

## Magnetické pole stacionárního elektrického proudu

Že elektrický proud může ovlivňovat blízké magnety, fyzikové zjistili už před dvěma sty lety. Podíváme se, jak to s tím vlivem je a jaké magnetické pole kolem sebe vodiče s proudem budí.<sup>1</sup> V několika speciálních případech, například pro pole dlouhého rovného vodiče, půjde magnetické pole určit snadno.<sup>2</sup> V obecném případě se magnetická indukce musí počítat pomocí Biotova-Savartova zákona – při jeho odvození si užijeme trochu matematiky a seznámíme se s veličinou, se kterou jste se zatím zřejmě nepotkali: s vektorovým potenciálem.<sup>3</sup> A pak už se dostaneme k magnetickému poli konkrétních vodičů. A poté k věcem jako magnetický obvod a indukčnost, a také k aplikacím.

A ještě jedna důležitá věc: Když proud působí na magnet, musí také magnet (tedy magnetické pole) naopak působit na proud.<sup>4</sup> I tomuto působení se proto budeme věnovat, a to poměrně brzo po začátku kapitoly.

Jaké otázky nás k uvedené problematice mohou napadnout? Například:

- Jaké magnetické pole je v okolí vodiče s proudem? Jaký má tvar, jak je silné? Jaké pole budí rovný vodič, jaké kruhový závit, jaké třeba válcová cívka?
- Jak působí magnetické pole na vodič s proudem? A jak na pohybující se nabitou částici?
- Působí na sebe dva vodiče s proudem prostřednictvím magnetického pole? Jak?
- Jakou silou drží podkovovitý elektromagnet kus železa, který drží oběma póly?
- A k čemu je všechno tohle dobré? K čemu se to dá využít?

Na všechno dojde, začneme ale tím nejjednodušším: jak vodič s proudem působí na blízký magnet.

---

<sup>1</sup> Zatím se přitom omezíme na stacionární elektrický proud.

<sup>2</sup> Podobně snadno, jako když jsme v elektrostatice počítali pole pomocí Gaussovy věty.

<sup>3</sup> Opravdu, taková věc existuje a na ledacos se hodí, takže stojí za to o ní vědět, byť na středních školách o ní ve fyzice téměř jistě učit nebudete. (Na základních školách také ne. ☺)

<sup>4</sup> Jinak by neplatil 3. Newtonův zákon.

## 7.1 Oerstedův pokus, Ampérův zákon celkového proudu

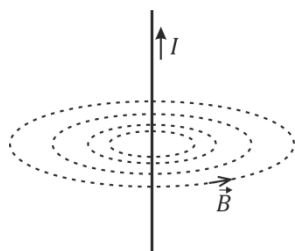
### Oerstedův pokus

V roce 1820 si dánský fyzik Oersted<sup>5</sup> během přednášky<sup>6</sup>, všiml, že když zapnul proud do vodiče, strelka blízkého kompasu se pohnula. Uvádí se, že to byl první pokus, který ukázal souvislost elektřiny a magnetismu.



Pokusy tohoto typu se dnes na školách běžně ukazují. Lze je dělat i s poměrně malými proudy a s velmi jednoduchými pomůckami.<sup>7</sup>

Jak vypadají indukční čáry kolem kusu přímého vodiče s proudem, jde ukázat sypáním železných pilin na papír kolmý k vodiči; je ale potřeba dostatečně velký proud.<sup>8</sup> Ukazuje se, že indukční čáry jsou soustředné kružnice kolem vodiče.



Velikost magnetické indukce  $B$  závisí pouze na vzdálenosti  $R$  od vodiče a samozřejmě na proudu  $I$ , který vodičem prochází. (Můžeme to potvrdit měřením, ale plyne to už z válcové symetrie celé situace.<sup>9</sup>)

Jak indukce závisí na vzdálenosti a na proudu, můžeme vcelku pohodlně změřit pomocí smartphonu nebo tabletu. Příklad výsledků takového jednoduchého měření uvádí Dodatek A. Měření ukazuje, že magnetická indukce je přímo úměrná proudu  $I$  a nepřímo úměrná vzdálenosti  $R$  od vodiče. Když z indukce spočteme magnetickou intenzitu<sup>10</sup>, plyne z měření překvapivě jednoduchý výsledek:

$$H = \frac{I}{2\pi R} . \quad (7.1)$$

### Ampérův zákon celkového proudu

Vztah (7.1) můžeme přepsat na tvar

$$2\pi R \cdot H = I . \quad (7.2)$$

To znamená, že pro magnetické pole přímého vodiče s proudem platí, že:

délka indukční čáry krát magnetická intenzita = proud vodičem.

To je pozoruhodné<sup>11</sup> a mohlo by nás to přivést na myšlenku, zda to není speciální případ nějakého obecnějšího zákona. A opravdu ano!

<sup>5</sup> Hans Christian Oersted; příjmení se také píše Ørsted.

<sup>6</sup> Prý to bylo 21. 4. 1820.

<sup>7</sup> Viz například autorův příspěvek „Magnety a proudy“ ve sborníku volně dostupném na [https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureka\\_2018.pdf](https://kdf.mff.cuni.cz/heureka/sborniky/DilnyHeureka_2018.pdf), s. 13-30.

<sup>8</sup> Minimálně několik ampér, raději 10 až 20 A.

<sup>9</sup> Poznamenejme, že válcová symetrie bude přesná pro nekonečně dlouhý přímý vodič. Takový vodič sice v praxi nebudeme mít po ruce ☺, ovšem výsledky budou s dobrou přesností platit v blízkosti dostatečně dlouhého vodiče.

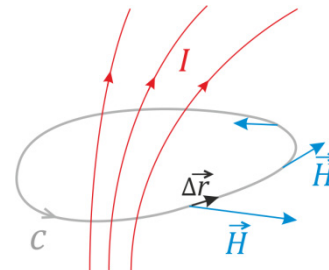
<sup>10</sup> Ve vakuu je  $\vec{H} = \vec{B}/\mu_0$ , viz vztah (5.7) ( $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ ) v kapitole 5.

<sup>11</sup> A možná to může trochu připomenout vzdáleně podobnou situaci z elektrostatiky: plocha sféry obklopující bodový náboj krát velikost elektrické indukce v bodech sféry = náboj uprostřed.

Ukazuje se, že pro magnetické pole buzené elektrickými proudy ve vakuu platí **Ampérův zákon celkového proudu**:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \quad (7.3)$$

Zde  $c$  je myšlená uzavřená křivka a  $I$  je celkový proud procházející plochou, kterou křivka ohraničuje.<sup>12</sup> Proud bereme s kladným znaménkem, jestliže míří tak, jak ukazuje obrázek, tedy podle pravidla pravé ruky. (Tj. ve směru palce, když prsty pravé ruky míří ve směru, kterým procházíme křivku  $c$ .)



V případě pole přímého vodiče, který jsme diskutovali výše, dá (7.3) dříve získaný výsledek (7.2)<sup>13</sup>

Měření pole přímého vodiče samozřejmě nestačí k odvození Ampérova zákona, pro nás bylo jen inspirací. Ale proměřením magnetického pole podél různých křivek nám může ukázat, že platí i obecněji.<sup>14</sup>

Z Ampérova zákona celkového proudu lze odvodit i rovnici popisující lokální vztah magnetického pole a hustoty elektrického proudu – ale to si necháme až do části 7.3. této kapitoly.

<sup>12</sup> Takových ploch je samozřejmě mnoho – ale díky tomu, že jde o stacionární proudy (a díky zákonu zachování náboje), je celkový proud kteroukoli z těchto ploch stejný.

<sup>13</sup> Křivkou je kružnice poloměru  $R$ .  $\vec{H}$  a  $d\vec{r}$  na ní mají stejný směr, takže  $\vec{H} \cdot d\vec{r} = H dl$ , kde  $|d\vec{r}| = dl$  je délka „kousku křivky“. Navíc  $H = \text{konst.}$  na celé kružnici. Je tedy  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_c H \cdot dl = H \oint_c dl = 2\pi R H$ .

<sup>14</sup> Jednoduché měření tohoto typu bylo popsáno v příspěvku autora a P. Kácovského ve sborníku konference Veletrh nápadů učitelů fyziky (s.64-73, konkrétně na s.65-68); dostupné online na [http://home.pf.jcu.cz/~vnufcb/CD/pdf/VNUF23\\_09.pdf](http://home.pf.jcu.cz/~vnufcb/CD/pdf/VNUF23_09.pdf).

## 7.2 Působení magnetického pole na vodič s proudem, Lorentzova síla

Z experimentů (i relativně jednoduchých) lze najít, jaká síla působí na přímý vodič s proudem  $I$  v homogenním magnetickém poli s indukcí  $\vec{B}$ . Je-li vodič kolmý na magnetickou indukci (viz obrázek), pak velikost síly je dána známým vztahem

$$F = BIl, \quad (7.4)$$

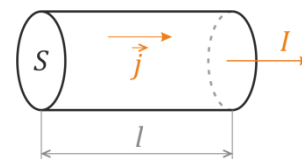
kde  $l$  je délka vodiče. Síla je přitom kolmá jak na vodič, tak na magnetickou indukci. Orientace síly se na SŠ úrovni většinou určuje pravidlem levé ruky<sup>15</sup>: Když prsty levé ruky ukazují směr proudu a magnetické indukční čáry vstupují do dlaně, pak palec ukazuje směr, jímž míří síla. Formálně to můžeme zapsat pomocí vektorového součinu. Síla na vodič je

$$\vec{F} = \vec{\tau} \times \vec{B} Il \quad (7.5)$$

kde  $\vec{\tau}$  je jednotkový vektor rovnoběžný s vodičem. Tento vztah je dokonce ještě obecnější než (7.4); platí totiž pro libovolný směr vodiče.<sup>16</sup>

Vztah (7.5) udává sílu na celý vodič, resp. část vodiče, tedy sílu působící na vodič „globálně“. Pojďme z něj odvodit, jak magnetické pole působí *lokálně* – tedy jaká je hustota síly.

Uvažujme malý kousek vodiče o průřezu  $S$  a délce  $l$ .<sup>17</sup> Proud je dán proudovou hustotou  $j$ :  $I = j \cdot S$ , navíc proudová hustota má směr  $\vec{\tau}$ , je  $\vec{j} = j \vec{\tau}$ .



Úpravou (7.5) dostáváme:

$$\vec{F} = \vec{\tau} \times \vec{B} Il = \vec{\tau} \times \vec{B} jSl = j\vec{\tau} \times \vec{B} Sl = \vec{j} \times \vec{B} Sl. \quad (7.6)$$

Ovšem  $V = lS$  je objem vodiče. Ze (7.6) tedy po vydělení  $V$  dostáváme **hustotu síly**:

$$\vec{f} = \frac{\vec{F}}{V} = \vec{j} \times \vec{B} \quad (7.7)$$

V případě, že je proudová hustota dána pohybem nabitých částic s hustotou náboje  $\rho$ , které se pohybují rychlostí  $\vec{v}$ <sup>18</sup>, je, jak už víme,  $\vec{j} = \rho \vec{v}$ , takže z (7.7) dostáváme důležitý výsledek

$$\vec{f} = \rho \vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.8)$$

Po vynásobení malým objemem  $\Delta V$  a využití toho, že  $\rho \Delta V = q$  je celkový pohybující se náboj v tomto objemu, vyjde **síla, kterou magnetické pole působí na pohybující se náboj**:

$$\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}. \quad (7.9)$$

<sup>15</sup> Přesněji: Flemingovým pravidlem levé ruky. (Pokud ho znáte v jiném znění a funguje vám, tak ho tak požívejte.)

<sup>16</sup> Tedy nejen pro vodiče kolmé na magnetickou indukci. Lze to samozřejmě ověřit experimentálně.

<sup>17</sup> Jako vodič bereme malý váleček, jehož osa má směr hustoty toku proudu  $\vec{j}$ , viz obrázek.  $\vec{\tau}$  je jednotkový vektor ve směru osy, plocha  $S$  je na něj kolmá.

<sup>18</sup> Může jít třeba o proud elektronů z elektronové trysky, proud protonů v urychlovači LHC nebo o volné elektrony v měděném drátu (pak je  $\vec{v}$  rychlost jejich driftu, viz předchozí kapitola).

Touto silou magnetické pole působí i na jednotlivé částice. Ve skutečnosti je (7.9) základní vztah, z něhož lze odvodit veškeré působení magnetického pole na proudy pohybujících se částic a vodiče s proudem.

