Elektromagnetická indukce

Dosud jsme se zabývali situacemi, kdy elektrická a magnetická pole nezávisela na čase.[1] Nyní přejdeme k časově proměnným polím – zatím ale půjde o **kvazistacionární elektromagnetická pole**.

Co si pod tímto názvem představit? Jde o pole, která se s časem nebudou měnit příliš rychle. Příkladem může být pole okolo cívky, kterou připojíme ke střídavému napětí s frekvencí 50 Hz.[2] Děje a jevy související s pomalu proměnnými poli označujeme jako *kvazistacionární děje*.

Proč se takovými ději zabývat? Ukazuje se, že když se proud ve vodičích mění s časem pomalu, je magnetické pole v okolí stále popsáno Biotovým-Savartovým zákonem, který jsme odvodili pro stacionární proudy a pole.[3] [4] Pole je tedy „jako-stacionární“, neboli kvazistacionární.

V čem je tedy rozdíl proti tomu, co už známe? Podstatný rozdíl se týká elektrického pole. V kvazistacionárním případě ***elektrické pole není konzervativní***, tedy neplatí $\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = 0$ a $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$.

Časové změny magnetického pole mají vliv na elektrické pole – můžeme říci, že vyvolávají či indukují elektrické pole. Při změně magnetického pole díky tomu v uzavřené smyčce vzniká napětí. Navíc, jak uvidíme, napětí vzniká i při pohybu smyčky ve statickém magnetickém poli, třeba v poli permanentního magnetu. Všechny tyto jevy shrnujeme pod společný název **elektromagnetická indukce**.

Jaké otázky by nás v souvislosti s daným tématem mohly zajímat? Třeba:

- Jak velké je indukované napětí? Na čem závisí? Jak ho udělat co největší?
- Když nyní neplatí $\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0$, jaká rovnice pro elektrické pole tedy platí?
  (A až přejdeme k úplně obecnému případu, budeme muset rovnici zase měnit?)
- Když zapneme proud do cívky, změní se v ní magnetické pole. V cívce by se tedy mělo indukovat nějaké napětí. Ovlivní toto napětí proud procházející cívkou? A jak je tomu při vypnutí proudu?
- A na závěr obvyklá otázka: K čemu je to všechno dobré?

Tak se do toho pustíme…

---

[1] V elektrostatice se vůbec nic nepohybovalo, tam šlo o situace *statické*. V případě stacionárního elektrického proudu se náboje pohybují, ale proud se s časem nemění. Magnetické pole buzené takovým proudem označujeme jako *stacionární*. Připomeňme, že rozdíl mezi statickou a stacionární situací je v tom, že statická situaci vypadá úplně stejně, i když se obrátí směr času (kdybyste situaci natočili na video a pak ho pustili v čase pozpátku); ve stacionární situaci se při obrácení času pohyb děje opačným směrem (ve videu puštěném pozpátku by se náboje pohybovaly nazpátek, to znamená, že by se obrátil směr proudu). V obou situacích jsou časové derivace elektrických a magnetických intenzit a indukcí nulové.

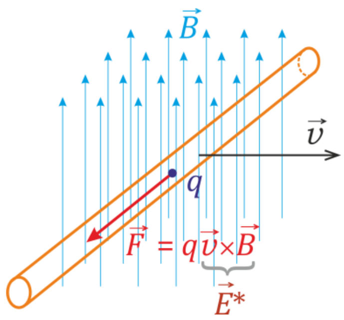
[2] Není asi nutno připomínat, že jde frekvenci střídavého napětí v rozvodné síti. (Leda byste zrovna byli v Americe, tam mají 60 Hz.)
Poznámka pro ty, kdo by se hned chtěli vrhnout do experimentování: Pokud budete cívky, například ze školního rozkladného transformátoru, skutečně připojovat ke zdroji střídavého proudu (a cívky nebudou na jádře), nepřipojujte je přímo k síti (!) – tedy pokud nechcete vyrazit pojistky a rozšířit si sbírku zničených cívek. Kdy jaké cívky připojovat k jak velkému střídavému napětí, o tom budeme mít jasněji, až se v dalších kapitolách seznámíme s pojmem induktance cívky. Při pokusech, i z důvodu bezpečnosti, raději jako zdroj použijeme školní transformátor.

[3] Toto platí ve vzdálenostech, které jsou mnohem menší než vlnová délka elektromagnetické vlny s frekvencí odpovídající časovým změnám proudu. Pro f = 50 Hz je $\lambda = c/f$ rovno 6 tisíc km – takže při školních pokusech se střídavým napětím můžeme takto magnetické pole popisovat bez problémů.

[4] Proč magnetické pole můžeme takto popisovat, uvidíme v kapitole o Maxwellových rovnicích.

8.1 Od pohybu vodiče v magnetickém poli ke změně magnetického toku

Vyjdeme ze situace, kdy se vodič pohybuje v magnetickém poli, jak to ukazuje obrázek.[5] Náboje ve vodiči se pohybují spolu s vodičem rychlostí $\vec{\upsilon}$,[6] takže na ně magnetické pole působí silou $\vec{F} = q\vec{\upsilon}\times\vec{B}$.[7]



Pokud by ve vodiči bylo navíc elektrické pole s intenzitou $\vec{E}$, bude na náboje působit Lorentzova síla

$$\vec{F} = q\left(\vec{E}+\vec{\upsilon}\times\vec{B}\right). \tag{8.1}$$

V kapitole 6 jsme se dozvěděli, že silám, které ve vodičích „postrkují“ náboje (navíc k působení elektrické intenzity $\vec{E}$) se říká ***elektromotorické síly***. Nyní vidíme, že v případě pohybujícího se vodiče je takovou silou i působení magnetického pole. Označíme tedy

$$\vec{\upsilon}\times\vec{B} \overset{\text{ozn.}}{=} \vec{E}^* . \tag{8.2}$$

Z (8.1) pak po vydělení q dostaneme celkovou intenzitu působící na náboje ve vodiči:

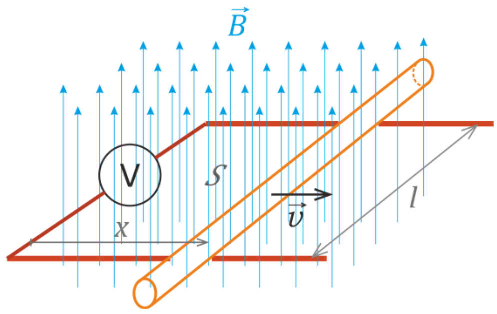
$$\frac{\vec{F}}{q} = \vec{E}+\vec{E}^* ; \tag{8.3}$$

k elektrické intenzitě $\vec{E}$ zde navíc působí *elektromotorická intenzita* $\vec{E}^*$.

V případě, kdy je rychlost vodiče kolmá na směr magnetického pole, $\vec{\upsilon}\perp\vec{B}$, je $E^* = \upsilon B$. Když je navíc vodič také kolmý na směr magnetického pole, míří $\vec{E}^*$ ve směru osy vodiče, viz obrázek výše. Na vodiči délky l pohybujícím se v homogenním magnetickém poli proto vzniká elektrické napětí $U = E^* l = \upsilon B l$. Nazýváme ho **indukované napětí**.

$\boxed{?}$ Jak toto napětí na pohybujícím se vodiči změřit?

Pohybující se vodič můžeme položit na dvě vodivé kolejničky a na jejích koncích měřit napětí voltmetrem, viz obrázek.



Protože $\upsilon = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ a plocha smyčky $S = x\cdot l$,[8] můžeme vztah pro indukované napětí upravit na

$$U = \upsilon B l = \frac{\Delta x}{\Delta t} B l = B\frac{\Delta(x\cdot l)}{\Delta t} = B\frac{\Delta S}{\Delta t} = \frac{\Delta(BS)}{\Delta t} = \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} . \tag{8.4}$$

kde Φ je magnetický indukční tok plochou, kterou ohraničují vodiče.

---

[5] V daném směru ho třeba táhneme rukou.

[6] Náboje se samozřejmě navíc pohybují všemi směry vysokými rychlostmi díky tepelnému pohybu. Ale právě proto, že jde o pohyb všemi směry, bude po sečtení přes všechny náboje v určitém kousku vodiče vliv magnetického pole daný těmito rychlostmi nulový. (Názorně bychom mohli říci, že vliv na náboje pohybující se jedním směrem a na ty pohybující se opačným směrem se dohromady vyruší.)

[7] Červená šipka v obrázku ukazuje směr síly, kterým magnetické pole působí na částice s kladným nábojem (q>0), síla na elektrony samozřejmě působí v opačném směru. (Červená šipka tedy také ukazuje směr, kterým by ve vodiči tekl elektrický proud, kdybychom uzavřeli obvod.)

[8] Plochou smyčky je obdélník, který tvoří pohybující se vodič, kolejničky a vodiče spojující je s voltmetrem.

O polaritu indukovaného napětí se budeme starat za chvíli. Prozatím jsme odvodili vztah pro velikost indukovaného napětí,

$$\left|U_{\text{ind}}\right| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| . \tag{8.5}$$

Limitou $\Delta t \to 0$ můžeme samozřejmě přejít k vyjádření pomocí derivace,

$$\boxed{\left|U_{\text{ind}}\right| = \left|\frac{d\Phi}{dt}\right|} \tag{8.6}$$

Fascinující je, že toto **platí zcela obecně, ať se magnetický indukční tok mění jakkoli** (!).

Vztah (8.6) tedy platí, mimo jiné, při všech následujících dějích:

- Když se vodič pohybuje libovolným směrem a sám má libovolný směr,
- když bude smyčka vodiče pevná a budeme k ní přibližovat magnet (nebo od ní magnet vzdalovat),
- když budeme magnet nad smyčku přibližovat ze strany,
- když bude smyčka z měkkého drátu a budeme ji deformovat tak, že se její plocha bude měnit,[9]
- když se bude smyčka, například v homogenním magnetickém poli, otáčet[10]
- … a při všech možných kombinacích uvedených dějů.[11]

Platnost (8.6) byla **vyvozena z experimentů** a při všech uvedených dějích je experimenty ověřena.[12] Ostatně řadu z nich můžeme, minimálně kvalitativně, provádět i pomocí jednoduchých demonstračních a žákovských pokusů.[13]

Je ovšem dobře uvědomit si, že napětí indukované při pohybu jednoho vodiče není příliš velké. Pro magnetickou indukci 0,1 T (která je reálná nad větším feritovým magnetem), délku vodiče 10 cm a rychlost 1 m/s se indukuje napětí jen 10^{-2} V, tedy 10 mV. Při pokusech a v aplikacích proto často používáme cívky s více závity; tam se napětí na jednotlivých závitech sčítá.[14]

[9] Magnetické pole přitom zůstane stejné.

