Přechodové jevy a oscilační obvod

S přechodovými jevy jsme se už setkali v obvodu s cívkou a rezistorem. Teď se podíváme, jak se při zapnutí a vypnutí zdroje chová obvod s rezistorem a kondenzátorem.[1]

Pak rezistor odložíme a připojíme k sobě cívku a kondenzátor. Výsledkem bude LC oscilační obvod, tedy zapojení velmi důležité například v radiových přijímačích. Reálně má ovšem každá cívka také odpor, takže se budeme věnovat i chování RLC obvodu[2]. Uvidíme, že je podobné, jaké jsme poznali v mechanice u tlumeného harmonického oscilátoru.

Tlumený oscilátor můžeme také budit vnějšími kmity, a tak bude zajímavé, jak RLC obvod na toto buzení reaguje. Podobně jako v mechanice se zde potkáme s rezonanční křivkou a navíc se dotkneme i pojmu činitel jakosti rezonančního obvodu.[3]

Jaké zajímavé otázky jsou s výše uvedenými tématy spojeny? Například:

- Nabije se kondenzátor po připojení ke zdroji okamžitě?
  Pokud ne, jak dlouho mu to trvá?
- Mohou nabité kondenzátory sloužit jako zdroje elektrické energie?
  Pokud ano, jak dlouho?
- Co vlastně kmitá v obvodu s cívkou a kondenzátorem?[4]
  Jsou tyto kmity harmonické?
  Jakou mají frekvenci?
- Jak se v radiovém přijímači ladí různé stanice?[5]
  A jak se dosáhne toho, že se při příjmu nemíchají dvě nebo více stanic dohromady?

Otázku „k čemu je to dobré“ už nemusíme dodávat, na některé aplikace jsme výše narazili. Takže začneme od toho nejjednoduššího, spojení rezistoru a kondenzátoru, jinými slovy, obvodu RC.[6]

[1] Prakticky už jsme se s ním setkali, když jsme v elektrostatice měřili náboj pomocí kondenzátoru: Napětí měřené na kondenzátoru pomocí multimetru se s časem zmenšovalo, protože kondenzátor se přes multimetr vybíjel. Nyní si spočteme, jak to s tím vybíjením je.

[2] V našem případě obvodu, kde budou kondenzátor, cívka a rezistor spojeny do série.

[3] Při tom všem si samozřejmě užijeme řešení diferenciálních rovnic – ale půjde o rovnice, které už jsme poznali v mechanice, takže to pro nás nebude nic dramaticky nového, ale spíše setkání se „starými známými“.

[4] V mechanice jsme poznali mechanické kmity. Ale cívka s kondenzátorem přece mohou ležet na stole a nijak se nepohupují. ☺ Tak jak poznáme, že tam něco kmitá?

[5] Samozřejmě, ladicím knoflíkem… ☺ A v dnešní době už samozřejmě digitálně. Nám ale půjde o „klasický“ příjem třeba vysílačů na středních vlnách, kde je nejjednodušeji vidět princip – a ještě dnes si každý zájemce může ty jednoduché principy ověřit tím, že si postaví krystalku.

[6] Termín „RC obvod“ se opravdu používá, ovšem pozor, abychom zde „RC“ nezaměnili s užívanou zkratkou „radio controlled“.

9.1 Nabíjení a vybíjení kondenzátoru

Z elektrostatiky víme, že napětí na kondenzátoru je svázáno s jeho nábojem Q [7] a kapacitou C vztahem

$$U_C = \frac{Q}{C} \,. \tag{9.1}$$

Víme také, že proud je tok náboje,

$$I = \frac{dQ}{dt} \,. \tag{9.2}$$

Integrací (9.2) dostáváme pro náboj na kondenzátoru, do kterého přitéká proud $I = I(t)$:

$$Q(t) = \int_0^t I(t')\,dt' + Q_0 \tag{9.3}$$

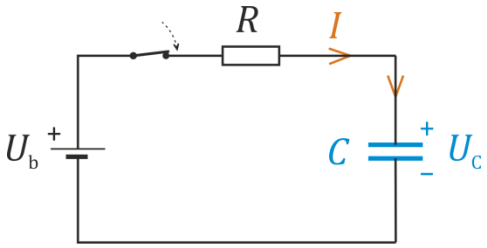
Zde Q je náboj v čase t, Q_0 je počáteční náboj v čase $t = 0$.[8] Dosazením do (9.1) dostáváme napětí na kondenzátoru v čase t:

$$U_C(t) = \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' + U_0 \quad [9] \tag{9.4}$$

Odtud vidíme, že při nabíjení konstantním proudem (I = konst.) by napětí stoupalo lineárně s časem. Jak to ale bude v případě, kdy budeme kondenzátor nabíjet ze zdroje konstantního napětí přes rezistor?

Nabíjení kondenzátoru přes odpor[10]

Kondenzátor budeme nabíjet ze zdroje o napětí U_b přes rezistor o odporu R. Spínač sepneme v čase $t = 0$; pro jednoduchost budeme předpokládat, že kondenzátor byl na začátku vybitý, tj. $U_0 = 0$.



Druhý Kirchoffův zákon dá

$$U_b - U_C(t) = R\,I(t) \,, \tag{9.5}$$

čili (po dosazení (9.4)),

$$U_b - \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' = R\,I(t) \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{R}\frac{d}{dt} \,. \tag{9.6}$$

Odtud dostaneme[11] rovnici pro I:

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}\,I(t) \tag{9.7}$$

Její řešení je jednoduché[12]:

---

[7] Q je náboj na jedné desce kondenzátoru, na druhé je samozřejmě náboj $-Q$. Pro stručnost však budeme dále mluvit o „kondenzátoru nabitém nábojem Q“ a nebudeme už připomínat, že na druhé desce je náboj opačný.

[8] Často píšeme stručněji $Q = \int_0^t I\,dt + Q_0$, je ovšem potřeba rozlišovat integrační proměnnou a meze integrálu.

[9] Zde $U_0 = Q_0/C$ je počáteční napětí na kondenzátoru (v čase $t = 0$).

[10] Pardon, správně by se mělo říci „přes rezistor o odporu R“. Ale snad zde malinko slangové vyjádření nikoho nezmate.

[11] Vydělením R a derivací podle času; také přehodíme pravou a levou stranu. Navíc využíváme toho, že $\frac{d}{dt}\int_0^t I(t')\,dt' = I(t)$.

[12] Například separací proměnných, $\ln I = \int \frac{dI}{I} = -\frac{1}{RC}\int dt = -\frac{t}{RC} + \text{konst.}$ a odlogaritmováním.

$$I = I_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \, . \tag{9.8}$$

Časová konstanta je

$$\tau = RC \, , \tag{9.9}$$

takže pokles nabíjecího proudu s časem můžeme zapsat jako $I = I_0 \, \mathrm{e}^{-t/\tau}$. Význam časové konstanty je jasný: když se čas zvýší o τ, proud klesne na jednu e-tinu původní hodnoty.[13]

Hodnotu I_0 určíme z počáteční podmínky v čase $t = 0$. (Z (9.8) totiž je $I(0) = I_0 \, \mathrm{e}^0 = I_0$.) Počáteční hodnotu proudu okamžitě vidíme z (9.6), dosazení $t = 0$ dává $U_b = R \, I(0)$. Celkově tedy

$$I_0 = \frac{U_b}{R} \, . \tag{9.10}$$

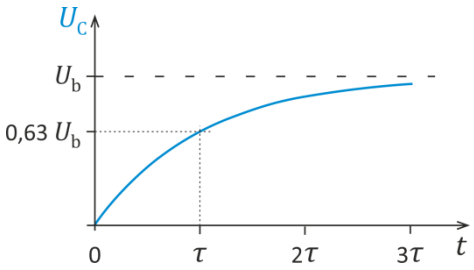
[14]

Napětí na kondenzátoru nejjednodušeji určíme jako rozdíl napětí zdroje U_b a úbytku napětí na rezistoru RI (viz též (9.5)). Po dosazení (9.8) – (9.10) a úpravě[15] dostáváme

$$U_C = U_b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}} \right) \, . \tag{9.11}$$

[16]

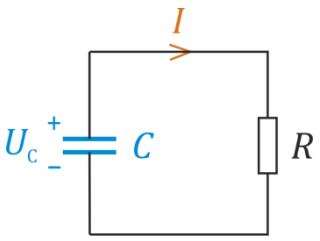
Proud tedy s časem klesá exponenciálně a napětí se exponenciálně přibližuje napětí zdroje.



? Můžeme tedy říci, že napětí vlastně nikdy nedosáhne napětí zdroje?[17]

Vybíjení kondenzátoru

Nechme nyní kondenzátor o kapacitě C nabitý na napětí U_0 vybíjet přes rezistor o odporu R. Vybíjení začne v čase $t = 0$. Jaký bude průběh napětí a proudu?[18]



Proud je dán Ohmovým zákonem, takže

$$U_C = R \cdot I \, . \tag{9.12}$$

[19]

[13] Tedy na $1/\mathrm{e} \equiv \mathrm{e}^{-1} \doteq 0{,}37$.

[14] Uvědomte si, že tohle lze vidět i triviální úvahou: Na začátku je kondenzátor nenabitý, takže celé napětí zdroje připadne na rezistor o odporu R. Počáteční proud tedy jednoduše plyne z Ohmova zákona.

[15] $U_C = U_b - RI = U_b - RI_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_b - R\frac{U_b}{R} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} = U_b \cdot \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \right)$

[16] Stejný výsledek bychom samozřejmě dostali integrací proudu a využitím (9.4).

