvodu. Samozřejmě, když elektrody kondenzátoru nebudou k ničemu připojené, tak můžeme každou nabít, jakým nábojem chceme. Pak by ale bylo elektrické pole i vně kondenzátoru, a to většinou není to, co potřebujeme.

[99] No, tohle je trochu zjednodušené tvrzení, jak uvidíme třeba u deskového kondenzátoru. Ale typicky se při konstrukci kondenzátoru snažíme, aby se pole do okolí příliš „nerozptylovalo“ a bylo opravdu soustředěno mezi elektrodami.

Deskový kondenzátor



Deskový kondenzátor tvoří dvě rovnoběžné vodivé desky, každá o ploše S, jejich vzdálenost je d. Obrázek toto ukazuje v řezu. K deskám jsou připojeny přívodu, jimi kondenzátor připojujeme k dalším zařízením.[100]

Na jednu z desek přivedeme náboj Q, na druhou náboj $-Q$.[101] Plošná hustota náboje na deskách je $\sigma = Q/S$ a $-\sigma$.[102]

Podle Coulombovy věty je elektrická intenzita u levé desky rovna

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0}.\,^{103} \tag{3.25}$$

Jsou-li desky blízko sebe, je elektrické pole mezi nimi prakticky homogenní. (Můžeme ho brát jako pole dvou nekonečných desek.)

Poznámka: U krajů desek samozřejmě pole není přesně homogenní, navíc elektrické pole „přesahuje" i mimo prostor mezi deskami. Naprostá většina elektrického toku se ovšem soustřeďuje v prostoru mezi deskami, v následujícím výpočtu proto zanedbáváme okrajové efekty (tj. efekty související s tím, že pole u okrajů se liší od homogenního).

Napětí mezi deskami spočteme jednoduše jako $U = E\,d$. Po dosazení (3.25) a plošné hustoty dostaneme

$$U = E\,d = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} d = \frac{Q}{\varepsilon_0 S} d \qquad \Rightarrow \qquad Q = \frac{\varepsilon_0 S}{d} U \;. \tag{3.26}$$

Odtud okamžitě vidíme, že kapacita deskového kondenzátoru je

$$\boxed{C = \frac{\varepsilon_0 S}{d} \;.} \tag{3.27}$$

Příklad:
Deskový kondenzátor si můžeme jednoduše vyrobit ze dvou kusů alobalové fólie, mezi něž dáme například tenký plastový obal.[104] Pro alobalové folie o rozměrech 20 cm × 20 cm je S = 0,04 m^2. Je-li d = 0,1 mm = 10-4 m, je $C \doteq 8{,}8 \cdot 10^{-12} \cdot 4 \cdot 10^{-2}/10^{-4}$ F $\doteq 3{,}5 \cdot 10^{-9}$ F = 3,5 nF.[105]

Kondenzátory, s nimiž se setkáme v praxi

V praxi se kondenzátory skutečně vyrábějí z vodivých fólií, mezi nimiž je tenká nevodivá fólie, vše je ovšem stočeno, aby nezabíralo prostor.[106] (Rovné desky se používaly u tzv. otočných kondenzátorů, kde se mohla měnit plocha, kterou se desky překrývaly, tím se měnila kapacita.)

---

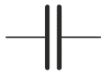
[100] Například ke zdroji napětí, k voltmetru nebo obecně do nějakého elektrického obvodu.
[101] Nebo si ho tato druhá deska přitáhne z nějakých dalších vodivých předmětů, k nimž je připojena.
[102] Náboje jsou na vnitřních plochách desek kondenzátoru (těch, které směřují směrem k sobě).
(Celkové hodnoty náboje Q a $-Q$ jsou na obrázku napsány zvenku, ale to jen naznačuje, že jsme je na desky přivedli.)
[103] U pravé desky také; pro $\sigma > 0$ tok intenzity z levé desky vystupuje a do pravé vstupuje. (Tento směr elektrické intenzity ukazuje i obrázek.)
[104] V tomto případě budou navíc hrát roli vlastnosti toho plastu v elektrickém poli, seznámíme se s tím v další kapitole.
[105] Vodivá koule, která by měla takovouto kapacitu, by měla poloměr přes třicet metrů. Ve skutečnosti by díky dielektriku mezi elektrodami byla kapacita našeho deskového kondenzátoru ještě větší.
[106] Představte si, že byste kondenzátor z alobalu a plastové fólie stočili do tvaru válečku.

