Střídavé proudy I

V moderní civilizaci se se střídavým proudem setkáváme skoro pořád. V lustru můžete mít klasické žárovky, úsporky na bázi zářivek nebo LEDky, ale vždy jsou připojeny na síť 230 V. Když zapnete pračku, televizi nebo mixér, když dobíjíte mobily, tablety či notebooky, když spoléháte na to, že se v lednici a mrazničce potraviny neroztečou do nevábného čehosi, vždy je v pozadí spolehlivá rozvodná síť[1] a v ní střídavý proud. Stojí tedy za to, se střídavému proudu blíže věnovat.[2]

Nebudeme se věnovat přímo rozvodné síti[3], ale začneme od začátku – tím, jak se v obvodu střídavého proudu chovají rezistor, kondenzátor a cívka (a to nejen ty „ideální“). Nebudeme se přitom omezovat jen na střídavý proud s frekvencí 50 Hz, půjde nám o libovolné frekvence.[4] Pak se podíváme na chování kombinace rezistor a kondenzátor; nechte se překvapit, k čemu to bude dobré.

Budeme přitom hodně pracovat s popisem střídavého proudu pomocí komplexních funkcí typu $\mathrm{e}^{i\omega t}$ a s pojmy jako komplexní impedance. Nemusíte se toho ale bát. Právě naopak – uvidíme, jak lze takto velmi jednoduše odvodit a popsat chování sériového RLC obvodu zcela bez diferenciálních rovnic (!). A to už určitě stojí za to. Navíc si ukážeme, jak lze chování rezistorů, kondenzátorů a cívek a jejich kombinací názorně popsat i bez komplexních čísel pomocí tzv. fázorů.

Další věci týkající se střídavých proudů odsuneme do následující kapitoly. Konkrétně půjde o výkon střídavého proudu, třífázový proud a také o zařízení, bez něhož by se přenosová soustava střídavého proudu určitě neobešla, a sice o transformátory.

Otázek k oblasti střídavých proudů by mohla být řada, od nejjednodušších, až po zapeklitější. Uveďme dvě možné:

- Střídavý proud prý prochází kondenzátorem. Jak je to možné, když kondenzátor jsou dvě desky a mezi nimi nic?
- Když sériový RLC obvod připojíme ke zdroji střídavého napětí, můžeme na kondenzátoru naměřit třeba 50 V a na cívce také zhruba 50 V. Z toho člověk usoudí, že zdroj by měl mít minimálně sto voltů. Ale když se podíváme na zdroj, zjistíme, že dává třeba jen deset voltů![5] Jak je to možné? Copak se napětí nesčítají?

Na tyto, i řadu dalších otázek bychom v této kapitole měli najít odpověď.

[1] A i při krátkodobém výpadku nervózně čekáme, „kdy to zase zapnou“, nemluvě o hrozbě blackoutu, to je teprve noční můra.

[2] Nic proti proudu stejnosměrnému, ale konec konců, znáte o něm nějakou píseň? Zatímco „střídavý, střídavý, silný elektrický proud“ slyšel a možná umí i zanotovat snad každý Čech. ☺

[3] Pro počáteční seznámení s nimi lze doporučit třeba třetí kapitolu publikace Petera Žilavého *Střídavé proudy* dostupné na adrese https://kdf.mff.cuni.cz/projekty/oppa/stridave_proudy.pdf . (Tato publikace vůbec stojí za pozornost; o vlastnostech střídavého proudu tam toho najdete hodně, v podstatě na středoškolské úrovni a navíc s řadou pokusů.)

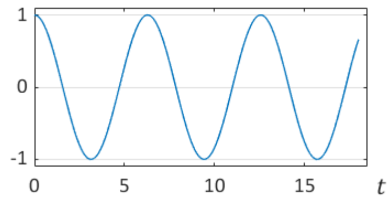
[4] I s těmi se samozřejmě v praxi setkáváme. Zesilovače pro poslech hudby musejí zpracovávat signály s frekvencemi minimálně v rozsahu 20 Hz až 20 kHz a radiové vysílače a přijímače třeba jen v rozsahu středních a krátkých vln pracují s frekvencemi do 30 MHz.

[5] Tohle není žádný trik, to při experimentu opravdu naměříme.

10.1 Co je střídavý proud a jak ho popisovat

Jako střídavý bychom obecně mohli označit každý proud, který během času mění polaritu, tedy směr toku. Tedy třeba proud s průběhem obdélníkovým, trojúhelníkovým, pilovým, průběhem, který bychom mohli označit za „zkreslenou sinusovku“ nebo takovým, který odpovídá signálu z mikrofonu, když do něj zazpíváte „á“.

Obvykle se však jako střídavé proudy označují proudy, jejichž závislost na čase je harmonická.[6] Právě takový je průběh napětí v rozvodné síti.[7] A takovýto průběh budeme dále v této kapitole uvažovat i my.



Pozorný čtenář si asi už všiml, že v grafech uvedených výše (a vpravo) chybí označení svislé osy.[8] Je to schválně – grafy totiž mohou vystihovat nejen průběh střídavého ***proudu***, ale také střídavého ***napětí***.

