Stacionární elektrický proud

Dosud jsme se zabývali statickými situacemi, kdy náboje ev. dipóly (elektrické či magnetické) byly v klidu. Teď se posuneme k situacím, kdy se náboje budou pohybovat – například když nějakým vodičem teče elektrický proud.

Začneme nejjednodušším případem, kdy proud se v čase nemění. Takovému proudu říkáme **stacionární** elektrický proud. Někdy se také používá název ***stejnosměrný elektrický proud***, ovšem striktně vzato tyto termíny nemusí být synonyma.[1]

V této kapitole se kromě zavedení elektrického proudu budeme zabývat problematikou (stejnosměrných) elektrických obvodů, tedy obvodů s bateriemi, rezistory, žárovkami a podobnými prvky. Takže dojde na Kirchhoffovy zákony, Ohmův zákon a leccos dalšího.

Jaké otázky bychom si v souvislosti s tímto tématem mohli klást? Nebo jaké, třeba i provokativní, by mohli vznést „šťouraví“ žáci? Co třeba tyhle:

- Spotřebovávají spotřebiče elektrický proud?
- Které zákony jsou základnější: Kirchhoffovy, nebo Ohmův zákon? A jde vůbec o základní fyzikální zákony, nebo z něčeho plynou?
- Platí Ohmův zákon vždycky?
- K čemu jsou vlastně rezistory, když se na nich v elektrickém obvodu jen ztrácí výkon?
- Mám žárovičku, na které je napsáno 3,5 V/0,3 A. Můžu ji připojit ke zdroji 12 V? [2]
- Setkal jsem se s názvem Wheatstoneův můstek.
  To je nějaká lávka nebo zubní náhrada nebo co? [3]

Tak jdeme na to a elektrickému proudu a elektrickým obvodům se trochu „podíváme na zoubek“.

---

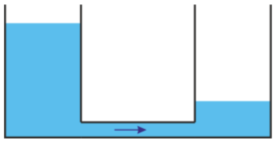
[1] Stejnosměrný proud vlastně znamená „proud tekoucí jedním směrem“. Takový proud ale nemusí být stacionární, tedy v čase stálý, může se s časem zvětšovat a zmenšovat, třeba pulzovat.
Často se termínem „stejnosměrný proud“ rozumí proud konstantní – ale když budete číst nějaký text nebo úlohy, raději se ujistěte, jak to autor myslí. Například na české Wikipedii je momentálně u hesla „stejnosměrný proud“ uveden graf ukazující konstantní hodnotu v čase (navíc hodnotu napětí…), ale u hesla „elektrický proud“ se tam dočteme „Stejnosměrný proud je takový proud, který v čase nemění směr svého toku. Velikost proudu se měnit může.“ V českém překladu známé učebnice Hallidaye, Resnicka a Walkera se pro stacionární proud zavádí termín ***ustálený proud***, ale v kapitole o střídavém proudu se v poznámce pod čarou píše „Proud v čase neproměnný, např. z baterií a akumulátorů, se nazývá **stejnosměrný**.“ Pak se v tom vyznejte… Takže opravdu pozor, jak se to kde myslí.

[2] Přímočará odpověď „můžu“, je konstatováním typu „Všechny houby jsou jedlé, některé ovšem jen jednou v životě“. Jde nám samozřejmě o to, zda lze žárovičku k takovému zdroji připojit, aniž by se okamžitě spálila.

[3] Tak tohle už je hodně provokativní dotaz. (Navíc by ho žáci asi takhle neřekli, protože jsou ve věku, kdy o zubních náhradách formou můstku nepotřebují nic vědět, leda by šlo o budoucí zubní laborantky.) Provokativnější by snad byl už jen dotaz, jestli může Kirchhoffovy zákony zrušit parlament… ☺

6.1 Elektrický proud jako tok náboje

Pro naše seznamování s elektrickým proudem můžeme vyjít z jednoduchého pokusu navazujícího na elektrostatiku. Postavíme dvě plechovky na izolační podložku kousek od sebe.[4] Jednu plechovku nabijeme, druhá zůstává nenabitá. Pak plechovky spojíme kouskem něčeho ne příliš vodivého – osvědčil se třeba proužek krepového papíru. Uvidíme, že na původně nabité plechovce alobalový lístek pomalu klesá, na druhé postupně stoupá. Náboj zjevně přechází či „přetéká" z první plechovky na druhou.



Tato situace má názornou analogii: dvě nádoby s vodou spojené tenkou trubičkou. Levá nádoba byla na začátku plná, pravá prázdná. Voda postupně teče z levé nádoby do pravé, podobně jako náboj tekl z nabité plechovky do nenabité.[5]

Množství vody je analogické množství náboje. Abychom to upřesnili, budeme za „množství vody" brát její objem (a měřit ho v litrech); „množství náboje" je prostě náboj (měřený v coulombech).

Tok vody odpovídá toku náboje – a právě toku náboje říkáme **elektrický proud**. Nahlíženo kvalitativně, je elektrický proud jev resp. děj.[6] Můžeme ho ovšem charakterizovat i kvantitativně, pak půjde o fyzikální veličinu.

„Jak moc" teče voda trubičkou? Zřejmě to vystihuje objem vody, který proteče za jednotku času. „Mocnost proudu vody" je tedy přirozené měřit například v litrech za sekundu, l/s. Analogicky je velikost elektrického proudu určena nábojem, který proteče vodičem za jednotu času. Elektrický proud coby kvantitativní veličinu proto měříme v coulombech za sekundu, C/s. V soustavě SI má tato jednotka vlastní název: **ampér**; značka je A.

Takže jaký je vztah mezi nábojem a proudem? Jestliže vodičem[7] projde za dobu Δt náboj ΔQ, je elektrický proud

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t}\,.^{8} \tag{6.1}$$

Jednotka proudu je, jak už jsme říkali

$$\mathrm{A} = \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{s}}\,. \tag{6.2}$$

---

[4] Dáme na ně alobalové lístky, aby svou výchylkou ukázaly, zda je plechovka nabitá a jak moc. (Místo toho bychom plechovky mohli připojit k elektroskopům, ale ty alobalové lístky jsou jednodušší.)

[5] Vodní model může dobře posloužit k názorným výkladům elektrického proudu a elektrických obvodů. Je ovšem třeba uvědomit si, že vystihuje jen některé rysy elektrických jevů a dějů. V jiných aspektech „nesedí". (Například voda je uvnitř nádob, zatímco náboj je na povrchu plechovek. Také nepostihne fakt, že existují a kladné a záporné náboje.) Ale když ho používáme s rozvahou, může o řadě věcí poskytnout dobrou názornou představu.

[6] Říkáme „v obvodu je elektrický proud" nebo „vodičem teče elektrický proud".

[7] Přesněji řečeno určitým průřezem vodiče, můžeme si představit myšlenou plochu kolmou na osu vodiče.

[8] Pokud by se proud s časem měnil, muselo by Δt být velmi malé, resp. bychom formálně brali $\Delta t \to 0$; vztah (6.1) se proto někdy zapisuje jako $I = \dfrac{dQ}{dt}$. Reálně ovšem nemůžeme volit Δt extrémně malé, aby časová závislost proudu nevyšla typu „chvíli nic, teď extrémně velký proud, když zrovna prochází elektron, zase chvíli nic…", resp. proud musí být rozumně vyhlazen (vystředován). Je to podobné, jako když jsme v mechanice zaváděli veličinu hustota.

Náboj ΔQ proteklý vodičem za čas Δt je tedy $\Delta Q = I \cdot \Delta t$; náboj Q proteklý v časovém intervalu od t_1 do t_2 je

$$Q = \int_{t_1}^{t_2} I(t)\, dt \quad , \tag{6.3}$$

pro stacionární proud (I=konst.) pak samozřejmě

$$Q = I \cdot (t_2 - t_1) \quad . \tag{6.4}$$

Platnost těchto vztahů lze ve výuce ukázat i velmi jednoduchým pokusem.[9]

Dodejme ještě dvě poznámky.

1.
Již z pokusu s nabitými plechovkami a výše popsaného vodního modelu se dvěma nádobami je zřejmé, že v tomto případě proud není stacionární, ale že s časem klesá. Pro konstantní (tedy stacionární) proud potřebujeme „doplňovat hladinu“ – v případě vodního modelu tedy musíme mít nějaké čerpadlo, v případě nabitých plechovek třeba van de Graafův generátor, který bude vracet náboj z druhé plechovky do první. V případě stejnosměrných elektrických obvodů pak třeba galvanický článek nebo fotovoltaický panel. Prostě zdroj napětí – ještě se k nim za chvíli dostaneme.

2.
V kovových vodičích teče proud díky tomu, že se v nich pohybují volné elektrony. Tedy částice se záporným nábojem. Ovšem **směr elektrického proudu** je konvencí stanoven tak, že je to směr, jímž by tekl *kladný* náboj.[10] Dohodnutý směr elektrického proudu je tedy přesně opačný než směr, kterým tečou elektrony. Ale tak je to prostě dohodnuto.[11]

[9] Necháme-li kondenzátor o kapacitě C = 10 000 μF = 10^{-2} F nabíjet malým proudem a měříme na něm napětí, pak napětí U = 0,1 V odpovídá náboji Q = 10^{-3} C = 1 mC. Nabíjení proudem 0,5 mA po dobu 2 s dá náboj právě 1 mC. To znamená, že za 10 sekund stoupne napětí na kondenzátoru o 0,5 V. Za dalších 10 s opět o 0,5 V atd. To se dá pohodlně měřit a odečítat obyčejným multimetrem.

[10] Například: Když plechovku 1 nabijeme skleněnou tyčí, tedy kladným nábojem, a spojíme ji s nenabitou plechovkou 2, teče proud z plechovky 1 do plechovky 2 – i když reálně elektrony proudí opačným směrem.

[11] V tekutinách se při průchodu proudu pohybují kladně i záporně nabité ionty; kladně nabité ve směru elektrického proudu, záporně nabité v opačném směru.

6.2 Zákon zachování náboje, proudy a první Kirchhoffův zákon

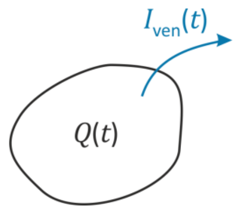
Podle všeho, co víme o přírodě,

náboj nejde vytvořit ani zničit,[12]

platí tedy **zákon zachování náboje**.

Znamená to, že jestliže v nějakém objemu V je náboj Q, zůstane tam navěky stále stejný? To samozřejmě ne – nějaký náboj může z daného objemu odtéct, nebo do něj přitéct.

Jestliže I_{ven} je celkový proud vytékající z daného objemu, pak změna náboje za časový interval t až $t+\Delta t$ je



$$Q(t+\Delta t)-Q(t) = -I_{\text{ven}}\cdot\Delta t \quad .^{13} \tag{6.5}$$

Jednoduchou úpravou[14] odtud dostáváme

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -I_{\text{ven}}\,.} \tag{6.6}$$

Toto platí zcela obecně (!), pro jakékoli časově závislé děje.
Pro *stacionární děje* ovšem dostaneme z (6.6) zajímavý a důležitý důsledek.

První Kirchhoffův zákon

Při stacionárních dějích se s časem nic nemění. Konstantní tedy zůstává i náboj Q. To znamená, že $\dfrac{dQ}{dt}=0$. Z (6.6) pak okamžitě plyne $I_{\text{ven}}=0$. Čili celkový proud z objemu vytékající je roven nule.

To neznamená, že žádné proudy netečou. V některých místech může proud přitékat, pak jej bereme se záporným znaménkem. Celkově ale žádný náboj nepřibývá ani neubývá. Jednoduše, a trochu slangově, bychom tedy mohli situaci při stacionárním ději vystihnout konstatováním

„co vteče, to vyteče“.[15]

Toto konstatování už fakticky vystihuje obsah prvního Kirchoffova zákona – ale pro jistotu se přece jen podíváme na jeho trochu formálnější vyjádření.

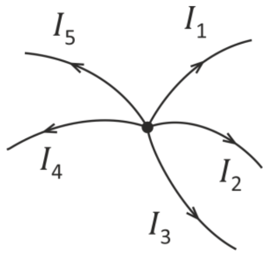
[12] Nabité částice lze vytvářet (kreovat) nebo ničit (anihilovat), ale vždy jen tak, že celkový náboj zůstane zachován. Například anihilací elektronu s nábojem –e a pozitronu s nábojem +e vzniknou dva fotony. Celkový náboj před anihilací byl nulový, po anihilaci je rovněž nulový. (Fotony nemají elektrický náboj.) Naopak foton s dostatečnou energií může v poli atomového jádra vytvořit pár elektron-pozitron. Nemůže však vytvořit jen jeden elektron nebo dva elektrony – to by znamenalo narušení zákona zachování náboje. Žádný proces, který by porušoval zákon zachování náboje, nebyl nikdy pozorován.

[13] Znaménko mínus je zde proto, že náboj $I_{\text{ven}}\cdot\Delta t$ z daného objemu *odtekl.*

[14] Vydělením Δt a limitou $\Delta t \to 0$.

[15] Stejně je tomu při stacionárním proudění tekutin, jak to známe z mechaniky.

První Kirchoffův zákon se týká elektrických obvodů, konkrétně ***uzlů***, v nichž se stýká více vodičů – například tak, jak to ukazuje obrázek. Celkový proud odcházející z uzlu je součtem všech odcházejících proudů:



$$I_{\text{ven}} = \sum_{i=1}^{N} I_i \ .[16] \qquad (6.7)$$

Je třeba si uvědomit, že i když šipky na obrázku míří všechny ven z uzlu, hodnoty některých I_i mohou být záporné – v tom případě jde o proudy do uzlu vtékající. (Například kdyby platilo $I_1>0$, $I_2>0$, $I_3>0$, $I_4<0$, $I_5<0$, byly by I_1 až I_3 proudy z uzlu vytékající a I_4 a I_5 proudy do něj vtékající.)

Pro stacionární proudy z (6.6) a úvah na něj navazujících plyne

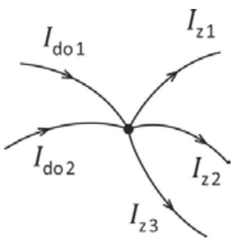
$$\sum_{i=1}^{N} I_i = 0 \ , \qquad (6.8)$$

což je již fakticky matematické vyjádření prvního Kirchoffova zákona. Slovní vyjádření může znít:

Celkový stacionární proud vytékající z libovolného uzlu elektrického obvodu je roven nule.[17]

Někdy se ve formulaci prvního Kirchhoffova zákona rozlišují vtékající a vytékající proudy. Formulace pak zní například:

Celkový součet proudů do uzlu vtékajících se rovná součtu proudů z uzlu vytékajících.[18]

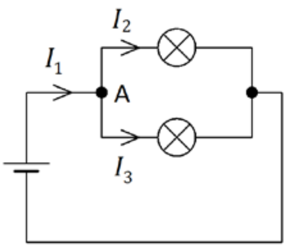


Matematicky bychom to mohli zapsat třeba takto:

$$\sum_{i \text{ do uzlu}} I_i = \sum_{i \text{ z uzlu}} I_i \qquad (6.9)$$

Obrázek vlevo ukazuje vcházející a vycházející proudy v situaci odpovídající výše uvedenému příkladu.