Ba co víc: (7.9) je vztah, kterým se ve skutečnosti **definuje magnetická indukce**  $\vec{B}$ .<sup>19</sup>

Všimněme si jedné důležité věci:

Síla, kterou magnetické pole působí na pohybující se částici, je kolmá na její rychlost.

To znamená, že magnetické pole neurychluje částici ve směru pohybu, nemění tedy její kinetickou energii; pouze **zakřivuje její trajektorii**.<sup>20</sup>

A co když na částici působí jak elektrické, tak magnetické pole? V tom případě síly od obou polí prostě sečteme,  $\vec{F} = q\vec{E} + q\vec{v} \times \vec{B}$ . Výsledná síla,

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}), \quad (7.10)$$

kterou na částici působí elektromagnetické pole, se nazývá **Lorentzova síla**.<sup>21</sup>

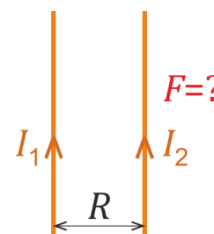
Pro náboje s hustotou  $\rho$  pohybující se rychlostí  $\vec{v}$  lze z (7.10) jednoduše<sup>22</sup> odvodit hustotu síly:

$$\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (7.11)$$

### Vzájemné působení vodičů s proudem

Když vodičem teče proud, budí kolem sebe magnetické pole. Toto magnetické pole může působit na jiný vodič, kterým také teče proud. Podíváme se, jak je tomu v případě dvou dlouhých rovnoběžných vodičů. Jejich vzdálenost označíme  $R$ , proudy jednotlivými vodiči budou  $I_1, I_2$ .

Problém budeme řešit pro případ nekonečně dlouhých vodičů. (V praxi tak dlouhé vodiče nemáme, ale v teoretickém řešení nám nic nebrání. ☺) To nám umožní spočítat daný problém jednoduše – a je rozumné předpokládat, že



<sup>19</sup> Dá se jím také proměřovat: prostě do daného prostoru střílíte částice známých nábojů známými rychlostmi a díváte se (resp. proměřujete), jak pole zakřivuje jejich trajektorie. Všimněte si, že ve vztahu (7.9) máme kromě  $\vec{B}$  samé veličiny, které už známe a umíme měřit (sílu, náboj, rychlost). Takže takto můžeme magnetickou indukci opravdu fyzikálně zavést.

A samozřejmě se to používá také naopak: zakřivení drah nabitých částic v detektorech částic třeba v CERNu slouží k určení parametrů těch částic.

<sup>20</sup> Připomeňme, že elektrické pole může jak zakřivovat trajektorii částice, tak ji urychlovat ve směru pohybu.

<sup>21</sup> Spolu s Maxwellovými rovnicemi je Lorentzova síla základním vztahem popisujícím v rámci klasické fyziky chování elektromagnetického pole a vzájemnou interakci pole a nabitých částic. Navíc tento vztah platí i pro částice pohybující se velkou rychlostí; Lorentzova síla přesně popisuje vliv elektromagnetického pole na částice i ve speciální teorii relativity.

<sup>22</sup> Tak, že (7.10) vydělíme objemem  $V$ .

výsledek dobře popíše sílu mezi vodiči konečné délky, pokud jejich vzdálenost bude mnohem menší, než délka vodičů.<sup>23</sup>

K nekonečné délce vodičů pro jistotu uveďme jednu samozřejmou poznámku: Je jasné, že síla působící na nekonečně dlouhý vodič by byla nekonečná.<sup>24</sup> Takže to, co budeme chtít určit, je síla působící na jednotku délky vodiče, tedy na jeden metr.

Magnetická intenzita buzená vodičem s proudem  $I_1$  ve vzdálenosti  $R$  je dána vztahem (7.1)<sup>25</sup>, tedy  $H = I_1 / (2\pi R)$ .

Magnetická indukce v místě druhého vodiče je proto<sup>26</sup>

$$B_{od1} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi R} \quad (7.12)$$

Na délku  $l$  druhého vodiče s proudem  $I_2$  působí podle (7.4) síla  $F = B_{od1} I_2 l$ <sup>27</sup>. Na jednotku jeho délky tedy působí síla

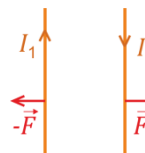
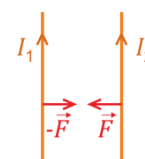
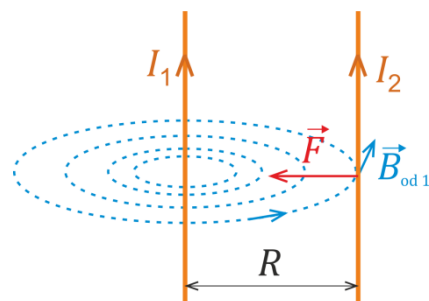
$$\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R} \quad (7.13)$$

Pro proudy o velikosti jednoho ampéru a vodiče vzdálené od sebe jeden metr ( $I_1 = I_2 = 1$  A,  $R = 1$  m) dostáváme  $F/l = 2 \cdot 10^{-7}$  N/m. Tak byla ještě do roku 2019 v soustavě SI definována jednotka ampér.<sup>28</sup>

Z orientace magnetické indukce a z pravidla levé ruky<sup>29</sup> je vidět, že pro vodiče, v nichž tečou proudy stejným směrem, je síla přitažlivá. Stejně velkou silou samozřejmě působí magnetické pole druhého vodiče na první vodič.<sup>30</sup>

Tato přitažlivá síla se projeví například i v proudu částic letících jedním směrem, například v proudu tekoucím v plazmatu.<sup>31</sup> Tento efekt nastává třeba v kanálu blesku, ten je magnetickými silami stlačován do užšího průřezu.

Pokud mají proudy ve vodičích opačný směr, vodiče se od sebe navzájem odpuzují.



<sup>23</sup> Až se naučíme počítat magnetické pole vodičů libovolné délky a tvaru (pomocí Biotova-Savartova zákona), můžete si sami určit přesnou hodnotu síly, kterou na sebe působí dva vodiče konečné délky a zhodnotit, jak velké chyby se dopouštíme tím, že je teď bereme jako nekonečné. V reálném pokusu ovšem k přímým vodičům konečné délky musí vést nějaké příklady od zdroje; proud těmito příklady také budí magnetické pole ... tohle všechno by se při vyhodnocování skutečného pokusu muselo zít v úvahu.

<sup>24</sup> Tak proč ji tedy vlastně počítat, že? Řekneme, že je nekonečná, a máme hotovo. ☺

<sup>25</sup> Zatím jsme jej vyvodili z pokusů, jak ukážeme dále, pro případ nekonečného přímého vodiče jde jednoduše odvodit z Ampérova zákona celkového proudu.

<sup>26</sup> Celý problém řešíme pro vodiče ve vakuu. Pokud by byly ve vzduchu, magnetická indukce by byla nepatrně větší, protože magnetickou indukci by bylo třeba násobit permeabilitou vzduchu,  $\mu = \mu_r \mu_0$ . Ovšem relativní permeabilita vzduchu se od jedničky liší až na sedmém desetinném místě, to opravdu nemusíme uvažovat.

<sup>27</sup> Magnetická indukce pole od prvního vodiče je kolmá na druhý vodič, viz obrázek.

<sup>28</sup> Ampér sice zůstává jednou ze základních jednotek soustavy SI, ale od 20. 5. 2019 je definován tak, aby elementární náboj byl přesně  $e = 1,602\,176\,634 \times 10^{-19}$  C. (Touto hodnotou je přesně definován coulomb, ampér je pak  $A = C/s$ .)

<sup>29</sup> Nebo z vektorového součinu např. v (7.7).

<sup>30</sup> Třetí Newtonův zákon není nijak narušen.

<sup>31</sup> Plazmové proudové vlákno se nazývá „pinč“, anglicky *pinch*, viz například informace na webu na [https://en.wikipedia.org/wiki/Pinch\\_\(plasma\\_physics\)](https://en.wikipedia.org/wiki/Pinch_(plasma_physics)) nebo na <https://www.aldebaran.cz/astrofyzika/plazma/filaments.php>.

## 7.3 Rovnice pro magnetické pole, vektorový potenciál

Jak jsme již uvedli v kapitole 5, základní rovnici, kterou musí splňovat magnetická indukce  $\vec{B}$  je

$$\text{div } \vec{B} = 0 . \quad {}^{32} \quad (7.14)$$

Druhou základní rovnici odvodíme z Ampérova zákona celkového proudu (7.3):

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I \quad (7.15)$$

Na levou stranu použijeme Stokesovu větu<sup>33</sup>. Proud  $I$  je celkový proud plochou  $S$ , je tedy  $I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$ .<sup>34</sup>

Po dosazení do (7.15) dostaneme

$$\int_S (\text{rot } \vec{H}) \cdot d\vec{S} = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I = \int_S \vec{j} \cdot d\vec{S}$$

a po převedení na jednu stranu pak<sup>35</sup>

$$\int_S (\text{rot } \vec{H} - \vec{j}) \cdot d\vec{S} = 0 . \quad (7.16)$$

Podstatné je, že rovnost (7.16) platí pro *libovolnou* plochu  $S$ .<sup>36</sup> Jedinou možností, jak toto splnit, je, že nule se musí rovnat integrand, tedy barevně vyznačený výraz  $\text{rot } \vec{H} - \vec{j}$  v kulaté závorce.<sup>37</sup>

Pro magnetickou intenzitu pole stacionárního proudu tedy platí  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$ .

<sup>32</sup> Připomeňme, že tato rovnice vystihuje zásadní skutečnost, týkající se magnetického pole: neexistenci magnetických monopolů.

<sup>33</sup>  $\oint_c \vec{a} \cdot d\vec{r} = \int_S (\text{rot } \vec{a}) \cdot d\vec{S}$ ; křivka  $c$  je hranicí plochy  $S$ ,  $\vec{a}$  je vektorová funkce,  $\text{rot } \vec{a}$  její rotace. Levou stranu

(7.15) tedy upravíme na  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \int_S (\text{rot } \vec{H}) \cdot d\vec{S}$ .

<sup>34</sup> Mohli byste se oprávněně zeptat: Proč uvažujeme jen prostorovou hustotu proudu? A co plošné proudy nebo proudy tekoucí křivkami? V našem odvození ale za chvíli přejdeme k tomu, jaká je situace „lokálně“, v okolí nějakého bodu, takže plocha  $S$  bude jen malá ploška, takže se s ní prostě vyhneme bodům, kde by proud tekli po plochách nebo po křivkách.

<sup>35</sup> Navíc jsme oba integrály přes stejnou plochu  $S$  spojili do jednoho, ale to už je snad jasné.

<sup>36</sup> Samozřejmě takovou, aby příslušný plošný integrál existoval.

<sup>37</sup> **Tohle je hrozně důležitý obrat!** Takže podrobněji: Jestliže  $\vec{a}$  je spojitá vektorová funkce a  $\int_S \vec{a} \cdot d\vec{S} = 0$  pro *libovolnou* plochu  $S$ , přes kterou integrujeme, nutně z toho plyne, že  $\vec{a} = 0$ .

Dokázat to můžeme sporem: Jestliže by v nějakém bodě bylo  $\vec{a} \neq 0$ , dejme tomu  $a_x > 0$ , pak díky spojitosti by muselo být  $a_x > 0$  v nějakém okolí tohoto bodu. Plochu  $S$  bychom pak zvolili tak malou, aby se vešla do tohoto okolí (a navíc vhodně orientovanou, aby  $dS_x > 0$ ,  $dS_y = 0$ ,  $dS_z = 0$ ), integrál by pak dal kladnou hodnotu, což je spor.

(Pro odvození daného výsledku musí být  $\text{rot } \vec{H} - \vec{j}$  spojitá funkce, což zde předpokládáme.)

Méně přesně ale možná názorněji bychom mohli ke stejnému výsledku dojít následující úvahou:

Plochu  $S$  zvolme jako malou orientovanou plošku  $\Delta\vec{S}$ , tak malou, že vektor  $\vec{a}$  je na ní prakticky konstantní. Integrál je potom  $\int_{\Delta S} \vec{a} \cdot d\vec{S} \doteq \vec{a} \cdot \Delta\vec{S}$ , takže je-li integrál roven nule, musí být  $\vec{a} = 0$  (protože  $\Delta\vec{S}$  lze libovolně natočit).