[17] Teoreticky ano, ale například už pro $t = 10 \, \tau$ se U_C od napětí zdroje liší o méně než pět tisícin % a pro $t = 20 \, \tau$ jen asi o dvě miliardtiny – tak malý rozdíl nejen že nezměříme, ale dříve či později bude pod úrovní tepelného šumu. Takže můžeme směle říci, že kondenzátor se na napětí zdroje skutečně nabije.

[18] Tušíme už, že by zase mohlo jít o exponenciální pokles s časem? A co časová konstanta? (Že by opět $\tau = RC$?)

[19] Vidíme to rovnou ze schématu, ani nepotřebujeme povolávat ku pomoci druhý Kirchhoffův zákon.

Proud I ale nyní vybíjí kondenzátor, čili snižuje jeho náboj Q. Místo (9.3) proto nyní platí: $Q(t) = Q_0 - \int_0^t I(t')\,dt'$. Po vydělení C [20] dostaneme vztah pro napětí na kondenzátoru:

$$U_C(t) = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' \quad . \tag{9.13}$$

Kombinací (9.12) a (9.13) dostáváme

$$RI(t) = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{R}\frac{d}{dt} \tag{9.14}$$

a po derivaci a úpravě nakonec

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{1}{RC}\cdot I \ , \tag{9.15}$$

tedy rovnici totožnou s rovnicí (9.7), která platila pro nabíjení. Stejné je proto i řešení:

$$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \tag{9.16}$$

Přitom počáteční proud I_0 je

$$I_0 = \frac{U_0}{R} \ . \quad [21] \tag{9.17}$$

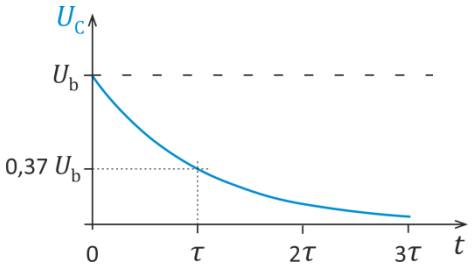
Napětí na kondenzátoru je $U_C = RI$, což po dosazení (9.16) a (9.17) dává

$$\boxed{U_C = U_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \ .} \tag{9.18}$$

Napětí i proud při vybíjení kondenzátoru klesají s časem exponenciálně, časová konstanta je opět

$$\tau = RC \ . \tag{9.19}$$

Za dobu τ napětí poklesne na 1/e původní hodnoty, jak to ukazuje graf.[22] Stejně rychle klesá i proud.



Příklad:

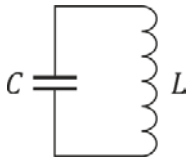
Když se kondenzátor o kapacitě 10 μF, který jsme užívali při měření nábojů, vybíjel do multimetru o vnitřním odporu 10 MΩ, byla časová konstanta $\tau = 10^{-5}$ F · 10^7 Ω = 100 s.
Z (9.18) můžeme vypočítat, že za 10 s (tj. 0,1 τ) klesla hodnota napětí asi na 90 % počáteční hodnoty.

[20] A využití $U_C = Q/C$. Pozn.: Zde i v některých dalších vztazích už nebudeme psát explicitní závislost veličin na čase. Zápis je pak stručnější; se závislostí na čase však samozřejmě musíme ve výpočtech počítat.

[21] Toto dostaneme jednoduchou úvahou: Na počátku je kondenzátor nabit na napětí U_0 a proud z něj teče do rezistoru o odporu R. Podle Ohmova zákona je tedy $I(0) = U_0/R$. Formálně totéž dostaneme z (9.14) pro $t = 0$.

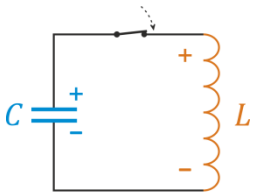
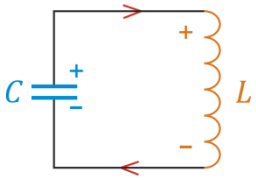
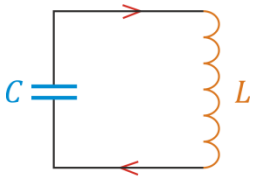
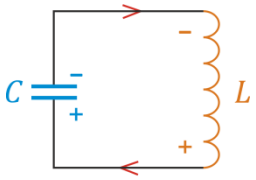
[22] Hodnota 0,37 uvedená v grafu, je samozřejmě přibližná. Za dobu 2 τ napětí klesne na $1/\mathrm{e}^2 \doteq 0{,}135$ původní hodnoty a tak dále.

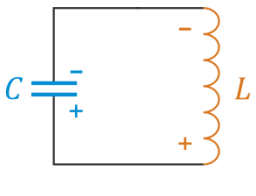
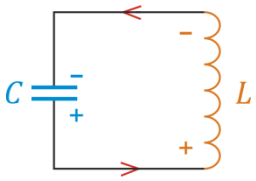
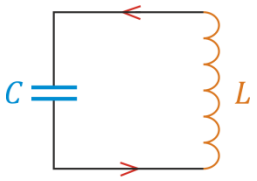
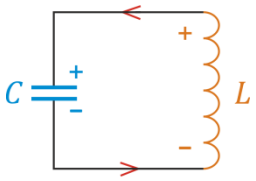
9.2 LC oscilační obvod: netlumené kmity



Kondenzátor a cívka tvoří dohromady obvod, v němž, jak uvidíme, mohou existovat netlumené kmity. Jednoduše řečeno, energie se „přelévá“ z kondenzátoru do cívky a naopak – podobně jako se v mechanickém oscilátoru (závaží na pružině) energie přelévala mezi potenciální energií pružiny a kinetickou energií závaží.

Pojďme se na to, co se při oscilaci děje v obvodu s kondenzátorem a cívkou, podívat nejprve kvalitativně. Rozfázováno to je v následující tabulce. Děj začíná ve stavu, kdy kondenzátor je maximálně nabit, proud je nulový[23] a sepnutím spínače umožníme, aby z kondenzátoru do cívky začal téct proud.

 $I = 0$	 $\lvert I\rvert$ roste	 $\lvert I\rvert$ maximální	 $\lvert I\rvert$ klesá
1) Kondenzátor je nabit. Těsně po sepnutí spínače proud neteče (cívka se brání nárůstu).	2) Proud teče ve směru hodinových ručiček a roste. Kondenzátor se vybíjí, napětí na něm klesá.	3) Kondenzátor je vybitý, napětí na něm i na cívce je nulové. Proud je maximální, udržuje ho cívka.[24]	4) Proud teče stejným směrem (díky cívce), ale jeho velikost klesá. Kondenzátor se nabíjí na opačnou polaritu.

 $I = 0$	 $\lvert I\rvert$ roste	 $\lvert I\rvert$ maximální	 $\lvert I\rvert$ klesá
5) Proud poklesl na nulu, kondenzátor je maximálně nabit (opačně než v 1)).	6) Proud teče proti směru hodinových ručiček (opačně, než v situaci 2), a roste. Kondenzátor se vybíjí, napětí na něm klesá.	7) Kondenzátor je vybitý, napětí na něm i na cívce je nulové. Proud je maximální, teče proti směru hodinových ručiček.	8) Proud teče stále proti směru hodinových ručiček, ale jeho velikost klesá. Kondenzátor se nabíjí na původní polaritu. (Nabíjí se tak dlouho, dokud není $I = 0$.)

Po skončení poslední části děje je proud nulový a kondenzátor je nabit na původní polaritu. Vše je tedy opět v situaci 1) a celý děj se začíná opakovat.[25]

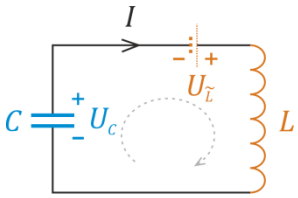
[23] Třeba proto, že předtím byl spínač vypnutý.

[24] Možná se může zdát divné, že proud je nenulový, když zde momentálně nemáme žádný zdroj napětí. Ale on v obvodu není žádný odpor.

[25] Spínač už samozřejmě necháváme zapnutý.

Kvalitativně tedy chování obvodu rozumíme. Ale přesvědčit se, že se dějí věci zrovna takto, a zjistit, jak dlouho trvá celý cyklus, k tomu už budeme potřebovat kvantitativní výpočet.

Na schématu vpravo jsou vyznačena napětí na kondenzátoru a cívce spolu s jejich polaritou odpovídající aplikaci druhého Kirchhoffova zákona.[26]



$U_C + U_{\tilde{L}} = 0$

Napětí na kondenzátoru je[27]

$$U_C(t) = U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' \quad . \qquad (9.20)$$

Napětí indukované na cívce je[28]:

$$U_{\tilde{L}} = -L\frac{dI}{dt} \quad . \qquad (9.21)$$

Druhý Kirchhoffův zákon dává

$$U_C + U_{\tilde{L}} = 0 \quad . \qquad (9.22)$$

Kombinací (9.20) – (9.22) dostáváme

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I(t')\,dt' - L\frac{dI}{dt} = 0 \qquad \Big/ \cdot\frac{1}{L}\frac{d}{dt} \qquad (9.23)$$

a po naznačené úpravě pak výslednou diferenciální rovnici pro závislost proudu na čase:

$$\boxed{\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{1}{LC}I = 0} \qquad (9.24)$$

Jde o rovnici typu $\ddot{x} + \omega^2 x = 0$, kterou známe z klasické mechaniky.[29] Známe tedy i řešení; jde o **netlumené oscilace**:

$$I(t) = I_0 \sin(\omega t) \quad , \qquad (9.25)$$

[30]

kde $\omega^2 = 1/(LC)$, takže

$$\boxed{\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad .} \qquad (9.26)$$

Tento vztah je znám jako **Thomsonův vzorec**.[31] Tímto názvem se označuje i vztah pro frekvenci $f = \omega/(2\pi)$:

$$f = \frac{1}{2\pi\sqrt{LC}} \quad . \qquad (9.27)$$

[26] Ve schématu je vyznačena polarita, pro niž bereme ve druhém Kirchhoffově zákoně na kondenzátoru $U_C > 0$ a na cívce $U_L > 0$. Když je například na cívce $U_L < 0$, je ovšem polarita „přikresleného“ zdroje opačná, viz Dodatek A.