Příklad:



Do uzlu A na obrázku vlevo teče proud I_1 z baterie. Vytékají z něj proudy I_2 a I_3 do žárovek.

Podle prvního Kirchoffova zákona musí platit: $I_1 = I_2 + I_3$.

(Kdyby tomu tak nebylo, tak by se v uzlu hromadil náboj…)

Z výše uvedeného je vidět jedna věc:

První Kirchoffův zákon není nějaký samostatný základní fyzikální zákon, je důsledkem zákona zachování náboje.[19]

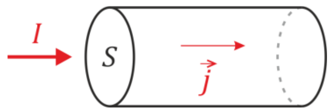
[16] N je počet všech vodičů, které se stýkají v daném uzlu; pro případ na obrázku je N=5.

[17] Proudy, které vtékají, se berou s opačným znaménkem. (Když proud vytéká, bere se >0, když vtéká, <0.)

[18] Což je trochu formálnější vyjádření výše uvedeného „co vteče, to vyteče“.

[19] Proto se též někdy označuje jako *první Kirchhoffovo pravidlo*.

Proudová hustota



Když vodičem o průřezu S teče proud I (viz obrázek vpravo), je přirozené definovat **proudovou hustotu** jako

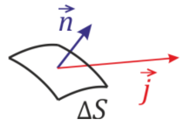
$$j = \frac{I}{S} \; . \tag{6.10}$$

Proudové hustotě přiřazujeme také směr[20], takže ji obecně chápeme jako vektor $\vec{j}$. Přesněji bychom tedy měli říci, že vztah (6.10) určuje velikost proudové hustoty. Samozřejmě je $j = \left|\vec{j}\right|$. Často však místo „velikost proudové hustoty“ říkáme jen „proudová hustota“, z kontextu je jasné, oč jde.

Jednotkou proudové hustoty je A/m^2. [21] Vztahem (6.10) jsme fakticky zavedli *průměrnou* proudovou hustotu. V homogenním vodiči je hustota proudu ve všech částech plochy S stejná. V nehomogenním by mohla být v různých částech různá, pak bychom museli vzít proud ΔI procházející malou částí plochy ΔS kolmou na směr proudu. Proudová hustota (resp. její velikost) by byla dána vztahem[22]

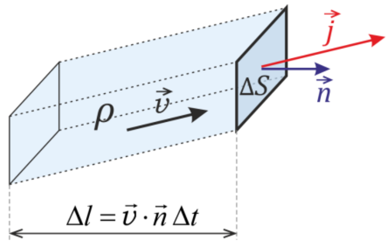
$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} \; . \tag{6.11}$$

Ze vztahů (6.10) a (6.11) plynou pro proud plochou S, resp. ΔS vztahy $I = j\,S$, resp. $\Delta I = j\,\Delta S$. Ty ovšem platí jen v případě, když plocha je kolmá na směr proudové hustoty. Pokud proud teče obecným směrem, jak to ukazuje obrázek vpravo, uplatní se jen složka hustoty proudu kolmá na plošku ΔS. Proud procházející ploškou tedy bude



$$\Delta I = \vec{j} \cdot \vec{n}\,\Delta S \; , \tag{6.12}$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor k dané plošce. Proud ploškou ΔS je tedy dán průmětem proudové hustoty do směru $\vec{n}$. Podobnou situaci už jsme poznali v hydrodynamice.



Ilustrujme si situaci na proudu nabitých částic.[23] Hustota náboje je ρ, rychlost částic $\vec{v}$. Ploškou ΔS projde za čas Δt náboj, který je v šikmém hranolu na obrázku. Podstava hranolu má plochu ΔS, výška je $\Delta l = \vec{v} \cdot \vec{n}\,\Delta t$. Objem hranolu je tedy $\Delta V = \Delta S\,\Delta l = \Delta S\,\vec{v} \cdot \vec{n}\,\Delta t$. Náboj v hranolu je $\Delta Q = \rho\,\Delta V = \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\,\Delta S\,\Delta t$. Proud ploškou ΔS je náboj prošlý za čas, tedy $\Delta I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = \rho\vec{v} \cdot \vec{n}\,\Delta S$, a velikost hustoty proudu

$$j = \frac{\Delta I}{\Delta S} = \rho\vec{v} \cdot \vec{n} \; . \tag{6.13}$$

Výsledek souhlasí se vztahem (6.12); zároveň jsme odvodili vztah pro hustotu proudu částic, jejichž rychlost je $\vec{v}$ a hustota náboje je ρ:

[20] Proud je dán pohybem nábojů, takže směr proudové hustoty je dán směrem pohybu kladných nábojů, resp. směrem opačným k pohybu záporných nábojů, například elektronů v kovovém vodiči.

[21] V praxi většinou nemíváme vodiče o průřezu metr čtvereční či víc, často se proto používá spíš jednotka A/mm^2. Můžete se v této souvislosti pocvičit v převodu jednotek a rozmyslet, jak někomu vysvětlit, že 1 A/mm^2 = 10^6 A/m^2. A jak spočítat proud drátem o průřezu 1 mm^2, pokud je hustota proudu j = 1 A/m^2. (Pokud člověku, s nímž to probíráte, vyjde milión ampér, není to správná odpověď…)

[22] Formálně bychom měli limitovat velikost plochy ΔS k nule. Fakticky ovšem musí být rozměry této plochy výrazně větší než vzdálenosti atomů v daném vodiči. (Podobně, jako když jsme v mechanice zaváděli hustotu tělesa.)

[23] Může jít například o proud svazku protonů v urychlovači, ale stejně tak o proud elektronů v kovovém vodiči.

$$\boxed{\vec{j} = \rho \vec{v}\ .} \tag{6.14}$$

Velikost proudové hustoty je samozřejmě $j = \rho v$.[24]

Rychlost elektronů v kovovém vodiči

Jakou rychlostí se pohybují elektrony v kovovém vodiči, například v měděném drátu?

Využijeme vztah $v = j/\rho$ plynoucí z (6.14). Pro určení hustoty náboje, který se ve vodiči pohybuje, uvažujme, že každý atom mědi uvolní jeden elektron.[25] Hmotnost 1 m^3 mědi je asi 8,96·10^3 kg/m^3; atomová hmotnost mědi je asi 1,055·10^{-25} kg. V 1 m^3 mědi je tedy asi 8,96·10^3/1,055·10^{-25} ≐ 0,85·10^{29} atomů mědi a tedy i volných elektronů. Celkový náboj volných elektronů v 1 m^3 mědi získáme vynásobením elementárním nábojem, takže $Q \doteq 0{,}85\cdot10^{29}\cdot1{,}602\cdot10^{-19}\ \mathrm{C} \doteq 1{,}36\cdot10^{10}\ \mathrm{C}$. A to dává hustotu náboje: $\rho \doteq 1{,}36\cdot10^{10}\ \mathrm{C/m^3}$.

Proudová hustota v měděných vodičích může být typicky do jednotek A/mm^2, řekněme 3 A/mm^2.[26] při převedení do základních jednotek tedy j = 3·10^6 A/m^2. Rychlost elektronů pak vychází

$$v = \frac{j}{\rho} \doteq \frac{3\cdot10^6\ \mathrm{A/m^2}}{1{,}36\cdot10^{10}\ \mathrm{C/m^3}} \doteq 2\times10^{-4}\ \mathrm{m/s} = 0{,}2\,\mathrm{mm/s}\ . \tag{6.15}$$

Při nižších proudech to bude ještě méně.[27] Je ale třeba upozornit na jednu důležitou věc:

Rychlost, kterou jsme zde spočetli, je tzv. ***rychlost driftu*** volných elektronů. Tedy rychlost, která je „zprůměrovaná“ (jinak řečeno *vystředovaná*) přes všechny elektrony v nějakém objemu. Kromě toho se volné elektrony pohybují chaoticky všemi směry podobně jako molekuly plynu.[28] Rychlosti tohoto chaotického pohybu jsou mnohem vyšší – dosahují až 10^6 m/s (!).[29] To jsou rychlosti miliardkrát vyšší, než naše spočtená rychlost driftu. Ovšem chaotický pohyb se děje všemi směry, takže k celkovému pohybu „mraku elektronů“ nijak nepřispívá; kdyby byla rychlost driftu nula, elektrony jako celek by se nikam neposouvaly. Celkový pohyb je dán právě driftem.[30]

Navíc, když víme, že elektrony se ve vodičích tak loudají, vynoří se přirozeně otázka:

$\boxed{?}$ Jak to, že když zapneme vypínač, rozsvítí se žárovka prakticky okamžitě?

---

[24] Namalujte si k tomu sami příslušný obrázek (analogický k obrázku nad vztahem (6.13)) pro případ, kdy směr proudu je kolmý na plošku ΔS. Z něj lze odvodit vztah $j = \rho v$ rychle a názorně, v podstatě na středoškolské úrovni.

[25] Tahle úvaha poskytne koncentraci volných elektronů ve shodě s tím, co uvádí literatura z oblasti fyziky pevných látek.

[26] Takováto maximální proudová hustota se dovoluje například ve vodičích v cívkách transformátorů; pro kabely jde také o jednotky A/mm^2, záleží na jejich provedení a na tom, jak moc se mohou zahřívat.

[27] Když měděným drátem o průřezu 1 mm^2 nepoteče proud 3 A, ale jen 30 mA, jaká bude rychlost elektronů? (Správně, jen 2 mikrometry za sekundu.)

[28] Pro soubor volných elektronů ve vodiči se také skutečně používá název *elektronový plyn*.

[29] Opravdu, není to překlep, literatura uvádí hodnoty střední kvadratické rychlosti volných elektronů ve vodičích 10^5 až 10^6 m/s. (V přednáškách z Teorie pevných látek a ze Statistické fyziky se poučíte, že volné elektrony nabývají prakticky všech energií od nuly do tzv. Fermiho energie; ta se pro měď uvádí rovna asi 7 eV. Z toho lze vypočítat jejich rychlost.)

[30] V učebnici *Hallidaye, Resnicka a Walkera* je drift názorně přirovnán k hejnu vířících komárů unášených slabým vánkem. Kvalitativně je to dobrá představa, jen ten poměr rychlostí je u elektronů ještě mnohem vyšší. (Komáry vířící sem a tam rychlostí tisíc km/s , to to si osobně raději nepředstavuji. ☹)

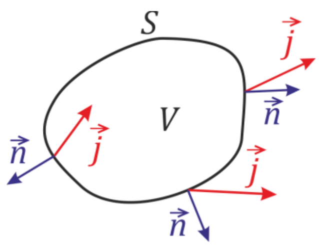
Opravdu, rychlostí driftu by přece elektrony od vypínače k žárovce doputovaly třeba za hodinu či ještě déle! Zkuste si tuto otázku odpovědět sami, než se podíváte do poznámky pod čarou.[31]

Proud protékající plochou, zákon zachování náboje v integrálním tvaru

Proud protékající malou ploškou ΔS je dán vztahem (6.12): $\Delta I = \vec{j} \cdot \vec{n}\, \Delta S$. Proud tekoucí obecnou plochou S (i velkou, kde proudová hustota může být v různých částech různá) dostaneme „sečtením příspěvků přes všechny kousky plochy S“, tedy plošným integrálem[32]

$$I = \int_S \vec{j} \cdot \vec{n}\, dS = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ . \tag{6.16}$$

Jestliže je plocha S uzavřená, tj. ohraničuje nějaký objem V, jak to ukazuje obrázek, získáme integrací přes S celkový proud vytékající ven z objemu V:[33]



$$I_{\text{ven}} = \oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ . \tag{6.17}$$

Proud vytékající z objemu V snižuje celkový náboj Q v tomto objemu – to jsme už výše zapsali vztahem (6.6), $\frac{dQ}{dt} = -I_{\text{ven}}$, který, jak jsme diskutovali, vyjadřuje zákon zachování náboje. Kombinací s (6.17) dostaneme vztah, který rovněž vyjadřuje **zákon zachování náboje**:

$$\boxed{\frac{dQ}{dt} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ ,} \tag{6.18}$$

Někdy se pro tento vztah používá také název ***rovnice kontinuity v integrálním tvaru***. Zapisuje se i ve tvaru, kdy náboj Q je vyjádřen jako integrál z hustoty náboje, $Q = \int_V \rho(\vec{r})\, dV$:[34]

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho(\vec{r})\, dV = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} \ . \tag{6.19}$$

Vztahy (6.18), resp. (6.19) vyjadřují zákon zachování náboje „globálně“, pro libovolně velký objem V.[35] Podívejme se, jak lze zákon zachování náboje vyjádřit lokálně, v okolí nějakého bodu. Tímto vyjádřením bude *rovnice kontinuity v diferenciálním tvaru*.

---

[31] Elektrony od vypínače k žárovce doputovat nemusí. Ve vodiči a okolo něj se velmi rychle šíří elektrické pole a to téměř současně přiměje všechny elektrony ve vodiči k pohybu.

[32] Je to analogické toku kapaliny, jak to už známe z hydrodynamiky.

[33] Jde o proud vytékající ven, protože normálové vektory míří vždy ven z objemu V. Vektor proudové hustoty $\vec{j}$ může mířit jak ven z objemu V, tak dovnitř. Pokud proud přitékající dovnitř bude větší než proud přitékající dovnitř, bude $I_{\text{ven}} < 0$.

[34] V tomto případě předpokládáme, že v daném objemu jsou jen prostorově rozložené náboje, nikoli náboje na plochách a křivkách, případně bodové náboje.

[35] Poznámka: Objem V a tedy i plocha S, která ho ohraničuje, jsou „pevné“, tedy nemění se v čase.

Rovnice kontinuity

Vyjdeme ze vztahu (6.18). Plošný integrál na jeho pravé straně upravíme pomocí Gaussovy věty matematiky:

$$\oint_S \vec{j}\cdot d\vec{S} = \int_V \left(\mathrm{div}\,\vec{j}\right) dV \ . \tag{6.20}$$

Náboj v objemu V opět vezmeme jako integrál z hustoty náboje v tomto objemu: $Q = \int_V \rho(\vec{r})\,dV$.[36]

Protože se hustota náboje i náboj mohou měnit s časem, může být vhodnější psát explicite

$$Q(t) = \int_V \rho(\vec{r},t)\,dV \ . \tag{6.21}$$

Levou stranu (6.18) získáme derivací (6.21) podle času:[37]

$$\frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}\int_V \rho\,dV = \int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV \ . \tag{6.22}$$

Dosazením (6.22) a (6.20) do (6.18) dostaneme

$$\int_V \frac{\partial\rho}{\partial t}dV = -\int_V \left(\mathrm{div}\,\vec{j}\right) dV \ ,$$

a po převedení na jednu stranu a spojení do jediného integrálu pak

$$\int_V \left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j}\right) dV = 0 \ . \tag{6.23}$$

Teď přijde důležitý obrat: Objem V je *libovolný*. Má-li být integrál přes libovolný objem rovný nule, jediná možnost je, že integrand[38] je roven nule všude (zdůvodnění viz Dodatek A). To znamená, že musí platit

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \ .} \tag{6.24}$$

A právě to je **rovnice kontinuity** (v diferenciálním tvaru). I tato rovnice vyjadřuje **zákon zachování náboje.**

Ve stacionární situaci (tj. pro stacionární proud), se hustota náboje nemění, $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$. Z (6.24) pak plyne

$$\boxed{\mathrm{div}\,\vec{j} = 0 \ .} \tag{6.25}$$

---

[36] Opět předpokládáme, že v daném objemu jsou jen prostorově rozložené náboje; nábojům na plochách, křivkách i bodovým nábojům se „vyhneme“.