Tato rovnice je tak významná, že si ji zvýrazníme:

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j} \quad (7.17)$$

Zdůrazněme, že platí **pro magnetické pole stacionárního elektrického proudu** (a také pro pole permanentních magnetů, jímž jsme se zabývali v kapitole 5; v tom případě díky neexistenci proudů je  $\text{rot } \vec{H} = 0$ .) V obecném případě nestacionárního elektromagnetického pole budeme muset do (7.17) doplnit ještě další člen – ale zato tím vznikne další z Maxwellových rovnic!<sup>38 39</sup>

Ve vakuu platí, že  $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ , takže ze (7.17) dostáváme rovnici  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$ . Podobně je tomu v měkkém izotropním magnetiku.<sup>40</sup>

Celkově tedy pro magnetické pole stacionárního elektrického proudu ve vakuu platí rovnice

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (7.18a)$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.18b)$$

Řešením těchto rovnic najdeme pole buzené elektrickým proudem. Ale jak najít řešení? Pomůže nám nová veličina – vektorový potenciál.<sup>41</sup>

### Vektorový potenciál

Z elektrostatiky známe skalární potenciál  $\varphi$ . V čem nám tam zavedení potenciálu pomohlo? Intenzita vypočtená z potenciálu jako  $\vec{E} = -\text{grad } \varphi$  automaticky splňovala jednu ze základních rovnic pro elektrostatické pole,  $\text{rot } \vec{E} = 0$ . K řešení nám pak už zbývala jen druhá rovnice,  $\text{div } \vec{E} = \rho/\epsilon_0$ , z níž jsme odvodili Laplaceovu-Poissonovu rovnici pro potenciál,  $\Delta\varphi = -\rho/\epsilon_0$ .

Zkusme to podobně s rovnicemi (7.18) pro magnetickou indukci. To znamená, zkusme  $\vec{B}$  vyjádřit pomocí nějakého potenciálu tak, aby byla automaticky splněna rovnice (7.18a). Tohle lze udělat, ovšem musí jít o **vektorový potenciál**  $\vec{A}$ .<sup>42</sup> Magnetická indukce je pomocí něj vyjádřena jako

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (7.19)$$

Protože platí  $\text{div}(\text{rot } \vec{A}) = 0$  (příslušnou matematiku viz Dodatek B), plyne ze (7.19)  $\text{div } \vec{B} = 0$ , rovnice (7.18a) je opravdu splněna.

<sup>38</sup> Takže jsme jim zase o krůček blíže, hurá!

<sup>39</sup> V další kapitole uvidíme, že užitečnost rovnice (7.17) se kupodivu nebude omezovat striktně na pole stacionárního elektrického proudu. Pokud časové změny nebudou příliš rychlé, tak dodatečný člen bude možno zanedbat. Rovnici (7.17) a vztahy z ní odvozené tak budeme moci použít například i pro magnetické pole střídavého proudu s frekvencí 50 Hz užívaného v rozvodné síti.

<sup>40</sup> Jen místo  $\mu_0$  bude  $\mu = \mu_r \mu_0$ .

<sup>41</sup> Předem je jasné, že nás asi opět čeká „trochu větší kousek matematiky“. Ale nezaufejte, zvládneme to. Odměnou nám budou vzorce, kde  $\vec{B}$  bude určeno pomocí docela jednoduchých integrálů.

<sup>42</sup> Jde o vektorovou funkci souřadnic, takže  $\vec{A} = \vec{A}(\vec{r})$ .



K magnetické indukci  $\vec{B}$  určitě existuje vektorový potenciál  $\vec{A}$ .<sup>43</sup> Stejně jako elektrostatický potenciál  $\varphi$  nebyl určen jednoznačně<sup>44</sup>, ani **vektorový potenciál není určen jednoznačně**. Zde je nejednoznačnost ještě větší; vektorový potenciál je určen „až na gradient libovolné funkce“.

Vektorové potenciály

$$\vec{A} \quad \text{a} \quad \vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda,$$

kde  $\Lambda = \Lambda(\vec{r})$  je libovolná<sup>45</sup> skalární funkce, totiž popisují totéž magnetické pole, dávají tutéž magnetickou indukci  $\vec{B}$ :

$$\vec{B}' = \text{rot } \vec{A}' = \text{rot}(\vec{A} + \text{grad } \Lambda) = \text{rot } \vec{A} + \text{rot grad } \Lambda = \text{rot } \vec{A} = \vec{B}.^{46}$$

Volnost ve volbě vektorového potenciálu můžeme omezit tím, že na něj klademe nějakou další podmínku (třeba proto, aby se nám snáze provedl nějaký výpočet). Mluvíme o **kalibrační podmínce**, o volbě různých  $\vec{A}$  popisujících totéž magnetické pole pak mluvíme jako o různých *kalibracích*.

### Rovnice pro vektorový potenciál

Rovnici (7.18a) máme tedy vyřešenou, zbývá nám vyřešit rovnici (7.18b), tedy

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.20)$$

Dosadíme do ní (7.19), tedy  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  a dostáváme

$$\text{rot rot } \vec{A} = \mu_0 \vec{j}. \quad (7.21)$$

Levou stranu upravíme s využitím známého vztahu „rotace rotace je gradient divergence – laplace“ (viz Dodatek C):

$$\text{grad div } \vec{A} - \Delta \vec{A} = \mu_0 \vec{j} \quad (7.22)$$

Díky volnosti ve volbě  $\vec{A}$  můžeme požadovat, aby platila nějaká kalibrační podmínka. Zde se zjevně hodí podmínka

$$\text{div } \vec{A} = 0 \quad (7.23)$$

Po jejím dosazení se (7.22) výrazně zjednoduší a dostáváme výslednou rovnici pro vektorový potenciál:

$$\Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j} \quad (7.24)$$

Uvědomte si, že tato rovnice se podobá Laplaceově-Poissonově rovnici pro elektrostatický potenciál.<sup>47</sup> To s výhodou využijeme při jejím řešení!

<sup>43</sup> Viz Dodatek B, v něm je stručně připomenuta i matematika užitá v následujících odstavcích.

<sup>44</sup> Byl určen až na konstantu.

<sup>45</sup> Libovolná, ale taková, že má parciální derivace do druhého řádu a ty jsou spojité, takže ve smíšených parciálních derivacích lze zaměňovat pořadí derivování – v tomto smyslu budeme slovo „libovolná“ používat i dále.

<sup>46</sup> Protože rotace gradientu libovolné funkce je rovna nule, viz Dodatek B.

<sup>47</sup>  $\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0$

## 7.4 Biotův-Savartův zákon

### Vektorový potenciál pole buzeného proudem

V rovnici (7.24) působí Laplaceův operátor na vektor  $\vec{A}$  po složkách; rovnice pro i-tou složku je

$$\Delta A_i = -\mu_0 j_i . \quad (7.25)$$

Tato rovnice je vypadá prakticky stejně jako Laplaceova-Poissonova rovnice

$$\Delta \varphi = -\rho/\epsilon_0 .^{48}$$

Řešení této rovnice ale známe – je jím elektrostatický potenciál buzený rozložením náboje s hustotou  $\rho(\vec{r}')$  daný vztahem

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' .^{49}$$

Analogicky proto řešením rovnice (7.25) je

$$A_i(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{j_i(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' . \quad (7.26)$$

Výsledek zapíšeme ve vektorovém tvaru, a máme řešení rovnice (7.24), tedy vektorový potenciál magnetického pole buzeného (ve vakuu) stacionárním elektrickým proudem:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \quad 50 \quad (7.27)$$

Je vidět, že se sčítají příspěvky od „kousků proudu“ v jednotlivých elementech objemu.<sup>51</sup> Můžeme proto snadno analogicky napsat vztah pro magnetické pole buzené plošným proudem<sup>52</sup>:

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS' \quad (7.28)$$

a pro pole buzené proudem tekoucím tenkým vodičem (tedy podél křivky  $c$ ):

$$\vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_c \frac{I \vec{\tau}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{\vec{\tau}(\vec{r}') dl'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \quad 53 \quad (7.29)$$

<sup>48</sup> Jen místo  $1/\epsilon_0$  teď máme  $\mu_0$ , zdrojem pole místo hustoty náboje  $\rho$  je složka hustoty proudu  $j_i$  a místo elektrostatického potenciálu  $\varphi$  je zde složka vektorového potenciálu  $A_i$ .

<sup>49</sup> Vztah pro potenciál jsme sice odvodili pomocí principu superpozice ze vzorce pro potenciál bodového náboje, ale když je to správný vztah pro potenciál, musí být řešením správné rovnice pro potenciál. (Že opravdu je řešením, by šlo ověřit přímým dosazením do Laplaceovy-Poissonovy rovnice, ale bylo by to trochu zdlouhavé.)

<sup>50</sup> Lze ověřit (zde to ale dělat nebudeme), že vektorový potenciál (7.27) splňuje kalibrační podmínku (7.23).

<sup>51</sup> Platí zde tedy opět princip superpozice. (Uvědomte si, že není divu; je to důsledek toho, že rovnice pro  $\vec{A}$  je lineární.)

<sup>52</sup> Jde o proud tekoucí po ploše, představte si třeba proud tekoucí tenkým plechem.  $\vec{J}$  je plošná hustota proudu.

<sup>53</sup>  $\vec{\tau}$  vektor tečný ke křivce, „kousek křivky“ je  $\vec{\tau}(\vec{r}') dl' = d\vec{r}'$ .

## Výpočet magnetické intenzity

Ze známého vektorového potenciálu už můžeme určit magnetickou indukci podle vztahu  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$ , tj.

$$\vec{B}(\vec{r}) = \text{rot } \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \text{rot} \left\{ \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' \right\}.$$

Výpočet rotace provedeme pro  $i$ -tou složku magnetické indukce:<sup>54</sup>

$$\begin{aligned} B_i(\vec{r}) &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \int_V \frac{j_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{j_k(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \right] dV' = \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) j_k(\vec{r}') \right] dV' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \left[ \text{grad} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) \times \vec{j}(\vec{r}') \right]_i dV' \end{aligned}$$

Gradient v posledním výrazu umíme vyjádřit<sup>55</sup>. Výsledný vztah pro magnetickou indukci zapsaný opět vektorově tedy je<sup>56</sup>

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV'. \quad (7.30)$$

Toto už je kýžený **Biotův-Savartův zákon**, který určuje magnetické pole buzené (ve vakuu) stacionárním proudem.

Pro plošný proud analogicky vychází

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dS' \quad (7.31)$$

a pro proud tekoucí tenkým vodičem (tedy křivkou  $c$ ) pak

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}. \quad (7.32)$$

I tento vztah bývá označován jako Biotův-Savartův zákon.<sup>58</sup>

<sup>54</sup> Opět jde o výpočet na trochu víc kroků – ale když si je projdete postupně, tak se v nich jistě zorientujete. Užíváme tu Einsteinovu sumační konvenci (tj. přes opakující indexy se sčítá). Vlastnosti Levi-Civita symbolu  $\varepsilon_{ijk}$  uvádí Dodatek B. Při úpravách prohazujeme parciální derivaci podle  $x_j$  s integrálem a využíváme toho, že vzhledem k parciální derivaci podle  $x_j$  je  $\vec{j}(\vec{r}') = \vec{j}(x'_1, x'_2, x'_3)$  konstantní – musíme rozlišovat čárkované a nečárkované souřadnice!

<sup>55</sup> Už v elektrostátice jsme při výpočtu intenzity z potenciálu užívali vztah  $\text{grad} \left( \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} \right) = -\frac{\vec{r} - \vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$ .

<sup>56</sup> Znaménko mínus se „ztratilo“, protože jsme přehodili pořadí ve vektorovém součinu.

<sup>57</sup> „Kousek proudu“, který byl v (7.30)  $\vec{j}(\vec{r}')dV'$  a v (7.31)  $\vec{J}(\vec{r}')dS'$  je zde  $I d\vec{r}'$ , viz úpravy v (7.29). Výsledky (7.31) a (7.32) bychom také mohli odvodit ze vztahů (7.28) a (7.29) podobně, jako jsme odvodili (7.30).

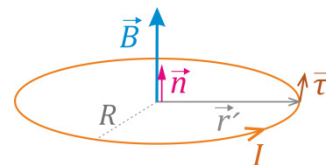
<sup>58</sup> Historicky byl nejprve vyvozen z experimentů.