Výrobci nabízejí širokou paletu různých typů kondenzátorů od kapacit řádu pikofaradů až po jednotky milifaradů i více.[107]

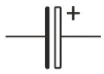
Pro velké kapacity jde o tzv. **elektrolytické kondenzátory**, kdy mezi vodivými fóliemi je elektrolyt, v němž se elektrochemicky vytvoří velmi tenká izolační vrstva.[108] Podstatné je, že elektrolytické kondenzátory mají ***polaritu***, kterou musíme dodržet – je na nich vyznačeno, na kterou elektrodu můžeme přivést kladné napětí (oproti druhé elektrodě).[109] Pokud bychom na kondenzátor připojili napětí s opačnou polaritou, začal by jím protékat proud a kondenzátor by se za chvíli zničil. Navíc elektrolytické kondenzátory vydrží jen určité, nepříliš vysoké napětí.[110]

Schematická značka

Schematická značka pro kondenzátor, která se používá ve schématech elektrických obvodů, připomíná deskový kondenzátor.



U elektrolytického kondenzátoru je u značky vyznačena polarita, buď jen symbolem + u kladné elektrody nebo tím, že se kladná elektroda nakreslí obdélníčkem.[111]



Spojování kondenzátorů

Kondenzátory můžeme spojovat paralelně (vedle sebe) nebo sériově (za sebou).

V paralelním zapojení se kapacita kondenzátorů sčítá $C = C_1 + C_2$, v sériovém se sčítají převrácené hodnoty: $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$.

Odvození zde bude dopsáno, zatím si ho zkuste sami…

Princip měřiče náboje

Nábojem, který chceme měřit, nabijeme kondenzátor o známé kapacitě C a změříme na něm napětí U. Náboj pak spočteme jako $Q = C\,U$. Pro kondenzátor o kapacitě 10 μF = 10^{-5} F odpovídá změřené napětí 0,1 mV = 10^{-4} V náboji 10^{-9} C = 1 nC.

Bude dopsáno podrobněji, s popisem pokusu …

[107] Nejde jen o velikost kapacity, v řadě aplikací je podstatné, jak se kondenzátor chová při zapojení do obvodů se střídavými proudy, například do jakých frekvencí ho lze použít. (Těmito detaily se zde zabývat nebudeme, něčeho se dotkneme v dalších kapitolách.)

[108] Navíc povrch elektrod je „zvlněný“, což zvětšuje jejich plochu. O tom, že jde o složitou problematiku (a rozvinutou technologii) se můžeme přesvědčit např. na https://en.wikipedia.org/wiki/Electrolytic_capacitor .

[109] Popravdě řečeno, na kondenzátorech bývá vyznačeno, která elektroda má být *záporná*.

[110] Tyto parametry (kapacitu a maximální napětí) udávají výrobci a dodavatelé. Například u dodavatele GM electronic jsou elektrolytické kondenzátory nabízeny v kapacitách od 0,47 μF do 22 000 μF (tedy 22 mF); maximální napětí se pro různé typy uvádějí v rozsahu 6,3 V až 450 V.

[111] V anglosaské literatuře je značka trochu jiná, záporná elektroda se kreslí prohnutá, kladná je rovná, viz např. https://en.wikipedia.org/wiki/Capacitor .

3.5 Energie nabitých vodičů

Nabitá plechovka nebo koule van de Graaffova generátoru má určitě nějakou energii.[112] Jak je tato energie velká?

Energie náboje q ve vnějším elektrostatickém poli v místě, kde potenciál je φ, je $W = q\cdot\varphi$. Znamená to, že když má koule van de Graafova generátoru náboj Q a potenciál φ, je její energie prostě $W = Q\cdot\varphi$? Tak jednoduché to není. Teď totiž φ není potenciál vnějšího pole[113], ale potenciál pole, které budí samotný náboj Q. Takže energii budeme muset vypočítat poněkud „opatrněji“.

Uvažujme vodivou kouli o poloměru R nabitou nábojem Q. Její potenciál je $\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}$.[114] Z velké

dálky (teoreticky z nekonečna) teď budeme k nabité kouli přibližovat malý náboj q. Předpokládáme přitom, že oba náboje mají stejná znaménka, takže se odpuzují. Náboj q tedy musíme k nabité kouli strkat silou, čili konat na něj práci a dodávat tak celému systému energii. Práce ΔW, kterou dodáme, když náboj „dostrkáme“ až na vodivou kouli, je rovna potenciální energii, kterou má náboj q na povrchu koule, tedy $\Delta W = q\cdot\varphi = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{R}\cdot q$.[115] O tuto práci se zvýší energie nabité koule. Její náboj se přitom zvýší o $\Delta Q = q$. Pro přírůstek energie nabité koule tedy platí

$$\Delta W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}\cdot\Delta Q\ . \qquad (3.28)$$

Celkovou energii nabité koule dostaneme „posčítáním“ (tedy integrací) všech přírůstků energie od stavu, kdy koule nebyla nabitá, až do jejího konečného náboje Q:

$$W = \int_0^Q \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\tilde{Q}}{R}\cdot d\tilde{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\int_0^Q \tilde{Q}\cdot d\tilde{Q} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0 R}\left[\frac{1}{2}\tilde{Q}^2\right]_0^Q = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}\ .^{116} \qquad (3.29)$$

Tento vztah můžeme ještě přepsat, když si uvědomíme, že kapacita vodivé koule je $C = 4\pi\varepsilon_0 R$.
Z (3.29) dostáváme

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (3.30)$$

Dá se odvodit, že tento vztah platí obecněji, kdy vodič nemá tvar koule. Ukážeme si analogické odvození pro případ nabitého kondenzátoru.