[10] Míněno kolem osy, která je kolmá na magnetickou indukci, tomuto důležitému případu se ještě budeme věnovat dále.

[11] A při dějích dalších, třeba když budeme smyčkou prostrkovat pól dlouhého magnetu (pro zájemce: tohle souvisí s jedním ze způsobů, jak fyzici hledali magnetické monopóly), prohazovat jí magnetické dipóly atd.

[12] Úvahy, které nás výše dovedly k (8.6), tento vztah odvodily jen pro speciální případ vodiče pohybujícího se v homogenním magnetickém poli, rozhodně je nemůžeme brát jako obecné odvození (!). Neříkají například nic o tom, jaké napětí se indukuje v nepohyblivé smyčce, když se v jejím okolí mění magnetické pole – tohle opravdu bylo třeba vyvodit z příslušných pokusů.

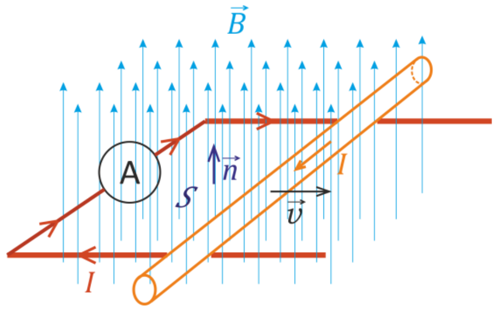
[13] Vztahy (8.5) a (8.6) jsou samozřejmě kvantitativní. Kvalitativním ověřováním rozumíme: • ověření, že se při určitém ději vůbec nějaké napětí indukuje a • ověření, že velikost napětí závisí na rychlosti změny magnetického indukčního toku s časem (tj. že při rychlejší změně se indukuje větší napětí). Tohle lze opravdu prověřovat i jednoduchými pokusy.

[14] Nebo alternativně bereme ve vzorcích (8.5) a (8.6) celkový magnetický tok, jak jsme ho zavedli v kapitole 7; ať tak či tak, při n závitech je indukované napětí n-krát vyšší.

8.2 Faradayův zákon elektromagnetické indukce

Dosavadní zjištění si teď trochu zpřesníme a zformalizujeme. Nejdříve se podíváme, jak je to s polaritou indukovaného napětí.

Lenzovo pravidlo



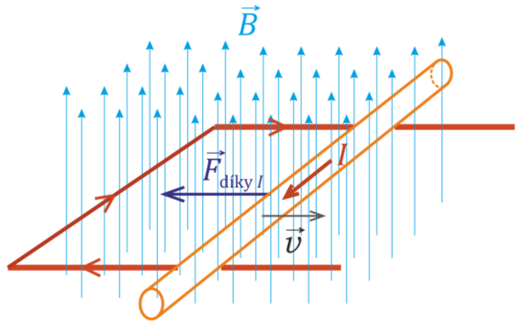
Vyjdeme ze situace, které jsme se již věnovali – pohybu vodiče v homogenním magnetickém poli. Smyčku vodiče ale nyní uzavřeme ampérmetrem, aby jí mohl protékat proud.[15]

Již první obrázek v části 8.1 výše ukazuje, kterým směrem míří elektromotorická intenzita; tímto směrem také po uzavření obvodu teče proud. (Viz obrázek vpravo.) Tento indukovaný proud ovšem budí v okolí vodiče magnetické pole. Na obrázku není zakresleno – rozmyslete si sami, kterým směrem bude mířit.[16]

Uvnitř smyčky míří pole $\vec{B}_{\text{ind}}$ buzené indukovaným proudem proti směru původního pole, je tedy $\vec{B}_{\text{ind}} \cdot \vec{n} < 0$, kde $\vec{n}$ je normálový vektor k ploše ohraničené smyčkou. Jak je tomu s magnetickým tokem?

Magnetický tok vnějšího pole plochou smyčky je $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = B\, S > 0$ a při pohybu vodiče roste.

Magnetický tok pole buzeného indukovaným proudem je $\Phi_{\text{pole ind.proudu}} = \int_S \vec{B}_{\text{ind}} \cdot \vec{n}\, dS < 0$. To znamená, že pole buzené indukovaným proudem působí proti nárůstu magnetického toku smyčkou, tedy **proti změně**, která indukované napětí vyvolala.



Podobný výsledek dostaneme, když se zamyslíme, jaká síla působí na pohybující se vodič díky tomu, že jím protéká indukovaný proud (a vodič se přitom nachází ve vnějším magnetickém poli $\vec{B}$).

Jak ukazuje obrázek[17], tato síla působí **proti** směru pohybu vodiče.[18]

Opět tedy indukovaný proud ve svých důsledcích působí proti změně, která ho vyvolala.

[15] Pokud je v obvodu zapojen voltmetr, jeho velký vnitřní odpor zabrání, aby obvodem tekl významnější proud. (Ideální voltmetr má vnitřní odpor nekonečný.) Ampérmetr průchodu proudu nebrání. (Vnitřní odpor ideálního ampérmetru je nulový.) Místo ampérmetru můžeme také obvod prostě uzavřít vodičem, tedy vlastně „zkratovat“. Proud bude také procházet, jen ho nebudeme měřit.

[16] K určení orientace magnetické indukce buzené indukovaným proudem ve smyčce můžeme použít pravidlo pravé ruky. Ukáže nám, že uvnitř smyčky tato indukce je orientována dolů, tedy v opačném směru než původní vnější pole $\vec{B}$. (Pole buzené indukovaným proudem samozřejmě není homogenní, ale jeho svislá složka uvnitř smyčky opravdu míří proti směru $\vec{B}$.)

[17] A jak nám vyjde z pravidla levé ruky nebo z vektorového součinu ve vztahu pro sílu na vodič s proudem.

[18] Bude tedy pohyb vodiče zpomalovat, nebo musíme vodič ve směru rychlosti $\vec{v}$ táhnout vnější silou a vyrovnat tak sílu danou indukovaným proudem, ta se pohybu snaží „překážet“.

Zjištění, ke kterému jsme došli, můžeme využít pro určení směru indukovaného proudu. Platí, a to zcela obecně[19]:

Indukovaný elektrický proud má takový směr, že působí proti změně, která ho vyvolala.

Tento výsledek je znám jako **Lenzovo pravidlo**.[20]

Lenzovo pravidlo určuje, jaká bude polarita indukovaného napětí. Pro tyto účely bychom ho mohli přeformulovat na tvar

Indukované napětí má takovou polaritu, že působí proti změně, která ho vyvolala.[21]

Musíme si ale být vědomi, že napětí samo proti změně nepůsobí; pokud je elektrický obvod přerušen, žádný proud v něm neteče a „působení proti změně" se nekoná. Bylo by proto vhodné formulovat pravidlo pro polaritu napětí trochu přesněji – schválně si to zkuste sami.[22]

Důležitá poznámka aneb proč se nezhroutí vesmír:

Je vhodné uvědomit si, že Lenzovo pravidlo je vlastně docela přirozené. Představte si, že by to bylo naopak – tedy že by indukovaný proud svými účinky *přispíval ke změně*, tedy zvětšoval změnu, která ho způsobila. Kdybychom měli smyčku z vodiče, třeba měděný kroužek, a přiblížili bychom k ní magnet, zvětšil by se v ploše smyčky magnetický tok, ten by vyvolal proud kroužkem, ten by svými účinky *přispěl* ke změně, tedy zvětšil magnetický tok, tato změna by dále zvýšila proud kroužkem… a vše by pokračovalo a proud a tok by teoreticky rostly do nekonečna![23]

Takhle to v přírodě opravdu nechodí – směr indukovaného proudu je takový, že nevede ke katastrofickým důsledkům a k situacím, kdy by se nám vodivé předměty z ničeho nic samy tavily, protože se v okolí náhodně změnilo magnetické pole.[24]

Takže působení indukovaného proudu *proti změně*, která elektromagnetickou indukci vyvolala, je chování velmi rozumné – a buďme rádi, že tomu tak v našem vesmíru je.

Pojďme se teď podívat, jak Lenzovo pravidlo formálně zapracovat do vztahu (8.6) pro elektromagnetickou indukci.

---

[19] My jsme si následující obecné pravidlo jen ilustrovali na speciálním případu.

[20] V literatuře se též někdy označuje jako *Lenzův zákon*. Lze se setkat s různými formulacemi tohoto pravidla, například „Směr indukovaného proudu ve smyčce je vždy takový, že magnetické pole vytvořené tímto proudem se vždy snaží kompenzovat změny toku odpovědné za vznik indukovaného proudu." (Sedlák, Štoll: *Elektřina a magnetismus*, kap. 4.1.1.) My se zde snažíme o co nejstručnější a přitom výstižnou formulaci.

[21] Podobnou formulaci můžeme najít *ve Feynmanových přednáškách z fyziky* v kap. 16.2.

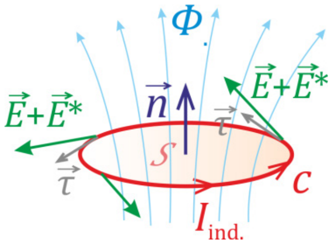
[22] Například: „Indukované napětí má takovou polaritu, že když je elektrický obvod uzavřen, pak proud vyvolaný indukovaným napětím působí proti změně, která indukované napětí vyvolala."

[23] Prakticky by se samozřejmě kroužek dříve roztavil.
Důsledky podobných efektů za studentských let autora tohoto textu popisoval jeden z jeho učitelů, prof. Kvasnica, lapidárním tvrzením „To by se zhroutil vesmír!".