[27] Viz (9.13). Jde o analogickou situaci – tam tekl z kondenzátoru proud do rezistoru, nyní teče do cívky. Směr „obíhání smyčky“ a orientace proudu a napětí jsou tytéž.

[28] Viz předchozí kapitolu o elektromagnetické indukci, vztah (8.21) Tam jsme indukované napětí značili $U_{ind.}$, nyní ho budeme značit $U_{\tilde{L}}$. Vyznačujeme tím explicite, že jde o napětí indukované na cívce. Vlnku nad písmenem L zde píšeme proto, že v následující kapitole budeme symbolem U_L (bez vlnky) značit toto napětí s opačným znaménkem. (Tam totiž půjde o úbytek napětí na cívce, bližší vysvětlení viz Dodatek 10.B.)

[29] Je to naše stará dobrá známá rovnice pro harmonický oscilátor.

[30] Samozřejmě, obecně $I(t) = I_0 \cdot \sin(\omega t + \varphi)$, kde φ je fázové posunutí. Amplitudu I_0 a fázové posunutí φ můžeme určit z počátečních podmínek. Výsledek (9.25) odpovídá případu, kdy v čase t = 0 byl proud nulový.

[31] Nebo *Thomsonův vztah*.

Napětí se samozřejmě mění také harmonicky s toutéž frekvencí. Napětí na cívce jednoduše určíme ze vztahu (9.21), kam dosadíme (9.25):

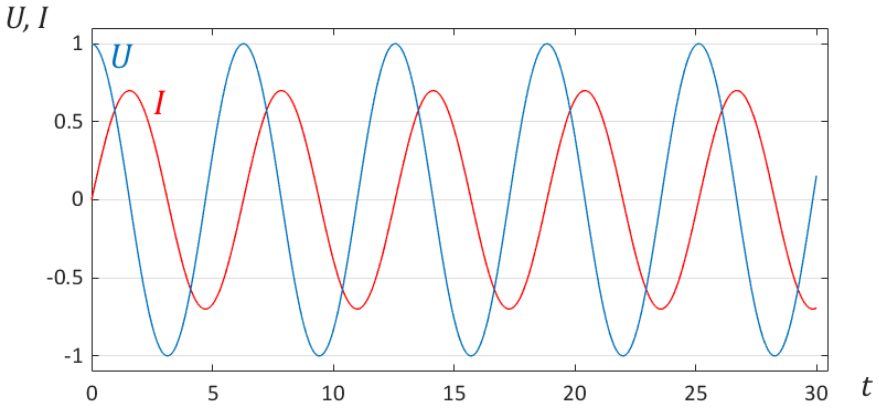
$$U_{\tilde{L}} = -L\frac{dI}{dt} = -L\,I_0\frac{d}{dt}\big(\sin(\omega t)\big) = \underbrace{-\,L\,\omega I_0}_{\text{označíme } U_0}\cdot\cos(\omega t) \tag{9.28}$$

Napětí na kondenzátoru je opačné, $U_C = -U_{\tilde{L}}$, takže

$$U_C = U_0\cos(\omega t)\,.$$ [32] (9.29)

Tento výsledek popisuje oscilace v LC obvodu, které začaly v čase $t = 0$. Kondenzátor byl na začátku nabit na napětí U_0 a proud byl v tomto okamžiku nulový.

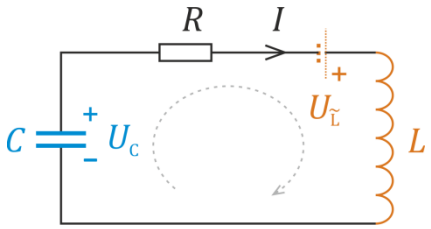
Příklad časové závislosti napětí a proudu ukazuje graf[33]:



[32] Tentýž výsledek dostaneme, když napětí spočteme ze vztahu (9.20); zkuste si to!

[33] Čas je v sekundách, úhlová frekvence oscilací je $\omega = 1\,\mathrm{s}^{-1}$. Hodnoty napětí a proudu jsou vyneseny v libovolných jednotkách. (To, že na grafu je amplituda proudu nižší než amplituda napětí, je jen pro přehlednost grafu. Samozřejmě, můžeme si spočítat, že kdyby na svislé ose grafu bylo napětí ve voltech a proud v ampérech, měla by cívka indukčnost asi 1,4 H, viz (9.28), ale o to nám zde nejde.)
Napětí vynesené v grafu je napětí na kondenzátoru (tedy $U \equiv U_C$); napětí na cívce (při používané znaménkové konvenci) je opačné.

9.3 Sériový RLC obvod: tlumené kmity



V reálném obvodu mají samozřejmě vodiče nenulový odpor[34]; odpor má i vodič, z něhož je navinuta cívka. Při průchodu proudu se tedy nutně část elektrické energie „ztrácí“[35], takže kmitání bude určitě tlumené.

Pojďme si rozebrat tento reálnější případ. Veškerý odpor vodičů si představíme soustředěný do jediného rezistoru s odporem R, viz obrázek. Všechny prvky obvodu – cívka, rezistor a kondenzátor – jsou zapojeny sériově, mluvíme proto o **sériovém RLC obvodu**.

Aplikovat druhý Kirchhoffův zákon je jednoduché: součet napětí na zdrojích[36] se rovná úbytku napětí na rezistoru:

$$U_C + U_{\tilde{L}} = R\,I \ . \tag{9.30}$$

Napětí na kondenzátoru a cívce už známe (viz (9.20) a (9.21)) a úpravy po dosazení do (9.30) jsou stejné, jako výše, takže dostaneme

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt - L\frac{dI}{dt} = R\,I \qquad \Big/ \cdot \frac{1}{L}\frac{d}{dt}\ , \tag{9.31}$$

$$\boxed{\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = 0\ .} \tag{9.32}$$

Označíme

$$\boxed{\frac{R}{L} = 2\delta\,, \quad \frac{1}{LC} = \omega_0{}^2\,,} \tag{9.33}$$

a rovnice (9.32) pro závislost proudu na čase dostane tvar, který už známe z klasické mechaniky:

$$\frac{d^2I}{dt^2} + 2\delta\frac{dI}{dt} + \omega_0{}^2 I = 0 \tag{9.34}$$

Známe tedy i řešení.[37] Nebudeme se zde věnovat aperiodickému a meznímu aperiodickému případu, ale jen ***periodickému případu***, kdy je tlumení dostatečně malé, $\delta < \omega_0$, a obvod opravdu kmitá. Řešení pak je

$$\boxed{I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right)\ ,} \tag{9.35}$$

kde I_0 je amplituda proudu, φ je fázové posunutí kmitů[38] a

$$\boxed{\omega = \sqrt{\omega_0{}^2 - \delta^2}} \tag{9.36}$$

je úhlová frekvence kmitů.

[34] Leda bychom je celé udělali ze supravodičů.

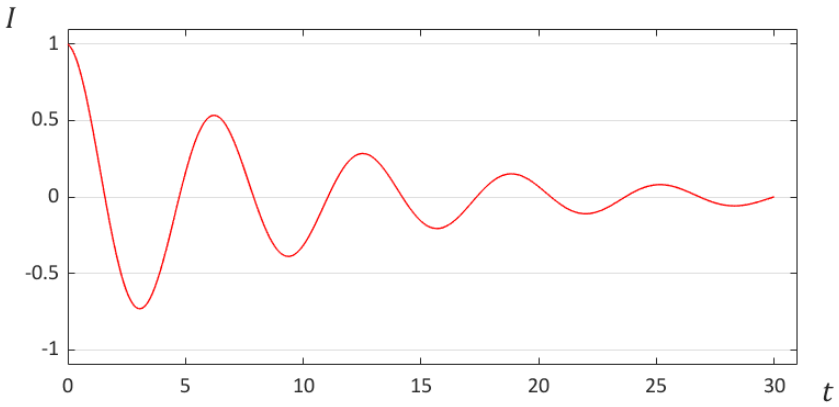
[35] Mění se na vnitřní energii, jednoduše byť trochu slangově řečeno „na teplo“. Prostě, vodiče se zahřívají.

[36] Jimiž jsou zde nabitý kondenzátor a cívka, v níž se indukuje napětí.

[37] Připomeňte si prosím, jak jsme ho v klasické mechanice odvozovali pomocí řešení typu $\mathrm{e}^{\alpha t}$, kdy z rovnic vycházelo, že α jsou komplexní. Stručně je toto řešení zopakováno v Dodatku B.

[38] Řešení, které by v čase t = 0 začínalo nulovým proudem, by mělo $\varphi = -\pi/2$.

Příklad časového průběhu proudu (pro ω_0 = 1 s^{-1}, δ = 0,1 s^{-1}) ukazuje následující graf.