## 7.5 Magnetické pole vodičů s proudem

Obecný vztah pro výpočet pole buzeného vodiče máme hotový, spočteme tedy pole některých konkrétních vodičů s proudem. Ve všech případech půjde o pole ve vakuu.<sup>59</sup>

### Kruhový závit – pole ve středu závitu

Kruhovým závitem poloměru  $R$  protéká proud  $I$ ; magnetickou indukci  $\vec{B}$  chceme určit ve středu závitu, viz obrázek. Výpočet podle vztahu (7.32) je jednoduchý:



Bod, v němž určujeme  $\vec{B}$  má polohový vektor  $\vec{r} = 0$ <sup>60</sup>, je tedy  $\vec{r} - \vec{r}' = -\vec{r}'$  a  $|\vec{r} - \vec{r}'| = |\vec{r}'| = R$ . Vektor „infinitesimálního posunutí“ podél křivky,  $d\vec{r}' = \vec{\tau} dl'$ , je ve všech bodech kolmý na  $\vec{r}'$  a vektorový součin  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = -d\vec{r}' \times \vec{r}' = \vec{r}' \times \vec{\tau} dl'$  je kolmý na rovinu závitu a má velikost  $R dl'$ . Je tedy  $d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') = R dl' \vec{n}$ , kde  $\vec{n}$  je jednotkový vektor kolmý na rovinu závitu.<sup>61</sup>

Po dosažení do (7.32) pak po úpravách dostáváme:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int \frac{R dl' \vec{n}}{R^3} = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \vec{n} \int_c dl' = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \vec{n} 2\pi R = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{n}$$

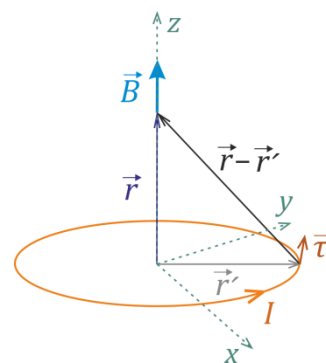
Magnetická indukce tedy míří ve směru osy závitu a její velikost je

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \quad (7.33)$$

Všimněte si též, že orientaci  $\vec{B}$  můžeme určit pomocí pravidla pravé ruky: prsty ukazují směr proudu a palec ukazuje směr magnetické indukce.

### Kruhový závit – pole na ose závitu<sup>62</sup>

Počátek soustavy souřadnic umístíme do středu závitu, osa závitu bude osou  $z$ . Magnetickou indukci určíme ve vzdálenosti  $z$  od středu závitu, bude tedy  $\vec{r} = (0, 0, z)$ . Body vodiče závitu jsou určeny vektorem  $\vec{r}' = (R \cos \varphi, R \sin \varphi, 0)$ ; odtud:



$$\begin{aligned} d\vec{r}' &= (-R \sin \varphi d\varphi, R \cos \varphi d\varphi, 0) \\ \vec{r} - \vec{r}' &= (-R \cos \varphi, -R \sin \varphi, z) \\ d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}') &= (zR \cos \varphi d\varphi, zR \sin \varphi d\varphi, R^2 d\varphi) \\ |\vec{r} - \vec{r}'| &= \sqrt{R^2 + z^2} \end{aligned} \quad (7.34)$$

<sup>59</sup> Případně v měkkém izotropním magnetiku, ve výsledcích se jen  $\mu_0$  změní na  $\mu$ .

<sup>60</sup> Počátek soustavy souřadnic zvolíme ve středu závitu.

<sup>61</sup> Rozmyslete si s pomocí obrázku, že vše zde uvedené platí (a že to není nic, co bychom se museli učit nazpaměť, ale snadno to z obrázku „vykookáme“).

<sup>62</sup> Bylo by jistě pěkné umět spočítat i pole mimo osu závitu, ale to bohužel už zdaleka není tak jednoduché. (Pokud to budete potřebovat v nějakém konkrétním bodě, můžete integraci provést numericky.)

Při výpočtu podle vztahu (7.32) dají  $x$ -ová a  $y$ -ová složka  $\vec{B}$  nulu. Pro  $B_z$  dostáváme

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{R^2 d\varphi}{(R^2 + z^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I R^2}{4\pi (R^2 + z^2)^{3/2}} \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}. \quad (7.35)$$

Pro bod ve středu závitu, tedy pro  $z = 0$ , vychází  $B_z = \mu_0 I / (2R)$ , tak jsme to dostali výše.

### Magnetický moment smyčky s proudem (v případě kruhového závitu)

Pro  $z \gg R$ , můžeme ve jmenovateli (7.35) zanedbat  $R$  oproti  $z$ , takže  $B \doteq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3}$ . Po úpravě pak:

$$B \doteq \frac{\mu_0 I R^2}{2z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2(\pi R^2) I}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2SI}{z^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{2m}{z^3}, \quad (7.36)$$

kde  $S = \pi R^2$  je plocha smyčky a

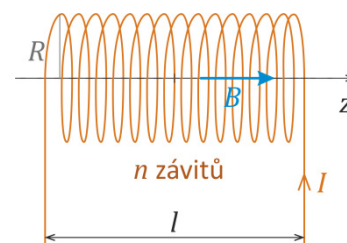
$$m = SI \quad (7.37)$$

je **magnetický moment** smyčky s proudem<sup>63</sup>. Daleko od kruhového závitu je magnetické pole stejné, jako pole dipólu<sup>64</sup>. Výsledek (7.37) nám to ukazuje jen na ose kruhového závitu<sup>65</sup>, platí to však obecně, pro libovolnou smyčku s proudem<sup>66</sup>. Vztah pro magnetický moment můžeme použít i k určení síly a momentu síly působící na smyčku s proudem ve vnějším magnetickém poli.

### Solenoid

Solenoid je válcová cívka. Sestává z mnoha závitů vinutých těsně u sebe. Pole na ose solenoidu konečné délky můžeme určit integrací vztahu (7.35).

Délka solenoidu je  $l$ , počet závitů  $n$ , na jednotku délky připadá  $N = n/l$  závitů, na délku  $\Delta z'$  tedy připadá  $N \Delta z'$  závitů, každým z nich prochází proud  $I$ .<sup>67</sup> Poloměr závitů je  $R$ .



<sup>63</sup> Jde o **Ampérův** magnetický moment.

<sup>64</sup> Přesněji řečeno, v limitě  $r \rightarrow \infty$  jde k poli dipólu.

<sup>65</sup> Porovnejte výsledek (7.36) např. se vztahem pro intenzitu elektrostatického pole elementárního elektrického dipólu.

<sup>66</sup> Důkaz pro obecnou smyčku je trochu zdouhavější a nebudeme ho zde uvádět; laskavého čtenáře odkážeme na literaturu nebo na přednášku Klasická elektrodynamika ve 3. ročníku. Obecně je magnetický moment i pro nerovinné smyčky (se stacionárním proudem) definován jako  $\vec{m} = I \int_S d\vec{S}$ , kde plocha  $S$  je libovolná plocha, jejíž hranicí je daná proudová smyčka. (Lze dokázat, že na volbě plochy nezáleží.)

<sup>67</sup> Možná vám vadí, že  $N \Delta z'$  může pro malé  $\Delta z'$  dát méně než jeden závit. Ovšem fakticky nám půjde o proud připadající na danou délku, ten je  $I N \Delta z'$ . Takže si můžeme představit, že máme vedle sebe spoustu závitů s výškou  $\Delta z'$  a každým protéká proud  $I N \Delta z'$  – a takových závitů máme „skoro nekonečně mnoho“, proto můžeme k výpočtu použít integrál. Výpočet pomocí integrálu by se zřejmě nehodil na řídké vinuté solenoid, například o průměru 5 cm, kde by na délku 10 cm připadaly dva závity; tam bychom závity ani nemohli brát jako kruhové smyčky, protože by měly příliš velké stoupání. Ale pro hustě vinuté solenoidy dá výpočet, který nyní provedeme, dobrý výsledek.

Počátek soustavy souřadnic zvolíme uprostřed solenoidu, osa  $z$  míří podél osy solenoidu (viz obrázek). Magnetickou indukci budeme určovat na ose, v bodě  $\vec{r} = (0, 0, z)$ , souřadnici závitů označíme  $z'$ . Vztah (7.35) pro indukci na ose kruhového závitů dá pro část magnetické indukce  $\Delta B$  buzené závitů na délce  $\Delta z'$ <sup>68</sup> výsledek

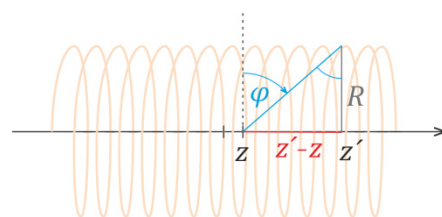
$$\Delta B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 R^2 I N \Delta z'}{2(R^2 + (z - z')^2)^{3/2}} \quad (7.38)$$

Celkovou magnetickou indukci získáme integrací

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I N}{2} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{R^2 dz'}{(R^2 + (z' - z)^2)^{3/2}}$$

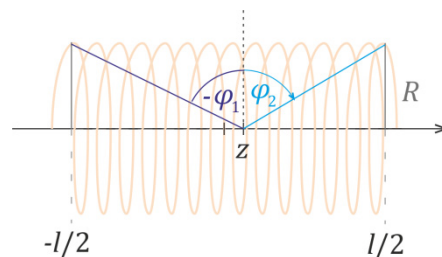
Integrál vypočteme pomocí substituce  $z' - z = R \operatorname{tg} \varphi$ , význam  $\varphi$  viz obrázek. Substituce dává<sup>70</sup>

$$\int_{-l/2}^{l/2} \frac{R^2 dz'}{(R^2 + (z' - z)^2)^{3/2}} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \cos \varphi d\varphi = \sin \varphi_2 - \sin \varphi_1,$$



takže výsledná indukce od celého solenoidu je

$$B_z(0, 0, z) = \frac{\mu_0 I N}{2} (\sin \varphi_2 - \sin \varphi_1). \quad (7.39)$$



Pro hodně dlouhý solenoid ( $l \gg R$ ) a místa poblíž středu solenoidu je  $\varphi_2 \doteq \pi/2$  a  $\varphi_1 \doteq -\pi/2$ , a tedy  $\sin \varphi_2 \doteq 1$ ,  $\sin \varphi_1 \doteq -1$ , takže

$$B_z(0, 0, z) \doteq \mu_0 I N. \quad (7.40)$$

Ze (7.39) je také vidět, že pro bod na ose na konci solenoidu<sup>72</sup> je indukce poloviční ( $\mu_0 I N / 2$ ) než uprostřed solenoidu.

Pro nekonečně dlouhý solenoid ( $l \rightarrow \infty$ ) dává (7.40) přesný výsledek. Dokonce je v tomto případě stejně velká i magnetická indukce mimo osu – za chvíli si to zdůvodníme pomocí zákona celkového proudu.

<sup>68</sup> Tedy závitů se  $z$ -ovou souřadnicí v rozmezí  $(z', z' + \Delta z')$ , přitom předpokládáme  $\Delta z'$  velmi malé.

<sup>69</sup> V (7.35) byla  $|z|$  vzdálenost bodu, kde určujeme  $B$ , od středu závitů; nyní je touto vzdáleností  $|z - z'|$ .

<sup>70</sup> Je  $R^2 + (z - z')^2 = R^2 (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi) = R^2 / \cos^2 \varphi$  a  $dz' = R (1 / \cos^2 \varphi) d\varphi$ . Úhly bereme kladné, když jdou od svislé osy ve směru hodinových ručiček; úhel  $\varphi_1$  je záporný,  $\varphi_1 < 0$ .

<sup>71</sup> Z obrázku je vidět, že  $\sin \varphi_2 = (l/2 - z) / \sqrt{(l/2 - z)^2 + R^2}$ , podobně  $\sin \varphi_1$ .

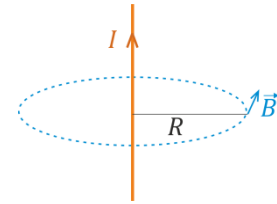
<sup>72</sup> Například na pravém konci,  $z = l/2$ ,  $\sin \varphi_2 = 0$ .

## Výpočet magnetického pole pomocí Ampérova zákona celkového proudu

Pomocí zákona celkového proudu můžeme pole spočítat v případech, kdy má nějakou symetrii a předem víme, jaký má směr.