[24] Další „drobný problém" s takovým chováním by byl, že by narušovalo zákon zachování energie. (Na druhou stranu ve vesmíru, který by se nějak divně hroutil a kde by se samy od sebe tavily a asi vybuchovaly kovové předměty, by zřejmě nebyl nikdo, kdo by formuloval zákon zachování energie. ☺)

Znaménková konvence pro indukované napětí

Uvažujme uzavřenou vodivou smyčku c, která ohraničuje plochu S, viz obrázek. Křivka je orientovaná, vektor $\vec{\tau}$ je jednotkový tečný vektor k této křivce. Vektor $\vec{n}$ je normálový k ploše S, jeho orientace je dána pravidlem pravé ruky.[25]

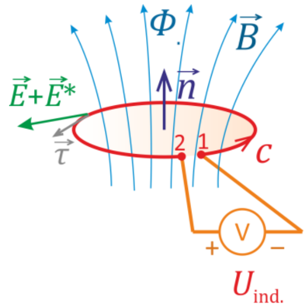


Magnetický indukční tok je

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS \text{ .}^{26} \tag{8.7}$$

Indukovaný proud $I_{\text{ind.}}$ je kladný, jestliže míří ve směru křivky c, tedy ve směru tečného vektoru $\vec{\tau}$. Proud teče díky tomu, že na náboje ve vodiči působí elektrická intenzita $\vec{E}$ a elektromotorická intenzita $\vec{E}^*$, viz (8.3). V situaci podle obrázku proud *zvyšuje* magnetický indukční tok směrem nahoru (tj. ve směru $\vec{n}$) – podle Lenzova pravidla se toto děje v případě, když magnetický indukční tok (8.7) *klesá*, tedy když $\dfrac{d\Phi}{dt} < 0$.[27]

Jak změřit indukované napětí? K tomu musíme vodivou smyčky přerušit a k jejím koncům připojit voltmetr, jak to ukazuje obrázek vpravo. Ke konci 1 smyčky připojíme zápornou svorku voltmetru[28], konec 2 spojíme s kladnou svorkou[29]. Jestliže je konec 2 „kladnější" než konec 1, voltmetr ukáže kladnou hodnoty napětí[30], $U_{\text{ind.}} > 0$. Právě taková je situace v případě uvažovaném výše (viz obrázek nahoře na stránce): intenzity $\vec{E} + \vec{E}^*$ „tlačí" kladné náboje podél křivky od konce 1 ke konci 2.[31]



Pro danou situaci jsme odvodili, že $\dfrac{d\Phi}{dt} < 0$ a zároveň $U_{\text{ind.}} > 0$. Pro absolutní hodnotu napětí přitom platí (8.6). To znamená, že **je-li voltmetr připojen tak, jak to ukazuje obrázek, naměří napětí**

$$\boxed{U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Phi}{dt}\,.} \tag{8.8}$$

Znaménko mínus zde vystihuje Lenzovo pravidlo: Indukované napětí má takovou polaritu, že indukovaný proud, který vznikne v uzavřeném obvodu, působí proti změně magnetického indukčního toku, která indukované napětí vyvolala.

---

[25] Prsty ukazují směr obíhání křivky c, palec ukazuje orientaci vektoru $\vec{n}$. Nemusíme snad zdůrazňovat, že pokud plocha S není částí roviny, bude mít normálový vektor v různých místech plochy různý směr; orientován bude ovšem vždy na stejnou stranu plochy. Podobně samozřejmě vektor $\vec{\tau}$, i když o něm mluvíme jako o jediném tečném vektoru, má v různých místech křivky různý směr; vždy je však orientován ve směru obíhání křivky.

[26] Vidíme, že pro jeho definici je důležitá orientace vektoru $\vec{n}$.

[27] Jde o působení proti změně, která indukci vyvolala. Rozmyslete si, že pokud by magnetický indukční tok s časem vzrůstal, bylo by $I_{\text{ind.}} < 0$, takže proud by tekl opačným směrem.

[28] Na multimetrech bývá označena nápisem COM. Jde o svorku společnou pro měření napětí i proudů.

[29] Na multimetrech bývá označena symbolem V.

[30] Předpokládáme přitom, že žádné další napětí se neindukuje v přívodech k voltmetru (na obrázku značeny žlutě). Při praktickém měření bychom to zajistili tak, že přívody k voltmetru povedeme těsně vedle sebe. (Ještě lepší by bylo použít zkroucené vodiče nebo stíněný kabel, ale do těchto technických detailů zde nepůjdeme.)

[31] Ve skutečnosti samozřejmě tlačí elektrony opačným směrem, takže přebytek elektronů bude na konci 1, ten bude „zápornější" než konec 2.

Pokud by v situacích podle obrázků magnetický indukční tok vzrůstal, tj. bylo $\frac{d\Phi}{dt} > 0$, bylo by indukované napětí záporné, tedy voltmetr by ukázal zápornou hodnotu napětí.[32]

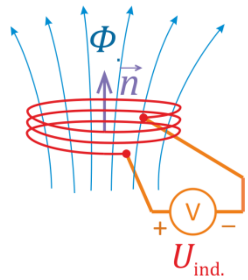
Uff! Chvíli nám úvahy kolem znaménkové konvence trvaly – ale ono je dobře mít rozmyšleno, jak připojit voltmetr, abychom opravdu naměřili polaritu indukovaného napětí podle vztahu (8.8).[33] Pro zájemce je ještě další rozbor uveden v dodatku B.

V dalších úvahách se nám za chvíli bude hodit ještě jiný způsob, jak spočítat indukované napětí. Názorně můžeme říci, že toto napětí je dáno součtem „postrkování“ nábojů intenzitou $\vec{E} + \vec{E}^*$ podél celé smyčky vodiče, jak to naznačují obrázky na předchozí stránce. Matematicky tomu odpovídá integrál

$$U_{\text{ind.}} = \oint_c \left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) \cdot \vec{\tau}\, dl \quad (8.9)$$

[34]

Faradayův zákon elektromagnetické indukce



Závěrem ještě dodáme, jak je tomu v obecnějším případě, kdy nemusíme mít jen jednu smyčku vodiče, ale může jich být více. Například když máme cívku s n závity. V tom případě se uplatní celkový magnetický tok $\Phi_{\text{celk.}}$.[35] Většinou se ve vzorcích pro elektromagnetickou indukci celkový tok značí symbolem Ψ [36], tohoto označení se přidržíme i my v dalším textu.

Výsledný **Faradayův zákon elektromagnetické indukce** má tedy tvar

$$\boxed{U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Psi}{dt}} \quad (8.10)$$

[32] Konec 2 by byl zápornější než konec 1; kdyby se oba konce spojily, proud by tekl proti směru křivky a vzniklé magnetické pole by uvnitř plochy mířilo směrem dolů, proti směru vektoru $\vec{n}$.

[33] V některých učebnicích se bohužel znaménko v zákonu elektromagnetické indukce objevuje bez podrobnějších rozborů trochu formálně.

[34] Také jej samozřejmě můžeme psát jako $U_{\text{ind.}} = \oint_c \left(\vec{E} + \vec{E}^*\right) \cdot d\vec{r}$. Podrobnější odvození (8.9) pro zájemce obsahuje Dodatek B.

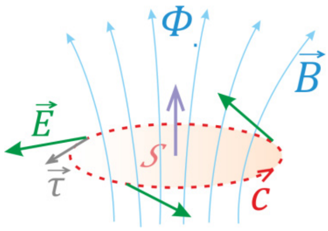
[35] Viz kap. 7.7. Připomeňme, že pro n smyček vodiče těsně u sebe je $\Phi_{\text{celk.}} = n\Phi$.

[36] Je tedy $\Phi_{\text{celk.}} \equiv \Psi$. (Toto značení je užito např. v učebnici Sedláka a Štolla *Elektřina a magnetismus*.) V případě jedné smyčky (jednoho závitu) je samozřejmě $\Psi = \Phi$.

8.3 Lokální vyjádření zákona elektromagnetické indukce

Zákon elektromagnetické indukce (8.10) udává indukované napětí, čili celkovou, „integrální" veličinu. Jde tedy o zákon v integrálním tvaru (ostatně se v něm integrál vyskytuje). Zkusme z něj odvodit, „jak věci fungují lokálně", tedy zákon v diferenciálním tvaru.

Uvažuje pevnou (nepohyblivou) křivku c. Nepůjde ale už o smyčku vodiče, křivka bude jen myšlená. Přesto můžeme říci, jaké napětí by se na ní indukovalo:



$$U_{\text{ind.}} = \oint_c \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,dl \quad (8.11)$$ [37] [38]

Podle zákona elektromagnetické indukce je indukované napětí

$$U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS \quad . \tag{8.12}$$

Protože plocha S, přes kterou integrujeme, se nemění[39], může se magnetický tok měnit jen díky změně magnetické indukce $\vec{B}$. Je proto[40]

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS\,. \tag{8.13}$$

Kombinací (8.11), (8.12) a (8.13) dostaneme

$$\oint_c \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,dl = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS \quad . \tag{8.14}$$

Levou stranu pomocí Stokesovy věty[41] převedeme na integrál přes plochu, $\oint_c \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,dl = \int_S (\text{rot}\vec{E})\cdot\vec{n}\,dS$,

takže z (8.14) vyjde $\int_S (\text{rot}\vec{E})\cdot\vec{n}\,dS = -\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot\vec{n}\,dS$. Po převedení na jednu stranu a spojení do jednoho integrálu dostaneme

$$\int_S \left(\text{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right)\cdot\vec{n}\,dS = 0 \quad . \tag{8.15}$$

A teď důležitá úvaha: (8.15) platí pro *libovolnou* plochu S.[42] Z (8.15) proto nutně plyne, že integrand (výraz v kulaté závorce) musí být roven nule.[43]

---

[37] Protože jde o nepohyblivou křivku, je elektromotorická intenzita $\vec{E}^* = \vec{v}\times\vec{B} = 0$, ve vztahu (8.9) tedy v integrálu zůstane jen elektrická intenzita $\vec{E}$.

[38] Kdybychom toto napětí chtěli naměřit, museli bychom samozřejmě podél křivky umístit vodič. I bez něj však napětí dostaneme jako součet malých přírůstků $\Delta U = \vec{E}\cdot\vec{\tau}\,\Delta l$ podél křivky; blíže viz Dodatek B.

[39] Máme pevnou křivku c, která plochu ohraničuje, takže nebudeme hýbat ani plochou S. S časem se tedy nemění ani normálový vektor $\vec{n}$.

[40] Používáme zde jeden z výsledků vektorové analýzy; stručné zdůvodnění najdete v Dodatku C.

[41] $\oint_c \vec{a}\cdot d\vec{r} = \int_S (\text{rot}\,\vec{a})\cdot d\vec{S}$. (To, že $\vec{\tau}\,dl = d\vec{r}$ a $\vec{n}\,dS = d\vec{S}$, je snad zbytečné připomínat, je to jen otázka značení.)

[42] Křivka c ohraničující plochu S byla myšlená, mohli jsme ji tedy zvolit libovolně.

[43] Analogickou úvahu už jsme provedli a zdůvodnili v předchozí kapitole při odvozování vztahu $\text{rot}\,\vec{H} = \vec{j}$.

Dospěli jsme tedy ke vztahu

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ .} \tag{8.16}$$

Ten vyjadřuje **zákon elektromagnetické indukce v diferenciálním tvaru**.

Ukazuje velice důležitou věc:

Jestliže se magnetické pole mění s časem, nutně musí být přítomno i elektrické pole.

Navíc *jde o jednu z Maxwellových rovnic*; přitom takovou, která platí nejen pro kvazistacionární pole, ale zcela obecně. (Nebudeme tedy do ní muset doplňovat žádné další členy.)