---

[112] Jak byste o tom někoho přesvědčili? Rozmyslete si to sami, než si přečtete následující text.
(Například: Když plechovku vybijeme, přeskočí jiskra, slyšíme „prásknutí“. Když vybíjíme přes doutnavku nebo zářivku, vidíme, že krátce zableskne.)

[113] Tedy pole, které by vytvářely nějaké jiné náboje, třeba několik nabitých tyčí v blízkosti naší nabité koule.

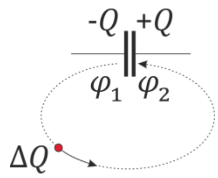
[114] Pokud nevíte proč, připomeňte si vztah pro potenciál pole bodového náboje a to, že pole vně nabité vodivé koule je stejné jako pole bodového náboje (a proč tomu tak je).

[115] Práci a energii zde značíme stejným symbolem W. (Značit energii jako E není vhodné, když tímto písmenem značíme elektrickou intenzitu.) Energie náboje q v nekonečnu je nulová.

[116] Při integraci označujeme jako Q náboj koule po nabití; ten v integrálu vystupuje jako horní mez. Integrační proměnou (tedy náboj, který v průběhu nabíjení roste od 0 do Q) proto musíme označit jiným symbolem; zde ho značíme $\tilde{Q}$.

Energie nabitého kondenzátoru

Uvažujme kondenzátor o kapacitě C, který je již nabit nábojem Q.[117] Napětí na kondenzátoru je U; Potenciály na jeho elektrodách označíme φ_1 a φ_2, napětí mezi elektrodami kondenzátoru je tedy $U = \varphi_2 - \varphi_1$.



Přemístíme malý náboj ΔQ z elektrody s potenciálem φ_1 na elektrodu s potenciálem φ_2, viz obrázek. Energie náboje ΔQ se tím změní z $\Delta Q \cdot \varphi_1$ na $\Delta Q \cdot \varphi_2$, tj. změní se o

$$\Delta W = \Delta Q \cdot \left(\varphi_2 - \varphi_1\right) = \Delta Q \cdot U = \frac{Q}{C}\Delta Q \;.^{118} \qquad (3.31)$$

Teď uvažujme situaci, kdy byl na začátku kondenzátor úplně vybitý, to znamená, že napětí na něm bylo nulové. (Náboje na elektrodách byly také nulové, protože $Q = C \cdot U$.) Energii takového kondenzátoru je přirozené brát jako nulovou.[119]

Nyní kondenzátor nabijeme, takže na něm bude náboj Q.[120] Energii, kterou nabitím získal, dostaneme „posčítáním“ příspěvků (3.31), tedy integrací

$$W = \int_0^Q \frac{\tilde{Q}}{C} d\tilde{Q} = \frac{1}{C}\int_0^Q \tilde{Q} d\tilde{Q} = \frac{1}{C}\left[\frac{1}{2}\tilde{Q}^2\right]_0^Q = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \;.^{121} \qquad (3.32)$$

Protože mezi napětím a nábojem na kondenzátoru platí vztah $Q = C \cdot U$, plynou z výsledku (3.32) tři vyjádření pro energii kondenzátoru:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} Q \cdot U = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \;.} \qquad (3.33)$$

Že nabitý kondenzátor opravdu má energii, se můžeme přesvědčit třeba tak, že k němu připojíme svítivou diodu[122] [123].

---

[117] Tedy na jedné jeho elektrodě je náboj $+Q$, na druhé náboj $-Q$. Při výpočtu můžeme uvažovat $Q>0$, ale není to podstatné.

[118] Zde jsme využili vztah mezi napětím a nábojem na kondenzátoru, $U = Q/C$.

[119] Z vybitého kondenzátoru žádnou energii nezískáme. (Míněno samozřejmě elektrickou energii. Procesy, kdy bychom například kondenzátor užili jako závaží, tady neuvažujeme. ☺)

[120] Tedy na jedné elektrodě $+Q$ a na druhé $-Q$.

[121] Symbol $\tilde{Q}$ zde podobně jako v (3.29) značí náboj postupně rostoucí v průběhu nabíjení.