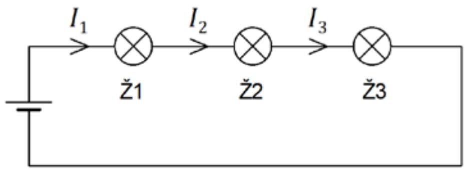
[37] Zaměnit pořadí integrování a derivace můžeme právě proto, že jde o objem v čase neměnný. Názorně to lze vidět, když se podíváme na rozdíl nábojů Q ve dvou blízkých časech: $Q(t+\Delta t) - Q(t) = \int_V \rho(\vec{r},t+\Delta t)\,dV - \int_V \rho(\vec{r},t)\,dV =$ $= \int_V \left(\rho(\vec{r},t+\Delta t) - \rho(\vec{r},t)\right) dV$, a vydělíme tento rozdíl Δt . (Podrobněji budeme podobný případ diskutovat v Dodatku C kapitoly 8.)

[38] Tedy to, co integrujeme, čili to, co je v integrálu v (6.23) v kulaté závorce.

Spotřebovávají spotřebiče elektrický proud?

Pojďme teď udělat malou odbočku k didaktice fyziky.

Výzkumy v oblasti fyzikálního vzdělávání zjistily zajímavou miskoncepci. Protože se s ní můžete setkat, až budete učit (případně pokud již učíte nebo někoho doučujete), je užitečné se o ní zmínit.



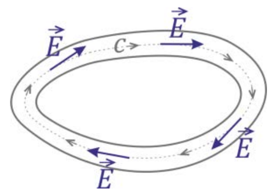
Když jsou v obvodu zapojeny například tři žárovky za sebou, jak to ukazuje schéma vpravo, mají lidé tendenci představovat si, že proud postupně klesá, tedy že $I_1 > I_2 > I_3$. Svou roli možná hraje to, že žárovky jsou *spotřebiče*. Někdy se dokonce, nejen pro žárovky, lze setkat i s termínem „spotřebiče elektrického proudu“. A to může navodit dojem, že proud se nějak v první žárovce „spotřebovává“, takže do druhé žárovky ho teče už méně. Ve druhé se zase část „spotřebuje“, takže do třetí ho teče ještě méně… To samozřejmě není pravda – z prvního Kirchhoffova zákona jasně plyne, že proud všemi žárovkami je stejný. („Co do žárovky jedním vývodem vteče, to druhým zase vyteče“, jinak by se musel někde v žárovce hromadit náboj, a to se samozřejmě neděje.)

6.3 Elektrický obvod, napětí a 2. Kirchhoffův zákon

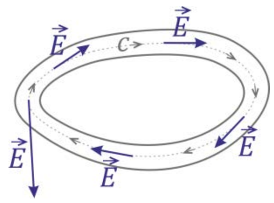
Aby elektrický proud ve vodiči tekl, musí elektrony něco „postrkovat". Jinak by proud rychle zanikl díky interakci elektronů s atomy vodiče.[39] To, co elektrony „postrkuje" je elektrické pole.[40]

Ale: protože jde o děj stacionární, nic se zde s časem nemění, ani intenzita elektrického pole. To znamená, že v případě stacionárního proudu je **elektrické pole statické**.

Ovšem pro statické elektrické pole platí (jak víme z elektrostatiky) $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$.



Je-li c křivka procházející vodičem „kolem dokola", jak to ukazuje obrázek, **není možné**, aby elektrická intenzita ve vodiči mířila stále ve směru křivky. Obrázek vpravo tedy *nemůže být dobře*[41], protože ve všech částech křivky by platilo $\vec{E} \cdot \Delta\vec{r} > 0$, a integrál po celé křivce c by proto byl kladný – ale on musí být nulový. To znamená, že v některé části křivky (tedy v některé části vodiče) musí $\vec{E}$ mířit *opačně*, tedy proti směru křivky c – tak, jak to ukazuje následující obrázek.



Takto lze splnit vztah $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{r} = 0$. Ovšem pozor – v části vodiče teď elektrické pole „postrkuje" elektrony opačným směrem! Ale proud přece musí v uzavřené vodivé smyčce téct všude stejným směrem, nemůže v kousku vodiče téci obráceně. To by odporovalo prvnímu Kirchhoffovu zákonu.[42] Jak z toho ven?

Jednoduše: V části vodiče musí elektrony „postrkovat" i něco jiného, než elektrická intenzita, musí tam působit nějaké další síly. A tyto síly – říkáme jim **elektromotorické síly** – musí překonat elektrickou intenzitu mířící opačným směrem.

Ono to není nijak záhadné: část vodiče, kde působí elektromotorické síly, je, jak za chvíli uvidím podrobněji, **zdroj napětí**. A bez zdroje napětí opravdu v uzavřeném vodiči neteče stálý elektrický proud.[43] (Výjimkou je supravodič, tam nosiče náboje nemusí nic „postrkovat", protože materiál supravodiče neklade průchodu proudu žádný odpor.)

Proč neteče v uzavřené smyčce normálního vodiče stacionární elektrický proud jen pod vlivem elektrického pole (tedy když v obvodu není zdroj), lze pochopit i bez křivkových integrálů. „Postrkovat" elektrony znamená dodávat jim práci. Ale elektrostatické pole je ***konzervativní***, takže

[39] Zde se nebudeme věnovat tomu, jakým způsobem je driftový pohyb elektronů ve vodiči brzděn. (Nejjednodušší představa, že se elektrony jednoduše srážejí s ionty krystalové mřížky, je ve skutečnosti příliš zjednodušená. Bližší informaci poskytne např. kap. 7.3.2 učebnice *Sedlák, Štoll: Elektřina a magnetismus*.)

[40] V elektrostatice byla ve vodiči elektrická intenzita nulová. V případě stacionárního proudu ovšem ve vodiči existuje elektrické pole, tedy elektrická intenzita uvnitř vodiče je *nenulová*. Co udržuje proud a proč se situace rychle nezmění na statickou, uvidíme v průběhu této části kapitoly.

[41] Alespoň pokud by elektrická intenzita mířila ve všech částech křivky stejně, jako je naznačeno v několika bodech na obrázku.

[42] I bez odvolávky na první Kirchhoffův zákon je jasné, že kdyby v části vodiče tekl proud jedním směrem a v druhé části (navazující na tu první) by tekl opačně, musel by se někde hromadit náboj – a to už by nešlo o stacionární situaci.

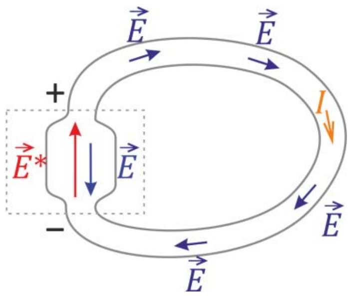
[43] Pokud tomu nevěříte, udělejte obvod z kusu drátu, jehož konce připojíte k žárovce. Pokud bude svítit, vyřešili jste energetickou krizi. (Pozor, ne že někde poblíž budete mít nějakou cívku napájenou střídavým napětím nebo bezdrátovou nabíječku k mobilu a uděláte vlastně transformátor; to už by nešlo o stacionární proud!)

práce po oběhnutí celé smyčky je nutně nulová. Elektrony tedy opravdu nemůže postrkovat stále ve stejném směru.

Elektromotorické síly působí například:
• v galvanickém článku, • v nabitém akumulátoru, • ve fotoelektrickém článku, • v termočlánku, … a fakticky takto můžeme popsat i situaci v dynamech a alternátorech, ale tam už nejde o stacionární proud. Ve všech případech jde o zdroje napětí.

Jak formálně popsat elektromotorické síly? Jejich intenzitu označíme jako $\vec{E}^*$. Celková síla působící ve vodiči na náboj q pak bude

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) . \qquad (6.26)$$

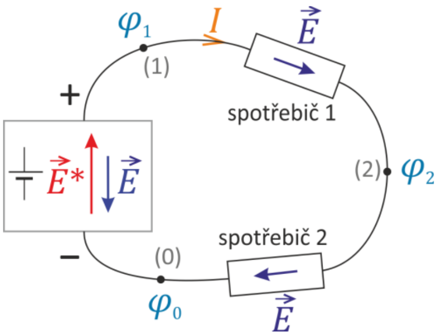


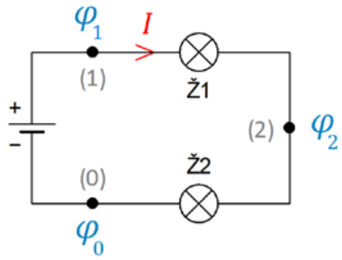
Většinou s tímto formálním popisem nebudeme muset explicite pracovat. Stačí nám zjištění, že ve zdroji (na obrázku je vyznačen čárkovaným ohraničením) působí na náboje další síly, jejich výsledné působení popíšeme napětím zdroje.

Elektrický obvod – příklad

Situaci v elektrickém obvodu[44] si nejprve rozebereme na jednoduchém příkladu – obvodu, v němž bude jeden zdroj napětí a dva spotřebiče.

Obvod ukazuje následující obrázky; vlevo podobně, jako jsme výše kreslili uzavřený vodič se zdrojem, vpravo ve formě schématu, spotřebiči tam jsou dvě žárovky. Zdrojem může být třeba plochá baterie nebo akumulátor.





Vodiče spojující jednotlivé prvky obvodu (zdroj a spotřebiče) budeme považovat za tak dobře vodivé, že na každém vodiči bude prakticky stejný potenciál. Potenciály jsou vyznačeny v bodech obvodu označených (0), (1) a (2); hodnoty potenciálů v nich označíme φ_0, φ_1, φ_2 .

[44] Nebudeme zde uvádět formální definici elektrického obvodu. (Jako autor tohoto textu konstatuji, že jsem ji v životě nepotřeboval a uvědomil jsem si to až při psaní této kapitoly.) Na webu i jinde lze najít vysvětlení, že elektrický obvod je tvořen vodivě spojenými vodiči a dalšími elektrickými prvky… ale tomu by vyhovovala i plechovka, na níž dáme kousek alobalu. (☺) Spíše než o definici nám jde o to, mít názornou představu:
Když připojíme žárovku k ploché baterii, aby svítila, máme elektrický obvod. (Kdybychom ji připojili jen jedním koncem, nebo oběma konci, ale přes vypnutý vypínač, tak to lze označit za otevřený elektrický obvod. Nám zde ale půjde o obvody uzavřené, kterými může téct elektrický proud.) Když ke zdroji napětí připojíme tři žárovky v sérii, máme opět elektrický obvod. Když k jedné z žárovek připojíme paralelně ještě svítivou diodu v sérii s rezistorem, je to opět elektrický obvod. Když zkombinujeme pět zdrojů a 333 rezistorů, nebo si z kupy součástek postavíme tranzistorové rádio, nebo budeme uvažovat součástky propojené ve vašem smartphonu, jsou to zase elektrické obvody… (Ale nebojte se, na takhle složité obvody v tomto textu nedojde. ☺)

Napětí mezi dvěma body obvodu **je rozdíl potenciálů**:

Napětí baterie je rozdíl potenciálů na výstupních svorkách baterie:

$$U_{bat} = \varphi_1 - \varphi_0 \ . \tag{6.27}$$

Napětí na spotřebičích (mezi body 1,2 a 2,0) jsou:

$$U_{12} = \varphi_1 - \varphi_2 \ , \tag{6.28}$$

$$U_{20} = \varphi_2 - \varphi_0 \ . \tag{6.29}$$

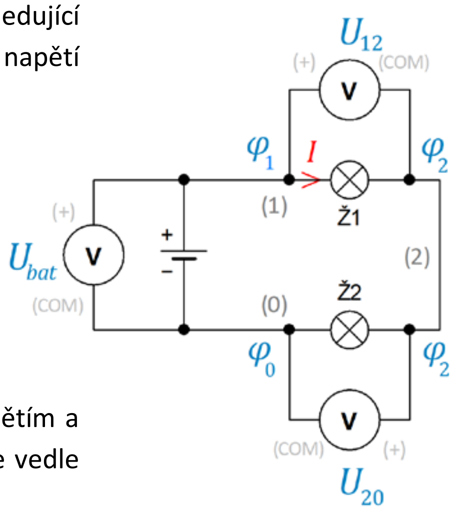
Když od rovnosti (6.27) odečteme (6.28) a (6.29), dostaneme:

$$U_{bat} - U_{12} - U_{20} = \varphi_1 - \varphi_0 - (\varphi_1 - \varphi_2) - (\varphi_2 - \varphi_0) = 0 \, ,$$

čili

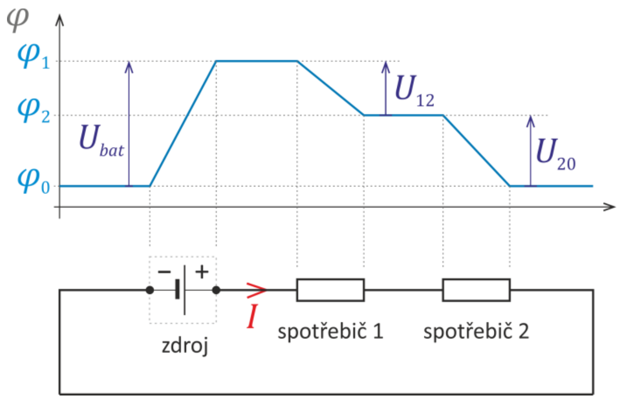
$$U_{bat} = U_{12} + U_{20} \ . \tag{6.30}$$ [45]

Jak bychom měřili napětí na zdroji a na spotřebičích, ukazuje následující obrázek. Do schématu jsou v něm zakresleny ještě tři voltmetry, měřící napětí U_{bat}, U_{12} a U_{01}.



Poznámka: Polarita, s jakou jsou zapojeny voltmetry, je vyznačena symboly (+) a (COM). Jde o symboly, které jsou uváděny na vstupních zdířkách multimetrů.[46] Je-li napětí na zdířce (+) kladné oproti zdířce (COM), ukáže voltmetr kladnou hodnotu – zjevně je tomu tak při měření napětí baterie U_{bat}. V našem obvodu naměří kladná napětí i voltmetry měřící napětí U_{12} a U_{01}.