Co už umíme z Maxwellových rovnic

Pojďme si připomenout, jak daleko jsme se na své pouti za Maxwellovými rovnicemi dostali. Docela dost – až na jednu rovnici už známe jejich finální tvar:

$$\begin{aligned}
\operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j} && (*) \\
\operatorname{div}\vec{D} &= \rho && \checkmark \\
\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 && \checkmark \\
\operatorname{div}\vec{B} &= 0 && \checkmark
\end{aligned} \tag{8.17}$$

Všechny rovnice až na první $(*)$ jsou už v konečném tvaru.

Pouze rovnici $\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j}$ budeme muset v obecném případě [44] doplnit ještě jedním členem. V kvazistacionárním případě rovnice (8.17) popisují chování elektrického a magnetického pole adekvátně.

[44] Tedy pro nestacionární, rychle se měnící pole.

8.4 „Elektromagnetická indukce v akci“

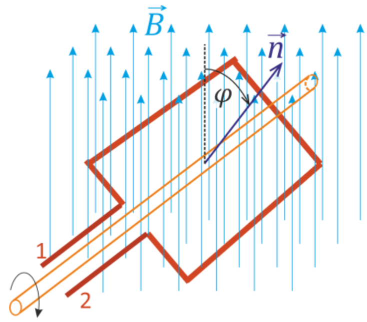
Podívejme se teď, k čemu je elektromagnetická indukce dobrá, tedy na její aplikace.

Generátory

Elektromagnetická indukce je základem mnoha důležitých přístrojů, strojů a zařízení. K nejdůležitějším patří generátory vyrábějící v elektrárnách elektrický proud. Tedy, přesněji řečeno, měnící mechanickou energii[45] na energii elektrickou.

Principem těchto generátorů je cívka otáčející se v magnetickém poli. Obrázek ukazuje pro jednoduchost jen jeden závit.[46] Je-li plocha závitu S a homogenní magnetické pole má indukci B, je magnetický indukční tok

$$\Phi = B S \cos\varphi \,, \tag{8.18}$$



kde φ je úhel, který normála k ploše závitu svírá se směrem magnetického pole.[47]

Pro smyčku otáčející se konstantní úhlovou rychlostí ω je $\varphi = \omega t$, takže indukované napětí je[48]

$$U = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}\big(BS\cos(\omega t)\big) = BS\,\omega\sin(\omega t) \tag{8.19}$$

Pro n závitů je samozřejmě napětí n-násobné.

Mezi vývody 1 a 2 je tedy střídavé napětí. Vývody spojíme se dvěma vzájemně izolovanými kovovými kroužky na ose, kolem které se cívka otáčí. Pak můžeme pomocí kartáčků vzniklé střídavé napětí odebírat a napájet jím nějaká další zařízení. Toto je princip **alternátoru**.[49]

Ve skutečných alternátorech v elektrárnách je uspořádání obrácené: mezi nepohyblivými cívkami *statoru* se jako *rotor* otáčí magnet[50]. Ve statoru je cívek více – generátory v elektrárnách totiž vyrábějí třífázové napětí; k tomu se dostaneme v dalších kapitolách.

---

[45] Mechanickou energii poskytují turbíny, ať už vodní nebo parní (v uhelných, plynových a jaderných elektrárnách, případně elektrárnách na biomasu), a rotory větrných elektráren.
(Zapomněli jsme na něco? Asi ano, například na jeden zvláštní typ slunečních elektráren, v nichž je pára získávána ze sluneční energie. Přílivové elektrárny můžeme počítat mezi vodní, přečerpávací elektrárny také.)

[46] Jedním rotujícím závitem v poli např. podkovovitého magnetu bývá princip generátoru demonstrován i ve školních pokusech.

[47] Obrázek to ukazuje lépe, než slovní popis… Daný vztah lze odvodit buď názornou úvahou ($S \cos\varphi$ je průmět plochy závity do směru kolmého k magnetické indukci; nakreslete si sami příslušný obrázek) nebo vyjít ze vzorce (8.7): $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\,dS = \int_S B\cos\varphi\,dS = B\cos\varphi\int_S dS = B\cos\varphi\, S\,\cdot$

[48] Ve výsledném vzorci už nezdůrazňujeme indexem, že jde o napětí indukované. (To bychom se upsali… ☺)

[49] Uvedli jsme ho jen stručně a bez obrázku – ale jednak ho jistě znáte ze středoškolské fyziky a jednak si o něm lze lehce najít informace a obrázky na webu; začít můžete třeba na Wikipedii.

[50] Reálně nejde o permanentní magnet, ale o elektromagnet napájený stejnosměrným proudem. Stejnosměrný proud lze k rotoru přivést pomocí kroužků a kartáčků, ale jak se můžeme dočíst i na webu, existuje i bezkartáčkové („brushless“) uspořádání, kdy na stejné ose je malý generátor s cívkami v rotoru (stator tohoto generátoru má pevné napájené elektromagnety) a z tohoto malého generátoru se po usměrnění napájí rotor velkého generátoru. Technika je fascinující! (A pokud jste dané uspořádání z tohoto stručného výkladu nepochopili, čemuž bych se nedivil, dohledejte si informace na webu.)

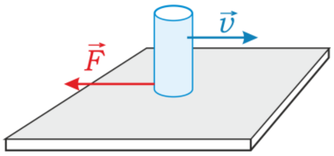
Alternátory se kromě elektráren používají například v automobilech a dieselelektrických lokomotivách. Jako generátor může ostatně sloužit i elektromotor – například v elektromobilech při brzdění motorem dobíjí baterii[51].

Pokud napětí a proud neodebíráte z rotující cívky pomocí kroužků, ale pomocí *komutátoru*[52], dostanete nikoli střídavé, ale pulzující stejnosměrné napětí. Takovéto zdroje se nazývají **dynama**.

Mikrofony

Dalším přístrojem, který využívá elektromagnetickou indukci, je jeden typ mikrofonu, konkrétně **elektrodynamický mikrofon**. V něm zvuk rozkmitává membránu, k níž je připevněna malá lehká cívka umístěná v poli permanentního magnetu. Při pohybu se v cívce indukuje napětí odpovídající zvukovému signálu.[53] Signál pak putuje do zesilovačů ať už nahrávacího studia nebo s výstupem do reproduktorů.[54] [55]

Vířivé proudy



Zkuste vzít silnější neodymový magnet a pohybovat jeho pólem v těsné blízkosti silnějšího měděného nebo hliníkového pásku.[56] Ucítíte, že nějaká síla pohyb brzdí – a při větší rychlosti je síla větší. Přitom měď ani hliník se k magnetu pozorovatelně nepřitahují.[57] Čím je tedy brzdící síla způsobena?

Když magnetem pohybujeme nad vodičem, mění se v jednotlivých místech vodiče magnetické pole. Díky tomu se ve vodiči indukuje elektrická intenzita a ta vyvolává ve vodiči indukované proudy. Říká se jim **vířivé proudy**.[58]

Tyto vířivé proudy budí ve svém okolí magnetické pole, a to samozřejmě působí na náš magnet. A podle Lenzova pravidla působí proti změně, která elektromagnetickou indukci vyvolala – tedy proti směru pohybu magnetu!

Vířivé proudy se mohou využít pro elektromagnetickou brzdu. V ní jsou permanentní magnety pevné, ale pohybuje se rotující kotouč; vířivými proudy je jeho otáčení brzděno.[59]

---

[51] Pro tento proces se užívá název *rekuperace.*

[52] Obrázek vysvětlující princip najdete například u tohoto hesla na Wikipedii.

[53] Například, zní-li v blízkosti mikrofonu ladička naladěná na komorní a, je na výstupu mikrofonu střídavé napětí s frekvencí 440 Hz.

[54] A může, podle stylu, rozeznít sál třeba zesíleným zvukem akustické kytary nebo vokálem hřímajícím „Jede jede mašinka“ nebo „Halelujah.“ ☺

[55] Poznamenejme, že dalším typem elektrodynamických mikrofonů jsou *páskové mikrofony*, kde se v poli permanentního magnetu pohybuje tenký kovový pásek rozechvívaný zvukovými vlnami. (Na webu se můžete dočíst o vlastnostech různých typů mikrofonů a na co a proč zvukaři různé typy používají; ale to už jsme trochu daleko od tématu našeho textu.)

[56] Magnet stačí od průměru 0,5 cm a délky 1 cm (větší je lepší). Tloušťka pásku by měla být alespoň 2 mm, lépe 3 nebo 4 mm ev. více. Alobal na tento pokus opravdu nestačí. ☺ Hliníkové víčko od ešusu ale už ano – zkuste s magnetem zavěšeným na závěsu kývat nad víčkem, uvidíte, že se kyvy velmi rychle utlumí.

[57] Jsou to paramagnetika, takže síla, kterou na ně magnet působí, je velmi malá.

[58] Netečou nikam daleko, proudí podél uzavřených křivek „dokola“ opravdu podobné jakýmsi „vírům“. (Nikoli výrům ani virům. Jak je ta čeština kouzelná… ☺)

[59] Před přechodem na digitální typy měly elektroměry (měřící spotřebu třeba v domácnostech) hliníkový kotouč, který se otáčel rychlostí úměrnou spotřebovávanému výkonu. (Otáčení bylo krásně vidět skleněným okénkem, pokud ještě na takový typ narazíte, podívejte se.) Mechanické počitadlo otáček pak počítalo celkovou spotřebovanou práci v kWh. Otáčení kotouče bylo brzděno právě vířivými proudy díky permanentnímu magnetu v blízkosti kotouče – což bylo dobře; určitě by bylo nefér, aby se po vypnutí všech spotřebičů kotouč otáčel setrvačností bůhvíjak dlouho a na počitadle spotřeby naskakovala vyšší čísla.

Známým a hezkým školním pokusem na demonstraci vířivých proudů je pád magnetu měděnou trubkou – díky vířivým proudům v trubce padá magnet pomalu a prakticky konstantní rychlostí.[60]

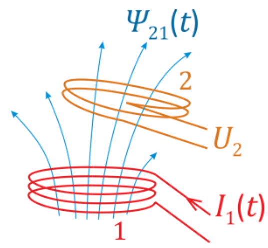
? Rozmyslete si sami, jak síla, kterou je brzděn pohyb magnetu v trubce nebo nad vodivým páskem, závisí na rychlosti. (Zkuste se zamyslet dřív, než se podíváte na odpověď.[61])

? A další otázka k rozmyšlení: Kam se poděje práce, kterou vykonáme, když magnet táhneme nad vodivým páskem? (Musíme ho táhnout určitou silou, takže konáme práci. Odpověď není složitá.[62])

Indukční vařiče

Časově proměnné magnetické pole indukčního vařiče vyvolává indukované proudy ve dnu pánvičky nebo hrnce. Tyto proudy zahřívají pánvičku resp. hrnec. Samotná deska indukčního vařiče přitom nijak nehřeje.[63]

Transformátory



Princip transformátoru je jednoduchý: do cívky 1 pouštíme proud, který se mění s časem. S časem se tedy mění i magnetický tok. Část magnetického toku prochází druhou cívkou – v té se proto indukuje napětí.