[122] LED, čili slangově „LEDku“. Pozor, s LEDkou je třeba mít v sérii rezistor, který omezí proud. (Pro pokus je vhodný kondenzátor o kapacitě několika tisíc μF; je-li nabit na 9 V, je vhodný odpor rezistoru v sérii 390 Ω.)

[123] LEDkou s kondenzátorem nabitým na malé napětí velký světelný záblesk neuděláme, jde jen o demonstrační a trochu „hračkový“ pokus. Ovšem stejný princip se užívá i u fotoblesku. Tam jsou kondenzátory nabité na vyšší napětí (např. 200 V) a energie, kterou dodají výbojce, umožní záblesk, který už stojí za to.

Poznámka ke školním pokusům s indukční (Wimshurstovou) elektrikou a k bezpečnosti podobných pokusů

Leydenské lahve v indukční elektrice jsou také kondenzátory. V malé školní indukční elektrice mívají kapacitu 100 až 200 pF (záleží na jejich velikosti)[124]. Jsou typicky zapojeny v sérii, takže jejich celková kapacita je poloviční.[125] Indukční elektrika dokáže mezi elektrodami vytvořit jiskru na vzdálenost i přes 3 cm, což při uváděné hodnotě elektrické intenzity pro přeskok jiskry znamená napětí až 100 kV.[126]

Pro C = 100 pF = 10^{-10} F a U = 10^5 V dostáváme z (3.33) energii W = 0,5 J. To se sice nezdá mnoho, ale třeba publikace [127] uvádí, že výboj o energii větší než 0,25 J dá silný šok („heavy shock“) a výboj o energii 10 J je nebezpečný. Jako energie výboje, který dá nepříjemnou ránu, se zmiňuje už 10 mJ.

Takže výboj ze školní indukční elektriky podle těchto údajů není život ohrožující[128], ovšem rozhodně nesahejte na kontakty nabitých leydenských lahví indukční elektriky oběma rukama! Šok by byl opravdu velmi citelný a úraz by mohl nastat v důsledku úleku, prudkého pohybu a následného pádu apod. Takže při pokusech z elektrostatiky **pozor na bezpečnost**! A rozhodně nenechávejte pokusy, při nichž jde o podobně silné výboje, provádět žáky, kteří by měli srdeční potíže nebo kardiostimulátor!

A jak je to se školním van de Graafovým generátorem?

Kapacitu jeho sféry můžeme odhadnout na lehce přes 10 pF[129]. I pokud by tedy potenciál sféry dosáhl 100 kV (reálně bude spíše menší), bude energie asi o řád menší, než u výše diskutované indukční elektriky, tedy zhruba 0,05 J.

---

[124] Jejich kapacitu si můžete změřit měřičem kapacity, nezapomeňte ale předem leydenské láhve vybít, jinak si měřič zničíte.

[125] U staršího typu, který máme na katedře, je kapacita asi 80 pF.

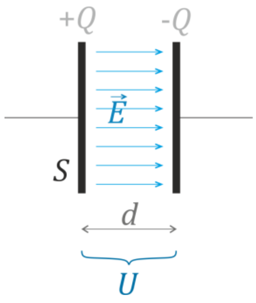
[126] Takové hodnoty dosahují hlavně starší, již téměř „muzeální“ exempláře indukčních elektrik. (U nového typu nejmenovaného výrobce, který také máme na katedře, je problém získat jiskru v délce přes 1 cm.)

[127] Morse, R.A. et al.: *Teaching about Electrostatics*. AAPT, 1992.

[128] To by bylo hodně divné, kdyby školní pomůcka měla smrtící potenciál…

[129] Odhad z rozměrů. Poloměr sféry je 10 cm, což dává kapacitu asi 11 pF. Měřič kapacity ukázal asi 13 až 14 pF, což vypadá rozumně, konec konců nejde o jedinou sféru v nekonečném prázdném prostoru. Takže reálně se na situaci můžeme dívat tak, že sféra je spíše jednou elektrodou kondenzátoru, jejíž druhou elektrodou jsou okolní předměty spojené se zemí.

3.6 „Šílená myšlenka“: energii má samo pole



Mějme deskový kondenzátor o ploše desek S a vzdálenosti desek d, nabitý na napětí U, viz obrázek. Energie tohoto nabitého kondenzátoru je

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 \tag{3.34}$$

Pole mezi deskami bereme jako homogenní, E = konst. Napětí mezi deskami je tedy $U = E \cdot d$. Kapacita deskového kondenzátoru je $C = \varepsilon_0 S / d$. Po dosazení do (3.34) dostáváme

$$W = \frac{1}{2} C \cdot U^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \frac{S}{d} \cdot (E \cdot d)^2 = \frac{1}{2} \underbrace{S \cdot d}_{V} \cdot \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 \cdot V \ , \tag{3.35}$$

kde $V = S \cdot d$ je objem vnitřku kondenzátoru, tedy objem, kde je nenulová intenzita elektrického pole.[130] Vidíme, že při dané intenzitě E je energie nabitého kondenzátoru úměrná objemu V.