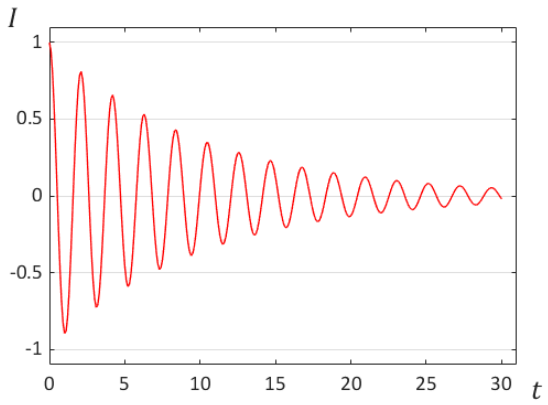


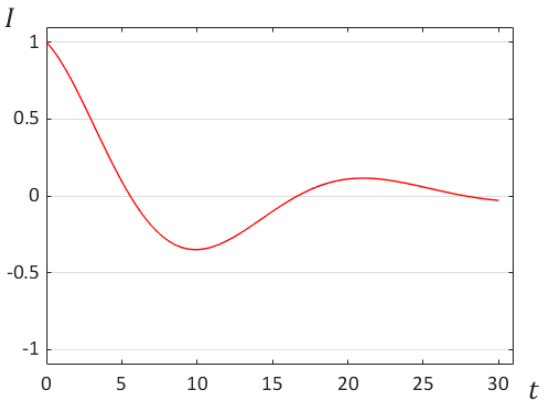
Tlumení $\delta = \frac{R}{2L}$ určuje, jak rychle klesá amplituda kmitů. Za dobu $\tau = \frac{1}{\delta} = 2\frac{L}{R}$ klesne amplituda na jednu e-tinu původní hodnoty. Tato dobu se nazývá ***relaxační doba***.

Než amplituda poklesne v určitém poměru[39], může tlumený oscilátor vykonat různý počet kmitů. Toto vystihuje veličina, které se říká **činitel jakosti**:

$$Q = \omega_0 \tau \tag{9.37}$$

V příkladu uvedeném výše (graf na začátku stránky) bylo Q = 10. Následující grafy ukazují kmity pro činitel jakosti 30 a 3:





Názorně bychom mohli říct, že „kvalitnější oscilátor stihne víckrát zakmitat, než se kmity utlumí“.[40] A právě tohle vyjadřuje činitel jakosti.

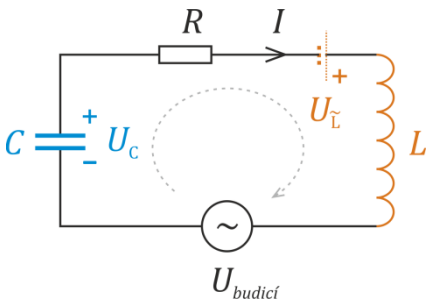
Činiteli jakosti se ještě krátce věnujeme v Dodatku C.

[39] Třeba dvakrát, e-krát nebo desetkrát.

[40] Přesněji musíme říci například „než se utlumí na desetinu (nebo e-tinu) původní hodnoty“, protože tlumené kmitání pokračuje (alespoň teoreticky) pro libovolně velké časy.

9.4 Buzené kmity RLC obvodu, rezonanční křivka

Co se stane, když budeme sériový RLC obvod budit střídavým napětím, jak to ukazuje obrázek?



Budicí napětí uvažujeme harmonické, tedy

$$U_{budicí}(t) = U_m \cdot \cos(\Omega t) \ . \qquad (9.38)$$

U_m je amplituda budicího napětí, Ω jeho frekvence.[41]

Druhý Kirchhoffův zákon dá[42]

$$U_C + U_{\tilde{L}} + U_{budicí} = R I \ . \qquad (9.39)$$

Napětí U_C a $U_{\tilde{L}}$ jsou dána stejnými vztahy (9.20) a (9.21) jako výše, takže dosazením do (9.39) dostáváme (srovnejte s (9.31))

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t I\,dt - L\frac{dI}{dt} + U_m \cdot \cos(\Omega t) = R I \qquad \Big/ \frac{1}{L}\frac{d}{dt} \qquad (9.40)$$

a odtud

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = \frac{1}{L}\frac{d}{dt}\left(U_m \cos(\Omega t)\right) = -\frac{U_m}{L}\cdot \Omega \sin(\Omega t) \ .$$

Užijeme-li zavedená označení δ a ω_0 (viz (9.33)), bude mít rovnice pro buzené kmity tvar

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + {\omega_0}^2 I = -\frac{U_m}{L}\cdot \Omega \sin(\Omega t). \qquad (9.41)$$

Jak přejít k řešení pomocí komplexních funkcí

Rovnici (9.41) bychom mohli řešit pomocí reálných funkcí, bylo by to ale trochu pracné.[43] Takže to zkusíme elegantněji, pomocí komplexních funkcí.[44] Nakonec ale z komplexního řešení budeme chtít získat řešení reálné, protože hodnoty proudu naměřené v obvodu jsou samozřejmě v každém okamžiku reálná čísla.

Leccos už umíme. To, že pomocí funkcí typu $e^{i\omega t}$ můžeme popsat kmitání, jsme přece užívali při popisu tlumených a buzených kmitů už v mechanice.[45]

---

[41] Znaménkovou konvenci budeme brát takovou, aby fungovala při využití druhého Kirchhoffova zákona. To znamená, že bude-li v daný okamžik $U_{budicí} > 0$, bude na obrázku nahoře na stránce „plus-pól" zdroje směrem ke kondenzátoru.

[42] Srovnejte (9.30).

[43] Můžete si to zkusit. Hledejte partikulární řešení ve tvaru $I(t) = A_1 \cos(\Omega t) + A_2 \sin(\Omega t)$ (případně $I(t) = A\cos(\Omega t + \varphi)$, je-li vám to milejší) a určete konstanty A_1, A_2 (případně A, φ) tak, aby byla splněna rovnice (9.41). Jde to, ale popíšete dost papíru.

[44] Půjde o funkce jedné reálné proměnné (v našem případě času), jejichž hodnotami jsou komplexní čísla, tedy oborem hodnot je množina komplexních čísel. Pozor, nezaměňujte je s *funkcemi komplexní proměnné*, byť i v jejich případě se někdy můžeme setkat se zkráceným názvem „komplexní funkce". (Momentálně třeba na české Wikipedii.) Funkcemi komplexní proměnné se zabývá *komplexní analýza*, což je krásný a rozsáhlý obor matematiky – ale zde ho nebudeme potřebovat.

[45] Viz kapitolu 8 prozatímního učebního textu *Mechanika* na https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/FyzikaI/.

Pojďme se ale pro jistotu podívat podrobněji, jak diferenciální rovnici (9.41) popisující buzené oscilace zobecnit na rovnici, která bude mít komplexní řešení. A také, jak potom z komplexních řešení získat reálné řešení původní rovnice. Zkrátka, jak to celé funguje.

Pro přehlednost bude výhodné odlišit reálné hodnoty napětí a proudů (ty značíme $U(t)$, $I(t)$) a hodnoty, které budeme používat při výpočtu pomocí komplexních funkcí – ty budeme značit $\widehat{U}(t)$ a $\widehat{I}(t)$.[46]

Převést do komplexních hodnot harmonickou závislost budicího napětí (9.38) je jednoduché:

$$\widehat{U}_{budicí}(t) = U_m \, \mathrm{e}^{i\,\Omega\, t} \tag{9.42}$$

Reálné hodnoty lze pak z komplexních získat snadno:[47]

$$U_{budicí}(t) = \mathrm{Re}\left(\widehat{U}_{budicí}(t) \right) = \ldots = U_m \cos(\Omega t)\,. \tag{9.43}$$

Pravou stranu rovnice (9.41) můžeme napsat jako $-\frac{U_m}{L}\cdot \Omega \sin\left(\Omega t\right) = \mathrm{Re}\left(i\frac{\Omega}{L} U_m \mathrm{e}^{i\,\Omega\, t} \right)$, [48] takže (9.41) je

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + {\omega_0}^2 I = \mathrm{Re}\left(i\frac{\Omega}{L} U_m \mathrm{e}^{i\,\Omega\, t} \right). \tag{9.44}$$

Tohle už se dá krásně zobecnit na komplexní funkce! Výsledkem je

$$\boxed{\frac{d^2 \widehat{I}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\widehat{I}}{dt} + {\omega_0}^2 \widehat{I} = i\frac{U_m}{L}\cdot \Omega\, \mathrm{e}^{i\,\Omega\, t}.} \tag{9.45}$$

Až tuto rovnici vyřešíme, k reálnému řešení se jednoduše vrátíme tak, že vezmeme reálnou hodnotu:

$$\boxed{I(t) = \mathrm{Re}\left(\widehat{I}(t) \right)} \tag{9.46}$$

Proč to funguje, je jasné: Když z rovnice (9.45) vezmeme reálnou část, dostaneme (9.44)[49], čili (9.41).

Řešení pomocí komplexních funkcí

Chceme-li vědět, jak daný RLC obvod pod vlivem buzení kmitá, bude nás zajímat partikulární řešení rovnice (9.45) ve tvaru

$$\widehat{I}(t) = \widehat{I}_{\max} \cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega t}\ . \quad [50] \tag{9.47}$$

---

[46] Značení je zvoleno ve shodě s učebnicí Sedlák, Štoll: *Elektřina a magnetismus*. Často se ovšem komplexní hodnoty napětí a proudů neoznačují zvláštními symboly, takže U a I se používají i pro komplexní hodnoty. Pokud budete používat různé prameny, seznamte se s tím, jaké konvence označení autoři používají.

[47] Vidíme to hned z vyjádření $\widehat{U}_{budicí}(t) = U_m \cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega\, t} = U_m \cdot \left(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t)\right)$.