To, jak se potenciál mění v různých částech obvodu, a vztahy mezi napětím a potenciálem lze přehledně ukázat, když si zdroj a spotřebiče zakreslíme vedle sebe a nad ně zakreslíme graf průběhu potenciálu:



Jasně je vidět, že když vyjdeme ze záporného pólu zdroje, který má potenciál φ_0 a jdeme ve směru proudu (zdrojem, vodiči a oběma spotřebiči), vrátíme se na tentýž potenciál φ_0. Zároveň je z grafu vidět platnost vztahu (6.30). Slovně bychom ho mohli popsat vyjádřením: ***Napětí na zdroji se rovná součtu úbytků napětí na spotřebičích***.

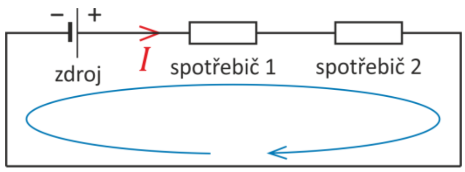
[45] Tento vztah můžeme také dostat integrováním elektrické intenzity podél obvodu; viz Dodatek B.

[46] (COM) je symbol, kterým se na běžných multimetrech označuje zdířka společná proměření napětí a proudů. Připojíme-li na ni záporný pól zdroje a na zdířku pro měření napětí kladný pól zdroje, ukáže multimetr kladnou hodnotu napětí. Zdířka pro měření napětí bývá na multimetrech obvykle označena písmenem V, my ji v našich schématech označujeme symbolem (+). Dodejme, že ve schématech se označení (COM) a (+) nepoužívá, my jsme je zde zavedli, abychom explicite vyznačili polaritu připojeného voltmetru.

Poznámka ke konvencím, jak se berou znaménka napětí (pro zájemce, ale nejen pro ně):

Konvence, jak brát na zdrojích a spotřebičích elektrického obvodu polaritu napětí, jsou **různé**.

My zde v tomto textu bereme napětí na zdroji *kladné*, když ve směru, jímž procházíme obvod, potenciál při průchodu zdrojem *roste* – tak je tomu v případě, že při průchodu obvodem vstoupíme nejprve do záporného pólu zdroje.



Napětí na spotřebičích bereme *kladné*, když potenciál při průchodu spotřebičem *klesá* – tak je tomu, když proud teče stejným směrem, jímž procházíme obvod.[47]

U ***zdrojů*** tedy sčítáme ***přírůstky*** potenciálu, u ***spotřebičů*** **úbytky** (tj. poklesy) potenciálu.[48]

Není divu, že součet přírůstků je stejný, jako součet úbytků – při návratu do výchozího bodu se potenciál musí vrátit na výchozí hodnotu.
Uvedená konvence se užívá například v některých VŠ a SŠ učebnicích.[49]

Jinde se ve formulaci Kirchhoffova zákona mluví jen o *přírůstcích* potenciálu – s tím, že celkový součet přírůstků po uzavřené smyčce obvodu je roven nule.[50]

V tomto případě mají ovšem přírůstky na spotřebičích opačné znaménko než úbytky uvažované výše. Vztah (6.30) by v této konvenci měl tvar $U_{bat} + (-U_{12}) + (-U_{20}) = 0$.

Ještě jinde[51] se uvažují *úbytky* potenciálu (resp. napětí). Celkový součet úbytků je samozřejmě opět rovný nule. Vztah (6.30) pak má tvar $(-U_{bat}) + U_{12} + U_{20} = 0$; napětí zdrojů se tedy bere s opačným znaménkem, než v konvenci, užívané v tomto textu. U zdrojů i spotřebičů je také v tomto případě obvyklé kreslit šipky vyznačující polaritu napětí ve směru elektrické intenzity, podobně, jako ji výše máme vyznačenou na obrázku na s. 12.

Tak, teď to vypadá, že jsme to celé pěkně zamotali… Ale fakticky to není tak složité. Elektrické obvody fungují stále stejně, nezávisle na tom, jakou konvenci používáme, fyzika je stále stejná. ☺ Jen je dobře uvědomit si, že v různých pramenech se mohou použité konvence lišit, tak se tím nesmíme nechat vyvést z míry. My budeme dále používat konvenci zavedenou nahoře na stránce.

[47] Tohle si ještě ukážeme dále na konkrétních příkladech, kdy spotřebiči budou rezistory, a budeme užívat Ohmův zákon. Tam bude jasnější, jak tahle obecně formulovaná konvence „funguje“.

[48] Často též mluvíme o přírůstcích a úbytcích ***napětí***. Míníme tím napětí vůči nějakému konkrétnímu bodu obvodu. (V příkladu, který zde uvažujeme, třeba vůči bodu (0).) Toto napětí totiž fakticky udává potenciál. Potenciál sice můžeme změnit o konstantu, ovšem všude stejnou, takže přírůstky a úbytky se nezmění.

[49] Například v učebnici *Sedláka a Štolla: Elektřina a magnetismus*, a v učebnici *O. Lepila: Fyzika pro gymnázia. Elektřina a magnetismus*.

[50] Právě proto, že se musíme nakonec při návratu do výchozího bodu vrátit na stejný potenciál. Tuto konvenci najdeme např. v učebnici *Hallidaye, Resnicka a Walkera* i v jiných.

[51] Například v učebnicích elektrotechniky pro střední průmyslové školy.

Druhý Kirchhoffův zákon

V příkladu, který jsme uvedli, byl elektrický obvod velmi jednoduchý. Naše úvahy lze však zobecnit i na obvody mnohem složitější. Prostě si v obvodu vybereme ***smyčku***, tedy uzavřenou část, kterou můžeme projít a vrátit se do výchozího bodu. Potenciál se přitom opět postupně mění – ale při návratu do výchozího bodu se zase musíme dostat na výchozí hodnotu potenciálu. Příspěvky potenciálu na všech prvcích smyčky, jimiž procházíme, musí tedy po sečtení dát nulu. Jinými slovy, součet příspěvků na zdrojích se musí rovnat součtu úbytků na spotřebičích.

Toto tvrzení platí pro libovolnou smyčku libovolného elektrického obvodu se stacionárním proudem. Nazývá se **druhý Kirchoffův zákon**[52]:

V uzavřené smyčce elektrického obvodu je součet napětí na zdrojích roven součtu úbytků napětí na spotřebičích.

Pro aplikaci druhého Kirchhoffova zákona v uvedené formulaci[53] platí následující pravidla

- Napětí zdroje bereme kladné, jestliže při průchodu smyčkou ve zvoleném směru vstupujeme do záporného pólu zdroje. (Kdybychom při průchodu vstupovali do kladného pólu zdroje, vezmeme jeho napětí s opačným znaménkem.)
- Úbytek napětí na spotřebiči bereme s kladným znaménkem, jestliže proud teče ve stejném směru, jako je zvolený směr průchodu smyčkou. (Pokud proud teče opačným směrem, bereme úbytek napětí se záporným znaménkem.)

Poznámka 1: Druhý Kirchhoffův zákon *není* nějaký nový, nezávislý základní fyzikální zákon; plyne z toho, že elektrické pole v obvodu stacionárního proudu je elektrostatické, a tedy *konzervativní*.

Poznámka 2: Někdy se druhý Kirchhoffův zákon v učebnicích zavádí až po Ohmově zákoně, jako spotřebiče se berou rezistory a úbytky napětí se rovnou píšou jako $R \cdot I$. Ovšem druhý Kirchhoffův zákon není závislý na Ohmově zákoně. Platí obecněji, i pro obvody s prvky, pro které Ohmův zákon neplatí, jako jsou žárovky, svítivé diody apod.[54]

---

[52] Někdy též *druhé Kirchhoffovo pravidlo*.

[53] V jiných konvencích zmíněných na předchozí stránce jsou formulace druhého Kirchhoffova zákona jiné. (Například: Součet přírůstků potenciálů na prvcích uzavřené smyčky elektrického obvodu se rovná nule.)

[54] Protože pro tyto prvky neplatí lineární závislost mezi napětím a proudem, označují se někdy jako *nelineární prvky*, budeme je stručně diskutovat v části 6.6 této kapitoly.

6.4 Ohmův zákon a vodivost látek

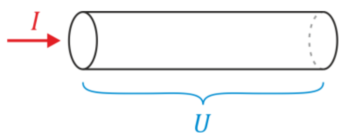
Ohmův zákon už určitě znáte. Lze ho vyvodit z pokusů.[55] Zjistíme z nich, že na homogenních vodičích[56] platí mezi napětím a proudem vztah

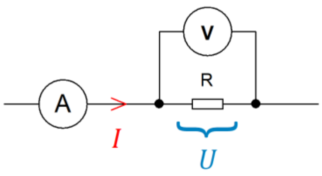
$$\boxed{I = \frac{U}{R} \quad \Leftrightarrow \quad U = I \cdot R \,,} \tag{6.31}$$

kde I je proud vodičem, U napětí mezi konci daného vodiče a R je konstanta[57]. Právě tato závislost mezi napětím a proudem se nazývá **Ohmův zákon**. Slovně jej můžeme vyjádřit formulací

proud vodičem je přímo úměrný napětí.[58]

Obrázky ukazují, jak měřit proud vodičem a napětí na vodiči: Proud měříme ampérmetrem zapojeným do série s vodičem, napětí voltmetrem připojeným paralelně k vodiči, tedy tak, že přívody k voltmetru připojíme ke koncům vodiče.





Ve schématu v pravé části obrázku je vodič vyznačen schematickou značkou.[59]

Konstantu R nazýváme **odpor vodiče**. Jednotkou odporu je jeden ***ohm***,[60] značkou jednotky je Ω; $[R]$ = Ω.

Převrácená hodnota odporu se nazývá **vodivost**, označuje se jako G, jednotkou je jeden ***siemens***, značkou jednotky je S, $[G]$ = S = 1/ Ω.

$$\frac{1}{R} = G \tag{6.32}$$

Ohmův zákon můžeme tedy zapsat i ve tvaru

$$\boxed{I = G \cdot U \,.} \tag{6.33}$$

Odtud je vidět, že název *vodivost* je vlastně přirozený: Čím větší má daný vodič vodivost, tím větší jím (při stejném napětí) teče proud.

Podívejme se teď, jak lze Ohmův zákon formulovat lokálně, pro „malý kousek materiálu vodiče“.

---

[55] Viz například měření v Dodatku C.

[56] Většinou se Ohmův zákon uvádí pro homogenní kovové vodiče. Platí ovšem i pro další vodivé látky (třeba uhlík, ale také pro polovodiče, například germanium nebo křemík, a i pro látky velmi málo vodivé). Při vedení proudu v kapalinách se ovšem uplatňují efekty mezi kapalinou a elektrodami, jimiž přivádíme proud; také vedení proudu v plynech je složitější.

[57] Pozor, R je konstanta, ale závisí na teplotě! Ohmův zákon tedy platí, pokud má vodič konstantní teplotu; k této problematice se ještě dostaneme.

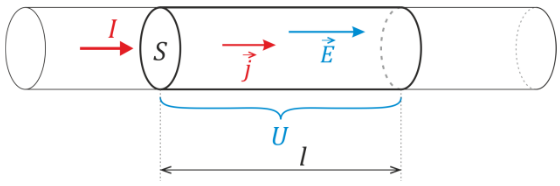
[58] Rozumí se napětí mezi konci vodiče.

[59] Používá se k označení součástky nazývané *rezistor*, k názvům a značkám se ještě dostaneme.

[60] Na počest *Georga Simona Ohma*, který objevil zákon nesoucí jeho jméno; publikoval jej v roce 1827.

Ohmův zákon („lokálně“, „v diferenciálním tvaru“)

Uvažujme kousek homogenního vodiče, například ve tvaru válce. Plochu průřezu vodiče označíme S, délka vodiče je l. Vodičem prochází proud $I = j\,S$, kde j je proudová hustota.[61] Ve vodiči je elektrická intenzita E,[62] napětí U mezi konci vodiče je tedy $U = E\,l$. Z Ohmova zákona (6.31) po dosazení dostaneme



$$j\,S = I = \frac{1}{R}U = \frac{1}{R}E\,l \quad \Rightarrow \quad j = \left(\frac{l}{S\,R}\right)E \ , \qquad (6.34)$$

V homogenním izotropním vodiči mají zřejmě proudová hustota $\vec{j}$ a elektrická intenzita $\vec{E}$ stejný směr.[63] Vztah (6.34) můžeme tedy zapsat vektorově:

$$\vec{j} = \underbrace{\left(\frac{l}{S\,R}\right)}_{\text{označíme } \gamma} \vec{E} \ . \qquad (6.35)$$

Když konstantní člen v závorce označíme jako γ,[64] jak je naznačeno, získáme výsledný vztah

$$\boxed{\vec{j} = \gamma\,\vec{E} \ .} \qquad (6.36)$$

Tento vztah vystihuje Ohmův zákon lokálně, v okolí nějakého bodu. Proto také bývá nazýván Ohmův zákon, někdy ***Ohmův zákon v diferenciálním tvaru***. Vidíme, že hustota proudu je úměrná elektrické intenzitě. (Uvědomte si, jak se podobá „globálnímu“ vztahu (6.33).)

Veličina γ se nazývá **měrná vodivost**, její převrácená hodnota ρ_R pak **měrný odpor**:

$$\rho_R = \frac{1}{\gamma} \ . \qquad (6.37)$$

Ze vztahu $\gamma = l/(S\,R)$, viz (6.35), plyne $R = (1/\gamma)\cdot(l/S)$, čili

$$\boxed{R = \rho_R \frac{l}{S} \ .} \qquad (6.38)$$

Tento vztah udává odpor vodiče délky l a průřezu S. Měrný odpor ρ_R je konstanta charakteristická pro materiál vodiče.[65] Hodnoty pro některé materiály uvádíme v Dodatku D.

Jednotkou měrného odporu je (jak můžeme odvodit z (6.38)) ohm krát metr, jednotkou měrné vodivosti siemens/metr:

$$[\rho_R] = \Omega\cdot\mathrm{m}, \quad [\gamma] = \mathrm{S/m} \ . \qquad (6.39)$$

---

[61] Jde o homogenní vodič, takže je přirozené, že proudová hustota je ve všech bodech S (a všude v celém objemu vodiče) stejná.

[62] V homogenním vodiči je elektrická intenzita také všude stejná.

[63] V našem případě směr rovnoběžný s osou daného kusu vodiče. V případě anizotropního vodiče by se směry proudové hustoty a elektrické intenzity mohly lišit, ale takové komplikace zde neuvažujeme.

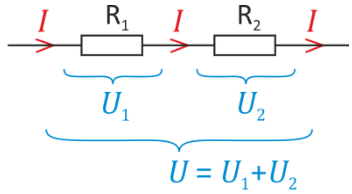
[64] V anglosaské literatuře bývá též označován σ.

[65] Závisí ale na teplotě.

Skládání odporů

V praxi často vodiče nebo rezistory spojujeme buď ***sériově*** (tedy za sebou) nebo ***paralelně*** (vedle sebe). Jaký je výsledný odpor takových kombinací?