To nás přivádí na další **„šílenou myšlenku“**. Můžeme si představit, že:

> **Energii má samo elektrické pole**
>
> a tato energie je rozložena v prostoru s objemovou hustotou $w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$. (3.36)

To je velký rozdíl oproti představě, kterou jsme měli doposud. Zatím jsme uvažovali, že energii mají náboje (v poli ostatních nábojů). Nyní přecházíme k představě, že energii má samo pole. V elektrostatice nám může připadat, že jde jen o ekvivalentní (a pro někoho asi zpočátku podivný) způsob, jak energii počítat. Ale celkově se v elektromagnetismu ukázalo, že je to myšlenka velmi nosná a podnětná.

Že elektromagnetické pole má energii a že ji může přenášet, se ostatně přesvědčujeme denně. Stačí nastavit tvář slunečním paprsků a cítíme, jak nás elektromagnetické záření zahřívá.[131] Nebo jim nastavit fotovoltaický panel a výslednou elektrickou energií nabíjet třeba baterii v mobilu – příkladů sami najdete spoustu.

Uveďme ještě jeden tvar pro objemovou hustotu energie. Použijeme-li dříve zavedenou veličinu $\vec{D}$ (elektrická indukce) a vztah, který platí ve vakuu: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, můžeme (3.36) zapsat jako:

$$\boxed{w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}} \tag{3.37}$$

Tento vztah platí i v obecnějším případě pro nehomogenní pole. Celkovou energii pole pak určíme integrací přes objem:

$$W = \int_V w \, dV \tag{3.38}$$

[130] Efekty na okrajích desek kondenzátoru zde zanedbáváme. (To je rozumné když vzdálenost desek je výrazně menší než jejich rozměry, toto zanedbání jsme provedli už při odvozování kapacity deskového kondenzátoru.)
[131] Když nesvítí slunce, nastavte tvář nebo dlaně paprskům z teplometu nebo rozehřátých kamen…

Příklad: Energie pole nabité vodivé koule

Elektrická intenzita pole buzeného nabitou vodivou koulí je $E_r = \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q}{r^2}$,[132] kde Q je náboj koule a r vzdálenost od středu koule. Elektrická indukce je $D_r = \varepsilon_0 E_r = \dfrac{1}{4\pi}\dfrac{Q}{r^2}$.[133] Hustota energie elektrického pole je tedy

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} = \frac{1}{2}E_r \cdot D_r = \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4} \; . \qquad (3.39)$$

Pro kouli o poloměru R je elektrické pole nenulové v celém prostoru pro $r > R$. Celkovou energii tedy získáme objemovou integrací[134]

$$W = \int_V w\,dV = \int_R^\infty \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \frac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^4}\cdot r^2 \sin\vartheta \; dr\, d\vartheta\, d\varphi =$$

$$= \frac{Q^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\cdot 4\pi \cdot \int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \; .$$

Vyšla nám tedy stejně velká energie jako v (3.29), kde jsme ji počítali jako energii nábojů.

[132] E_r je radiální složka intenzity, jde o intenzitu vně koule.

[133] Opět jde o její radiální složku; elektrická intenzita a elektrická indukce mají stejný směr.

[134] Nechcete-li počítat celý objemový integrál, můžete nejprve uvážit, že v tenké kulové slupce (r, r+Δr) je energie pole $\Delta W = \dfrac{1}{32\pi^2\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^4}\cdot 4\pi r^2 \cdot \Delta r = \dfrac{1}{8\pi\varepsilon_0}\dfrac{Q^2}{r^2}\cdot\Delta r$. (Hustotu energie bereme ve slupce konstantní, protože $\Delta r \ll r$. Energii ve slupce proto počítáme jednoduše jako součin hustoty energie (3.39) a objemu slupky $\Delta V = 4\pi r^2 \cdot \Delta r$.) Celkovou energii získáme „sečtením přes všechny slupky“, tedy integrálem

$$W = \int_R^\infty \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{r^2}\cdot dr = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} \; .$$

Shrnutí

Uvnitř vodiče je (ve statické situaci) $\vec{E} = 0$ a $\rho = 0$; náboj je jen na povrchu vodičů.
Potenciál ve vodiči a na něm je ve statické situaci $\varphi = \text{konst.}$

Těsně u povrchu vodiče je $\vec{E}$ °kolmá na povrch vodiče a je $\vec{E} = \dfrac{\sigma}{\varepsilon_0}\vec{n}$. (*Coulombova věta*)

Náboj se na povrchu vodiče soustřeďuje na více zakřivených částech (zejména u hrotů).