Magnetický tok procházející cívkou 2 je dán vzájemnou indukčností obou cívek a proudem v cívce 1: $\Psi_{21} = L_{21} I_1$. Napětí indukované v cívce 2 je tedy

$$U_2 = -\frac{d\Psi_{21}}{dt} = -\frac{d}{dt}(L_{21} I_1) = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} \ . \tag{8.20}$$

Transformátory slouží například ke galvanickému oddělení *primárního obvodu* (cívky 1) a *sekundárního obvodu* (cívky 2).[64] Zejména se ale užívají ke změně napětí (používá se přímo termín ***transformace napětí***) na vyšší či nižší hodnotu. U reálných transformátorů samozřejmě není sekundární cívka „jen tak pohozena“ poblíž cívky primární, jde tam o co nejmenší ztráty a nechceme, aby většina magnetického toku šla „pánubohu do oken“. Transformátorům se budeme ještě podrobněji věnovat v jedné z dalších kapitol.

Zapalovací cívky

Pro jiskru zapalující směs v benzínovém motoru je potřeba napětí řádu kilovoltů až desítek kV. To se získává v zapalovací cívce právě díky elektromagnetické indukci. Vznik vysokého napětí souvisí s rychlým přerušením proudu – na problém zapínání a vypínání proudu v cívce se proto podíváme podrobněji v další části kapitoly.

---

[60] Pro pokus je vhodné vzít neodymový magnet o něco menší než vnitřní průměr trubky a mít trubku o dostatečně silné stěně.

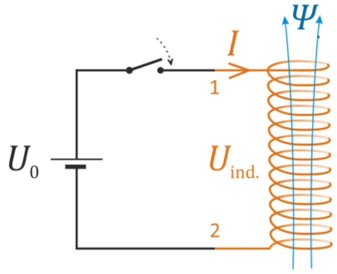
[61] Síla je úměrná velikosti vířivých proudů; ta je podle Ohmova zákona úměrná indukovanému napětí a to je úměrné časové změně indukčního toku. Při dvakrát větší rychlosti se indukční tok mění s časem dvakrát rychleji – takže je vidět, že síla způsobená vířivými proudy je přímo úměrná rychlosti pohybu magnetu.

[62] Vířivé proudy zahřívají materiál vodiče.

[63] Blíže o indukčním vařiči a řadě krásných pokusů s ním informuje příspěvek P. Žilavého „Tajemství indukčního vařiče“ na http://vnuf.cz/sbornik/prispevky/pdf/13-35-Zilavy_P.pdf .

[64] To je důležité například u lékařských přístrojů, ale třeba i u školního zdroje s transformátorem – určitě nechceme, aby byl jeho výstup přímo spojen se síťovým napětím.

8.5 Zapínání a vypínání proudu v cívce



Podívejme se, jak se bude měnit proud v cívce, když ji připojíme ke zdroji napětí – viz obrázek.

Něco můžeme usoudit i kvalitativně, bez počítání. Před sepnutím spínače byl proud cívkou nulový; nulový tedy byl i magnetický tok. Po zapnutí začne obvodem protékat proud. Kdyby zde byl místo cívky rezistor, proud by měl prakticky okamžitě hodnotu danou Ohmovým zákonem. V cívce se ovšem indukuje napětí takové polarity, že působí *proti změně*, to znamená proti nárůstu proudu. Zřejmě tedy bude proud narůstat postupně.

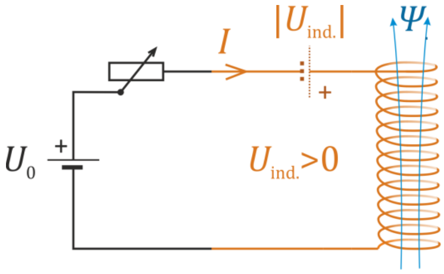
Nárůst proudu spočteme i kvantitativně. Pro jistotu si však nejprve připomeneme, jak budeme v našem konkrétním obvodu brát znaménko resp. polaritu indukovaného napětí.

Znaménková konvence pro indukované napětí ještě jednou – tentokrát pro obvod s cívkou

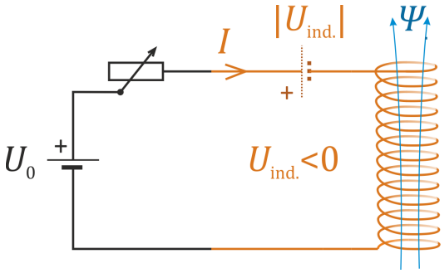
V zásadě je to jednoduché:

> Indukované napětí bereme jako kladné, $U_{\text{ind}} > 0$, když má takovou polaritu, že zvětšuje proud I ve zvoleném směru.[65]

Názorně si indukované napětí můžeme představit tak, jako by je dával zdroj zapojený v sérii s cívkou.[66] Případy dvou polarit indukovaného napětí ukazují obrázky:



a) Indukované napětí je kladné, snaží se tedy zvětšit proud cívkou, a tudíž celým obvodem. (Tato situace nastane, pokud reostatem snižujeme proud v obvodu.)



b) Indukované napětí je záporné, snaží se tedy snížit proud cívkou, a tudíž celým obvodem. (Tato situace nastane, pokud reostatem zvyšujeme proud v obvodu.)

Jak po zapnutí narůstá proud cívkou – nejprve při zanedbání všech odporů

Indukčnost cívky označíme L. Magnetický indukční tok je $\Psi = L\,I$, napětí indukované v cívce je tedy

$$U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Psi}{dt} = -L\frac{dI}{dt}\ . \tag{8.21}$$

Zanedbáme-li odpor cívky a vodičů a nejsou-li v obvodu žádné další odpory (viz obrázek nahoře na stránce), musí být $U_0 + U_{\text{ind.}} = 0$. (Rozmyslete si, že toto platí, a proč.[67])

---

[65] Trochu podrobněji řečeno: Ve smyčce elektrického obvodu máme zvolený směr. Proud bereme kladný, $I > 0$, když teče v tomto směru. Indukované napětí bereme jako kladné, $U_{\text{ind}} > 0$, když má takovou polaritu, že zvětšuje proud I, tedy „postrkuje kladné náboje“ ve zvoleném směru. Pokud je „postrkuje“ proti zvolenému směru, je $U_{\text{ind}} < 0$.

[66] Ono je to docela rozumné, indukované napětí vzniká součtem „kousků napětí“ v jednotlivých závitech, v obvodu se opravdu projevuje jako zdroj zapojený v sérii.

[67] Jde o dva zdroje, baterii s napětím U_0 a cívku s napětím $U_{\text{ind.}}$ zapojené do série. Dohromady dají nulu, protože $U_0 > 0$ a $U_{\text{ind.}} < 0$, takže napětí působí proti sobě; můžeme říci, že se kompenzují.

Je tedy

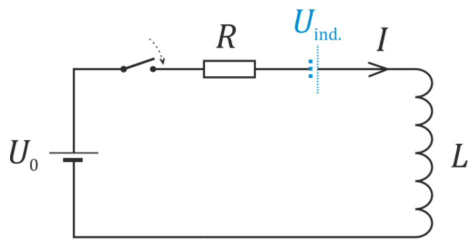
$$U_0 - L\frac{dI}{dt} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dI}{dt} = \frac{U_0}{L} = \text{konst.}, \tag{8.22}$$

proud narůstá lineárně s časem. Pokud jsme spínač sepnuli v čase $t = 0$, bude proud úměrný času, $I = \frac{U_0}{L}t$. S časem by proud rostl do nekonečna, což zřejmě není fyzikálně možné. Nefyzikální chování je zjevně dáno tím, že jsme zanedbali odpor cívky, vodičů i zdroje.[68]

? Na výpočet se započtením odporu se hned vrhneme – zkuste si ale nejdříve sami rozmyslet následující otázku: Jak se bude cívka chovat při *vypínání* proudu? Za chvíli se k tomu problému vrátíme.

Jak po zapnutí narůstá proud cívkou – realističtější výpočet

Vypočteme, jak bude na čase záviset proud cívkou o indukčnosti L a odporu vodiče R poté, co sepneme spínač a připojíme cívku ke zdroji.



Pro rozbor a výpočet je vhodné představit si odpor cívky jako samostatný rezistor zapojený do obvodu, viz schéma na obrázku.[69] [70]

Předpokládejme, že spínač byl sepnut v čase $t = 0$. Naším cílem je najít časovou závislost $I = I(t)$.[71]

Pro řešení použijeme Kirchhoffovy zákony[72]. Zatím jsme je ovšem užívali jen pro řešení obvodů stacionárního proudu. Naštěstí platí, že pokud napětí indukovaná na cívkách zahrneme mezi zdroje napětí,

Kirchhoffovy zákony platí i pro elektrické obvody, v nichž probíhají kvazistacionární děje.[73]

Takže je použijeme!

---

[68] Jak vidno, zanedbali jsme toho trochu moc. Na druhou stranu, ze zjednodušeného výpočtu vidíme, že i kdyby odpory byly opravdu velmi malé, proud po zapnutí začne narůstat jen pozvolna. (Jak moc pozvolna samozřejmě závisí na hodnotě indukčnosti, kdyby byla řádu mikrohenry, pak „pozvolnost“ by byla v řádu mikrosekund. Ale i tak by proud „nenaskočil“ okamžitě.)

[69] Do hodnoty R můžeme zahrnout i odpor přívodních vodičů a vnitřní odpor zdroje. Navíc naším výpočtem vyřešíme i případ, kdy by k cívce byl skutečně sériově připojen rezistor.

[70] Cívku ve schématu značíme její schematickou značkou. Navíc jsme do schématu zakreslili (čárkovaně) i zdroj indukovaného napětí. Ten se ve schématech běžně nekreslí, my ho zde máme pro připomínku, jak je to s polaritou indukovaného napětí.

[71] Poznámka k označení: V učebnicích se často časově proměnný proud označuje symbolem malé i, tedy $i(t)$. My jej budeme značit velkým písmenem – bude to přehlednější, až budeme v příštích kapitolách používat i komplexní symboliku a malým i značit imaginární jednotku.

[72] Konkrétně druhý Kirchhoffův zákon.