### Nekonečný přímý vodič

Výsledek už známe ze začátku kapitoly – ukažme si, jak se dá ze zákona celkového proudu odvodit jednoduše. Myšlenou křivkou bude kružnice o poloměru  $R$ , viz obrázek.<sup>73</sup> Magnetická indukce  $\vec{B}$  i magnetická intenzita  $\vec{H}$



míří ve všech bodech křivky ve směru tečny ke kružnici,  $\vec{H} \parallel d\vec{r}$ . Navíc  $\vec{H}$  má ve všech bodech křivky stejnou velikost. Je tedy  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = \oint_c H dl = H \oint_c dl = 2\pi R H$ . Podle zákona celkového proudu se tento integrál rovná proudu  $I$ , který teče vodičem. Odtud  $H = I/(2\pi R)$ , a protože  $B = \mu_0 H$ , je výsledná magnetická indukce

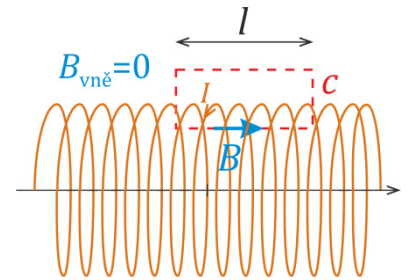
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}. \quad (7.41)$$

Stejný výsledek samozřejmě dostaneme i při výpočtu pomocí Biotova-Savartova zákona.<sup>74</sup>

### Pole uvnitř (nekonečně) dlouhého solenoidu

Uvnitř nekonečně dlouhého solenoidu má pole směr osy solenoidu.<sup>75</sup>

Důležité je, že vně solenoidu je magnetická indukce nulová. Proč tomu tak je? Magnetický tok  $\Phi$  procházející vnitřkem velmi dlouhého solenoidu se musí z jednoho konce vracet vnějškem do druhého konce. Tento tok se ovšem rozloží na hodně velkou plochu, takže  $B$  je prakticky rovno nule; pro nekonečný solenoid je zcela nulové. Alternativně je toto chování vidět, když se na solenoid díváme jako na velmi dlouhý permanentní magnet.<sup>76</sup>



Myšlenou křivku, podél níž budeme integrovat  $\vec{H}$ , si zvolíme ve tvaru obdélníka (v obrázku je zobrazena čárkovanou čarou). V integrálu  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r}$  dá nenulový příspěvek jen strana obdélníka uvnitř solenoidu rovnoběžná s jeho osou<sup>77</sup>:

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = H \cdot l. \quad (7.42)$$

<sup>73</sup> Vodič je osou této kružnice.

<sup>74</sup> Viz úlohu <http://reseneulohy.cz/472/magneticke-pole-dlouheho-primeho-vodice-s-proudem> v elektronické Sbírce řešených úloh. Tam je spočten i výsledek pro vodič konečné délky. Z něj vyplývá, že pro vodič délky  $l$  je magnetická indukce na ose drátu (ve vzdálenosti  $R$  od drátu) dána vztahem (7.41) násobeným  $1/\sqrt{1+(2R/l)^2}$ . Pro  $l = 10R$  je tedy oproti hodnotě pro nekonečný vodič menší jen asi o 2 %, proto jsme mohli na začátku kapitoly vycházet z výsledků pokusů měřících  $B$  blízko rovného vodiče, i když náš vodič nebyl nekonečný.

<sup>75</sup> To plyne ze symetrie dané situace – jiný význačný směr v této situaci není a není žádný důvod, proč by pole uvnitř nekonečného solenoidu mělo mířit někam šikmo. U konečného solenoidu poblíž konců nemusí být v bodech mimo osu magnetická indukce rovnoběžná s osou, ale může být natočena směrem k okraji solenoidu. V nekonečném solenoidu je ale okraj solenoidu nekonečně daleko, takže z kteréhokoli bodu uvnitř solenoidu bychom ho viděli ve směru osy.

<sup>76</sup> „Magnetická množství“ tohoto magnetu jsou na koncích solenoidu; mají konečnou hodnotu, ale jsou nekonečně daleko – takže magnetická intenzita a tedy i indukce od nich je rovna nule.

<sup>77</sup> Rozmyslete si, proč. (Také si uvědomte, že  $H = \text{konst.}$  uvnitř nekonečného solenoidu, a proč tomu tak je.)

Podle zákona celkového proudu se  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r}$  rovná celkovému proudu procházejícímu plochou obdélníka ohraničeného křivkou  $c$ . Obdélníkem prochází  $N \cdot l$  závitů solenoidu<sup>78</sup>, takže celkový proud je  $N l I$ . Ze (7.42) a zákona celkového proudu tedy dostáváme

$$H \cdot l = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{celk}} = N l I ,$$

takže  $H = N \cdot I$  a magnetická indukce  $B = \mu_0 H$  je

$$B = \mu_0 N I . \quad (7.43)$$

Samozřejmě jsme dostali stejný výsledek jako při integraci přes kruhové závity, viz (7.40), ale výrazně jednodušším postupem.<sup>79</sup> Pro dlouhý solenoid délky  $l$ , který má  $n$  závitů, můžeme (7.43) přepsat jako

$$B = \frac{\mu_0 n I}{l} . \quad (7.44)$$

Takto velká magnetická indukce je v kterémkoli bodě uvnitř nekonečného solenoidu – **v nekonečném solenoidu je magnetické pole homogenní.**

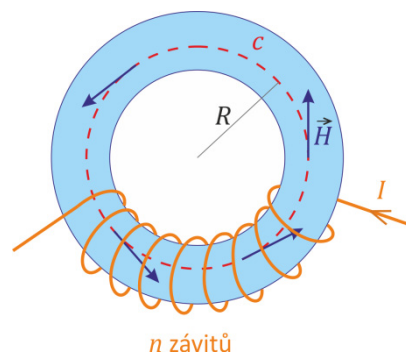
### Pole uvnitř toroidu

V toroidu mají magnetické indukční čáry tvar kružnic.<sup>80</sup> Materiál toroidu bývá většinou z magneticky měkkých izotropních materiálů o velké relativní permeabilitě  $\mu_r$ <sup>81</sup>, takže magnetické indukční čáry se soustřeďují v tomto materiálu. (Mluvíme o *jádru* toroidu.) Velikost magnetické intenzity závisí jen na poloměru  $R$  indukční čáry.<sup>82</sup>

Křivkou, přes kterou budeme v zákonu celkového proudu integrovat, bude kružnice o poloměru  $R$ .  $\vec{H}$  míří ve směru její tečny a má na celé kružnici stejnou velikost, takže  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = H \cdot 2\pi R$ . Proud plochou, kterou

kružnice ohraničuje, je  $n \cdot I$ , kde  $n$  je počet závitů, takže ze zákona celkového proudu dostáváme  $H \cdot 2\pi R = n \cdot I$ . Magnetická indukce je  $B = \mu H$ <sup>83</sup>, takže

$$B = \frac{\mu n I}{2\pi R} . \quad (7.45)$$



<sup>78</sup> Připomeňme, že  $N$  je počet závitů na jednotku délky.

<sup>79</sup> Když si toto odvození rozmyslíte, můžete si ho později rychle provést „z hlavy“, takže se nemusíte vzorec pro  $B$  solenoidu učit zpaměti.

<sup>80</sup> V obrázku je zobrazena jen jedna kružnice (červenou čárkovanou čarou), můžete si jich tam představit víc.

<sup>81</sup> Tedy většinou z feromagnetik.

<sup>82</sup> Tohle je pravda pro jádro s velkým  $\mu_r$ , existují také toroidy se vzduchovým jádrem, tam ale k tomu, aby magnetické indukční čáry „neutíkaly ven“, musí být závity kolem celého toroidu, a nejen na kousku jádra, jak je to na našem obrázku.

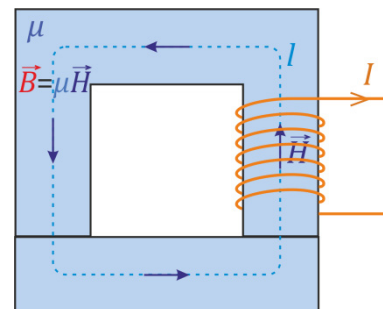
<sup>83</sup>  $\mu = \mu_r \mu_0$ .



## 7.6 Magnetický obvod

Podívejme se na magnetické pole v uzavřeném jádře.<sup>84</sup> Kolem jádra je navinuto  $n$  závitů, protéká jimi proud  $I$ . Permeabilita materiálu jádra je  $\mu$ , takže  $\vec{B} = \mu \vec{H}$ .<sup>85</sup>

Na obrázku je přibližně vyznačena jedna z indukčních čar, její délku označíme  $l$ . Tuto čáru vezmeme jako křivku, přes kterou budeme integrovat v zákonu celkového proudu.<sup>86</sup>



Magnetická indukce má po celé délce dané křivky prakticky stejnou velikost. Proč? Důležité je, že jádro má všude stejný průřez  $S$ .<sup>87</sup> Velikost magnetického indukčního toku je  $\Phi = BS$  a ta musí být ve všech průřezích jádra stejná, protože žádný magnetický tok odnikud nepřítéká ani nikam neodtéká.<sup>88</sup> A protože  $S = \text{konst.}$ , je i  $B = \text{konst.}$  Stejnou velikost podél křivky má i magnetická intenzita  $H$ . Ampérův zákon celkového proudu tedy dává

$$H \cdot l = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I_{\text{celk}} = nI .$$

Pro magnetickou indukci pak vychází

$$B \frac{l}{\mu_r \mu_0} = nI , \quad (7.46)$$

a protože  $B = \Phi / S$ , dostáváme pro magnetický indukční tok  $\Phi$  vztah

$$\Phi \cdot \underbrace{\frac{l}{\mu_r \mu_0 S}}_{\text{označíme } R_m} = \underbrace{nI}_{\text{označíme } U_m} . \quad (7.47)$$

Na tento vztah se můžeme dívat jako na „magnetickou analogii“ Ohmova zákona

$$I \cdot R = U :$$

Magnetický tok je přímo úměrný *magnetomotorickému napětí*  $U_m$  a nepřímo úměrný *magnetickému odporu*  $R_m$ . Poznamenejme, že vztah (7.47) se někdy nazývá **Hopkinsonův zákon**.<sup>89</sup>

<sup>84</sup> Může se jednat o známé jádro ze školního rozkladného transformátoru, jedna část má tvar písmene C, druhá tvar písmene I. Na jádro nasouváme cívku – na obrázku má jen několik závitů; cívky ke školnímu rozkladnému transformátoru mají 300, 600, 1200 a ta s nejvyšším počtem dokonce 12 000 závitů.

<sup>85</sup> Předpokládáme přitom, že jádro je z magneticky měkkého izotropního magnetika a  $\mu_r \gg 1$ . (Pro jádro školního rozkladného transformátoru můžeme velmi zhruba odhadovat, že  $\mu_r$  je řádově tisíc.) Pro jednoduchost zde nebudeme brát v úvahu hysterezní smyčku daného materiálu (předpokládáme, že je velmi tenká a že magnetické pole není tak silné, aby jádro bylo ve stavu nasycení) a bereme  $B$  jako přímo úměrné  $H$ .

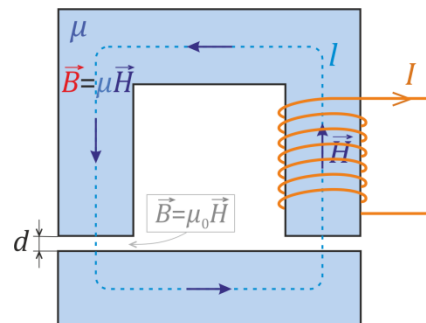
<sup>86</sup> Vybíráme si jakousi „střední magnetickou indukční čáru“. Je jasné, že křivky u vnějšího okraje jádra by byly o něco delší, křivky u vnitřního okraje o něco kratší; my pro jednoduchost budeme pracovat s křivkou, řekněme, „průměrné délky“. (Jestliže tloušťka jádra vzhledem k jeho rozměrům bude malá, tak tím v našich výpočtech neuděláme velkou chybu.)

<sup>87</sup> Průřez je míněn ve směru kolmém na rovinu papíru na našem obrázku. Můžete namítnout, že v místech blízko rohů je průřez větší, ale tyhle odchylky zanedbáme.

<sup>88</sup> Ve skutečnosti určitý malý tok jde i mimo jádro (říká se mu *rozptylový tok*), ale je mnohonásobně menší, než tok jádrem, takže ho v naší úvaze můžeme zanedbat.

<sup>89</sup> Ne že byste si tyto názvy museli pamatovat, ale pokud na ně někdy narazíte, budete vědět, oč jde.