- **Sériové zapojení**



Při zapojení do série teče oběma rezistory stejný proud I. Napětí na rezistorech se sčítají, $U = U_1 + U_2$. Napětí na jednotlivých rezistorech splňuje Ohmův zákon:

$$U_1 = R_1 I \,,$$
$$U_2 = R_2 I \,.$$

Sečtením dostaneme

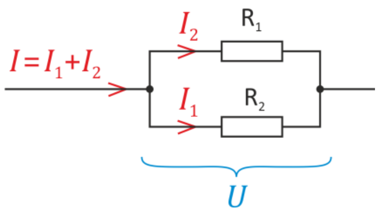
$$U = U_1 + U_2 = R_1 I + R_2 I = \left(R_1 + R_2\right) I \,.$$

Sériově spojené rezistory se tedy chovají jako jediný rezistor: celkové napětí je přímo úměrné proudu a platí Ohmův zákon $U = R I$, kde[66]

$$\boxed{R = R_1 + R_2 \,.} \tag{6.40}$$

Výsledný odpor sériově zapojených rezistorů je tedy roven součtu jejich odporů.

- **Paralelní zapojení**



V paralelním zapojení je na obou rezistorech stejné napětí U. Celkový proud je dán součtem proudů oběma rezistory, $I = I_1 + I_2$. Proudy prvním a druhým rezistorem určíme z Ohmova zákona:

$$I_1 = \frac{1}{R_1} U \,,$$
$$I_2 = \frac{1}{R_2} U \,.$$

Sečtením dostaneme

$$I = I_1 + I_2 = \frac{1}{R_1} U + \frac{1}{R_2} U = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U \,.$$

Paralelně zapojené rezistory se opět dohromady chovají jako jeden rezistor: proud je přímo úměrný napětí a splňuje tedy Ohmův zákon $I = \left(1/R\right) U$, kde

$$\boxed{\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \,.} \tag{6.41}$$

Při paralelním zapojení rezistorů se tedy sčítají *převrácené hodnoty* odporů. Jinými slovy, **sčítají se vodivosti**, výsledek (6.41) můžeme přirozeně zapsat jako

$$\boxed{G = G_1 + G_2 \,.} \tag{6.42}$$

Poznamenejme, že spojíme-li paralelně dva stejně velké odpory, $R_1 = R_2$ bude výsledný odpor poloviční, $R = R_1/2$.[67]

---

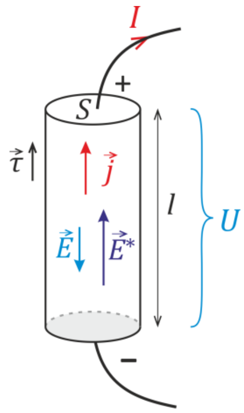
[66] Jak vidíme porovnáním s (6.40).

[67] To si lehce dokážete sami pomocí (6.41).

Jak je tomu ve zdroji?

Ve zdrojích elektrického napětí na náboje kromě elektrické intenzity působí i elektromotorické síly; jejich intenzitu jsme výše označili $\vec{E}^*$. Ohmův zákon (6.36) tedy musíme příslušně modifikovat. Pro hustotu proudu bude platit

$$\vec{j} = \gamma\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right) . \qquad (6.43)$$



Pro jednoduchost budeme uvažovat zdroj ve tvaru uvedeném na obrázku: jako váleček délky l s plochou podstavy rovnou S. Elektrickou i elektromotorickou intenzitu a také hustotu proudu budeme považovat za konstantní a rovnoběžné s osou válečku. Směr osy válečku označujeme jednotkovým vektorem $\vec{\tau}$. Měrnou vodivost γ také bereme jako konstantní.[68]

Vztah (6.43) skalárně vynásobíme jednotkovým vektorem $\vec{\tau}$. Dostaneme

$$j = \vec{j}\cdot\vec{\tau} = \gamma\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau} = \gamma\left(-E+E^*\right) \qquad \Big/ \cdot\frac{l}{\gamma} , \qquad (6.44)$$

kde E a E^* jsou velikosti elektrické a elektromotorické intenzity. Výsledek (6.44) upravíme, jak je naznačeno, a navíc sem dosadíme $j = I/S$ a využijeme toho, že elektrická intenzita E krát délka l je napětí U. Vyjde

$$I\,\frac{l}{S\gamma} = -E\,l+E^*l = -U + \underbrace{E^*l}_{\text{označíme } U_0} \qquad (6.45)$$

Na levé straně ještě dosadíme $1/\gamma = \rho_R$ a využijeme vztahu (6.38), tedy $\rho_R\, l/S = R$. Přitom R je celkový odpor vodiče – v našem případě vodiče, který tvoří zdroj. Budeme ho dále značit R_i.[69] Levá strana (6.45) tedy dá $R_i\, I$. Po těchto úpravách z (6.45) vychází

$$R_i\, I = -U + U_0 \qquad (6.46)$$

Odtud okamžitě dostaneme, že napětí zdroje je

$$\boxed{U = U_0 - R_i\, I \ .} \qquad (6.47)$$

Zde U je napětí, které zdroj poskytuje, v tomto textu ho též často značíme U_{bat}.[70] Někdy též bývá nazýváno *svorkové napětí*.

U_0 je napětí, které zdroj dává, když neodebíráme žádný proud, nazývá se ***elektromotorické napětí***[71] nebo též ***napětí naprázdno***.[72]

I je proud odebíraný ze zdroje, R_i je ***vnitřní odpor zdroje***.

---

[68] Tohle zjednodušení je názorné, ale ve skutečnosti až přílišné – zdroje napětí jsou reálně *nehomogenní* vodiče. (Příslušná kapitola v učebnicích také bývá nazývána např. „Ohmův zákon pro nehomogenní vodiče“.) Naše úvahy ale určitě budou platit pro malý kousek materiálu uvnitř zdroje, následně okomentujeme, jak z toho „poskládáme“ výsledek pro celý zdroj, viz text na následující stránce.

[69] Index „i“ zde znamená „interní“, jde o vnitřní odpor zdroje.

[70] V učebnici Sedláka a Štolla v kap. 3.2.3 je označeno jako U_0 – pozor, tento symbol zde užíváme jinak.

[71] Logicky, protože je (viz (6.47)) $U_0 = E^*l$, kde E^* je elektromotorická intenzita. V učebnici Sedláka a Štolla se značí symbolem $\mathcal{E}$.

[72] „Naprázdno“ znamená „bez zátěže“, tedy když zdroj není k ničemu připojen, maximálně k voltmetru, jímž měříme napětí. (Voltmetr odebírá jen zanedbatelný proud.)

Zobecnění získaného výsledku (pro zájemce, ale nejen pro ně):

Výsledek (6.47) vyjde i obecně, když vodič ve zdroji není homogenní a intenzity a hustota proudu závisejí na místě. Analogickou úvahu, jako jsme dělali výše, bychom udělali pro malý kousek vodiče, dejme tomu malý váleček o ploše podstavy ΔS a délce Δl; válečkem teče proud ΔI. Dostali bychom (analogicky k (6.45)):

$$\Delta I \left(\rho_R / \Delta S \right) \Delta l \;=\; -E \Delta l + E^* \Delta l \;. \qquad (6.48)$$

Tyto kousky vodiče bychom naskládali za sebe podél směru, kterým teče proud – dostali bychom tak trubici, kterou teče proud ΔI od mínus pólu k plus pólu zdroje. Na levé straně (6.48) je proud ΔI stejný pro všechny kousky, výraz $\left(\rho_R / \Delta S \right) \Delta l$ představuje odpor daného kousku vodiče. Kousky jsou zapojeny v sérii, takže „poskládáním“ (resp. integrací) dostaneme celkový odpor proudové trubice. Z pravé strany (6.48) získáme „poskládáním“ (tedy integrací podél křivky, která je osou dané proudové trubice) napětí zdroje a elektromotorické napětí. Výsledkem tedy bude

$$R_{\text{proudové trubice}}\, \Delta I = -U + U_0 \quad \Rightarrow \quad \Delta I = \frac{-U + U_0}{R_{\text{proudové trubice}}} = G_{\text{proudové trubice}} \left(-U + U_0 \right). \qquad (6.49)$$

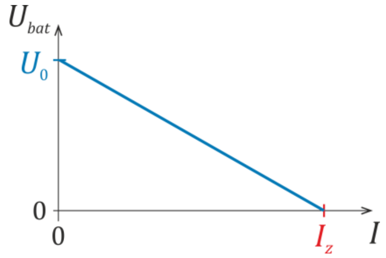
Celkový proud získáme sečtením proudů všech proudových trubic. Ty jsou paralelně, takže ve výsledku jde o paralelní zapojení jejich odporů. V tomto případě se sčítají příslušné vodivosti. Součet vodivostí označíme G_i,[73] takže pro celkový proud vyjde

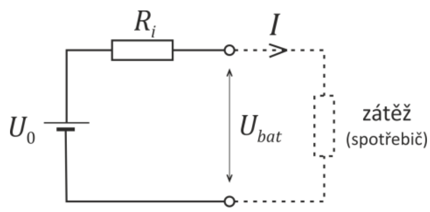
$$I \;=\; G_i \left(-U + U_0 \right) \;. \qquad (6.50)$$

Když si uvědomíme, že $R_i = 1/G_i$, vidíme, že jsme dostali (6.46).

Jak se mění napětí zdroje při odebírání různě velkých proudů?

Ze vztahu (6.47), $U_{bat} = U_0 - R_i I$, vidíme, že se zvyšujícím se odběrem proudu napětí na svorkách zdroje klesá, viz následující graf.[74] Zdroj se na výstupu chová tak, jako by byl složen z ideálního zdroje napětí (jehož napětí U_0 se zatížením neklesá), k němuž je do série připojen vnitřní odpor zdroje R_i. Toto ukazuje schéma na obrázku vpravo; takovým schématům říkáme *náhradní schéma*.





Maximální proud, který můžeme ze zdroje dostat, je $I_z = U_0/R_i$. Tento proud teče, když svorky zdroje spojíme do zkratu, proto se mu říká *zkratový proud*. Příklad zatěžovací charakteristiky naměřené na ploché baterii je v Dodatku E. Zkratový proud („čerstvé“) ploché baterie je skoro 5 A. To znamená, že její vnitřní odpor je asi $R_i = U_0/I_z \doteq 4{,}5\,\text{V} / 5\,\text{A} \doteq 1\,\Omega$.

Vývody ploché baterie můžeme spojit do zkratu (raději jen krátce, baterie se tím ničí). Ovšem **pozor – nezkratujte zdroje s malým vnitřním odporem!** Například olověné akumulátory mají vnitřní odpor řádu mΩ a zkratové proudy jsou stovky až tisíce A.[75] Takový proud může roztavit vodič, který kontakty zkratuje (například „upálit“ kousek šroubováku), navíc se akumulátor při zkratu může roztrhnout.

---

[73] Jako interní vodivost celého zdroje.

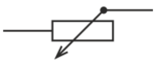
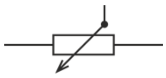
[74] Napětí klesá se zvyšujícím se zatížením zdroje, proto se takovému grafu říká ***zatěžovací charakteristika***.

[75] Na webu lze dohledat prodávanou autobaterii, u níž se uvádí zkratový proud 5 000 A.

„Technické detaily“ týkající se rezistorů

- Součástka se nazývá **rezistor**, ve starší literatuře se můžeme setkat s označením „odpor“, slangově se používá dodnes.[76]
- Značka rezistoru je , v anglosaských zemích se ale užívá značka  .
- Rezistory se běžně vyrábějí a dodávají v hodnotách od desetin Ω do 10 MΩ.
- Ve schématech se v hodnotách nepíše písmeno Ω.
  Jednotky, tisíce a miliony se označují písmeny R (nebo j, u desítek a stovek Ω se písmeno nepíše), k a M.
  Tato písmena v označeních hodnot hrají i roli desetinné čárky. Příklady:

značení	hodnota	značení	hodnota	značení	hodnota
1R (nebo 1j)	1 Ω	1k	1 kΩ	M47	0,47 MΩ
2R2 (nebo 2j2)	2,2 Ω	1k5	1,5 kΩ	1M	1 MΩ
33	33 Ω	47k	47 kΩ	2M2	2,2 MΩ
120	120 Ω	M1 (nebo 100k)	100 kΩ = 0,1 MΩ	10 M	10 MΩ

- Rezistory se běžně nevyrábějí s hodnotami odporů rostoucími lineárně (např. 1 kΩ, 2 kΩ, 3 kΩ, …), ale v řadách, kdy každá další hodnota je přibližně stejným násobkem předchozí:[77]
  řada E6: 1 | 1,5 | 2,2 | 3,3 | 4,7 | 6,8
  řada E12: 1 | 1,2 | 1,5 | 1,8 | 2,2 | 2,7 | 3,3 | 3,9 | 4,7 | 5,6 | 6,8 | 8,2
  Existuje i řada E24, tam je dělení ještě jemnější.
- Hodnoty na rezistorech se vyznačují barevnými proužky.[78]
- Rezistory se vyrábějí pro různá výkonová zatížení. (K tomu se ještě dostaneme.)
- **Reostat** je rezistor s proměnným odporem. Značka je  . Používá se k regulaci proudu.
- **Potenciometr** bychom mohli popsat jako „rezistor s nastavitelnou odbočkou“. Značka je .
  Funguje jako proměnný dělič napětí (viz dále). Používá se k regulaci napětí.[79]
  Prakticky je potenciometr konstruován tak, že odporové dráhy se dotýká jezdec, jehož polohu můžeme měnit. K dostání jsou potenciometry různých typů.[80]

---

[76] Ono je rozumné rozlišovat název součástky a fyzikální veličinu, která je s danou součástkou spojena. Užíváme například název *kondenzátor* pro součástku a *kapacita* pro fyzikální veličinu. Takže můžeme říci „tenhle kondenzátor má kapacitu 10 mikrofaradů“, nebo jinými slovy „kapacita tohoto kondenzátoru je 10 mikrofaradů“. Podobně rozlišujeme součástku *cívka* a veličinu *indukčnost*, k tomu se dostaneme v dalších kapitolách.
Právě tak různými názvy rozlišujeme součástku *rezistor* a veličinu *odpor*. Takže říkáme třeba „tento rezistor má odpor 10 kiloohmů“ nebo „na toto místo obvodu zapojíme rezistor o odporu 10 kiloohmů“.
Ovšem praktici občas řeknou stručně „tady je odpor 10 kiloohmů“ nebo „vrazíme sem odpor 10 kiloohmů“ (nebo dokonce jen „vrazíme sem odpor deset kilo“). Je to sice slangové vyjádření, ale každému je jasné, oč jde…

[77] Hodnoty jsou tedy rovnoměrně rozděleny na logaritmické škále.

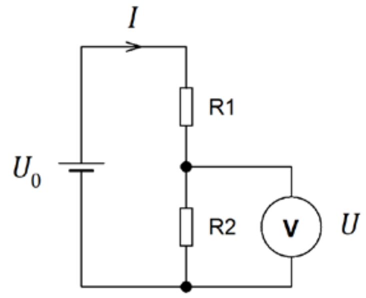
[78] Tabulky s popisem, co která barva znamená, lze najít na internetu; kopii jedné takové tabulky viz https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/Fyzika2elmag/BarevneKodyRezistoru.pdf.