[73] Podrobněji zde toto tvrzení nebudeme zdůvodňovat. (Odkážeme například na přednášku *Klasická elektrodynamika*.) Připomeneme ovšem, že v 2. Kirchoffově zákonu musíme při průchodu smyčkou počítat se všemi napětími, včetně napětí na kondenzátorech. Obecně se při aplikaci Kirchoffových zákonů předpokládá, že „vše je soustředěno v součástkách propojených vodiči“. Tedy například, že kapacity jsou soustředěny v kondenzátorech (a neberou se v úvahu vzájemné kapacity vodičů, míněno „drátů“ spojujících součástky). Podobně indukčnosti jsou soustředěny v cívkách a neberou se v úvahu indukčnosti vodičů, které součástky spojují. V této souvislosti se používá název *„obvody se soustředěnými parametry*“. (Tohle je rozumné pro nižší frekvence, ovšem ve vysokofrekvenční elektronice, kde délky vodičů jsou srovnatelné s vlnovými délkami daných střídavých proudů už tento přístup použitelný není.)

Druhý Kirchhoffův zákon dá pro náš obvod (po dosazení (8.21))

$$R\,I = U_0 + U_{\text{ind.}} = U_0 - L\frac{dI}{dt} \;,$$

odtud po úpravě získáme diferenciální rovnici pro proud:

$$L\frac{dI}{dt} + R\,I = U_0 \,. \tag{8.23}$$

Počáteční podmínka je

$$I(0) = 0 \;. \tag{8.24}$$

Rovnice (8.23) je lineární diferenciální rovnice s pravou stranou; její obecné řešení je tedy součtem řešení homogenní rovnice[74] a partikulárního řešení. Homogenní rovnici $L\frac{dI}{dt} + R\,I = 0$, tedy rovnici

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I \;, \tag{8.25}$$

vyřešíme například separací proměnných[75]; řešení je

$$I(t) = \tilde{I}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} \;, \tag{8.26}$$

kde $\tilde{I}_0$ je libovolná (zatím neznámá) konstanta. Nejjednodušší partikulární řešení rovnice (8.23) je konstantní funkce

$$I_p = \frac{U_0}{R} \;. \tag{8.27}$$

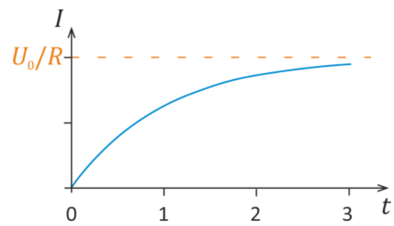
Obecné řešení rovnice (8.23) je tedy

$$I(t) = \tilde{I}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} + \frac{U_0}{R} \;. \tag{8.28}$$

Počáteční podmínka (8.24) dá po dosazení do (8.28): $0 = I(0) = \tilde{I}_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}\cdot 0} + U_0/R = \tilde{I}_0 + U_0/R$, čili $\tilde{I}_0 = -U_0/R$. Z (8.28) pak dostáváme výslednou časovou závislost proudu:

$$I(t) = \frac{U_0}{R}\cdot\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\right) . \tag{8.29}$$

Na začátku proud roste stejně rychle, jako tomu bylo v případě nulového odporu.[76] Pak se však nárůst zmírňuje a pro velké časy se proud limitně přibližuje konstantní hodnotě U_0/R. Graf vpravo ukazuje časovou závislost. Čas je na něm vynesen v jednotkách $\tau = L/R$, tuto dobu nazýváme ***časová konstanta.***[77]



Nárůst proudu v cívce po zapnutí zdroje je příkladem dějů, kterým se obecně říká **přechodové děje** nebo **přechodové jevy.**

[74] Tedy rovnice s nulovou pravou stranou.

[75] Integrujeme $\frac{dI}{I} = -\frac{R}{L}\,dt$, čímž dostáváme $\ln I = \int \frac{dI}{I} = -\int \frac{R}{L}\,dt = -\frac{R}{L}\,t + \tilde{K}$. Výsledek stačí odlogaritmovat a označit $\mathrm{e}^{\tilde{K}} = \tilde{I}_0$.

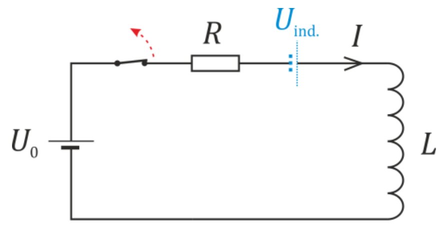
[76] Přesvědčte se, že (8.29) dá pro malé časy rychlost nárůstu stejnou jako (8.22). (Nápověda: Užijte rozvoj exponenciály.)

[77] Rozmyslete si, že když se čas zvýší o τ, rozdíl proudu oproti „finální“ hodnotě U_0/R se sníží e-krát. A přesvědčte se, že τ má opravdu rozměr času.

Vypnutí proudu v obvodu s cívkou

Co když obvodem s cívkou už tekl proud a nyní spínač rozepneme?

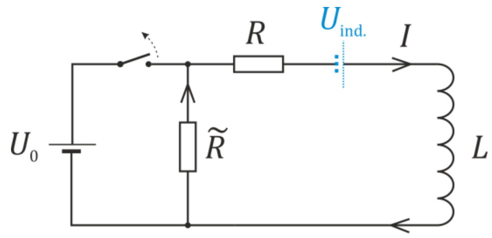
Kdyby byl v obvodu jen rezistor, proud by prakticky okamžitě klesnul na nulu. Jenže u cívky velmi rychlý pokles proudu znamená velmi rychlou změnu magnetického toku a tedy velmi vysoké indukované napětí.[78]



Jednoduše a názorně řečeno: elektromagnetická indukce působí proti změně, takže se cívka „snaží udržet" stejný proud, jaký jí tekl před rozepnutím spínače. A v praxi se jí to, alespoň zpočátku, opravdu daří: Díky vysokému indukovanému napětí mezi kontakty spínače přeskočí jiskra; díky ní proud okamžitě nepoklesne na nulu.[79]

Cívka samozřejmě proud neudrží trvale. Pojďme spočítat, jak proud s časem klesá.

Časovou závislost proudu určíme v situaci podle schématu na obrázku.[80] Budeme přitom předpokládat, že $\tilde{R} \gg R$.[81]



Na začátku (v čase $t \le 0$) tekl cívkou proud $I_0 = U_0/R$ díky připojené baterii s napětím U_0. Po rozepnutí spínače už baterie obvod nijak neovlivňuje; proud teče tak, jak je na schématu vyznačeno, zdrojem napětí je už jen indukované napětí $U_{\text{ind.}}$.

Podle druhého Kirchhoffova zákona platí

$$\left(R+\tilde{R}\right)I = U_{\text{ind.}} = -L\frac{dI}{dt} ,$$

což dává rovnici pro proud

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R+\tilde{R}}{L}I \quad . \tag{8.30}$$

Její řešení[82] je

$$I(t) = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{R+\tilde{R}}{L}t} = \frac{U_0}{R}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R+\tilde{R}}{L}t} \quad . \tag{8.31}$$

V řešení jsme už využili počáteční podmínku $I(0) = I_0 = U_0/R$.

---

[78] Na středoškolské úrovni (bez derivací) bychom mohli napsat $U_{\text{ind.}} = -\frac{\Delta\Psi}{\Delta t}$ a i bez formální znalosti limit je zřejmé, že pro Δt „skoro nulové" je $U_{\text{ind.}}$ „skoro nekonečné", tedy reálně velmi vysoké.

[79] Jiskry můžeme vidět například mezi kontakty přerušovače klasického elektrického zvonku nebo (sáhneme-li do sbírek školních pomůcek) Ruhmkorffova induktoru. O tom, že je na vývodech cívky při přerušení proudu vysoké napětí, se můžeme přesvědčit například pomocí připojené doutnavky (při rozpojení spínače blikne, což vyžaduje napětí minimálně asi 70 V), nebo tak, že budeme vývody cívky držet rukama – při rozpojení spínače dostaneme „ránu". (Pozor, parametry tohoto pokusu je nutno vyzkoušet, aby nešlo o příliš velký šok. A také pozor na to, aby tento pokus neprováděli kardiaci nebo lidé s kardiostimulátorem.)

[80] Počítat průběh proudu při skutečném jiskrovém výboji by bylo zjevně příliš komplikované, závislost mezi proudem a napětím je ve výboji složitá.

[81] $\tilde{R}$ by mohl být svodový odpor mezi vodiči při zapojování daného obvodu; pokud bychom chtěli výsledek našeho výpočtu ověřovat experimentálně, tak prostě dostatečně velký odpor $\tilde{R}$ do obvodu zapojíme.

[82] V řešení (třeba opět pomocí separace proměnných) už nebudeme podrobně komentovat jednotlivé kroky.

Vidíme, že proud s časem exponenciálně klesá; díky tomu, že $\tilde{R} \gg R$, je pokles mnohem rychlejší, než byl nárůst proudu při zapnutí.

Nás ovšem zajímá indukované napětí. To je $U_{\text{ind.}} = -L\dfrac{dI}{dt}$. Dosazení (8.31) dá

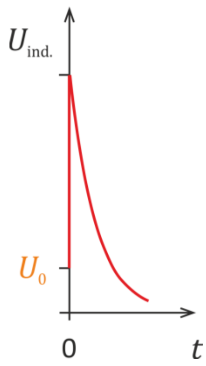
$$U_{\text{ind.}} = -L\frac{d}{dt}\left(\frac{U_0}{R}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R+\tilde{R}}{L}t}\right) = U_0\frac{R+\tilde{R}}{R}\cdot \mathrm{e}^{-\frac{R+\tilde{R}}{L}t} \quad . \qquad (8.32)$$

Těsně po rozepnutí spínače[83] je indukované napětí

$$U_{\text{ind. těsně po rozepnutí}} \doteq U_0\frac{R+\tilde{R}}{R} = \left(1+\frac{\tilde{R}}{R}\right)\cdot U_0 \gg U_0 \ , \qquad (8.33)$$

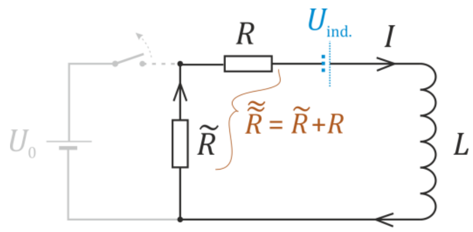
tedy mnohem vyšší, než napětí původně připojené baterie. V této souvislosti se používá termín *špička indukovaného napětí.*

Napětí tedy prakticky okamžitě vyskočí na vysokou hodnotu. Pak samozřejmě rychle klesá; typický průběh ukazuje graf vpravo.



[83] Pro $0 < t \ll L/(R+\tilde{R})$ je $\mathrm{e}^{-\frac{R+\tilde{R}}{L}t} \doteq 1$.