K čemu nám výše nastíněná představa o magnetickém obvodu jako analogii elektrického obvodu může být dobrá? Pomůžte nám třeba určit, jak se změní magnetický tok jádrem<sup>90</sup>, když v něm uděláme vzduchovou mezeru<sup>91</sup> – v situaci na obrázku jde o dvě vzduchové mezery, každá s tloušťkou  $d$ .



V jádře je  $H_{\text{v jádře}} = B/\mu = B/(\mu_r \mu_0)$ , ovšem ve vzduchové mezeře je  $H_{\text{vzduch}} = B/\mu_0$ . Přitom  $B$  je ve vzduchové mezeře stejná, jako v jádře!<sup>92</sup> Zákon celkového proudu tedy dává

$$\frac{B}{\mu_r \mu_0} \cdot l + \frac{B}{\mu_0} \cdot 2d = H_{\text{v jádře}} \cdot l + H_{\text{vzduch}} \cdot 2d = \oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = nI \quad (7.48)$$

Levou stranu lze upravit:

$$\frac{B}{\mu_r \mu_0} \cdot l + \frac{B}{\mu_0} \cdot 2d = B \cdot \left( \frac{l}{\mu_r \mu_0} + \frac{2d}{\mu_0} \right) = \Phi \cdot \underbrace{\left( \frac{l}{\mu_r \mu_0 S} + \frac{2d}{\mu_0 S} \right)}_{R_m} \quad (7.49)$$

Ze (7.49) vidíme, že i malá vzduchová mezerka může významně zvýšit magnetický odpor  $R_m$  a tedy snížit magnetický tok  $\Phi$ ; ten je totiž, viz (7.47),  $\Phi = nI / R_m$ .<sup>93 94</sup>

#### Příklad využití:

Magnetické obvody, kterým jsme se tu věnovali, jsou samozřejmě ty nejjednodušší.<sup>95</sup> Přesto nám umožní kvantitativně rozebrat jeden trochu překvapivý demonstrační pokus:

Na jádro rozkladného transformátoru dáme cívku 1200 závitů a připojíme ji k tužkovému článku 1,5 V. Zjistíme, že obě části jádra silně drží u sebe; k odtržení potřebujeme značnou sílu. Jak to, že malý tužkový článek dokáže držet části jádra tak silně?

Sílu na odtržení magnetů, mezi nimiž je magnetická indukce  $B$ , už známe:  $F = (B^2 S)/(2\mu_0)$ , viz (5.24). Ze vztahu (7.46) můžeme určit velikost magnetické indukce na necelých 0,4 T.<sup>96</sup> Plocha průřezu jádra je asi 12 cm<sup>2</sup>. Pro sílu pak dostaneme skoro 70 N.<sup>97</sup>

I malá vzduchová mezerka ale tuto sílu výrazně zmenší. Pro (odhadnutou velikost)  $\mu_r \doteq 10^3$  stačí mezerka  $d = 0,2$  mm ke zmenšení  $B$  na polovinu, a tedy síly na jednu čtvrtinu.

<sup>90</sup> a tedy také jak se změní magnetická indukce  $B$  v jádře

<sup>91</sup> Například když mezi C-jádro a I-jádro školního rozkladného transformátoru vložíme silnější proužky papíru.

<sup>92</sup> Uvědomte si, proč tomu tak je. (Jak jsme ukázali v kapitole 5, na rozhraní jsou normálové složky magnetické indukce spojité, viz (5.5). A v našem případě je  $\vec{B}$  kolmé na rozhraní mezi jádrem a vzduchovou mezerou.)

<sup>93</sup> Délka čáry  $l$  v jádře je ve vztahu pro  $R_m$  dělena  $\mu_r$ , tloušťka vzduchové mezery dělena není.

<sup>94</sup> Snížením magnetického toku se sníží i magnetická indukce  $B$ , vzduchovou mezerou se tedy sníží i „sycení jádra“.

<sup>95</sup> Složitějšími, kde by se např. dělil magnetický tok, se zde zabývat nebudeme.

<sup>96</sup> Při proudu 0,1 A,  $l \doteq 0,4$  m a  $\mu_r \doteq 10^3$ .

<sup>97</sup> Berme tento údaj jako hrubý řádový odhad síly. Použili jsme totiž jen odhad relativní permeability jádra – a výsledek na něm závisí s druhou mocninou!

## 7.7 Indukčnost

### Vzájemná indukčnost

Mějme vodivou smyčku 1, kterou prochází proud  $I_1$ .<sup>98</sup> Proud touto smyčkou budí v okolí magnetické pole. Poblíž je smyčka 2.

Část magnetického toku pole buzeného smyčkou 1 prochází smyčkou 2, tuto část označíme  $\Phi_{21}$ . Magnetická indukce je úměrná proudu  $I_1$ , takže také  $\Phi_{21}$  je úměrné  $I_1$ :

$$\Phi_{21} = L_{21} I_1 . \quad (7.50)$$

Koeficient úměrnosti  $L_{21}$  se nazývá **vzájemná indukčnost** smyček 1 a 2.<sup>99</sup>

Často samozřejmě nejde jen o smyčku typu jeden závit, ale závitů je víc. Když má smyčka 2 dva závity, prochází jí tok  $\Phi_{21}$  dvakrát, viz obrázek vpravo. Můžeme tedy říci, že celkový tok je  $\Phi_{21 \text{ celk.}} = 2 \Phi_{21}$ . Pro smyčku s  $n_2$  závity je  $\Phi_{21 \text{ celk.}} = n_2 \Phi_{21}$ . Pokud nejde jen o jeden závit, je proto ve vztahu (7.50) vhodné uvažovat celkový tok:

$$\Phi_{21 \text{ celk.}} = L_{21} I_1 . \quad (7.51)$$

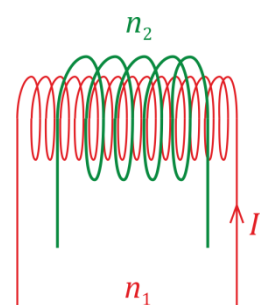
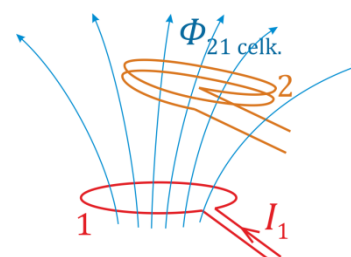
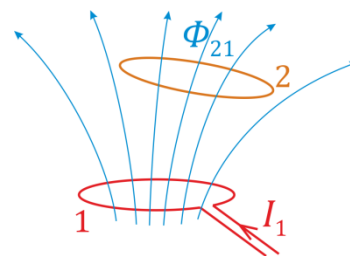
Protože  $\Phi_{21 \text{ celk.}}$  je úměrné  $n_2$ , musí být tomuto počtu závitů úměrná i vzájemná indukčnost:

$$L_{21} \approx n_2 .$$

Když bude mít víc závitů i smyčka 1 (počet jejích závitů označíme  $n_1$ ), bude pole a tedy i magnetický tok  $n_1$ -krát větší. To znamená, že  $L_{21}$  je úměrné  $n_1$ . Celkově tedy

$$L_{21} \approx n_1 n_2 . \quad (7.52)$$

Vzájemná indukčnost závisí také na tom, jaká je poloha závitů, tedy na geometrii obou cívek. Můžeme ji spočítat v některých jednoduchých případech, například když je cívka 2 navinuta na solenoidu 1, viz obrázek. V tomto případě celý tok cívky 1 prochází také cívkou 2. Magnetická indukce je, viz (7.41)  $B = \mu_0 N I = \mu_0 n_1 I_1 / l_1$ , kde  $l_1$  je délka solenoidu. Je-li plocha průřezu solenoidu  $S$ , je magnetický tok  $\Phi_{21} = S \mu_0 n_1 I_1 / l_1$  a celkový magnetický tok cívkou 2 je  $\Phi_{21 \text{ celk.}} = n_2 S \mu_0 n_1 I_1 / l_1$ . To znamená, že  $L_{21} = \mu_0 n_1 n_2 S / l_1$ .<sup>100</sup>



<sup>98</sup> Může jít o závit cívky, ale nemusí být kruhový, může mít libovolný tvar. Pojem *cívka* jsme zde sice ještě formálně nedefinovali, ale setkali jsme se už s řadou příkladů: solenoidem, toroidem, cívkami na jádře školního rozkladného transformátoru. Takže snad nemusíme připomínat, že jde o vodič s více závity.

<sup>99</sup> V literatuře bývá také označován  $M_{21}$ .

<sup>100</sup> Kdyby šlo o solenoid na jádře, ve vztahu pro  $L_{21}$  by se v součinu objevila ještě relativní permeabilita jádra.

Výše uvedené zavedení vzájemné indukčnosti nám může připadat spíše formální – ale jak uvidíme, tato veličina se nám bude velice hodit, až se dostaneme k transformátorům.<sup>101</sup>

Dosud jsme se zabývali tím, jaký tok pole buzeného proudem v cívce 1 prochází cívkou 2. Samozřejmě se lze ptát, jak je to obráceně – tedy jaký je magnetický tok  $\Phi_{12}$  resp.  $\Phi_{12 \text{ celk.}}$  pole od cívky 2 s proudem  $I_2$ , který prochází smyčkou resp. cívkou 1. Vliv cívky 2 na cívku 1 přirozeně popisuje vzájemná indukčnost  $L_{21}$ :

$$\Phi_{12 \text{ celk.}} = L_{12} I_2 \quad (7.53)$$

Trochu překvapující asi je, že obecně platí

$$L_{12} = L_{21} .^{102} \quad (7.54)$$

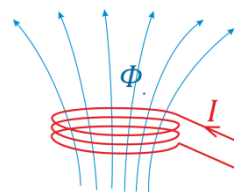
Dosud jsme uvažovali dvě smyčky nebo cívky; vše zde uvedené by ovšem šlo zobecnit i pro více cívek. Co když ale budeme mít jen jednu cívku?

### Vlastní indukčnost

Podobně, jako jsme zavedli vzájemnou indukčnost, můžeme vystihnout „vliv cívky samé na sebe“. Smyčka nebo cívka 1 budí magnetické pole a můžeme určit jeho tok  $\Phi_{11}$  resp.  $\Phi_{11 \text{ celk.}}$  procházející samotnou smyčkou nebo cívkou. Ten bude jistě úměrný proudu  $I_1$  touto cívkou, takže v analogii např. s (7.53) bude platit  $\Phi_{11 \text{ celk.}} = L_{11} I_1$ , kde konstanta  $L_{11}$  je určena geometrií cívky. Je přirozené nazvat ji **vlastní indukčnost** cívky.

Obvykle při zápisu těchto vztahů vypouštíme indexy a píšeme pouze

$$\Phi_{\text{celk.}} = L I . \quad (7.55)$$



Má-li cívka  $n$  závitů, je magnetický tok  $\Phi$  úměrný  $n$ . Navíc, když uvažujeme celkový tok všemi závitů, je  $\Phi_{\text{celk.}} = n \Phi$ .<sup>103</sup> Závislost vlastní indukčnosti na počtu závitů je proto

$$L \sim n^2 . \quad (7.56)$$

Poznamenejme, že často vypouštíme slovo „vlastní“ a  $L$  prostě nazýváme **indukčnost cívky**.

A ještě jedna poznámka k označení: celkový magnetický tok  $n \Phi$  se často označuje symbolem  $\Psi$ .

<sup>101</sup> Není divu, transformátory mají dvě nebo více cívek na společném jádře.

<sup>102</sup> Dokazovat to zde nebudeme. Důkaz (využívající vektorový potenciál) může zvědavý čtenář najít například v kapitole 17.6 *Feynmanových přednášek z fyziky*; viz též kapitolu 4.1.4 známé učebnice Sedláka a Štolla *Elektřina a magnetismus* nebo řešení úlohy <http://reseneulohy.cz/256/kratky-a-dlouhy-solenoid> v elektronické Sbírce řešených úloh.

<sup>103</sup> Uvažovat celkový magnetický tok člověku při prvním seznamování s problematikou může připadat trochu zvláštní – cívkou, třeba solenoidem, přece prochází magnetický tok  $\Phi = B S$ , tak proč ho ještě násobit počtem závitů? Možná někomu pro názornost pomůže psát celkový tok jako  $\Phi_{\text{celk.}} = n \Phi_{\text{jedním závitem}}$ . Až se dostaneme k elektromagnetické indukci a budeme zjišťovat, jaké napětí se na cívce indukuje při změnách magnetického toku cívkou, bude jasnější, proč má násobení počtem závitů smysl. (Ono je to jednoduché: Když se na jednom závitě indukuje napětí 1 V, tak na cívce s pěti závitů se bude indukovat napětí pětkrát větší.)