Obvod, kterým má protékat střídavý proud, totiž samozřejmě musí mít zdroj střídavého napětí. A právě popisem střídavého napětí začneme.

Jak jsme už zmínili, budeme pro popis střídavých napětí a proudů hodně využívat komplexní formalismus, resp. chcete-li, komplexní symboliku. Aby ale byla jasná souvislost s hodnotami, které skutečně v obvodu naměříme, budeme většinou vedle toho psát i vztahy pro reálné veličiny. Vzájemná souvislost je zřejmá z toho, že $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, takže například $\cos(\omega t) = \mathrm{Re}(e^{i\omega t})$.

Takže střídavé napětí můžeme popisovat[9]:

V reálné symbolice:	V komplexní symbolice:
$U(t) = U_m \cos(\omega t)$ ... U_m je amplituda	$\hat{U}(t) = U_m e^{i\omega t}$ (U_m je reálné)
Obecně s fázovým posunutím φ:	Obecně s fázovým posunutím φ:
$U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$	$\hat{U}(t) = \hat{U}_m e^{i\omega t}$, $\hat{U}_m = U_m e^{i\varphi}$
	=> $\hat{U}(t) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)}$

V komplexní amplitudě $\hat{U}_m$ je schováno i fázové posunutí φ.

Vzájemný vztah obou symbolik:

$$U(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{U}(t)\right)$$ [10]

Analogicky budeme popisovat i střídavý proud.

---

[6] Tedy, názorně řečeno, „sinusová“ (nebo „kosinusová“ nebo libovolně fázově posunutá).

[7] Alespoň v ideálním případě. V praxi však může být v zásuvce průběh napětí trochu zkreslený nebo rušený různými impulsy (například vinou připojených spotřebičů, různých spínaných zdrojů apod. – zeptejte se Petera Žilavého, ten vám bude povídat…).

[8] A může namítat, že je to formální prohřešek, v grafech přece musí být označeny obě osy! Pozorný čtenář má samozřejmě pravdu, ale zde je to schválně, viz další větu. ☺

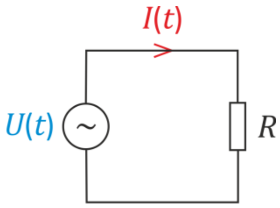
[9] Jde o napětí harmonického průběhu – toto už dále nebudeme zdůrazňovat; dokud explicite neřekneme něco jiného, bude průběh napětí harmonický. U_m je amplituda napětí.
Asi nemusíme připomínat, že ω je úhlová frekvence, $\omega = 2\pi f$, kde f je frekvence napětí.

[10] Je totiž $\mathrm{Re}\left(\hat{U}(t)\right) = \mathrm{Re}\left(U_m e^{i(\omega t+\varphi)}\right) = U_m \mathrm{Re}\left(e^{i(\omega t+\varphi)}\right) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

10.2 Rezistor, kondenzátor a cívka v obvodu střídavého proudu

Podívejme se, jak se chovají rezistor, kondenzátor a cívka, když je připojíme ke zdroji střídavého napětí. Půjde nám o to, jaký těmito součástkami poteče proud.

Rezistor



Když je rezistor připojen přímo ke zdroji, jak to ukazuje schéma, je na něm samozřejmě právě napětí zdroje, $U = U(t)$. Proud určíme jednoduše – je v každém okamžiku určen Ohmovým zákonem, $I = U/R$.[11]

Chování rezistoru připojeného ke zdroji střídavého napětí:

V reálné symbolice:

$U(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$ … U_m je amplituda napětí

$$I(t) = \frac{U(t)}{R} = \frac{U_m}{R} \cdot \cos(\omega t)$$

=> $$I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t)$$

$$I_m = \frac{U_m}{R}$$ … I_m je amplituda proudu

Napětí a proud jsou **ve fázi**.

V komplexní symbolice:

$\hat{U}(t) = \hat{U}_m \cdot e^{i\omega t}$, $\hat{U}_m = U_m$ je reálné

$$\hat{I}(t) = \frac{\hat{U}(t)}{R} = \frac{\hat{U}_m}{R} \cdot e^{i\omega t}$$

=> $$\hat{I}(t) = \hat{I}_m \cdot e^{i\omega t}$$ $\hat{I}_m$ je komplexní amplituda proudu

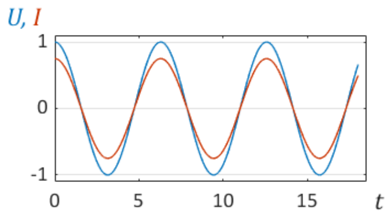
$$\hat{I}_m = \frac{\hat{U}_m}{R} \qquad (10.1)$$

Koeficient spojující $\hat{U}_m$ a $\hat{I}_m$ je reálné číslo
=> napětí a proud jsou ve fázi.[12]

Přechod od komplexního vyjádření k reálným hodnotám:

$$U(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{U}(t)\right),\quad I(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{I}(t)\right),\quad U_m = \left|\hat{U}_m\right|,\quad I_m = \left|\hat{I}_m\right|$$

Dobrá, napětí a proud jsou na rezistoru ve fázi, viz graf vpravo. Zatím se ale zdá, že si zbytečně komplikujeme život. V komplexním formalismu vypadá vše vlastně stejně jako v reálném. A že je proud ve fázi s napětím, je vidět okamžitě už z reálného vyjádření. Tak proč se trápit s nějakým komplexním formalismem? Hned uvidíme…



[11] U rezistoru není žádný důvod, proč by měl proud reagovat pomaleji na změnu napětí.