V dutině uvnitř vodiče je (ve statické situaci) $\vec{E} = 0$, $\varphi = \text{konst.}$ Aplikace: Faradayova klec

Elektrické pole vně vodičů (ve statické situaci) vypočteme řešením Laplaceovy rovnice $\Delta\varphi = 0$.

V jednoduchých případech můžeme pole buzené nábojem u vodiče určit metodou obrazů. (Příklad: pole náboje u rovné vodivé desky.)

Kapacita vodiče:

$C = \dfrac{Q}{\varphi}$ (je konstantní, daná geometrií a rozměry vodiče); náboj na vodiči je $Q = C\varphi$

Jednotka kapacity: farad (F), menší jednotky: μF, nF, pF

Kapacita vodivé koule nebo sféry: $C = 4\pi\varepsilon_0 R$ (poloměr 1 cm: kapacita asi 1,1 pF)

Kondenzátor:

Kapacita kulového kondenzátoru: $C = 4\pi\varepsilon_0 \dfrac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \approx 4\pi\varepsilon_0 R \dfrac{R}{d}, \quad \text{kde } d = r_2 - r_1, R \approx r_1$

Kapacita deskového kondenzátoru: $C = \dfrac{\varepsilon_0 S}{d}$

Spojování kondenzátorů: paralelně: $C = C_1 + C_2$, sériově: $\dfrac{1}{C} = \dfrac{1}{C_1} + \dfrac{1}{C_2}$

Energie nabitých těles:

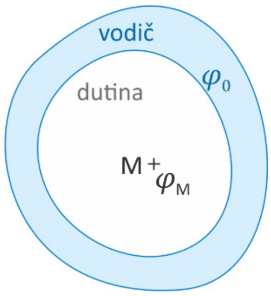
Vodivá koule: $W = \dfrac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$ Kondenzátor: $W = \dfrac{1}{2}\dfrac{Q^2}{C} = \dfrac{1}{2}Q \cdot U = \dfrac{1}{2}C \cdot U^2$

Energie elektrického pole:

Hustota energie: $w = \dfrac{1}{2}\vec{E} \cdot \vec{D}$, Celková energie: $W = \int_V w\,dV$

Dodatek 3.A: Pole v dutině vodiče a jednoznačnost řešení Laplaceovy rovnice

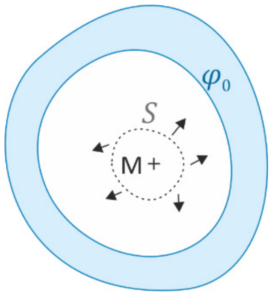
Ukážeme si úvahu dokazující, že potenciál uvnitř dutiny vodiče je konstantní. Půjde o důkaz sporem. Víme, že ve vodiči (a tedy i na jeho vnitřním okraji, čili na okraji dutiny) je potenciál konstantní, řekněme φ_0.



Pro důkaz sporem předpokládejme, že potenciál v dutině ***není*** konstantní, konkrétně, že někde v dutině má hodnotu vyšší než φ_0.

Pak musí v dutině existovat nějaký bod M, kde má potenciál maximum $\varphi_M > \varphi_0$.[135] Když z bodu M půjdeme k okraji dutiny, kterýmkoli směrem, musí tedy potenciál klesat.[136]

Zřejmě tedy kolem bodu M existuje uzavřená plocha S, na níž, když jdeme ven z okolí bodu M, potenciál klesá, jak to naznačuje obrázek.[137]



To ale znamená, že na ploše S míří elektrická intenzita směrem ven. Takže její tok směrem ven je kladný,

$$\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} > 0 \,. \qquad (3.A.1)$$

To ovšem v důsledku Gaussovy věty elektrostatiky znamená, že v oblasti ohraničené plochou S je kladný náboj. Ale uvnitř žádný náboj není[138] – dostali jsme spor. To znamená, že výchozí předpoklad neplatí, tudíž:

> Uvnitř dutiny nemůže být žádný bod, v němž by potenciál měl vyšší hodnotu, než je hodnota φ_0 na okraji dutiny.

Naprosto analogicky bychom dokázali, že uvnitř dutiny nemůže být bod, v němž by potenciál měl hodnotu nižší než φ_0.

To znamená, že potenciál všude v dutině má stejnou hodnotu jako na okraji, je tedy v celé dutině konstantní.