**Příklad:** Indukčnost cívky na toroidálním jádře.

Magnetickou indukci v jádře toroidální cívky jsme spočetli výše, viz (7.45):

$B = \mu_0 \mu_r n I / (2\pi R)$ . Průřez jádra je  $S$ , takže magnetický tok je

$$\Phi = B \cdot S = \frac{\mu_0 \mu_r n S}{2\pi R} I \quad (7.57)$$

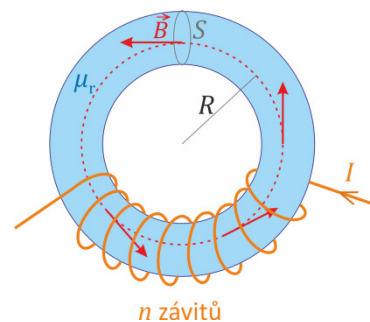
Celkový magnetický tok cívkou je ještě  $n$ -krát větší, tj.  $n \frac{\mu_0 \mu_r n S}{2\pi R} I$ , a rovná se  $LI$ .

Indukčnost cívky je tedy

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{2\pi R} n^2 \quad (7.58)$$

Analogicky bychom určili indukčnost dlouhého solenoidu délky  $l$  a průřezu  $S$  na jádře s relativní permeabilitou  $\mu_r$ :

$$L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} n^2 \quad (7.59)$$



Poznámka (spíše pro zájemce):

Počítat indukčnost cívek, kde závity jsou vinuty ve více vrstvách, je obtížnější – magnetický tok od určitého závitu totiž neprotéká celý všemi ostatními závity. Pro výpočet se v praxi používají různé zjednodušené a poloempirické vzorce.<sup>105</sup>

Jednoduché není ani vypočítat indukčnost jedné kruhové smyčky s proudem – ukazuje se totiž, že závisí na průměru vodiče.<sup>106</sup> Totéž platí pro indukčnost (kusu) přímého vodiče.<sup>107</sup>

## V čem se měří indukčnost

Ještě zbývá uvést jednotku indukčnosti. Ze (7.55) je zřejmé, že je to Wb/A; v soustavě SI má ale zvláštní název: **henry**; značka je H:

$$[L] = \text{Wb/A} = \text{H}$$

<sup>104</sup> Toto platí samozřejmě jen přibližně, protože  $B$  závisí na vzdálenosti od středu toroidu; pro přesný výpočet bychom magnetický tok museli určovat integrací. Pokud se ale vnitřní a vnější poloměr toroidu výrazně neliší, dává (7.57) rozumný výsledek. Přesný výpočet najdete například v kapitole 4.1.5 e učebnice Sedláka a Štolla *Elektřina a magnetismus*.

<sup>105</sup> Najdete je v různých příručkách nebo na webu, když zadáte do vyhledávače například „vzorec pro výpočet indukčnosti cívky“. Viz též například část *Inductance formulas* v <https://en.wikipedia.org/wiki/Inductor>.

<sup>106</sup> Pro nekonečně tenký vodič by indukčnost formálně divergovala. (To jsou věci, což?)

<sup>107</sup> Poznámka pro zájemce: Magnetický tok by se v případě přímého vodiče bral plochou „obdélníka“, jehož jedna strana by přiléhala k vodiči (a protější by byla „v nekonečnu“, ale to zde nebudeme rozebírat). Magnetická indukce vně vodiče je nepřímo úměrná vzdálenosti od osy vodiče – při výpočtu magnetického toku integrací by tedy pro nekonečně tenký vodič integrál divergoval jako  $\int (1/R) dR$ .

## 7.8 Aplikace

Někdy můžeme zaslechnout výrok „*Šedá každá teorie.*“ To samozřejmě není pravda.<sup>108</sup> Přesto však stojí za to, připomenout si, kde se to, co jsme výše v této popisovali teoreticky, uplatňuje v praxi. I ze stručného výčtu je zřejmé, že bez využití magnetického pole elektrického proudu a síly působící na vodič s proudem by naše civilizace neměla například:

- Elektromagnety<sup>109</sup>
- Magnetický záznam dat na pevné disky
- Reprodukory<sup>110</sup> a sluchátka
- Magnetické vlaky
- Elektromotory<sup>111</sup>

Navíc k vývoji civilizace, jak ji známe, přispěla řada dalších přístrojů, které dnes už sice patří minulosti, ale dříve sehrály významnou úlohu. Příkladem mohou být:

- Relé
- Elektrické zvonky
- Magnetofony
- Elektrické měřicí přístroje s otočnou cívkou<sup>112</sup>

O všech těchto přístrojích a zařízeních by samozřejmě měl mít učitel fyziky představu.<sup>113</sup>

---

<sup>108</sup> Teorie je krásná, pestrá, mnohobarevná, fascinující...! (Jen to vše uvidíme a oceníme, až se s ní opravdu seznámíme a sblížíme.)

<sup>109</sup> Od elektromagnetů, které na šrotišti zdvihají staré železo, přes miniaturní elektromagnety např. k ovládání ventilů až třeba po supravodivé elektromagnety v lékařských přístrojích pro funkční magnetickou rezonanci nebo v urychlovači LHC.

<sup>110</sup> Přesněji řečeno elektrodynamické reproduktory, v nichž se cívka spojená s membránou reproduktoru pohybuje v magnetickém poli permanentního magnetu.

<sup>111</sup> Od miniaturních až po motory elektrických lokomotiv a generátory ve funkci motorů v přečerpávací elektrárně Dlouhé stráně s výkonem přes 300 MW.

<sup>112</sup> I dalších typů, například tzv. elektromagnetické. (Připomeňme, že měřicí přístroje s otočnou cívkou se také nazývají magnetoelektrické.)

<sup>113</sup> Pro tuto chvíli je podrobnější rozbor a výklad daných aplikací mimo rámec tohoto textu; odkazujeme proto jednak na základní informace ve středoškolských učebnicích a samozřejmě na informace na webu (s vědomím, že je třeba informace z webu racionálně hodnotit a oddělit „zrno od plev“).

## Shrnutí

**Ampérův zákon celkového proudu:**  $\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{r} = I$  } Platí pro stacionární pole.  
=> v diferenciálním tvaru:  $\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$  } (Pro nestacionární ještě přibude jeden člen, pak půjde o jednu z Maxwellových rovnic.)

**Síla na přímý vodič s proudem:**  $F = B I l$  (když  $\vec{B} \perp$  na směr proudu), platí, že  $\vec{F} \perp \vec{B}$  i na směr proudu

**Lorentzova síla:**  $\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$ , hustota síly:  $\vec{f} = \rho(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})$

**Pole nekonečného přímého vodiče:**  $H = \frac{I}{2\pi R}$ , ve vakuu:  $B = \frac{\mu_0 I}{2\pi R}$

Síla mezi rovnoběžnými přímými vodiči ve vakuu:  $\frac{F}{l} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{I_1 I_2}{R}$  Pro  $I_1 = I_2 = 1 \text{ A}$ ,  $R = 1 \text{ m}$   
(Proudy ve stejném směru se přitahují, v opačném odpuzují.) je  $F = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N/m}$ .  
(Dříve byl takto definován ampér.)

**Rovnice pro magnetické pole:**  $\text{div } \vec{B} = 0$  (platí obecně),  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$  (ve stacionárním případě ve vakuu)

**Vektorový potenciál  $\vec{A}$ :**  $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$  (=>  $\vec{B}$  automaticky splňuje  $\text{div } \vec{B} = 0$ ),  
určen až na  $\text{grad } \Lambda$ ,  $\vec{A}' = \vec{A} + \text{grad } \Lambda$  ... kalibrace; kalibrační podmínka např.  $\text{div } \vec{A} = 0$

$$\text{Řešení } \Delta \vec{A} = -\mu_0 \vec{j}: \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dV', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_S \frac{\vec{J}(\vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|} dS', \quad \vec{A}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{r}'}{|\vec{r} - \vec{r}'|}$$

**Biotův-Savartův zákon:**

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\vec{j}(\vec{r}') \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3} dV', \quad \vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_c \frac{d\vec{r}' \times (\vec{r} - \vec{r}')}{|\vec{r} - \vec{r}'|^3}$$

**Magnetické pole vodičů:**

Na ose kruhového závitu:  $B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I R^2}{2(R^2 + z^2)^{3/2}}$ , speciálně ve středu závitu:  $B = \frac{\mu_0 I}{2R}$

Magnetický moment smyčky s proudem:  $m = S I$  (obecně:  $\vec{m} = I \int_S d\vec{S}$ ), jde o Ampérův mag. moment

Uvnitř dlouhého solenoidu:  $B = \mu_0 N I$ , solenoid s jádrem:  $B = \mu_0 \mu_r N I$ . Toroid:  $B = \mu_0 \mu_r \frac{nI}{2\pi R}$   
( $N$  je počet závitů na jednotku délky solenoidu)

Hopkinsonův zákon pro magnetický obvod:  $\Phi \cdot \left( \frac{l}{\mu_0 \mu_r S} \right) = n I$  (analogie Ohmova zákona)

**Indukčnost:**

Vzájemná,  $L_{21}$ :  $\Phi_{2 \text{ od } 1} = L_{21} I_1$ ,  $\Phi$  je celkový tok (započítává všechny závity) =>  $L_{21} \approx n_1 n_2$ ;  $L_{12} = L_{21}$

Vlastní,  $L$ :  $\Phi = L I$ ,  $L \approx n^2$  ( $n$  je počet závitů cívky)

pro dlouhý solenoid:  $L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{l} n^2$ , pro toroid:  $L = \mu_0 \mu_r \frac{S}{2\pi R} n^2$

## Dodatek 7.A: Měření magnetického pole buzeného přímým vodičem

Měřit lze pomocí smartphonu nebo tabletu. (Vhodné aplikace pro Android byly zmíněny v kapitole Magnetostatika.) Pro měření je potřeba zjistit polohu sondy magnetického pole ve smartphonu, to lze udělat například zmagnetovaným špendlíkem, který k přístroji přibližujeme z různých stran a zjišťujeme, kam ukazuje šipka udávající směr magnetické indukce nebo jaké jsou hodnoty složek  $B$ .

Příklad měření uvádí následující tabulka.  $I$  je proud ve vodiči,  $R$  vzdálenost sondy magnetického pole od vodiče,  $B$  naměřená hodnota magnetické indukce. (Upozornění: Předem je potřeba nastavit v aplikaci, aby ukazovala nulovou hodnotu  $B$ . Tím se odečte vliv magnetického pole Země. Se smartphonem je pak už třeba nehýbat a přibližovat nebo vzdalovat samotný vodič.)

Uvádíme jen několik naměřených hodnot:

$\frac{I}{\text{A}}$	$\frac{R}{\text{mm}}$	$\frac{B}{\mu\text{T}}$
0,31	12	4,4
0,56	12	7,9
0,56	24	4,0
0,56	40	2,5

Porovnání prvních dvou řádků naznačuje, že  $B \approx I$ . (Poměr proudů i hodnot magnetické indukce činí asi 1,8.)<sup>114</sup>

Z dalších třech řádků lze usoudit, že  $B \approx 1/R$ . (Součiny  $B \cdot R$  činí asi 95, 96 a 100.)<sup>115</sup>

Celkově lze tedy z měření usoudit, že magnetická indukce závisí na proudu a vzdálenosti od vodiče jako

$$B = k \frac{I}{R}, \quad (7.60)$$

kde  $k$  je konstanta, z výsledků měření vychází  $k = 1,7 \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$ . Ještě zajímavější je, když spočteme magnetickou intenzitu  $H = B/\mu_0$ .<sup>116</sup> S malou odchylkou<sup>117</sup> dostáváme

$$H = \frac{I}{2\pi R}. \quad (7.61)$$

<sup>114</sup> Samozřejmě by bylo vhodné provést více měření při různých hodnotách proudu, dvě hodnoty poslouží jen pro nejstručnější demonstraci.)

<sup>115</sup> Opět by bylo vhodné provést více měření. Ve větších vzdálenostech však již klesá naměřená hodnota a tedy i přesnost měření; pro malé vzdálenosti je zase problém v tom, že polohu senzoru magnetického pole neznáme úplně přesně, navíc sensor není zcela bodový.

<sup>116</sup>  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ T}\cdot\text{m}/\text{A}$ .