[48] Je totiž $i\,\mathrm{e}^{i\,\Omega t} = i\left(\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)\right) = -\sin(\Omega t) + i\cos(\Omega t)$

[49] Důležité je, že na levé straně (9.45) jsou *reálné* koeficienty. Proto $\mathrm{Re}\left(\frac{d^2\widehat{I}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\widehat{I}}{dt} + {\omega_0}^2 \widehat{I} \right) =$

$$= \mathrm{Re}\left(\frac{d^2\widehat{I}}{dt^2} \right) + \mathrm{Re}\left(2\delta \frac{d\widehat{I}}{dt} \right) + \mathrm{Re}\left({\omega_0}^2 \widehat{I} \right) = \frac{d^2 \mathrm{Re}\,\widehat{I}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\,\mathrm{Re}\,\widehat{I}}{dt} + {\omega_0}^2 \mathrm{Re}\,\widehat{I} = \frac{d^2 I}{dt^2} + 2\delta \frac{dI}{dt} + {\omega_0}^2 I \cdot$$

[50] Obecné řešení rovnice (9.45) je dáno součtem partikulárního řešení a řešení rovnice s nulovou pravou stranou. Rovnici s nulovou pravou stranou jsme už řešili v předchozí části kapitoly a vyšlo nám, že jde o kmity, které se s časem utlumí k nule. Když tedy počkáme, zbyde v obvodu jen kmitání dané partikulárním řešením (9.47).

Dosazení (9.47) do (9.45) dá[51]

$$\left(-\Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega + {\omega_0}^2\right)\cdot \hat{I}_{\max}\cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} = \; i\frac{U_m}{L}\cdot\,\Omega\;\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t}\,.$$

Odtud pro amplitudu proudu $\hat{I}_{\max}$ plyne:

$$\hat{I}_{\max} \;= i\,\frac{U_m}{L}\,\frac{\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega} \tag{9.48}$$

Zpět k reálnému řešení

Amplituda (9.48) nám vyšla komplexní. Abychom pochopili, jak se projeví v reálném řešení, zapíšeme ji v goniometrickém tvaru

$$\hat{I}_{\max} \;= I_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{e}^{i\,\varphi}\;, \tag{9.49}$$

kde

$$I_{\mathrm{m}} \;= \left|\hat{I}_{\max}\right| \tag{9.50}$$

je absolutní hodnota komplexní amplitudy a φ její fáze. Dosazením (9.49) do (9.47) dostaneme

$$\hat{I}(t) \;= \hat{I}_{\max}\cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega t} \;= I_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{e}^{i\,\varphi}\cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega t} \;= I_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{e}^{i\,(\Omega t+\varphi)}\;. \tag{9.51}$$

Reálné řešení, tedy závislost skutečného proudu v obvodu na čase dostaneme tak, že vezmeme reálnou část komplexního řešení, viz (9.46):

$$I(t) \;= \mathrm{Re}\left(I_{\mathrm{m}}\cdot \mathrm{e}^{i\,(\Omega t+\varphi)}\right) \;= I_{\mathrm{m}}\cdot\cos\left(\Omega t+\varphi\right) \tag{9.52}$$

Vidíme, že $I_{\mathrm{m}} = \left|\hat{I}_{\max}\right|$ je amplituda kmitů proudu a φ jejich fázové posunutí[52]. Reálnou amplitudu kmitů tedy vypočteme tak, že vezmeme absolutní hodnotu z (9.48),

$$I_{\mathrm{m}} \;= \left|\, i\,\frac{U_m}{L}\,\frac{\Omega}{{\omega_0}^2 - \Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega}\,\right| \;= \frac{U_m}{L}\,\frac{\left|\,i\,\Omega\,\right|}{\left|{\omega_0}^2 - \Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega\right|} \;= \frac{U_m}{L}\,\frac{\Omega}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + \left(2\delta\,\Omega\right)^2}}\,,^{53} \tag{9.53}$$

čili (po drobné úpravě):

$$\boxed{I_{\mathrm{m}} \;= \frac{U_m}{L}\,\frac{\Omega}{\sqrt{\left({\omega_0}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\,\Omega^2}}} \tag{9.54}$$

O této závislosti zřejmě již (v analogii s mechanikou) tušíme, že popisuje rezonanční křivku; té se hned budeme věnovat.[54]

Uff!

Zdálo se vám to dlouhé? Bylo to tím, že jsme poměrně podrobně „rozpitvávali“, proč a jak komplexní řešení dá řešení reálné. Když už víme, že daný komplexní formalismus funguje, můžeme s ním výpočet provést od začátku, a pak je vše rychlejší. Ukážeme to v Dodatku D.

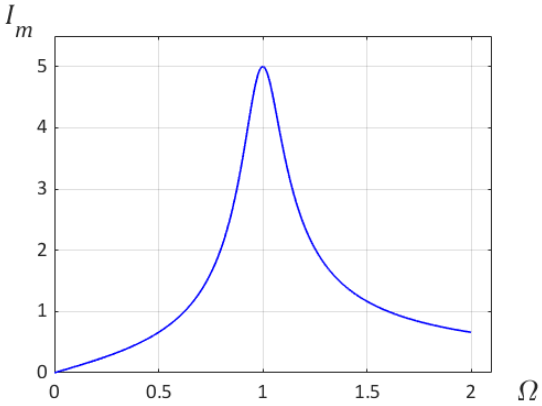
[51] Jak laskavý čtenář sám nahlédne… Ale ono zderivování (9.47) a dosazení je opravdu jednoduché.

[52] Vzhledem k budicímu napětí $U_{budicí}$; rozmyslete si, jak byste vysvětlili, že je to fázový posun vůči tomuto napětí.

[53] Bereme Ω > 0, záporné frekvence nás nezajímají.

[54] Poznamenejme, že z komplexní amplitudy (9.48) bychom mohli vypočítat také fázi φ. Zájemci to jistě zvládnou. Nápověda: Podívejte se, jak se to dělalo v případě buzených kmitů v mechanice.

Rezonanční křivka



Typickou závislost amplitudy proudu na budicí frekvenci danou (9.54) ukazuje graf na obrázku vpravo.[55]

Podobně jako u buzeného mechanického oscilátoru vidíme, že pro určitou hodnotu budicí frekvence je proud maximální – říkáme, že pro tuto frekvenci nastává **rezonance**. Danou frekvenci nazýváme **rezonanční frekvence**; celkově se pro závislost $I_m = I_m(\Omega)$ používá název **rezonanční křivka**.

? Jak najít rezonanční frekvenci?

Samozřejmě, maximum najdeme tak, že zderivujeme (9.54) podle Ω a hledáme, kdy je derivace rovna nule.[56] Zjistíme, že to nastává pro rezonanční frekvenci

$$\boxed{\Omega_r = \omega_0 \ .} \tag{9.55}$$

To znamená, že rezonanční frekvence je rovna frekvenci, s kterou by daný obvod kmital při nulovém tlumení.[57] Ta je dána Thomsonovým vztahem (9.26), je tedy

$$\Omega_r \ = \ \omega_0 \ = \ \frac{1}{\sqrt{LC}} \ . \tag{9.56}$$

? Jaký proud teče v obvodu při rezonanci?

Odpověď jednoduše dostaneme z (9.54), kam dosadíme $\Omega = \Omega_r = \omega_0$:[58]

$$I_{\mathrm{m}}(\Omega_r) = \frac{U_m}{L}\,\frac{\Omega_r}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega_r{}^2\right)^2 + 4\delta^2\,\Omega_r{}^2}} = \frac{U_m}{L}\,\frac{\omega_0}{\sqrt{4\delta^2\,\omega_0{}^2}} = \frac{U_m}{L}\,\frac{1}{2\delta} = \frac{U_m}{L}\,\frac{L}{R} = \frac{U_m}{R} \tag{9.57}$$

Výsledek je velice jednoduchý: V rezonanci teče obvodem takový proud, jako by v něm byl jen rezistor. Čili jako by zde vůbec nebyla cívka a kondenzátor! Tohle chování lépe pochopíme v příští kapitole – tam také uvidíme, jak rezonanční křivku spočíst bez řešení diferenciální rovnice.[59]

---

[55] Konkrétně byl sestrojen pro hodnoty $U_m = 1\mathrm{V},\ L = 1\mathrm{H},\ \omega_0 = 1\mathrm{s}^{-1},\ \delta = 0{,}1\mathrm{s}^{-1}$.

[56] Můžeme to udělat trochu chytře, abychom si ušetřili práci, a hledat derivaci druhé mocniny pravé strany (9.54), kde navíc pomineme konstantní faktor U_m/L, tj. derivovat $\Omega^2\Big/\left(\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\,\Omega^2\right)$. Navíc nás ve výsledné derivaci zajímá jenom čitatel, protože jmenovatel nulovost derivace neovlivní. Zjistíme, že v derivaci vyjde čitatel $2\Omega\cdot\left(\omega_0{}^2 + \Omega^2\right)\cdot\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)$. Derivace se tedy rovná nule pro rezonanční frekvenci Ω_r, pro niž platí $\omega_0{}^2 - \Omega_r{}^2 = 0$. Takže jedinou možností je $\Omega_r = \omega_0$. (Záporné hodnoty frekvence nás nezajímají.)