[79] Pokud jeden krajní vývod nevyužijeme, může potenciometr fungovat jako reostat, pak jím můžeme řídit proud.

[80] Nejběžnější jsou *otočné potenciometry*, v nichž polohu jezdce měníme otáčením hřídele. (Speciálním typem jsou víceotáčkové potenciometry.) U tahových potenciometrů se jezdec ovládá posouváním táhla v jednom směru. V závislosti na tom, jaký průběh má odporová dráha, se potenciometry dělí na *lineární* a *logaritmické*.

6.5 Obvody s rezistory, jejich řešení a k čemu jsou dobré

Dělič napětí



Jako dělič napětí se označuje dvojice rezistorů zapojených v sérii, viz schéma. Přivádíme na něj napětí U_0,[81] výstupní napětí U odebíráme na rezistoru R2.[82]

Proud procházející rezistory je[83]

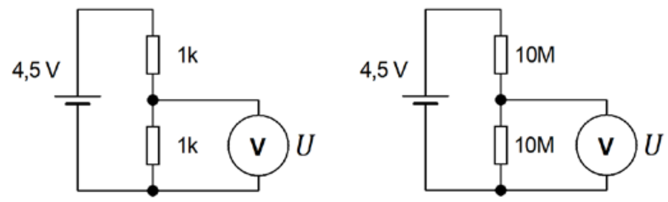
$$I = \frac{U_0}{R_1 + R_2} \qquad (6.51)$$

Napětí na rezistoru R2 určíme z Ohmova zákona jako $U = R_2 I = R_2 U_0 / (R_1 + R_2)$, čili

$$\boxed{U = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 .} \qquad (6.52)$$

Dělič napětí tedy dělí napětí na vstupu v poměru R_2 ku součtu obou odporů. Používá se k zmenšení napětí, regulaci napětí, regulaci hlasitosti v zesilovačích apod. Jak už jsme uvedli, potenciometr také funguje jako dělič napětí.

Pokus „se záhadou“



Podívejte se na dva děliče napětí na schématech vpravo. Rezistory v každém děliči mají stejné hodnoty, oba děliče tudíž rozdělí vstupní napětí na polovinu. Voltmetr tedy ukáže 2,25 V, je to tak?

Když pokus provedeme a napětí měříme běžným multimetrem, v případě prvního děliče opravdu naměříme asi 2,25 V. V případě děliče s rezistory o odporu 10 MΩ ale multimetr ukáže jen 1,5 V.

? Jak je to možné? Cožpak výše odvozený vztah (6.52) najednou neplatí?

Zkuste to vymyslet sami, než se podíváte na další stránku!
(Pokud si ani po delším přemýšlení nevíte rady, podívejte se nejdříve na nápovědu v poznámce pod čarou.[84])

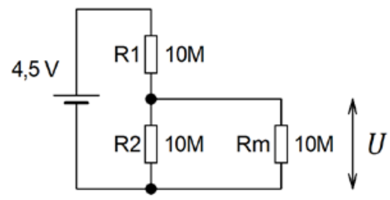
---

[81] Vnitřní odpor zdroje zakresleného ve schématu bereme jako zanedbatelně malý; případně zde U_0 označuje svorkové napětí zdroje.

[82] Rezistory ve schématu označujeme symboly R1 a R2. Hodnoty jejich odporů budeme při výpočtech označovat jako R_1 a R_2. (Analogické značení budeme používat i nadále.)

[83] Počítáme ho pomocí Ohmova zákona, R_1+R_2 je odpor sériově spojených rezistorů.

[84] Je potřeba započítat vnitřní odpor multimetru. (Je-li vám po této nápovědě podstata problému jasná, zkuste před otočením na další stránku z údajů, které jsme výše uvedli, určit hodnotu vnitřního odporu multimetru.)



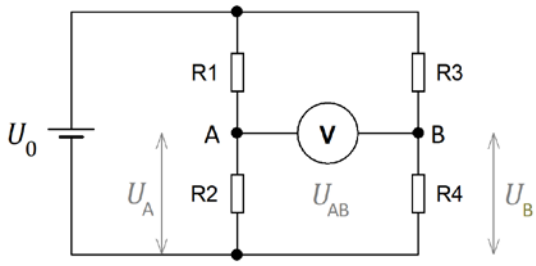
Inu, vztah pro dělič napětí stále platí – ale musíme vzít v potaz, že k rezistoru R2 je paralelně připojen odpor voltmetru. Voltmetr mívá velký vnitřní odpor, takže u děliče s odpory 1 kΩ se jeho připojení prakticky neprojeví. Vnitřní odpor běžného multimetru je na napěťových rozsazích obvykle 10 MΩ. U děliče s odpory 10 MΩ se proto projeví výrazně – odvoďte si, že na voltmetru opravdu bude napětí jen 1,5 V.[85]

V uvedeném příkladu jsme zjistili, jak se chová **zatížený dělič napětí**. Vidíme, že se chová jako zdroj, jehož napětí naprázdno je dáno dělicím poměrem děliče[86]; tento zdroj ale má určitý vnitřní odpor, takže napětí na výstupu při zatížení klesá.

Bližším rozborem bychom zjistili, že vnitřní odpor děliče je roven odporu paralelně spojených rezistorů R1 a R2.[87]

Obecně platí, že když ze dvou bodů elektrického obvodu (tvořeného zdroji a rezistory) odebíráme napětí, dostaneme zdroj s určitým napětím naprázdno a s určitým vnitřním odporem. Toto tvrzení je obsahem tzv. ***Théveniova teorému***.[88] (Používá se též název *Théveniova věta*.)

Wheatstoneův můstek



Obvod nazývaný *Wheatstoneův můstek* je tvořen čtyřmi rezistory v zapojení podle schématu. Fakticky jde o dva děliče napětí; voltmetrem měříme napětí U_{AB} mezi jejich výstupy A a B.

Říkáme, že můstek je ***vyvážený***, když $U_{AB} = 0$, tedy když $U_A = U_B$.[89] Jinými slovy, můstek je vyvážený, když voltmetr ukáže nulu.

Napětí U_A a U_B určíme ze vztahu (6.52) pro výstupní napětí děliče:

$$U_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 , \qquad U_B = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_0 \quad . \tag{6.53}$$

Napětí se rovnají, když

$$\frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 = \frac{R_4}{R_3 + R_4} U_0 \Rightarrow \frac{R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R_4}{R_3 + R_4} \Rightarrow \frac{R_1 + R_2}{R_2} = \frac{R_3 + R_4}{R_4} \Rightarrow \frac{R_1}{R_2} + 1 = \frac{R_3}{R_4} + 1 \ .$$

Odtud vidíme, že **můstek je vyvážený, když**

$$\boxed{\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4} \ .} \tag{6.54}$$

$\boxed{?}$ A k čemu je to dobré?

---

[85] Paralelně spojený rezistor R2 a multimetr budou mít dohromady odpor jen 5 MΩ, dělič tedy dělí napětí v poměru 1:3.

[86] V našem příkladu to bylo 2,25 V.

[87] Zkuste si to odvodit, nebo se alespoň přesvědčit, že to v našem příkladu opravdu vychází: Vnitřní odpor našeho děliče vyjde 5 MΩ, když ho zatížíme odporem multimetru 10 MΩ, klesne výstupní napětí na 2/3 z 2,25 V, to dá právě 1,5 V.

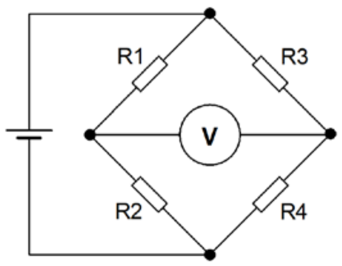
[88] Zájemci: Vyhledejte si tento teorém v literatuře nebo na internetu a seznamte se s ním prosím sami.

[89] U_A je napětí na rezistoru R2, U_B napětí na rezistoru R4. Jde tedy o napětí v bodech A a B vůči zápornému pólu baterie. Napětí mezi výstupy A a B je $U_{AB} = U_A - U_B$.

Wheatstoneův můstek se užívá ***k měření odporů***. Jestliže neznáme například hodnotu odporu R1 a podaří se nám nastavit hodnoty známých odporů rezistorů R2, R3 a R4 tak, že můstek je vyvážen,[90] víme, že určitě musí být $R_1 = R_2\,R_3/R_4$.

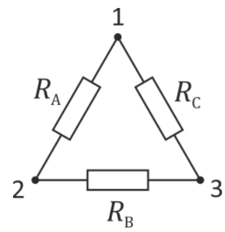
„Proč tak složitě?“, můžete se zeptat. „Proč jednoduše nezměřit neznámý odpor ohmmetrem? Nebo nezměřit proud rezistorem a napětí na něm a vypočítat jeho odpor pomocí Ohmova zákona?[91]“

Inu, měření pomocí Wheatstoneova můstku může být výrazně přesnější. Potřebujeme při něm známé dostatečně přesné hodnoty odporů – ale například nezáleží na napětí zdroje.[92] A také nezáleží na tom, jak přesně měří napětí použitý voltmetr; musí jen určit, kdy je napětí rovno nule. Dokonce příliš nezáleží ani na vnitřním odporu voltmetru! Když je můstek vyvážený, je na voltmetru nulové napětí a neprotéká jím tedy žádný proud, takže vnitřní odpor voltmetru se neuplatní.[93]



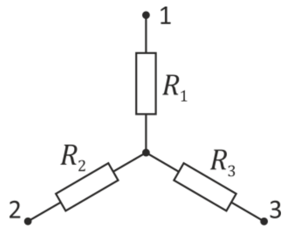
Poznamenejme ještě, že schéma Wheatstoneova můstku se většinou kreslí tak, jak ukazuje obrázek vpravo.

Pro zájemce: **Převod z trojúhelníku na hvězdu**



Někdy bývají rezistory v obvodu zapojeny tak, že tvoří trojúhelník, viz obrázek vpravo. Při výpočtech proudů v obvodu bývá někdy výhodné uvažovat ekvivalentní kombinaci jiných tří rezistorů zapojených do trojúhelníku.

„Ekvivalentní kombinace“ znamená, že například odpor mezi body 1 a 2, který je v zapojení do trojúhelníku roven paralelní kombinaci odporů R_A a R_B+R_C , bude stejný i v zapojení do hvězdy, kde se rovná R_1+R_2. A analogicky toto bude platit i pro odpory mezi body 1 a 3 a také mezi body 2 a 3.



Když zapíšeme uvedené podmínky, dostaneme tři lineární rovnice pro tři neznámé R_1, R_2 a R_3. Vyřešení těchto rovnic dá výsledek[94]

$$R_1 = \frac{R_A R_C}{R_A + R_B + R_C},\; R_2 = \frac{R_A R_B}{R_A + R_B + R_C},\; R_3 = \frac{R_B R_C}{R_A + R_B + R_C}. \qquad (6.55)$$

---

[90] Některé rezistory, například R2 a R4 volíme pevné (známých hodnot). Zbývající rezistor (např. R3) skládáme z přesných odporů sestavených do *odporových dekád*.

[91] Ve skutečnosti právě takto měří odpor běžné digitální multimetry.

[92] U_0 ze vztahu pro vyvážení můstku zcela vypadlo. Samozřejmě, nebudeme používat zdroj o napětí jeden milivolt nebo tisíc voltů, ale jestli má zdroj 5 nebo 10 V, bude prakticky jedno.

[93] Zpřesňující poznámka: Není pravda, že by na vnitřním odporu voltmetru při měření vůbec nezáleželo. Kdyby byly v můstku odpory řádu megaohmů a voltmetr měl vnitřní odpor velmi nízký, třeba jen 1 kiloohm, bylo by i při nevyváženém můstku napětí na voltmetru velmi malé, takže měření by bylo málo citlivé. (Rozmyslete si, proč tomu tak je.)

[94] Odvození tohoto výsledku si jistě laskavý čtenář provede sám (☺).

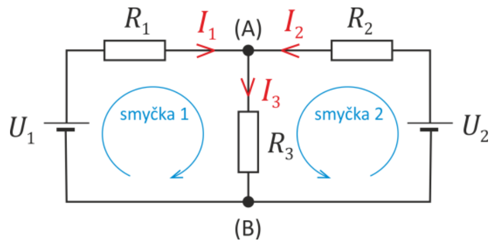
Jak řešit elektrické obvody (se zdroji a rezistory)

Termínem „vyřešit“ elektrický obvod, v němž známe napětí všech zdrojů a odpory všech rezistorů, zde míníme vypočítat proudy ve všech větvích obvodu.[95]

Odpověď na otázku „jak řešit“ je jednoduchá – **pomocí Kirchhoffových zákonů**.[96]

Ukážeme si jejich použití nejprve na konkrétním příkladu, pak si jej všimneme obecněji.

Příklad



Uvažujme obvod se dvěma zdroji a třemi rezistory, viz schéma vpravo. Známe napětí zdrojů a odpory rezistorů, naší úlohou je vypočítat proudy I_1, I_2, I_3 v jednotlivých *větvích* obvodu.

Obvod má dva *uzly* (označené (A) a (B)) a dvě *smyčky*.[97]

Při řešení použijeme:

- 1. Kirchhoffův zákon pro uzel (A):[98]

$$I_1 + I_2 = I_3 \ . \tag{6.56}$$

- 2. Kirchhoffův zákon pro smyčky (1) a (2):[99]

$$U_1 = R_1 I_1 + R_3 I_3 \ , \tag{6.57}$$

$$U_2 = R_2 I_2 + R_3 I_3 \ . \tag{6.58}$$

Máme tedy 3 rovnice pro 3 neznámé I_1, I_2, I_3. Pro pohodlnější výpočet si je přepíšeme do tvaru

$$\begin{aligned} I_1 \quad + I_2 \quad - I_3 &= 0 \ , \\ R_1 I_1 \qquad + R_3 I_3 &= U_1 \ , \\ R_2 I_2 + R_3 I_3 &= U_2 \ . \end{aligned} \tag{6.59}$$

Tuto soustavu rovnic už můžeme řešit libovolným standardním způsobem.[100]

---

[95] Jde-li o obvod s jedním zdrojem a jedním spotřebičem (rezistorem), stačí použít Ohmův zákon. Rádi bychom ale měli obecnou metodu i pro obvody složitější.

[96] Pro řešení elektrických obvodů se používají i další metody, zejména *metoda smyčkových proudů* a *metoda uzlových napětí*. I tyto metody vlastně využívají Kirchhoffovy zákony. Blíže je zde popisovat nebudeme, zájemci se mohou s jejich použitím seznámit třeba ve *Sbírce řešených úloh* na http://reseneulohy.cz/cs/fyzika/elektrina-a-magnetismus. (Poznámka: Například metoda uzlových bodů je ale poněkud jinak formulována v této *Sbírce* a jinak v učebnici *Sedlák, Štoll: Elektřina a magnetismus*.)