8.6 Energie cívky s proudem



Podívejme se ještě jednou na to, co se děje v obvodu s cívkou po odpojení baterie. Pokles proudu s časem je dán vztahem (8.31). Pro jednoduchost označíme celkový odpor sériově spojených rezistorů $\tilde{R}$ a R jako $\tilde{\tilde{R}}$.[84] Časová závislost proudu je tedy

$$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\tilde{\tilde{R}}}{L}t} . \tag{8.34}$$

Proud tekoucí rezistory je ovšem zahřívá; výkon v čase t je přitom

$$P = \tilde{\tilde{R}} \cdot I^2 = \tilde{\tilde{R}} \cdot I_0^{\,2} \cdot \mathrm{e}^{-2\frac{\tilde{\tilde{R}}}{L}t} . \tag{8.35}$$

Celkovou energii W, která se spotřebuje na zahřátí rezistorů, získáme integrací výkonu:

$$W = \int_0^\infty P\,dt = \tilde{\tilde{R}} \cdot I_0^{\,2} \int_0^\infty \mathrm{e}^{-2\frac{\tilde{\tilde{R}}}{L}t}\,dt = \tilde{\tilde{R}} \cdot I_0^{\,2} \left[-\frac{L}{2\tilde{\tilde{R}}}\,\mathrm{e}^{-2\frac{\tilde{\tilde{R}}}{L}t} \right]_0^\infty = \frac{1}{2} L I_0^{\,2} . \tag{8.36}$$

Odkud se tato energie vzala? Musela být v cívce! Vidíme tedy, že energie cívky s indukčností L, kterou protéká proud I je

$$\boxed{W = \frac{1}{2} L I^2} \tag{8.37}$$

Stojí za povšimnutí, že tento vzorec se podobá vztahu pro energii nabitého kondenzátoru.[85]

Hustota energie magnetického pole

Hustotu energie magnetického pole už známe z kapitoly 5; tam jsme ji ovšem jen napsali v analogii s elektrostatickým pole. Protože jde o další „šílenou myšlenku“[86], stojí za to si tuto hustotu energie odvodit v konkrétním případě.

Využijeme pro to situaci, kterou umíme jednoduše popsat: dlouhý solenoid. Jeho indukčnost známe z předchozí kapitoly, viz (7.59):

$$L = \mu \frac{S}{l} n^2 , \tag{8.38}$$

kde S je plocha průřezu solenoidu, l jeho délka, n počet závitů a $\mu = \mu_0 \mu_r$ permeabilita prostředí.[87] Dosazením do (8.37) získáme energii

[84] Je tedy $\tilde{\tilde{R}} = \tilde{R} + R$, viz obrázek.

[85] $W = \frac{1}{2} C U^2$

[86] Energie „nesedí v závitech cívky“, ale jde o energii samotného magnetického pole – no není to zvláštní, „šílené“, ale přitom fascinující? (Navíc, podobně jako u elektrického pole, se ukáže, že to idea velice přínosná.)

[87] Jde o magneticky měkký izotropní materiál jádra, na němž je navinut solenoid.

$$W = \frac{1}{2}\mu\frac{S}{l}n^2 I^2 \ . \tag{8.39}$$

Víme ovšem[88], že intenzita magnetického pole uvnitř dlouhého solenoidu je $H = (n/l)I$. Odtud

$$I = \frac{l}{n}H \ , \tag{8.40}$$

takže z (8.39) dostaneme (s využitím toho, že v izotropním magneticky měkkém prostředí je $\vec{B} = \mu\vec{H}$)

$$W = \frac{1}{2}\mu\frac{S}{l}n^2\left(\frac{l}{n}H\right)^2 = \frac{1}{2}\mu H^2 \cdot S\,l = \frac{1}{2}H \cdot B \cdot S\,l = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\cdot V \ . \tag{8.41}$$

Zde $V = S\,l$ je objem vnitřku solenoidu. Vně solenoidu je magnetické pole nulové[89], takže vidíme[90], že **hustota energie magnetického pole** je

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \ .} \tag{8.42}$$

Dospěli jsme k přesně stejnému výrazu, jaký nám v kapitole 5 dala analogie s elektrostatikou.

[88] Z kapitoly 7.5. Připomeňte si, jak se daný výsledek dá okamžitě odvodit pomocí Ampérova zákona celkového proudu.

[89] Přesně to platí pro nekonečně dlouhý solenoid, takže pro dlouhý solenoid můžeme v limitě tuto úvahu použít.

[90] Stačí vydělit (8.41) objemem, $w = W/V$.

Shrnutí

Faradayův zákon elektromagnetické indukce:

$$\boxed{U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Psi}{dt}}$$

ψ je celkový magnetický tok (pro cívku o více závitech se sečtou toky Φ všemi závity)

Lenzovo pravidlo:

Indukovaný elektrický proud má takový směr, že působí proti změně, která ho vyvolala.

Zákon elektromagnetické indukce v diferenciálním tvaru:

$$\boxed{\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0}$$

jde o jednu z Maxwellových rovnic

Aplikace:

- Generátory (alternátory, dynama), napětí v rotujícím závitu: $U = -\dfrac{d\Phi}{dt} = BS\,\omega \sin(\omega t)$
- Elektrodynamické mikrofony
- Brzdění vířivými proudy
- Indukční vařiče
- Transformátory
- Zapalovací cívky

Kirchhoffovy zákony se v elektrických obvodech dají požívat i při kvazistacionárních dějích, tedy pro proudy, které se s časem nemění příliš rychle.

Napětí indukované v cívce:

$$U_{\text{ind.}} = -L\frac{dI}{dt}$$

Přechodové jevy v obvodu s cívkou:

Proud po zapnutí narůstá, exponenciálně se přibližuje konečné hodnotě. Časová konstanta $\tau = L/R$.

Po vypnutí proudu se v cívce indukuje napěťová špička. (Proud pokračuje stejným směrem, s časem exponenciálně klesá.)

Energie cívky s proudem:

$$W = \frac{1}{2} L I^2$$

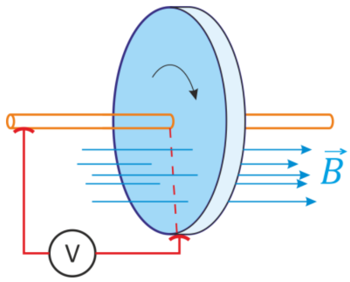
Hustota energie magnetického pole:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}}$$

Dodatek 8.A: Poznámka k zákonu elektromagnetické indukce
(pro zájemce)

Faradayův zákon elektromagnetické indukce dává napětí indukované ve vodivé smyčce v případě, kdy křivka ohraničující plochu S, přes kterou bereme indukční tok, $\Phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$, je totožná s vodičem – to znamená: když se pohne vodič, pohne se i křivka (a tedy se změní plocha S).

Zákon elektromagnetické indukce (8.6) však nejde jednoduše použít v případě zobrazeném na obrázku: Vodivý kotouč se otáčí v magnetickém poli, osa kotouče (také vodivá) a obvod kotouče jsou kluznými kontakty připojeny k dalším vodičům, které vedou do voltmetru. Když se kotouč otáčí, voltmetr naměří indukované napětí.



Část kotouče, která uzavírá smyčku, je na obrázku vyznačena čárkovaně.[91] Plocha ohraničená smyčkou se ovšem s časem nemění, takže se nemění ani magnetický tok Φ.[92] Je tedy $\frac{d\Phi}{dt} = 0$ – a přesto se napětí indukuje!

Je tomu tak právě proto, že zde *neplatí* „když se pohne vodič, pohne se i křivka“. Křivka zůstává stále stejná, ale vodič (část kotouče) se pohybuje. Proto je v dané části kotouče elektromotorická intenzita (8.2), která „postrkuje náboje“ – a po příslušném zintegrování dá indukované napětí.[93]

Uvedený příklad ukazuje na „jemnosti“ v aplikaci Faradayova zákona[94], v praxi se ale rotující kotouč k výrobě elektrické energie nepoužívá. Na podobném principu však funguje jeden typ *magnetohydrodynamických generátorů*, které byly seriózně zvažovány jako jedna z možností zdrojů elektrické energie. V nich se místo rotujícího kotouče pohybuje vodivá látka, většinou rychle proudící plazma.[95]

Vidíme tedy, že Faradayův zákon elektromagnetické indukce nemůžeme aplikovat bezmyšlenkovitě – ve speciálních situacích, jako je výše popsaná, jeho formální aplikace selhává.

Naštěstí podobné „podivnosti“ nastávají je výjimečně a ve většině prakticky důležitých případů zákon elektromagnetické indukce funguje bez problémů.

[91] Kdyby byl místo voltmetru v obvodu ampérmetr, smyčkou by protékal indukovaný proud; v kotouči by tekl právě po čárkovaně vyznačené „cestě“.

[92] Magnetická indukce se s časem nemění. (Může jít o pole permanentního magnetu.) Navíc v situaci podle obrázku by dokonce magnetická indukce $\vec{B}$ mohla být tečná k ploše ohraničené smyčkou, takže magnetický tok Φ by mohl být nulový.

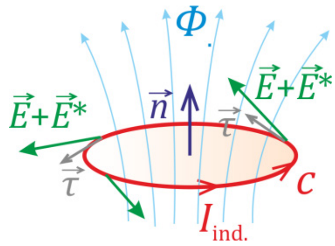
[93] Pro případ, že byste si chtěli napětí počítat: V tomto případě musíte elektromotorickou intenzitu E^* opravdu integrovat, protože je v různých vzdálenostech od osy kotouče různá. (Díky různé rychlosti bodů kotouče.)

[94] Proto na něj upozorňuje i R. Feynman ve své knize přednášek z fyziky.

[95] Do skutečné energetiky se však zatím tyto zdroje z řady zejména technických příčin neprosadily. Bližší informace viz internetové zdroje, hledejte výraz „MHD generátory“ (resp. „MHD generators“).

Dodatek 8.B: Poznámky k napětí indukovanému ve smyčce a ke znaménkové konvenci v zákonu elmag. indukce

(spíše pro zájemce)



Dodejme ještě několik poznámek k elektromagnetické indukci a k tomu, jak ve vodivé smyčce vzniká indukované napětí.