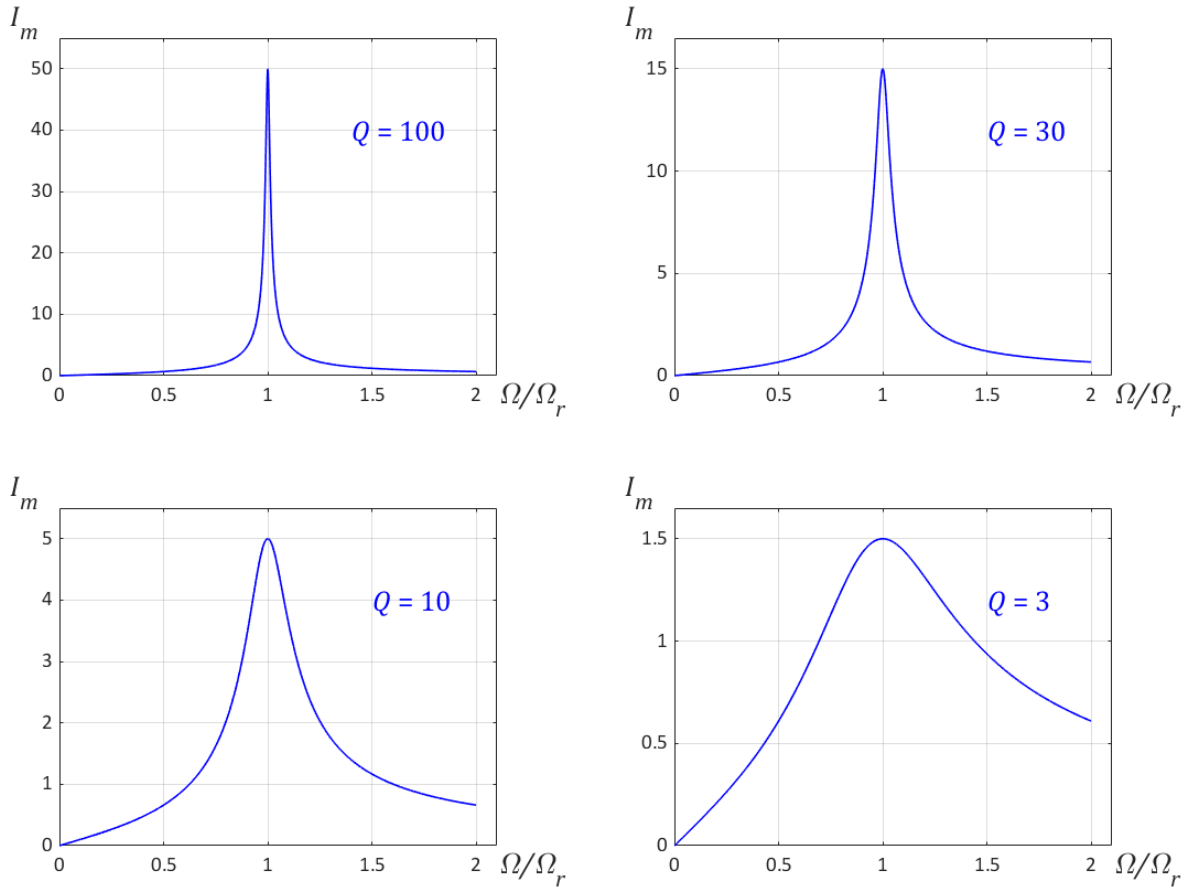
[57] To je trochu rozdíl oproti mechanickému oscilátoru, tam nám vyšla rezonanční frekvence díky tlumení o něco menší. Ono je to také dáno tím, kterou veličinu chceme v rezonanci maximalizovat. My jsme uvažovali proud tekoucí sériově zapojenými prvky R, L a C; proto se někdy mluví o **sériové rezonanci.** Kdybychom se ptali, pro kterou frekvenci je nejvyšší napětí na kondenzátoru, vyšla by nám frekvence $(\omega_0{}^2 - 2\delta^2)^{1/2}$, tedy stejná, jako v případě mechanického oscilátoru. Frekvence, při níž je maximální napětí na cívce, je naopak o něco vyšší než ω_0.

[58] A dosadíme také hodnotu tlumení $\delta = R/(2L)$, viz (9.33).

[59] Těšíte se?

? Může mít rezonanční křivka různou šířku? Na čem její šířka závisí?

Podobně jako u mechanického oscilátoru i v RLC obvodu šířku rezonanční křivky ovlivňuje tlumení δ. Často se jeho vliv vystihuje činitelem jakosti $Q = \omega_0 \tau = \omega_0 / \delta$. Následující grafy ukazují rezonanční křivky pro několik hodnot Q. Vidíme, že pro vyšší hodnoty Q je křivka vyšší a relativně užší.



V této souvislosti se používá termín ***položířka*** rezonanční křivky. Je to šířka křivky měřená v polovině její maximální výšky. Ze vzorce (9.54) pro rezonanční křivku lze vypočítat, že položířka je nepřímo úměrná činiteli jakosti Q. [60]

Šířka rezonanční křivky se prakticky projeví například při příjmu radiového signálu. Kdybyste si postavili krystalku[61], jejíž kmitavý obvod by měl malý činitel jakosti, mohly by se vám do sebe míchat signály vysílačů na různých frekvencích. Velký činitel jakosti zajistí, že rezonanční křivka je dostatečně úzká a signály jiných vysílačů neruší ten, který si vybereme.[62]

[60] Až na malou odchylku úměrnou δ^2, ta se výrazněji projeví jen pro malé hodnoty Q.

[61] To můžete udělat i v dnešní době, stále se dá použít k příjmu amplitudově modulovaného vysílání na středních vlnách; například na frekvenci 639 kHz vysílá v Liblicích s výkonem 750 kW program Českého rozhlasu 2. Krystalka je nejjednodušší zapojení radiového přijímače. Obsahuje jen cívku, ladicí kondenzátor, diodu (germaniovou nebo tzv. Schottkyho) a vysokoohmová sluchátka.

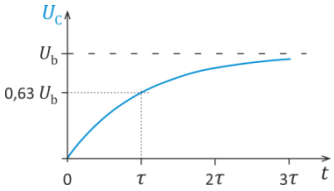
[62] Abychom si vybrali určitý vysílač, musíme náš rezonanční obvod na požadovanou frekvenci naladit. To se obvykle dělá otočným kondenzátorem. Otáčením jeho osy se jedny desky zasouvají mezi druhé a tím se mění kapacita – a podle Thomsonova vztahu i rezonanční kmitočet.

Shrnutí

Nabíjení kondenzátoru:

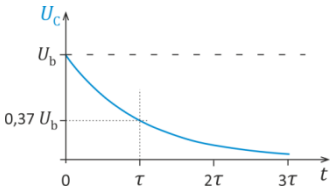
$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$, $I_0 = U_b / R$, $U_C = U_b \cdot \left(1 - e^{-\frac{t}{RC}}\right)$,

časová konstanta $\tau = RC$



Vybíjení kondenzátoru:

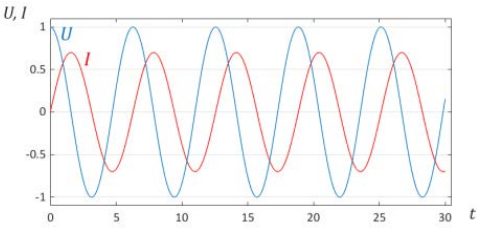
$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$, $I_0 = U_0 / R$, $U_C = U_0 \, \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}$



LC oscilační obvod:

$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{1}{LC} I = 0$ => netlumené harmonické kmity,

$I = I_0 \cdot \sin(\omega t)$, $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ (Thomsonův vztah)



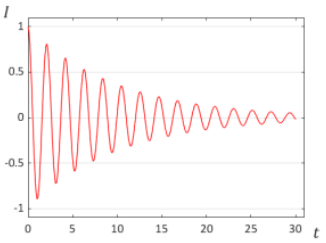
RLC oscilační obvod (sériový):

$\frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I = 0$ => tlumené harmonické kmity,

$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \cos(\omega t + \varphi)$, $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2}$,

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, $\delta = \frac{R}{2L}$, $\tau = 1/\delta$ (relaxační doba)

činitel jakosti $Q = \omega_0 \tau$

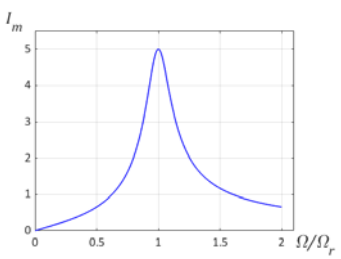


Buzené kmity, rezonanční křivka:

budicí napětí $U_{budicí}(t) = U_m \cos(\Omega t)$, v komplexním formalismu: $\hat{U}_{budicí}(t) = U_m \, \mathrm{e}^{i \Omega t}$

$\frac{d^2 \hat{I}}{dt^2} + 2\delta \frac{d\hat{I}}{dt} + \omega_0^2 \hat{I} = i \frac{U_m}{L} \cdot \Omega \, \mathrm{e}^{i \Omega t}$, $\hat{I}(t) = I_\mathrm{m} \, \mathrm{e}^{i(\Omega t + \varphi)}$, reálně $I(t) = I_\mathrm{m} \cos(\Omega t + \varphi)$

$I_\mathrm{m} = \frac{U_m}{L} \frac{\Omega}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2 \Omega^2}}$



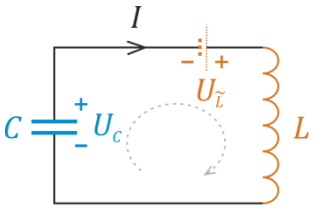
rezonanční frekvence $\Omega_r = \omega_0$

položířka rezonanční křivky je $\approx 1/Q$

Dodatek 9.A: Oscilace v LC obvodu – podrobnější kvalitativní pohled

Tabulka na následující stránce představuje poněkud podrobnější kvalitativní pohled na děj v oscilačním obvodu, než přehled uvedený v části 9.2.