[97] Pojmy *větev*, *smyčka* a *uzel* se při řešení elektrických obvodů standardně používají; z příkladu je snad názorně vidět jejich význam. Konec konců pojmy „smyčka“ a „uzel“ jsme už používali výše. Větev je prostě část obvodu spojující dva uzly.

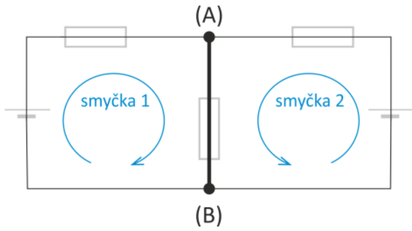
[98] Pro uzel (B) pak bude 1. Kirchhoffův zákon splněn automaticky. (Rozmyslete si, proč je tomu tak.) Kdybychom 1. Kirchoffův zákon napsali pro uzel (B), vyšla by stejná rovnice.

[99] V obvodu existuje ještě třetí smyčka („kolem dokola“, zahrnula by oba zdroje a rezistory R1 a R2) – ale pokud pro ni napíšeme druhý Kirchhoffův zákon, nedostaneme nezávislou rovnici. (Dostali bychom lineární kombinaci rovnic (6.57) a (6.58).)

[100] Například sčítací metodou: první rovnici vynásobíme R_3 a přičteme ke zbylým dvěma rovnicím. Dostaneme dvě rovnice pro dvě neznámé… a dál už snad řešení popisovat nemusíme. Pro kontrolu zde uvedeme řešení: $I_1 = \frac{(R_2+R_3)U_1 - R_3 U_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$, $I_2 = \frac{(R_1+R_3)U_2 - R_3 U_1}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$, $I_3 = \frac{R_2 U_1 + R_1 U_2}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$. Můžete si ověřit, že dávají rozumné výsledky ve speciálních případech, například pro $R_2 \to \infty$ apod.

Jak řešit obecné (tj. složitější) elektrické obvody?

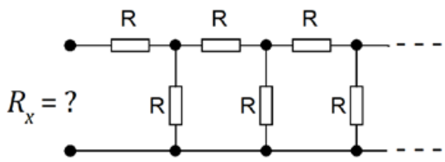
Podívejme se teď, jak najít všechny „nezávislé smyčky" (tj. smyčky, které dají po aplikaci druhého Kirchhoffova zákona nezávislé rovnice) a jak je to obecně s počtem rovnic a neznámých.



- Nakreslíme si obvod pouze schematicky, jako ***graf***[101], tedy bez rezistorů a zdrojů, jen uzly a jejich propojení větvemi. (Graf obvodu z předchozího příkladu ukazuje obrázek vpravo.)
- V grafu si vyznačíme tzv. ***úplný strom***. To je část grafu, která obsahuje všechny uzly, ale jen tolik větví, aby zde nebyla žádná uzavřená smyčka – ovšem aby přidáním libovolné další větve uzavřená smyčka vznikla.[102] Pro obvod, který má N uzlů, má úplný strom také N uzlů, větví má N-1.
- Přidáme zbývající větve; jejich počet označíme n.
  - Celkem tedy bude v grafu N-1+n větví. Proud v každá větvi máme určit – vidíme, že celkem máme N-1+n neznámých.
  - Přidáním každé ze zbývajících n větví vznikla v grafu nová smyčka; máme tedy n nezávislých smyček.
- Pro každou nezávislou smyčku dá 2. Kirchhoffův zákon jednu rovnici, celkem tedy n nezávislých rovnic.
- Pro každý z N-1 uzlů sestavíme rovnici podle 1. Kirchhoffova zákona[103]; dostaneme tím N-1 nezávislých rovnic.
- Celkem tedy máme soustavu N-1+n nezávislých lineárních rovnic pro N-1+n neznámých. Taková soustava má právě jedno řešení.

Poznamenejme, že úplný strom není grafem určen jednoznačně, takže podle toho, jaký vybereme, nám mohou vyjít různé soustavy rovnic. Řešení ale samozřejmě dají všechny stejné.

A jako bonus pro zájemce, jedna **hříčka**:



Mějme nekonečnou řadu rezistorů podle schématu. Odpor každého rezistoru je R. Jaký odpor naměří ohmmetr připojený ke vstupním svorkám?

Dá se to vypočítat hezkým trikem, zkuste ho vymyslet.[104]

(V praxi je tahle hříčka sice zřejmě k ničemu, ale ten trik je pěkný… ☺)

[101] Grafem teď samozřejmě nemyslíme graf funkce, ale graf, který má větve a uzly. (V teorii grafů se uzlům říká vrcholy a větvím hrany. Základní informaci lze najít například i na Wikipedii.)

[102] V obrázku je úplný strom vyznačen silnou čarou, je to jediná větev spojující uzly (A) a (B).

[103] Rovnice pro N-tý uzel už bude automaticky splněna; dostali bychom ji jako kombinaci těch N-1 rovnic.

[104] Pro kontrolu: vyjde $R_x = \left(1+\sqrt{5}\right)/2\,R \doteq 1,62\,R$.

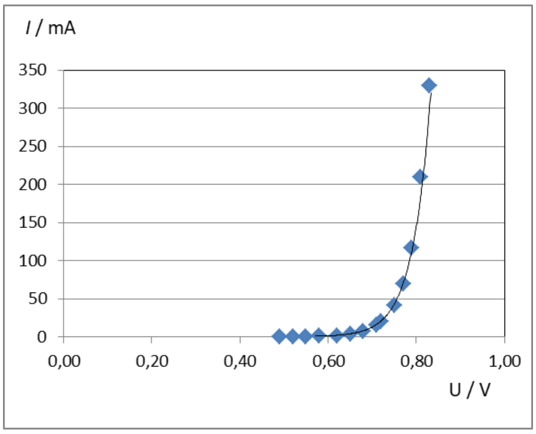
6.6 Nelineární prvky: když neplatí Ohmův zákon

Ohmův zákon *platí* pro homogenní vodiče při stálé teplotě.

Ale například pro **žárovku** Ohmův zákon neplatí – právě proto, že při rostoucím proudu roste teplota vlákna žárovky, a s teplotou roste i odpor vlákna.[105]

Závislost proudu na napětí (té se říká ***voltampérová charakteristika***, zkráceně *V-A charakteristika*) je proto pro žárovku **nelineární**. S rostoucím napětím proud nenarůstá přímo úměrně, ale pomaleji.

Nelineární závislost proudu na napětí je také u polovodičových prvků, například u polovodičové diody nebo u svítivé diody (LED). Na rozdíl od žárovky zde ale proud s rostoucím napětím stoupá rychleji, než lineárně. Příklad naměřené charakteristiky křemíkové diody ukazuje graf.[106]



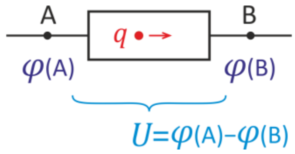
Proto svítivou diodu[107] nepřipojujeme přímo ke zdroji napětí, ale proud omezíme například sériově zapojeným rezistorem.

[105] Obecně odpor kovových vodičů s teplotou roste.

[106] Pro zájemce: Závislost proudu na napětí je u polovodičové diody s dobrou přesností exponenciální. (Upřesnění: Při vyšších proudech se ale uplatňuje i vnitřní odpor diody a proud pak již stoupá pomaleji než exponenciálně.)

[107] Pokud nejde o speciální typ, který v době má omezení proudu.

6.7 Výkon elektrického proudu



Když náboj q projde třeba rezistorem, posune se z místa A o potenciálu φ(A) (kde měl energii $q\,\varphi$(A)) do místa B o potenciálu φ(B) (kde má energii $q\,\varphi$(B)).

Je přitom φ(B) < φ(A), [108] takže potenciální energie náboje poklesne o $W = q\left(\varphi(A) - \varphi(B)\right) = qU$. [109] Tuto energii náboj „ztratí“, přesněji řečeno předá materiálu rezistoru. To znamená, že se zvýší vnitřní energie materiálu rezistoru – jinými slovy, rezistor se zahřeje.[110]

Elektrická energie se nemusí vždy měnit na vnitřní energii (tedy „na teplo“). V některých součástkách se může měnit na jiné formy energie. Například v červené LED elektron projde rozdílem potenciálů asi 1,8 V, takže ztratí energii 1,8 eV.[111] To odpovídá energii fotonu červeného světla.[112] Elektrická energie se zde mění na světelnou.

Vraťme se ale k rezistoru – i když naše úvahy budou platit obecněji.

Když za dobu Δt projde rezistorem náboj Δq, předá rezistoru energii $\Delta W = \Delta q\, U$. To znamená, že **výkon**, který je předáván rezistoru, je

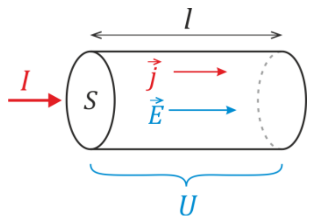
$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = U\frac{\Delta q}{\Delta t} = U \cdot I \ , \tag{6.60}$$

kde I je proud procházející rezistorem. Protože na rezistoru (a obecně na kovovém vodiči) platí Ohmův zákon, můžeme vztah pro **výkon elektrického proudu** vyjádřit několika způsoby:[113]

$$\boxed{P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}} \tag{6.61}$$

Hustota výkonu

Vztah (6.61) udává výkon na celém rezistoru. Je užitečné podívat se, jak je tomu ***lokálně***, v malém kousku materiálu.



Uvažujme homogenní vodič ve tvaru válečku výšky l s plochou podstavy S, kterým protéká proud I; napětí mezi konci válečku[114] je U. Elektrická intenzita E je v celém válečku stejná, takže napětí je $U = E\,l$. Všude stejná je i proudová hustota j,[115] takže celkový proud je $I = j\,S$. Z (6.61) proto dostaneme[116]

[108] V naší úvaze předpokládáme q>0, náboj je tedy „postrkován“ do místa s nižším potenciálem. (V kovovém vodiči se samozřejmě elektrony pohybují opačně; pokud chcete, můžete si celou úvahu přeformulovat pro q<0.)

[109] U je samozřejmě napětí na rezistoru.

[110] Krátce a nepřesně se někdy říká, že se „elektrická energie přeměnila na teplo“; pro energii předanou rezistoru se často používá termín ***Jouleovo teplo***.

[111] Jeden elektronvolt je energie, kterou získá elektron, když projde potenciálovým rozdílem 1 V. Převedeno na jouly je 1 eV ≐ 1,602·10^{-19} J.

[112] $W = h\,f = hc/\lambda \doteq 1{,}986 \cdot 10^{-25}\,\mathrm{Jm}/(7 \cdot 10^{-7}\,\mathrm{m}) \doteq 2{,}84 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{J} \doteq 1{,}77\ \mathrm{eV}$.

[113] Ze vztahu (6.63) a Ohmova zákona už zde tyto vzorce podrobně neodvozujeme, to už laskavý čtenář jistě udělá sám, ono se to dá odvodit i bez tužky a papíru, jen z hlavy…

[114] Tedy, mezi jeho podstavami, abychom se vyjadřovali přesněji.

[115] Materiál válečku je homogenní, takže když je mezi koncovými ploškami konstantní napětí, není důvod, proč by uvnitř bylo nehomogenní pole; v důsledku Ohmova zákona pak bude v celém objemu stejná i hustota proudu.

[116] Při odvození využíváme toho, že $\vec{E}$ a $\vec{j}$ mají stejný směr, a že $l\,S = V$ je objem vodiče.

$$P = U \cdot I = El \cdot jS = Ej\underbrace{(lS)}_{=V} = \vec{E} \cdot \vec{j}\, V \;. \tag{6.62}$$

Po vydělení objemem vodiče vidíme, že **hustota výkonu** elektrického proudu je

$$\boxed{\frac{P}{V} = \vec{E} \cdot \vec{j}\;.} \tag{6.63}$$

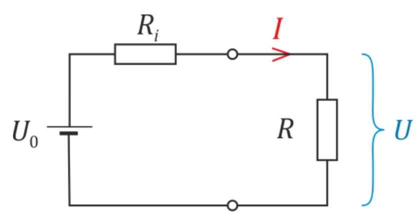
Aplikace

Přeměnu elektrické energie na jiné formy energie využíváme snad ve všech spotřebičích.[117] Když zůstaneme u tepelných účinků, můžeme uvést třeba

- Elektrické vařiče, fény, radiátory, přímotopy, teplomety…
- Žárovky (opět jde o zahřívání vodiče, a to na tak vysokou teplotu, že svítí).
- Tavné pojistky. (Tenký drátek v nich se dostatečně velkým proudem přepálí.[118])

A jeden problém na závěr:

? Jak ze zdroje s vnitřním odporem R_i dostat co největší výkon?



Mějme zdroj, jehož napětí naprázdno je U_0 a vnitřní odpor R_i. Jak velký odpor R máme ke zdroji připojit, abychom z něj dostali co největší výkon?[119] Naštěstí to lze určit jednoduše.

Proud obvodem je podle Ohmova zákona $I = \dfrac{U_0}{R_i + R}$. Výkon na odporu R určíme ze vztahu $P = RI^2$:

$$P = RI^2 = R\frac{(U_0)^2}{(R_i + R)^2} \;. \tag{6.64}$$

Maximum výkonu najdeme derivováním P podle R (a zjištěním, kdy se tato derivace rovná nule):

$$0 = \frac{dP}{dR} = (U_0)^2 \frac{d}{dR}\frac{R}{(R_i + R)^2} = (U_0)^2 \frac{(R_i + R)^2 - R \cdot 2(R_i + R)}{(R_i + R)^4} = (U_0)^2 \frac{R_i - R}{(R_i + R)^3}\,. \tag{6.65}$$

Vidíme, že výkon je maximální pro $R = R_i$.

Po dosazení do (6.64) můžeme určit, že výkon na rezistoru R je v tomto případě $P_{\max} = \dfrac{(U_0)^2}{4R_i}$. Stejným výkonem je ovšem zahříván i zdroj.[120]

---

[117] Pro výkon vždy platí vztah (6.61). Platí i v případě, kdy nejde o stacionární proud, v tom případě určuje *okamžitý výkon*.

[118] On to nemusí být úplně tenká drátek; nožové pojistky mají vypínací proudy i mnoho set ampér.

[119] Je to dilema: Když bude R moc velký, zdroj příliš nezatíží a napětí na svorkách zdroje bude skoro rovno U_0; ovšem proud bude velmi malý, takže získáme jen malý výkon. Když bude R velmi malý, tak bude sice proud velký, ale zdroj bude pracovat skoro do zkratu, takže na jeho svorkách bude velmi malé napětí – a opět získáme jen malý výkon. Zřejmě bude třeba něco mezi…

[120] Dokažte si sami, že to je pravda.