---

[135] Potenciál je totiž spojitá funkce (v dutině nejsou žádné bodové náboje nebo nabité křivky, na nichž by potenciál divergoval). A spojitá funkce na uzavřené množině musí nabývat maxima. Navíc, protože někde v dutině má hodnotu větší než na okraji, je jasné, že maxima musí nabývat někde uvnitř dutiny.

[136] Pozorný čtenář může namítnout, že nemusí klesat pořád. Mohl by na nějakém úseku cesty klesat a na jiném stoupat. Také nemusí při cestě od M začít klesat hned, třeba bude nejdřív kousek cesty konstantní. Ale někde na této cestě začít klesat musí. (Představte si analogii s nadmořskou výškou: Jste-li na vrcholku kopce a úpatí má všude kolem nadmořskou výšku a sto metrů nižší, pak na libovolné cestě dolů prostě musíme někde klesat.)

[137] Plocha S nemusí být ekvipotenciální plochou, takže směr intenzity na ni obecně není kolmý. Podstatné ale je, že směrem ven z oblasti, kterou plocha S obklopuje, potenciál klesá.

[138] V dutině je vakuum a žádné náboje.

Dodatek 3.B: K metodě obrazů

Pro metodu obrazů je podstatné, že potenciál pole bodového náboje (ve vakuu) splňuje Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$

Je to jasné už z fyzikálního náhledu: Laplaceova rovnice popisuje, jak se chová potenciál elektrostatického pole ve vakuu. A to potenciál buzený jakýmikoli zdroji, tedy i bodovým nábojem nebo soustavou bodových nábojů.

Trochu podrobněji a „matematičtěji“: Laplaceova rovnice je ekvivalentní vztahu $\operatorname{div}\vec{E} = 0$.[139] Stačí tedy dokázat, že divergence elektrické intenzity pole bodového náboje je rovna nule. Stačí to dokázat pro náboj v počátku souřadnic, tedy pro pole $\vec{E} = kQ\vec{r}/r^3$.[140] Nejsnáze se to dokáže ze vzorce pro výpočet divergence ve sférických souřadnicích; pokud ho znáte, jste s výpočtem hotovi hned.[141]

Výpočet v kartézských souřadnicích

Vše můžeme také spočítat od začátku v kartézských souřadnicích.

Uděláme to obecně; poloha náboje Q bude dána polohovým vektorem $\vec{r}\,' = (x', y', z')$, poloha bodu, kde počítáme potenciál, je $\vec{r} = (x, y, z)$. Potenciál tedy je

$$\varphi(\vec{r}) = kQ\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|} = kQ\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2} . \tag{3.B.1}$$

Při důkazu, že tento potenciál splňuje Laplaceovu rovnici nebudeme pořád opisovat faktor kQ, dokážeme tedy, že platí $\Delta\tilde{\varphi} = 0$, kde

$$\tilde{\varphi} = \left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2} . \tag{3.B.2}$$

Derivováním dostaneme

$$\begin{aligned}\frac{\partial\tilde{\varphi}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-1/2} = -\frac{1}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} 2(x-x') = \\ &= -(x-x')\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2}\end{aligned} \tag{3.B.3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left\{-(x-x')\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2}\right\} = \\ &= -\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-3/2} + (x-x')\frac{3}{2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-5/2} 2(x-x') = \\ &= -\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2\right]^{-5/2}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - 3(x-x')^2\right] = \\ &= -\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}\,'|^5}\left[(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2 - 3(x-x')^2\right]\end{aligned} \tag{3.B.4}$$

Analogicky vyjdou derivace podle y a z.

[139] Pokud vám to není jasné, připomeňte si, jak jsme Laplaceovu rovnici odvozovali.

[140] Když jde o pole jednoho náboje, dáme si prostě počátek souřadnic do bodu, kde je náboj.

[141] Radiální složka elektrické intenzity je $E_r = kQ/r^2$, vztah pro divergenci ve sférických souřadnicích (seznámíte se s ním v předmětu *Matematické metody fyziky*) je $\operatorname{div}\vec{E} = (1/r^2)\frac{\partial}{\partial r}(r^2 E_r) +$ části, kde se derivuje podle úhlů ϑ a φ.

Je tedy

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2} &= -\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(x-x')^2\right]\\ \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial y^2} &= -\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(y-y')^2\right] ,\\ \frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z^2} &= -\frac{1}{\left|\vec{r}-\vec{r}'\right|^5}\left[(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2-3(z-z')^2\right]\end{aligned} \tag{3.B.5}$$

sečtením pak dostaneme

$$\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\tilde{\varphi}}{\partial z^2} = 0 , \tag{3.B.6}$$

a po vynásobení faktorem kQ tedy

$$\Delta\varphi = 0 \tag{3.B.7}$$

Je-li nábojů, které jsou zdrojem pole, víc, pak potenciál buzený každým z nábojů splňuje (3.B.7). Celkový potenciál je součtem jejich příspěvků, a tedy také splňuje Laplaceovu rovnici.[142]

Poznámka:
Pro přesnost je třeba doplnit, že pole bodových nábojů ve vakuu splňuje Laplaceovu rovnici všude, s výjimkou bodů, v nichž jsou samotné bodové náboje.