Pro jednu periodu kmitů je v ní přehledně uvedeno, „co dělá“ kondenzátor a cívka, jak se na nich vyvíjí napětí a jak se mění proud obvodem.



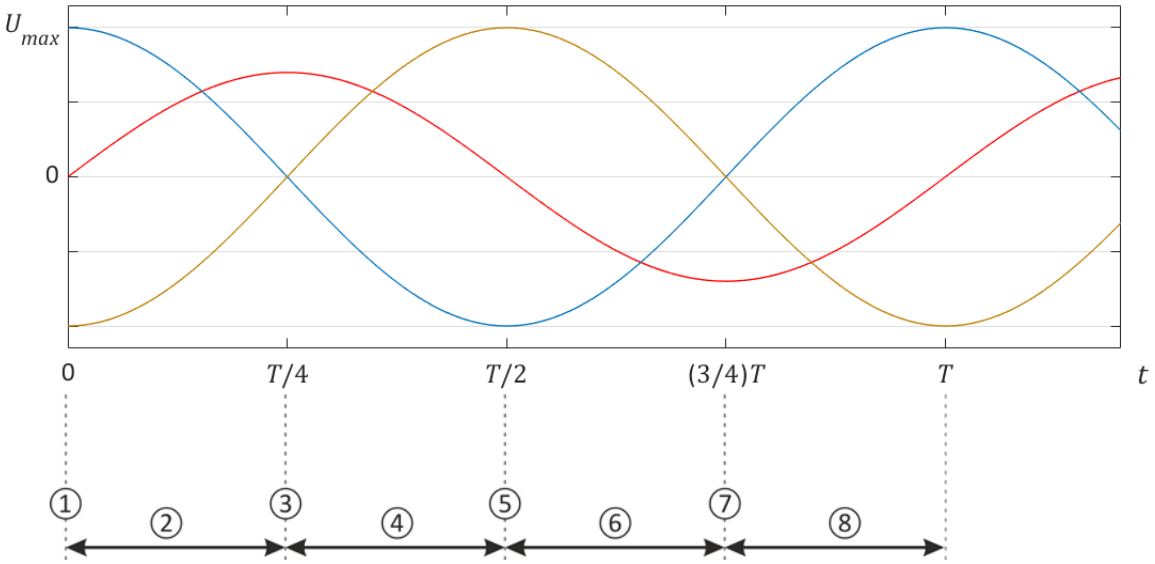
$U_C + U_{\tilde{L}} = 0$

Znaménkovou konvenci pro napětí na kondenzátoru a cívce, kterou zde používáme, ukazuje schéma vpravo. Znaménka plus a mínus odpovídají polaritě, kdy by bylo $U_C > 0$, resp. $U_{\tilde{L}} > 0$. [63] Proud I bereme jako kladný, když teče ve směru hodinových ručiček.

V tabulce na následující stránce už znaménka + a – odpovídají aktuální polaritě napětí a směr šipky aktuálnímu směru proudu.

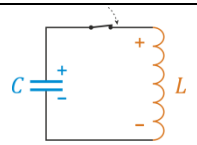
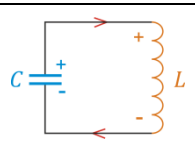
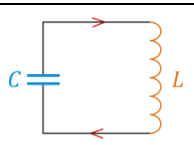
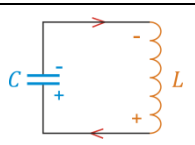
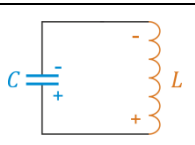
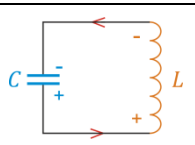
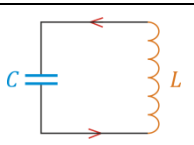
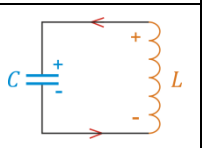
Porovnejte grafy průběhu napětí a proudu s popisem v tabulce na následující stránce. Situace v určitých časech, resp. časových intervalech jsou tam očíslovány; stejně jsou vyznačeny i časy a intervaly v grafu.

$U_C, U_{\tilde{L}}, I$



[63] Upozornění: Ve skutečnosti jedno nebo druhé napětí musí mít opačnou polaritu, protože dohromady dávají tato napětí nulu. Ve schématu jde jen o vyznačení polarity v souladu s konvencí, kterou používáme při aplikaci druhého Kirchhoffova zákona.

Netlumené oscilace v LC obvodu – podrobnější pohled

	1	2	3	4	5	6	7	8
								
čas	$t = 0$	$0 < t < T/4$	$t = T/4$	$T/4 < t < T/2$	$t = T/2$	$T/2 < t < 3/4\ T$	$t = 3/4\ T$	$3/4\ T < t < T$
kondenzátor	plně nabitý	vybíjí se	zcela vybitý	nabíjí se opačně	plně nabitý (opačná polarita)	vybíjí se	zcela vybitý	nabíjí se na původní polaritu
U_C	maximální, $U_C > 0$	klesá, ↘ $U_C > 0$	0	klesá (velikost roste), $U_C < 0$ ↘	minimální (velikost je max.), $U_C < 0$	roste (velikost klesá), $U_C < 0$ ↗	0	roste, ↗ $U_C > 0$
energie kondenzátoru	maximální	klesá	0	roste	maximální	klesá	0	roste
proud směr vůči hodinovým ručičkám	–	po směru	po směru	po směru	–	proti směru	proti směru	proti směru
I	0	roste, ↗ $I > 0$	maximální, $I > 0$	klesá, ↘ $I > 0$	0	klesá (velikost roste), $I < 0$ ↘	minimální (velikost je max.), $I < 0$	roste (velikost klesá), $I < 0$ ↗
cívka	brání změně proudu z 0 na kladný (tj. po směru hod. ručiček)	brání nárůstu proudu po směru hod. ručiček	neovlivňuje proud	snaží se udržet proud po směru hod. ručiček	brání změně proudu z 0 na záporný (tj. proti směru hod. ručiček)	brání nárůstu proudu proti směru hod. ručiček	neovlivňuje proud	snaží se udržet proud proti směru hod. ručiček
$U_{\tilde{L}}$	max. záporné $U_{\tilde{L}} < 0$	roste (velikost klesá), $U_{\tilde{L}} < 0$ ↗	0	roste, ↗ $U_{\tilde{L}} > 0$	maximální, $U_{\tilde{L}} > 0$	klesá, ↘ $U_{\tilde{L}} > 0$	0	klesá (velikost roste), $U_{\tilde{L}} < 0$ ↘
energie cívky	0	roste	maximální	klesá	0	roste	maximální	klesá

Po skončení poslední fáze kmitů, v čase $t = T$, je obvod v situaci 1 a vše se opakuje.

Dodatek 9.B: Řešení rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

Zde stručně připomeneme řešení rovnice pro tlumený harmonický oscilátor

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 2\delta\frac{dx}{dt} + \omega_0{}^2 x = 0 \ . \tag{9.B.1}$$

Řešení hledáme ve tvaru

$$x = e^{\alpha t} \ . \tag{9.B.2}$$

kde α je neznámá konstanta. Dosazení do (9.B.1) dá po zkrácení $e^{\alpha t}$ charakteristickou rovnici

$$\alpha^2 + 2\delta\alpha + \omega_0^2 = 0 \ . \tag{9.B.3}$$

Pro $\delta \geq \omega_0$ má kvadratická rovnice reálné kořeny[64]. Nás zde zajímá případ, kdy skutečně oscilátor kmitá. To nastává, když $\delta < \omega_0$. V tom případě má (9.B.3) dva komplexní kořeny,

$$\alpha_{1,2} = -\delta \pm \sqrt{\delta^2 - \omega_0^2} = -\delta \pm i\omega \ , \tag{9.B.4}$$

kde jsme označili

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \delta^2} \ . \tag{9.B.5}$$

Po dosazení do (9.B.2) dostáváme dvě nezávislá řešení diferenciální rovnice (9.B.1):

$$x_1(t) = e^{(-\delta+i\omega)t} \tag{9.B.6a}$$

$$x_2(t) = e^{(-\delta-i\omega)t} \tag{9.B.6b}$$

Rovnice (9.B.1) je lineární diferenciální rovnice s nulovou pravou stranou, takže jakákoli lineární kombinace řešení (9.B.6) je opět jejím řešením. Dokonce je jasné[65], že obecná lineární kombinace těchto řešení, tedy

$$x(t) = C_1 e^{(-\delta+i\omega)t} + C_2 e^{(-\delta-i\omega)t} = e^{-\delta t}\cdot\left(C_1 e^{i\omega t} + C_2 e^{-i\omega t}\right) \tag{9.B.7}$$

je **obecným řešením** rovnice (9.B.1).[66] Tato řešení jsou ovšem komplexní; C_1 a C_2 jsou libovolné komplexní konstanty. Reálná řešení z nich dostaneme, když rozepíšeme komplexní exponenciály jako[67]

$$e^{i\omega t} = \cos(\omega t) + i\sin(\omega t), \quad e^{-i\omega t} = \cos(\omega t) - i\sin(\omega t) \tag{9.B.8}$$

a vhodně zvolíme konstanty C_1 a C_2.[68] Dostaneme

$$x(t) = e^{-\delta t}\cdot\left(D_1\cos(\omega t) + D_2\sin(\omega t)\right) \ . \tag{9.B.9}$$

---

[64] Tento případ odpovídá aperiodickému resp. (pro $\delta = \omega_0$) meznímu aperiodickému případu. Tyto případy zde nebudeme uvažovat. (Pro mechanický tlumený harmonický oscilátor byly rozebrány v 8. kapitole prozatímního učebního textu *Mechanika* dostupného na webu na adrese https://kdf.mff.cuni.cz/vyuka/FyzikaI/.)