<sup>117</sup> V případě hodnot uvedených v tabulce je odchylka asi 15 %, což může být dáno kalibrací senzoru magnetického pole v použitém přístroji. Měření jiným smartphonem dala odchylku jen řádu procent.



## Dodatek 7.B: $\operatorname{div} \operatorname{rot} \vec{a} = 0$ (a trochu formalismu pro další výpočty)

Z toho, že  $\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a}$ , již automaticky plyne, že  $\operatorname{div} \vec{b} = 0$ <sup>118</sup>. Nejjednodušeji to dokážeme přímým výpočtem:

$$\vec{b} = \operatorname{rot} \vec{a} = \left( \frac{\partial a_3}{\partial x_2} - \frac{\partial a_2}{\partial x_3}, \frac{\partial a_1}{\partial x_3} - \frac{\partial a_3}{\partial x_1}, \frac{\partial a_2}{\partial x_1} - \frac{\partial a_1}{\partial x_2} \right)$$

$$\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_1}{\partial x_1} + \frac{\partial b_2}{\partial x_2} + \frac{\partial b_3}{\partial x_3} = \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 a_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 a_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 a_1}{\partial x_3 \partial x_2} = 0$$

### Levi-Civitův symbol

Tyto a další výpočty se zkrátí, pokud pro vyjádření složek rotace využijeme *Levi-Civitův symbol*  $\varepsilon_{ijk}$ . Ten je definován tak, že  $\varepsilon_{ijk}$  se rovná:

+1, jsou-li indexy  $i, j, k$  sudou permutací hodnot 1, 2, 3 (tedy  $\varepsilon_{123} = \varepsilon_{312} = \varepsilon_{231} = +1$ ),

-1, když jsou  $i, j, k$  lichou permutací hodnot 1, 2, 3 (tedy  $\varepsilon_{132} = \varepsilon_{213} = \varepsilon_{321} = -1$ ),

0, pokud se hodnoty alespoň dvou indexů rovnají (např.  $\varepsilon_{112} = 0$ ,  $\varepsilon_{323} = 0$  a také např.  $\varepsilon_{111} = 0$ ).

Pomocí Levi-Civitova symbolu lze jednoduše ve složkách zapsat třeba vektorový součin<sup>119</sup>:

$$(\vec{a} \times \vec{b})_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k.$$

$i$ -tá složka rotace libovolného vektoru  $\vec{a}$  se s použitím daného symbolu zapíše jako

$$(\operatorname{rot} \vec{a})_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j}.$$

Protože  $\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ <sup>120</sup>, můžeme už nyní nulovost divergence  $\vec{b}$  odvodit velmi rychle:

$$\operatorname{div} \vec{b} = \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} (\operatorname{rot} \vec{a})_i = \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \varepsilon_{ijk} \frac{\partial a_k}{\partial x_j} \right) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial^2 a_k}{\partial x_i \partial x_j} = 0.$$

Výraz se rovná nule, protože druhá derivace je symetrická vzhledem k záměně indexů  $i$  a  $j$ , zatímco Levi-Civitův symbol je vzhledem k této záměně antisymetrický<sup>121</sup>.

Celkově tedy víme, že pro libovolné vektorové pole  $\vec{a}$  (takové, že druhé derivace složek  $\vec{a}$  existují a jsou spojitě) platí

$$\operatorname{div} (\operatorname{rot} \vec{a}) = 0 \quad (7.B.1)$$

<sup>118</sup> Za předpokladu, že druhé derivace složek  $\vec{a}$  existují a jsou spojitě, takže v druhých (smíšených) parciálních derivacích můžeme zaměňovat pořadí derivace podle proměnných; to budeme při důkazu potřebovat.

<sup>119</sup> Zde v zápise používáme Einsteinovu sumační konvenci, tedy přes opakující se indexy sčítáme od 1 do 3.

Pokud chcete, dopište si do vztahů příslušné sumy. S nimi má vzorec tvar  $(\vec{a} \times \vec{b})_i = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} a_j b_k$ .

<sup>120</sup> Opět používáme sumační konvenci, se znakem sumy bychom psali  $\operatorname{div} \vec{b} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial b_i}{\partial x_i}$ .

<sup>121</sup> Rozmyslete si, že tento argument platí. (Zkuste si to dokázat obecně; řešení je podrobněji ukázáno v poslední poznámce na následující straně.)

## Existence a jednoznačnost $\vec{a}$

Zatím jsme dokázali, že když  $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$ , tak  $\text{div } \vec{b} = 0$ . Platí ale dokonce tvrzení obrácené:<sup>122</sup>

Jestliže pro vektorové pole  $\vec{b}$  platí, že  $\text{div } \vec{b} = 0$ ,  
pak existuje vektorové pole  $\vec{a}$  takové, že  $\vec{b} = \text{rot } \vec{a}$ .

Zadáním  $\vec{b}$  ovšem vektorové pole  $\vec{a}$  **není** určeno jednoznačně. Můžeme ho změnit o gradient libovolné funkce<sup>123</sup>. Jestliže totiž vztah

$$\text{rot } \vec{a} = \vec{b} \tag{7.B.2}$$

chápeme jako rovnici, kde  $\vec{b}$  je zadané a  $\vec{a}$  je jejím řešením, pak

$$\vec{a}' = \vec{a} + \text{grad } \Lambda, \tag{7.B.3}$$

kde  $\Lambda = \Lambda(\vec{r})$  je libovolná skalární funkce<sup>124</sup>, je také řešením (7.B.2).

Důkaz:

$$\text{rot } \vec{a}' = \text{rot}(\vec{a} + \text{grad } \Lambda) = \text{rot } \vec{a} + \underbrace{\text{rot grad } \Lambda}_{=0} = \vec{b} \tag{7.B.4}$$

Že rotace gradientu libovolné skalární funkce je rovna nule, se můžeme přesvědčit přímým výpočtem. Například pro x-ovou složku je (díky záměnnosti smíšených parciálních derivací)

$$(\text{rot grad } \Lambda)_x = \frac{\partial}{\partial y}((\text{grad } \Lambda)_z) - \frac{\partial}{\partial z}((\text{grad } \Lambda)_y) = \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \Lambda}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \Lambda}{\partial y} = 0.$$

Podobně je tomu pro y-ovou a z-ovou složku. (Výsledky bychom také získali cyklickou záměnou.) Obecně tedy platí

$$\text{rot grad } \Lambda = 0. \tag{7.B.5}$$

Tento vztah samozřejmě můžeme dokázat i z vyjádření rotace pomocí Levi-Civita symbolu:

$$(\text{rot grad } \Lambda)_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial \Lambda}{\partial x_k} = \underbrace{\varepsilon_{ijk}}_{\substack{\text{antisymetrické} \\ \text{vůči záměně } j \leftrightarrow k}} \cdot \underbrace{\frac{\partial^2 \Lambda}{\partial x_j \partial x_k}}_{\substack{\text{symetrické} \\ \text{vůči záměně } j \leftrightarrow k}} = 0. \tag{125}$$

<sup>122</sup> Uvádíme ho tu bez důkazu, ten už by tento text přece jenom protáhl.

<sup>123</sup> „Libovolné“ opět s tím, že musí existovat a být spojité parciální derivace do druhého řádu, abychom mohli zaměňovat pořadí parciálních derivací. (Pro detaily odkážeme na Matematické metody fyziky a Matematickou analýzu.)

<sup>124</sup> Samozřejmě taková, aby měla derivace do všech potřebných řádů a její druhé derivace byly spojité, aby šlo prohazovat pořadí smíšených derivací.

<sup>125</sup> Užíváme zde Einsteinovu sumační konvenci a využíváme toho, že součin symetrického a antisymetrického výrazu musí dát po vysčítání nulu. (Například  $\varepsilon_{1jk} C_{jk} = \varepsilon_{123} C_{23} + \varepsilon_{132} C_{32} = 1 \cdot C_{23} - 1 \cdot C_{32} = C_{23} - C_{32} = 0$  pro  $C_{23} = C_{32}$ .)

## Dodatek 7.C: $\text{rot rot} = \text{grad div} - \Delta$

Pro libovolnou<sup>126</sup> vektorovou funkci  $\vec{a}$  platí

$$\boxed{\text{rot}(\text{rot } \vec{a}) = \text{grad}(\text{div } \vec{a}) - \Delta \vec{a} ,} \quad (7.C.1)$$

což se vyjadřuje známým výrokiem (ba skoro sloganem)

„rotace rotace je gradient divergence mínus laplace!“<sup>127</sup>

Tuto identitu můžeme dokázat ve složkách s využitím toho, že pro Levi-Civitovy symboly platí

$$\varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \varepsilon_{kij} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl} \quad (7.C.2)$$

Důkaz:

$$\begin{aligned} (\text{rot}(\text{rot } \vec{a}))_i &= \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\text{rot } \vec{a})_k = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left( \varepsilon_{klm} \frac{\partial a_m}{\partial x_l} \right) = \\ &= \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = (\delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}) \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \\ &= \delta_{il} \delta_{jm} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} - \delta_{im} \delta_{jl} \frac{\partial^2 a_m}{\partial x_j \partial x_l} = \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left( \frac{\partial a_j}{\partial x_j} \right) - \frac{\partial^2 a_i}{\partial x_j \partial x_j} = (\text{grad}(\text{div } \vec{a}))_i - \Delta a_i \end{aligned}$$

Je vidět, že Laplaceův operátor se na vektor  $\vec{a}$  aplikuje po složkách.

<sup>126</sup> Jako vždy „libovolnou rozumnou“ funkci ve smyslu existence potřebných parciálních derivací a záměnnosti smíšených druhých derivací.

<sup>127</sup> Za mých studentských let se uváděla historka (zřejmě pravdivá), že někdy v šedesátých letech matfyzáci skandovali toto „heslo“ při prvomájovém průvodu pod tribunou – a protože zřejmě znělo podezřele a nikdo mu nerozuměl, tak prý z toho byl průšvih. Také se říká, že když chce člověk v nepřehledném davu najít matfyzáka, má zvolat „rotace rotace!“, a odkud se ozve „gradient divergence mínus laplace“, tak tam je matfyzák... (Netřeba snad připomínat, že pokud to budete volat, je vhodné vyslovovat správně „laplas“.)

<sup>128</sup> Toto lze ověřit vyjádřením pro konkrétní hodnoty indexů.

## Dodatek 7.D: Doplňující informace k magnetické intenzitě a indukci

V kapitole 5 jsme využívali analogii elektrostatického pole a magnetického pole permanentních magnetů. Je však třeba upozornit na jednu odlišnost týkající se toho, čím jsou buzeny intenzity a indukce.

V elektrostatice je elektrická intenzita buzena volnými i vázanými náboji, tedy i náboji, které v dielektriku vznikají díky jeho polarizaci.

Elektrická indukce je buzena jen volnými náboji.

Ve stacionárním magnetickém poli buzeném elektrickými proudy v látkovém prostředí je *magnetická indukce* buzena jak „skutečně tekoucími“ proudy ve vodičích, tak „atomárními proudy“ souvisejícími s magnetizací daného prostředí.<sup>129</sup>

Naopak *magnetická intenzita* je buzena jen „skutečně tekoucími“, tedy „volnými“ proudy.<sup>130</sup> V Ampérově zákoně celkového proudu (7.3) tedy vystupuje jen proud tekoucí vodiči.<sup>131</sup>

---

A ještě jedna informace, jak je to na hranici dvou různých prostředí (případně na hranici prostředí a vakua).

Z kapitoly 5 už víme, že

**na hranici jsou spojitě normálové složky magnetické indukce,  $B_{1n} = B_{2n}$ .**

Z Ampérova zákona celkového proudu se dá dovodit, že

**pokud podél hranice prostředí netečou plošné proudy,  
jsou na hranici spojitě tečné složky magnetické intenzity,  $H_{1t} = H_{2t}$ .**<sup>132</sup>

---

<sup>129</sup> V učebnici Sedláka a Štolla *Elektřina a magnetismus* se používají termíny *volný* a *vázaný proud*. (Jde o analogii s volnými a vázanými náboji v elektrostatice.)

<sup>130</sup> Viz kapitola 3.5.3 v učebnici Sedláka a Štolla.

<sup>131</sup> Případně proud, který by byl dán pohybem částic, například proudu elektronů z elektronové trysky.

<sup>132</sup> Odvození si můžete zkoušet sami; pro obecnější případ nestacionárního pole ho uděláme v jedné z dalších kapitol.