Podle Ohmova zákona v diferenciálním tvaru je

$$\vec{j} = \gamma\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right) \tag{8.B.1}$$

Proudová hustota ve vodiči má směr křivky, takže $\vec{j}\cdot\vec{\tau} = j$ je velikost proudové hustoty. Vynásobíme-li (8.B.1) tečným vektorem $\vec{\tau}$ a vydělíme $\gamma = 1/\rho_R$, dostaneme

$$j\,\rho_R = \left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau} \ . \tag{8.B.2}$$

Je-li S_v průřez vodiče a I indukovaný proud jím protékající, je $j = I/S_v$.[96] Z (8.B.2) dostáváme

$$I\frac{\rho_R}{S_v} = \left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau} \ ,$$

a po integraci podél celé křivky

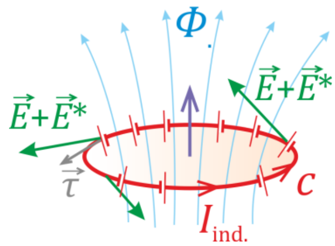
$$I\oint_c \frac{\rho_R}{S_v}dl = \int_c\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau}\,dl \ . \tag{8.B.3}$$

Integrál na levé straně je roven elektrickému odporu R smyčky[97], takže (8.B.3) dává

$$IR = \int_c\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau}\,dl \ . \tag{8.B.4}$$

Kdybychom do smyčky umístili ampérmetr, naměřil by proud I. Podle Ohmova zákona je $IR = U$, takže z (8.B.4) vidíme, že indukované napětí je

$$U_{ind.} = \int_c\left(\vec{E}+\vec{E}^*\right)\cdot\vec{\tau}\,dl \ .^{98} \tag{8.B.5}$$



Je vhodné uvědomit si, že indukované napětí $U_{ind.}$ není napětí nějakého jednoho konkrétního zdroje na určitém místě obvodu. Vzniká z přírůstků na všech částech smyčky, jakoby tam byla spousta malých zdrojů rozprostřených podél celé křivky; takovouto názornou představu ukazuje obrázek vpravo.[99]

---

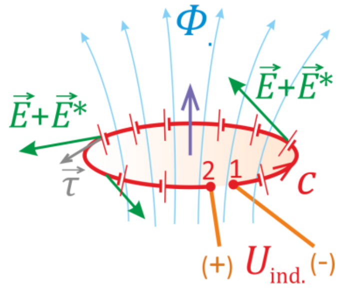
[96] Předpokládáme, že vodič je tenký a homogenní, takže proudová hustota v celém jeho průřezu je prakticky konstantní.

[97] Pro $\rho_R = \text{konst.}$ a $S_v = \text{konst.}$ je to vidět jednoduše: $\oint_c \frac{\rho_R}{S_v}dl = \frac{\rho_R}{S_v}\int_c dl = \rho_R\frac{l}{S_v} = R$. ($l$ je délka křivky.)
Integrál dá odpor vodiče i v případech, kdy by například průřez vodiče nebyl konstantní.

[98] Podrobnějším odvozením jsme zde dospěli k již výše uvedenému vztahu (8.9).

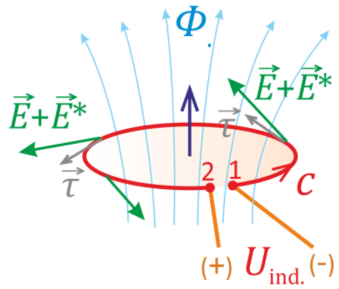
[99] Reálně v obvodu samozřejmě žádné galvanické články nejsou. „Malý zdroj" na kousku křivky o délce Δl by měl napětí $\Delta U = (\vec{E}+\vec{E}^*)\cdot\vec{\tau}\,\Delta l$ a integraci v (8.B.5) bychom mohli názorně popsat (matematici prominou) jako „sečtení napětí nekonečně mnoha zdrojů o nekonečně malém napětí".

Představa „mnoha malých zdrojů“ může pomoci k tomu, abychom jasně viděli, že při přerušení smyčky mezi jejími konci opravdu naměříme napětí $U_{\mathrm{ind.}}$, a jakou má toto napětí polaritu; viz obrázek vpravo.



Model mnoha malých zdrojů nám zde posloužil pro názornou představu. Ve výsledném obrázku (vpravo níže) už je kreslit nebudeme.[100]

Poznamenejme, že naše úvahy platí jak pro případ pevné smyčky, tak pro případ smyčky, která by se pohybovala.[101] V tom případě by byla nenulová i elektromotorická intenzita $\vec{E}^* = \vec{v} \times \vec{B}$. Pro pevnou (nepohyblivou) smyčku je $\vec{E}^* = 0$ a indukované napětí je dáno jen elektrickou intenzitou $\vec{E}$.[102]



Pro upřesnění našich úvah musíme dodat ještě jednu drobnost.

Podél křivky jsme integrovali $(\vec{E} + \vec{E}^*) \cdot \vec{\tau}$, tedy průmět intenzit $\vec{E} + \vec{E}^*$ do směru křivky. I na obrázcích je nakresleno, že $\vec{E} + \vec{E}^*$ může mít jiný směr, než $\vec{\tau}$. Na druhou stranu, Ohmův zákon (8.B.1) říká, že proudová hustota $\vec{j}$ je rovnoběžná s $\vec{E} + \vec{E}^*$. Ovšem proud teče vodičem ve směru $\vec{\tau}$. (Nemůže přece téci skrz jeho okraj ven.) Tak jak to tedy je? V našich úvahách jsme zjevně něco zapomněli.

To něco, co jsme dosud neuvažovali, jsou povrchové náboje na hranici vodiče. V našich obrázcích, kde $\vec{E} + \vec{E}^*$ má složku směrem od osy závitu, tedy směrem k vnějšímu okraji vodiče, toto pole „natlačí“ na vnější okraj vodiče kladný náboj, na vnitřním okraji budou záporné náboje[103]. Tyto povrchové náboje vytvoří ve vodiči další elektrické pole $\vec{E}_{\text{od povrchových nábojů}}$ kolmé na $\vec{\tau}$, které zkompenzuje složku $\vec{E} + \vec{E}^*$ směrem od osy závitu. Celková intenzita $\vec{E} + \vec{E}^* + \vec{E}_{\text{od povrchových nábojů}}$ má směr $\vec{\tau}$. Ohmův zákon tedy bude mít ve skutečnosti tvar $\vec{j} = \gamma\left(\vec{E} + \vec{E}^* + \vec{E}_{\text{od povrchových nábojů}}\right)$ a proud opravdu poteče ve směru $\vec{\tau}$.

Důležitost povrchových nábojů pro popis elektrického pole ve vodičích bývá zdůrazňována v některých moderních učebnicích fyziky; zde jsme se jí pouze dotkli tímto upřesněním.

[100] Ale kdybychom zaváhali, jak je tomu s polaritou indukovaného napětí, vždy si je tam pro názornost dokážeme představit.

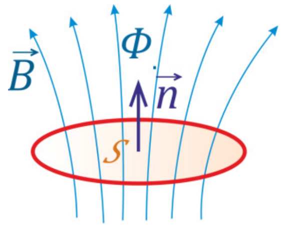
[101] A také pro případ smyčky, kterou bychom deformovali, takže by se pohybovala část jejího vodiče.

[102] Tedy samozřejmě integrálem z této intenzity.

[103] Ve skutečnosti samozřejmě natlačí elektrony na vnitřní okraj vodiče, na vnějším okraji vodiče bude kladný náboj díky nedostatku elektronů.

Dodatek 8.C: Derivace integrálu přes pevnou plochu podle času

aneb jak je to se změnou magnetického toku podle času, když je plocha pevná a mění se magnetické pole



Uvažujme ***pevnou*** (tj. v čase neproměnnou) plochu S a magnetické pole, které se může s časem měnit, tj.

$$\vec{B} = \vec{B}(\vec{r},t) \ .$$

Magnetický tok indukce plochou S je

$$\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \ .$$ [104]

Budeme chtít zjistit časovou derivaci toku, $\dfrac{d\Phi}{dt}$. Spočteme proto magnetický tok v časech t a $t+\Delta t$:

$$\Phi(t) = \int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} \qquad (8.C.1)$$

$$\Phi(t+\Delta t) = \int_S \vec{B}(\vec{r},t+\Delta t)\cdot d\vec{S} \qquad (8.C.2)$$

Odečtením (8.C.1) od (8.C.2) získáme

$$\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t) = \int_S \vec{B}(\vec{r},t+\Delta t)\cdot d\vec{S} - \int_S \vec{B}(\vec{r},t)\cdot d\vec{S} = \int_S \left(\vec{B}(\vec{r},t+\Delta t)-\vec{B}(\vec{r},t)\right)\cdot d\vec{S}$$

a po vydělení Δt :

$$\frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \int_S \frac{\vec{B}(\vec{r},t+\Delta t)-\vec{B}(\vec{r},t)}{\Delta t}\cdot d\vec{S} \qquad (8.C.3)$$

Když vezmeme limitu $\Delta t \to 0$, dostaneme z levé strany (8.C.3) časovou derivaci

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Phi(t+\Delta t)-\Phi(t)}{\Delta t} = \frac{d\Phi}{dt}$$

a v integrálu na pravé straně parciální derivaci $\vec{B}$ podle času:

$$\lim_{\Delta t\to 0} \frac{\vec{B}(\vec{r},t+\Delta t)-\vec{B}(\vec{r},t)}{\Delta t} = \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \ .$$

Z (8.C.3) tedy zřejmě po limitě vyjde

$$\frac{d\Phi}{dt} = \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \ . \qquad (8.C.4)$$

[104] Dosud jsme častěji psali $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot\vec{n}\, dS$, vyjádření $\Phi = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}$ znamená samozřejmě totéž.

Pro zpřesnění poznamenejme, že jsme v posledním kroku odvození (8.C.4) „skrytě" použili jednu z vět matematické analýzy, která se týká prohození integrálu a limity.[105] Příslušnou větu zde nebudeme precizovat a nebudeme ani ověřovat podmínky její platnosti[106], ty budou v reálných případech splněny.

Zde nám postačí názorná představa, že pro velmi malé Δt jsou zlomky v (8.C.3) „prakticky rovny" derivacím – z čehož vychází (8.C.4).

Tento výsledek můžeme zapsat i ve tvaru

$$\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} \;=\; \int_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}, \tag{8.C.5}$$

z něhož vidíme, že se vlastně jedná o přehození integrálu a derivace podle parametru.[107]

105 Jde o vztah typu $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\int_a^b f(x,\alpha)\,dx = \int_a^b \lim\limits_{\alpha\to\alpha_0} f(x,\alpha)\,dx$ navíc v případě plošného integrálu.
,

106 Pro ty, kdo chtějí mít přece jen nějakou informaci: V matematické analýze se naučíte, že jde o to, aby funkce měla tzv. integrovatelnou majorantu, tedy (pro jednorozměrný integrál zmíněný v předchozí poznámce) aby existovala funkce $g(x)$ taková, že pro všechna α je $|f(x,\alpha)| \le g(x)$ a existoval integrál $\int_a^b g(x)\,dx$.

Analogicky je tomu u plošných integrálů. U složek magnetické indukce toto bude reálně splněno.

107 Parametrem je tu čas *t*. Kdo znáte z matematické analýzy větu o přehození integrálu a derivace podle parametru, můžete ji samozřejmě použít rovnou, předchozí odvození k tomu nepotřebujete.