[65] Protože jde o rovnici druhého řádu, která tedy má právě dvě nezávislá řešení a libovolné řešení je vždy jejich lineární kombinací.

[66] A tato rovnice žádné jiné řešení nemá; jinými slovy, (9.B.7) vystihuje úplně všechna řešení (9.B.1).

[67] Využíváme vztah pro komplexní jedničku, $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

[68] Konkrétně $C_1 = D_1/2 - i\,D_2/2$, $C_2 = D_1/2 + i\,D_2/2$, kde konstanty D_1 a D_2 jsou reálné.

Když se ještě zavedou konstanty A a φ tak, že $D_1 = A\cos\varphi$ a $D_2 = -A\sin\varphi$,[69] přejde řešení na tvar

$$x(t) = A\, e^{-\delta t}\cos\left(\omega t + \varphi\right) . \tag{9.58}$$

Z tohoto tvaru je vidět, že jde o harmonické kmity s úhlovou frekvencí ω.[70] Amplituda kmitů s časem exponenciálně klesá.

[69] Platí $A = \sqrt{D_1^2 + D_2^2}$, $\mathrm{tg}\,\varphi = -D_2/D_1$.

[70] Tedy s frekvencí $f = \dfrac{\omega}{2\pi}$ a periodou $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$. Perioda je doba mezi „ob jeden za sebou jdoucími“ průchody nulou nebo mezi následujícími maximy (a také mezi za sebou následujícími minimy). Maximum ovšem nenastává přesně v polovině intervalu mezi za sebou následujícími průchody nulou.

Dodatek 9.C: Činitel jakosti oscilačního obvodu

Činitel jakosti Q je definován vztahem (9.37),

$$Q = \omega_0 \tau \ , \tag{9.C.1}$$

kde

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

je úhlová frekvence kmitů obvodu, v němž by tlumení bylo nulové (při $R = 0$), viz Thomsonův vztah (9.24) a

$$\tau = \frac{1}{\delta} = 2\frac{L}{R}$$

je relaxační doba.[71]

Proud v sériovém RLC oscilačním obvodu daný vztahem (9.35),

$$I = I_0 \cdot \mathrm{e}^{-\delta t} \cdot \cos\left(\omega t + \varphi\right) \ ,$$

má klesající amplitudu $I_0 \, \mathrm{e}^{-\delta t}$. Pro $t = \tau = 1/\delta$ klesne amplituda na $I_0 \, \mathrm{e}^{-\delta \tau} = I_0 \, \mathrm{e}^{-1}$.

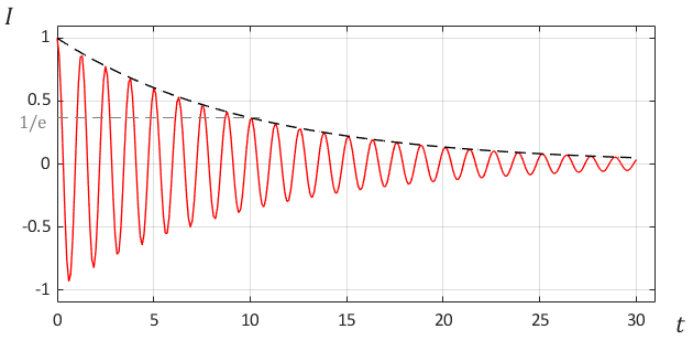
? Kolik kmitů vykoná oscilační obvod za tuto dobu?

Úhlová frekvence $\omega = \sqrt{\omega_0^{\,2} - \delta^2}$ se příliš neliší od frekvence ω_0.[72] Takže pro odhad počtu kmitů, které oscilační obvod vykoná, než amplituda klesne na 1/e, lze použít ω_0. Tomu odpovídá frekvence $f_0 = \omega_0/(2\pi)$, tedy perioda $T_0 = 2\pi/\omega_0$; téměř stejná je perioda tlumených kmitů T. Počet kmitů za dobu τ je tedy

$$n = \frac{\tau}{T} \doteq \frac{\tau}{\left(2\pi/\omega_0\right)} = \frac{1}{2\pi}\omega_0 \tau = \frac{Q}{2\pi} \ .^{73} \tag{9.C.2}$$

Vidíme, že činitel jakosti opravdu vystihuje počet kmitů, které oscilátor vykoná, než amplituda klesne na 1/e původní hodnoty.[74]

Pro ilustraci jsou na grafu zobrazeny kmity, pro něž δ = 0,1 s^{-1} (takže τ = 10 s) a Q = 50. Čárkovaná čára ukazuje pokles amplitudy, šedá vodorovná čárkovaná čára ukazuje pokles na 1/e původní hodnoty. Z (9.C.2) pro dané hodnoty vychází $n \doteq 7{,}96$, na grafu se můžeme přesvědčit, že do 10 s opravdu proběhne skoro osm kmitů.



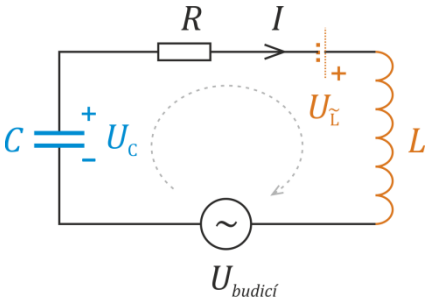
[71] Pro sériový RLC oscilační obvod je tedy $Q = 2\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{R}$.

[72] Samozřejmě, pokud se δ nepřiblíží ω_0. Například pro $\delta = 0{,}3\omega_0$ se ω od ω_0 liší o méně než 5 %, pro $\delta = 0{,}1\omega_0$ jen asi o půl procenta.

[73] Výsledek je reálné číslo, takže pro celočíselný počet kmitů bychom z něj museli vzít celou část; zde nám ale jde jen o odhad počtu kmitů.

[74] Rozmyslete si sami, že pro pokles amplitudy na 1/10 je počet kmitů asi 2,3-krát větší (přesný faktor je ln 10), pro pokles na 1/100 asi 4,6-krat vyšší. (Takže pro pokles na 1/100 vyjde $n \doteq 0{,}73\,Q$.)

Dodatek 9.D: Buzené kmity v RLC obvodu (komplexní formalismus)



Z části 9.4 víme, že komplexní formalismus pro výpočet buzených kmitů funguje (a proč). Pojďme tento formalismus užít pro výpočet kmitů od začátku.

Budicí napětí tedy budeme brát ve tvaru

$$\hat{U}_{budicí}(t) = U_m \cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} . \qquad (9.D.1)$$

Druhý Kirchhoffův zákon dá

$$\hat{U}_C + \hat{U}_{\tilde{L}} + \hat{U}_{budicí} = R\hat{I} .$$

Dosazením vztahů pro U_C a U_L a (9.D.1) dostaneme

$$U_0 - \frac{1}{C}\int_0^t \hat{I}\,dt - L\frac{d\hat{I}}{dt} + U_m \cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} = R\hat{I} \qquad \Big/ \cdot\frac{1}{L}\frac{d}{dt}$$

$$\frac{d^2\hat{I}}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{d\hat{I}}{dt} + \frac{1}{LC}\hat{I} = \frac{U_m}{L}\cdot i\,\Omega\,\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} .$$

Při užití zavedených označení δ a ω_0 má rovnice pro buzené kmity tvar

$$\frac{d^2\hat{I}}{dt^2} + 2\delta\frac{d\hat{I}}{dt} + \omega_0{}^2\hat{I} = i\frac{U_m}{L}\cdot\Omega\,\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} \qquad (9.D.2)$$

Její partikulární řešení hledáme ve tvaru

$$\hat{I}(t) = \hat{I}_{\max} \cdot \mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} . \qquad (9.D.3)$$

Dosazení do (9.D.2) dá

$$\left(-\Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega + \omega_0{}^2\right)\cdot\hat{I}_{\max}\,\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} = i\frac{U_m}{L}\cdot\Omega\,\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t}$$ [75]

Odtud pro amplitudu proudu plyne:

$$\hat{I}_{\max} = i\frac{U_m}{L}\frac{\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega} \qquad (9.D.4)$$

Reálná amplituda proudu je absolutní hodnotou komplexní amplitudy, $I_{\mathrm{m}} = \left|\hat{I}_{\max}\right|$:

$$I_{\mathrm{m}} = \left| i\frac{U_m}{L}\frac{\Omega}{\omega_0{}^2 - \Omega^2 + i\,2\delta\,\Omega}\right| = \frac{U_m}{L}\frac{\Omega}{\sqrt{\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2\right)^2 + 4\delta^2\,\Omega^2}} \qquad (9.D.5)$$

Reálný průběh proudu je dán reálnou částí (9.D.3), což dá[76]

$$I(t) = I_{\mathrm{m}} \cdot \cos\left(\Omega t + \varphi\right) . \qquad (9.D.6)$$

[75] Na přednáškách zde s oblibou říkám „a zařveme nadšením, protože $\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t}$ se zkrátí“. ☺ (Pokud vám tato poznámka přijde infantilní, směle ji ignorujte. ☺)

[76] Fázové posunutí φ je dáno fází $\hat{I}_{\max} = I_m\,\mathrm{e}^{i\varphi}$, protože (9.D.3) dá $\hat{I}(t) = \hat{I}_{\max}\,\mathrm{e}^{i\,\Omega\,t} = I_{\mathrm{m}}\,\mathrm{e}^{i\,(\Omega t+\varphi)}$; pro skutečný proud odtud vezmeme reálnou část. Fázi $\hat{I}_{\max}$ lze určit z (9.D.4).