K náboji, který se indukuje v rovinné vodivé desce, u níž je bodový náboj

Podívejme se ještě na příklad náboje u vodivé roviny, který jsme diskutovali v části 3.3 této kapitoly.

Nejprve pro úplnost spočteme z potenciálu, k němuž jsme došli, tedy z (3.10), elektrickou intenzitu, resp. její složku kolmou na danou rovinu:

$$\begin{aligned}E_y(x,y,z) &= -\frac{\partial}{\partial y}\left[kQ\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+(y-a)^2+z^2}}-\frac{1}{\sqrt{x^2+(y+a)^2+z^2}}\right)\right] =\\ &= -kQ\left[-\frac{y-a}{\left(x^2+(y-a)^2+z^2\right)^{3/2}}+\frac{y+a}{\left(x^2+(y-a)^2+z^2\right)^{3/2}}\right]\end{aligned} \tag{3.B.8}$$

Na desce samotné (přesněji řečeno, na jejím horním okraji) je

$$E_y(x,0,z) = -kQ\left[-\frac{-a}{\left(x^2+a^2+z^2\right)^{3/2}}+\frac{a}{\left(x^2+a^2+z^2\right)^{3/2}}\right] = \frac{-2kQa}{\left(x^2+z^2+a^2\right)^{3/2}} . \tag{3.B.9}$$

Je přirozené označit $x^2+z^2=R^2$, R je zjevně vzdálenost bodu na desce od osy y.[143] Takže y-ová složka intenzity těsně u desky je

$$E_y = -2kQa\Big/\left(R^2+a^2\right)^{3/2} . \tag{3.B.10}$$

---

[142] Nemusíme asi připomínat, že to je díky linearitě Laplaceovy rovnice: Jestliže platí $\Delta\varphi_1=0$, $\Delta\varphi_2=0, \ldots$, pak $\Delta(\varphi_1+\varphi_2+\ldots)=0$.

[143] Tedy od paty kolmice spuštěné z náboje Q na rovinu.

Z Coulombovy věty, resp. z (3.4) určíme plošnou hustotu náboje na povrchu desky:

$$\sigma = \varepsilon_0 E_y = -\frac{Q}{2\pi}\frac{a}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}} \tag{3.40}$$

Celkový náboj na vodivé desce získáme integrací přes celou rovinu; pohodlně to uděláme ve válcových souřadnicích:

$$Q_{\text{na desce}} = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \sigma R \, dR \, d\varphi = 2\pi \int_0^\infty \sigma R \, dR = -2\pi \frac{Q}{2\pi} \int_0^\infty \frac{aR}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}} dR \tag{3.41}$$

Substitucí $R^2 + a^2 = \xi$ [144] převedeme integrál na

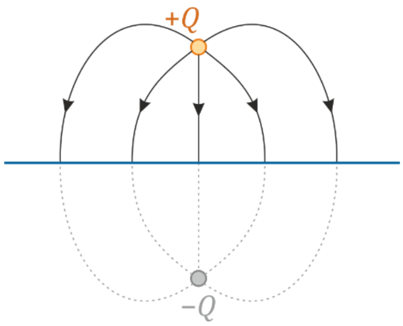
$$\int_0^\infty \frac{aR}{\left(R^2+a^2\right)^{3/2}} dR = \frac{a}{2}\int_{a^2}^\infty \frac{d\xi}{\xi^{3/2}} = \frac{a}{2}\left[\frac{-2}{\xi^{1/2}}\right]_{a^2}^\infty = -a\left[0-\frac{1}{a}\right] = 1\,. \tag{3.42}$$

Dosazení do (3.41) pak dá výsledek

$$Q_{\text{na desce}} = -Q\,. \tag{3.43}$$

Je to rozumný výsledek? Či přímo výsledek, který jsme mohli očekávat?

Je, protože, jednoduše řečeno, všechny siločáry vycházející z náboje končí na vodivé desce, jak to ukazuje obrázek [145]. Přesněji řečeno, veškerý tok elektrické intenzity vycházející z náboje +Q vstupuje do vodivé desky. A tok intenzity je, až na faktor $1/\varepsilon_0$, roven náboji.[146]



[144] Při ní je $d\xi = 2R\,dR$.

[145] Pozn.: Jde jen o náčrtek, ne o přesný tvar siločar.

[146] Přesněji: náboji uvnitř oblasti, z níž tok vychází.