Shrnutí

Zákon zachování náboje: Náboj nejde vytvořit ani zničit, $\frac{dQ}{dt} = -I_{\text{ven}} = -\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$

Proudová hustota: $j = I/S$, $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$, pro náboj s hustotou ρ: $\vec{j} = \rho\vec{v}$

Rovnice kontinuity: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0$ (zákon zachování náboje v diferenciálním tvaru)

Pro stacionární proud: $\operatorname{div} \vec{j} = 0$, $\oint_S \vec{j} \cdot d\vec{S} = 0$ => 1. Kirchhoffův zákon

První Kirchhoffův zákon: $\sum_{i=1}^{N} I_i = 0$ Celkový stacionární proud vytékající z libovolného uzlu elektrického obvodu je roven nule. (Názorně řečeno: „Co vteče, to vyteče.“)

Elektrické pole stacionárního proudu je elektrostatické => má potenciál => 2. Kirchhoffův zákon

Druhý Kirchhoffův zákon: V uzavřené smyčce elektrického obvodu je součet napětí na zdrojích roven součtu úbytků napětí na spotřebičích.

Ohmův zákon: $I = \frac{U}{R}$, též $I = GU$, $U = IR$, platí pro homogenní vodič (při konstantní teplotě)

R … elektrický odpor, [R] = Ω (ohm), G… vodivost, $G = 1/R$, [G] = S (siemens) = 1/Ω

ρ_R … měrný odpor, [ρ_R] = Ω·m, $\gamma = 1/\rho_R$ … měrná vodivost, [γ] = 1/(Ω·m) = S/m

Ohmův zákon v diferenciálním tvaru: $\vec{j} = \gamma\vec{E}$

Odpor vodiče délky l průřezu S: $R = \rho_R \frac{l}{S}$

Skládání odporů: za sebou (sériově): $R = R_1 + R_2$; vedle sebe (paralelně): $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ (tj. $G = G_1 + G_2$)

Napětí zdroje s vnitřním odporem R_i: $U = U_0 - R_i I$ (U_0 … napětí naprázdno, tj. elektromotorické napětí)

Elektrické obvody:

Dělič napětí: $U = U_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$ (toto je výstupní napětí nezatíženého děliče), aplikace: potenciometr

Wheatstoneův můstek: při vyvážení: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_3}{R_4}$

Ohmův zákon neplatí vždy: např. když se mění teplota (žárovka) nebo třeba na svítivé diodě (LED)

Výkon elektrického proudu:

$P = U \cdot I = R \cdot I^2 = \frac{U^2}{R}$, hustota výkonu: $\frac{P}{V} = \vec{E} \cdot \vec{j}$

Aplikace: elektrické vařiče, radiátory, teplomety, žárovky, pojistky, …

Dodatek 6.A: K odvození rovnice kontinuity

Nechť $f = f(\vec{r})$ je spojitá funkce prostorových proměnných a nechť **pro libovolný objem** V platí

$$\int_V f(\vec{r})\,dV = 0 \ . \tag{6.A.1}$$

Dokážeme, že pak nutně platí[121]

$$f(\vec{r}) = 0 \ . \tag{6.A.2}$$

Důkaz lze jednoduše provést sporem. Předpokládejme, že v nějakém bodě $\vec{r}_0$ je $f(\vec{r}_0)$ nenulové, řekněme $f(\vec{r}_0) > 0$. V důsledku spojitosti funkce f musí existovat nějaké okolí O, v němž je všude také $f(\vec{r}) > 0$.

Zvolme objem $\tilde{V}$ tak, aby celý ležel v okolí O. V tomto objemu je tedy všude $f(\vec{r}) > 0$. Integrál z kladné funkce ovšem musí být kladný:

$$\int_{\tilde{V}} f(\vec{r})\,dV > 0 \ . \tag{6.A.3}$$

To je ale ve sporu s (6.A.1).[122] Musí tedy platit (6.A.2).

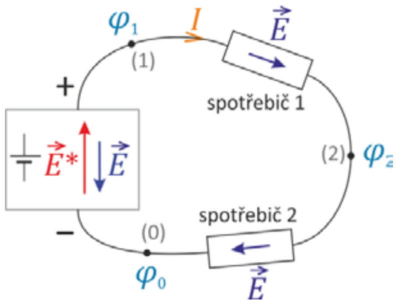
[121] V oblasti, kde platí (6.A.1).

[122] Právě proto, že (6.A.1) má platit pro *libovolný* objem.

Dodatek 6.B: Elektrická intenzita, potenciál a napětí v elektrickém obvodu (pro zájemce, ale nejen pro ně)

V elektrostatice jsme definovali potenciál pomocí elektrické intenzity jako

$$\varphi(\vec{r}_B) = -\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \varphi(\vec{r}_A)\ .\text{[123]} \tag{6.B.1}$$



Stojí za to přesvědčit se, že vztah (6.30), tedy

$$U_{bat} = U_{12} + U_{20} \tag{6.B.2}$$

pro napětí v obvodu na obrázku je konzistentní s touto definicí potenciálu.[124]

Potenciál v jednotlivých bodech je

$$\varphi_0 = -\int_{\vec{r}_A}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \varphi(\vec{r}_A), \quad \varphi_1 = -\int_{\vec{r}_A}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \varphi(\vec{r}_A), \quad \varphi_2 = -\int_{\vec{r}_A}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \varphi(\vec{r}_A)\,. \tag{6.B.3}$$

Napětí na baterii a spotřebičích jsou (viz (6.27) – (6.29)):[125]

$$\begin{aligned}
U_{bat} &= \varphi_1 - \varphi_0 = -\int_{\vec{r}_A}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{\vec{r}_A}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = -\int_{(0)}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,',\\
U_{12} &= \varphi_1 - \varphi_2 = -\int_{\vec{r}_A}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{\vec{r}_A}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,',\\
U_{20} &= \varphi_2 - \varphi_0 = -\int_{\vec{r}_A}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{\vec{r}_A}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \int_{(2)}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'.
\end{aligned} \tag{6.B.4}$$

Když nyní sečteme tato napětí (napětí baterie s obráceným znaménkem), dostaneme

$$-U_{bat} + U_{12} + U_{20} = \int_{(0)}^{(1)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{(1)}^{(2)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{(2)}^{(0)} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \oint \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = 0\ , \tag{6.B.5}$$

protože elektrické pole je konzervativní.

Je tedy $-U_{bat} + U_{12} + U_{20} = 0$, čili

$$U_{bat} = U_{12} + U_{20}\,,$$

a to už je kýžený výsledek (6.B.2).

---

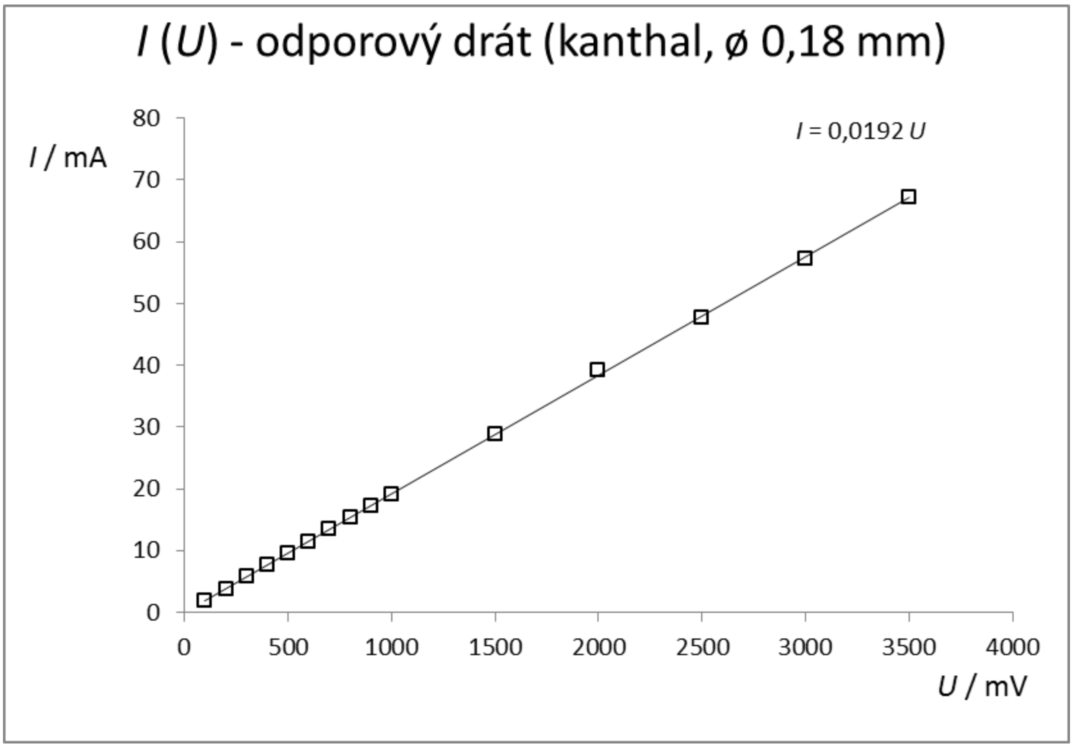
[123] Výchozí bod $\vec{r}_A$ jsme přitom mohli volit libovolně, stejně jako hodnotu potenciálu $\varphi(\vec{r}_A)$ v tomto bodě.

[124] Zároveň si přitom připomeneme vztah mezi napětím a elektrickou intenzitou.

[125] Při úpravách využíváme toho, že pro křivkový integrál platí $\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' + \int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_C} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_C} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$, resp. důsledek tohoto vztahu: $\int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' - \int_{\vec{r}_A}^{\vec{r}_C} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = -\int_{\vec{r}_B}^{\vec{r}_C} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,' = \int_{\vec{r}_C}^{\vec{r}_B} \vec{E}(\vec{r}\,')\cdot d\vec{r}\,'$. Nemusíme přitom specifikovat křivky, po kterých integrujeme, protože elektrické pole je konzervativní.

Dodatek 6.C: Ohmův zákon

Voltampérová charakteristika odporového drátu (příklad měření)



V-A charakteristika odporového drátu

kanthal, průměr 0,18 mm, délka 1 m (resp. o něco méně)

U	I	U/I
[mV]	[mA]	Ω
100	1,9	52,6
200	3,84	52,1
300	5,74	52,3
400	7,62	52,5
500	9,58	52,2
600	11,5	52,2
700	13,4	52,2
800	15,3	52,3
900	17,2	52,3
1000	19,1	52,4
1500	28,9	51,9
2000	39,2	51,0
2500	47,7	52,4
3000	57,3	52,4
3500	67,1	52,2

Dodatek 6.D: Měrný odpor vodičů a dalších materiálů

(Dle různých pramenů, některé hodnoty zřejmě budou „s ručením omezeným“ ☺
Najdete-li v níže uvedených hodnotách chybu, dejte to prosím vědět mně i ostatním.)

Materiál	Měrný elektrický odpor ρ_R	Odpor drátu o průměru 1 mm a délce 1 m	Délka drátu o průměru 1 mm a odporu 1 Ω
Stříbro	$1{,}6\cdot10^{-8}$ Ω·m	0,02 Ω	49 m
Měď	$1{,}7\cdot10^{-8}$ Ω·m	0,022 Ω	46 m
Hliník	$2{,}8\cdot10^{-8}$ Ω·m	0,036 Ω	28 m
Cín	$11\cdot10^{-8}$ Ω·m	0,14 Ω	7 m
Uhlík (grafit)	(40 až 150)$\cdot10^{-8}$ Ω·m	asi (0,5 až 2) Ω	(0,5 až 2) m
Kanthal	$145\cdot10^{-8}$ Ω·m	1,8 Ω	0,55 m
Germanium	0,5 Ω·m	600 kΩ	1,7 µm
		Odpor krychličky o hraně 1 cm	
Mořská voda	0,2 Ω·m	20 Ω	
Pitná voda	(20 až 2000) Ω·m	(2 až 200) kΩ	
Ultračistá voda	$1{,}8\cdot10^{5}$ Ω·m	18 MΩ	
			Proud destičkou o ploše 10 cm × 10 cm o tloušťce 1 cm při napětí 10 kV
Sklo	řádově$\cdot10^{12}$ Ω·m		řádově·10 nA
Kalafuna	řádově$\cdot10^{14}$ Ω·m		řádově·0,1 nA
Parafin	řádově$\cdot10^{16}$ Ω·m		řádově·1 pA
PET	řádově$\cdot10^{21}$ Ω·m (?)		
Teflon	řádově$\cdot10^{23}$ Ω·m (?)		… fakt hodně málo … ☺

Měrná elektrická vodivost je $\gamma = \dfrac{1}{\rho_R}$. Odpor vodiče délky l o průřezu S je $R = \rho_R \dfrac{l}{S}$.

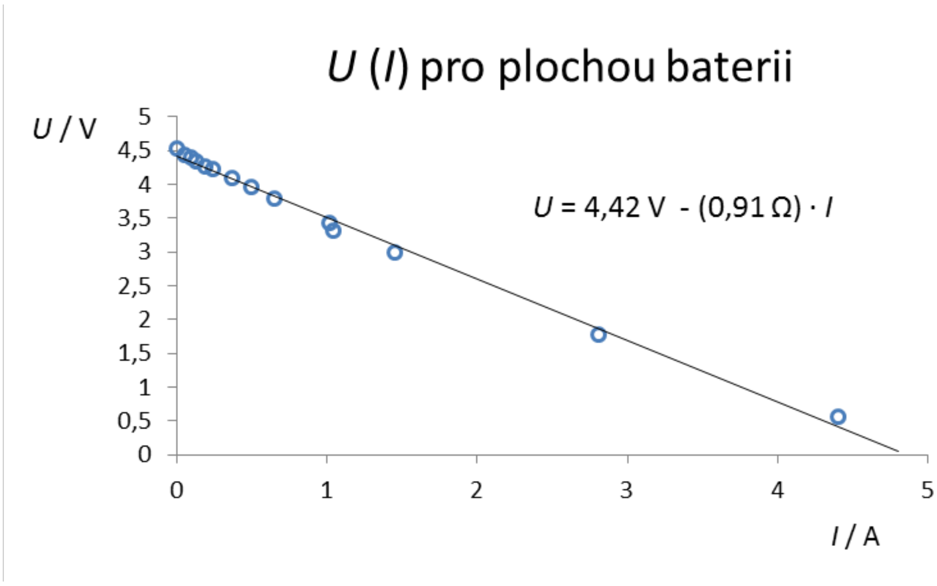
Je vidět, že:

1) Vedou vlastně všechny materiály, včetně těch, které označujeme jako izolanty. (Ty ale vedou opravdu hodně málo.)

2) Hodnoty měrného elektrického odporu se liší až o více než třicet řádů. (A to tu nemáme supravodiče, jejich odpor je nulový.)

Dodatek 6.E: Příklad zatěžovací charakteristiky zdroje

Zatěžovací charakteristika ploché baterie (příklad měření):



I	U
[A]	[V]
0,00	4,53
0,05	4,44
0,09	4,39
0,13	4,34
0,19	4,27
0,24	4,23
0,37	4,10
0,49	3,95
0,65	3,78
1,02	3,43
1,04	3,32
1,45	3,00
2,81	1,78
4,40	0,56