[12] Rozmyslete si, že tohle je z komplexního formalismu opravdu vidět. Jednoduché zdůvodnění: Když $\hat{U}_m$ je reálné, je také $\hat{I}_m$ reálné. Je tedy $\hat{U}(t) = U_m \cdot e^{i\omega t}$ a $\hat{I}(t) = I_m \cdot e^{i\omega t}$, takže mají stejnou fázi. (U_m a I_m jsou reálné.)

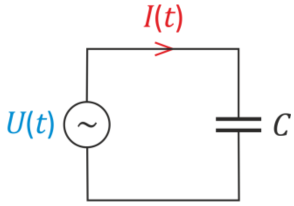
Možná ještě ilustrativnější je, vzít napětí, které má nějakou fázi, $U(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Pak $\hat{U}(t) = U_m e^{i(\omega t + \varphi)} = \hat{U}_m e^{i\omega t}$, takže $\underline{\hat{U}_m = U_m e^{i\varphi}}$. Z (10.1) je $\hat{I}_m = \hat{U}_m / R = (U_m/R) e^{i\varphi}$.

Označíme $U_m/R = I_m$ a dostáváme $\underline{\hat{I}_m = I_m e^{i\varphi}}$. Vidíme, že $\hat{U}_m$ a $\hat{I}_m$ mají stejnou fázi.

Ještě zřejmější to je, když vyjádříme $\hat{I}(t) = \hat{I}_m e^{i\omega t} = I_m e^{i(\omega t + \varphi)}$. Reálný proud je $I(t) = \mathrm{Re}(\hat{I}(t)) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$, takže je vidět, že má opravdu stejnou fázi, jako napětí.

Kondenzátor



Na kondenzátoru je napětí zdroje, $U = U(t)$, náboj na kondenzátoru je $Q(t) = C\,U(t)$.
Časová změna náboje je dána přitékajícím proudem I,[13] je tedy

$$I = \frac{dQ}{dt} = C\,\frac{dU}{dt}\,. \qquad (10.2)$$

Odtud už odvodíme, jak se chová proud, když napětí zdroje má harmonický průběh.

Chování kondenzátoru připojeného ke zdroji střídavého napětí:

V reálné symbolici:

$$U(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$$

$$I(t) = C\,\frac{dU}{dt} = -C\,\omega\,U_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$-\sin(\omega t) = \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})$$

=> $I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t + \tfrac{\pi}{2})$

Proud předbíhá napětí.[14]

$$I_m = \omega C\,U_m = \frac{U_m}{\frac{1}{\omega C}}$$

Zavedeme: $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ (10.3)

(kapacitance)

$$I_m = \frac{U_m}{X_C} \qquad (10.4)$$

(X_C hraje roli odporu)

V komplexní symbolici:

$\hat{U}(t) = \hat{U}_m \cdot e^{i\omega t}$, $\quad \hat{U}_m = U_m$ je reálné

$$\hat{I}(t) = C\,\frac{d\hat{U}}{dt} = \underbrace{C\,i\omega\,\hat{U}_m}_{\hat{I}_m} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} = \underbrace{i}_{=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}}\,\omega C\,\hat{U}(t)$$

=> $\hat{I}(t) = \hat{I}_m \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} = I_m \cdot \mathrm{e}^{i\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right)}$

Proud předbíhá napětí.

$$\hat{I}_m = i\omega C\,\hat{U}_m = \frac{\hat{U}_m}{\frac{1}{i\omega C}}$$

$\hat{I}_m$ dává informaci i o fázi proudu.[15]

Zavedeme: $\hat{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$ (10.5)

(impedance kondenzátoru)

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{U}_m}{\hat{Z}_C} \qquad (10.6)$$

i pro hodnoty v čase t platí $\hat{I}(t) = \dfrac{\hat{U}(t)}{\hat{Z}_C}$

Přechod od komplexního vyjádření k reálným hodnotám:

$$U(t) = \mathrm{Re}\big(\hat{U}(t)\big),\ I(t) = \mathrm{Re}\big(\hat{I}(t)\big),\quad U_m = \big|\hat{U}_m\big|,\ I_m = \big|\hat{I}_m\big|,\ X_C = \big|Z_C\big|$$

Vztahy (10.4) a (10.6) vypadají stejně, jako Ohmův zákon. Místo odporu v nich však vystupují jné veličiny. V rovnici (10.4) pro reálné hodnoty je to veličina X_C, které se říká **kapacitance** nebo též ***kapacitní reaktance***[16]. V rovnici (10.6) pro komplexní hodnoty se veličině $\hat{Z}_C$ říká **impedance**.

---

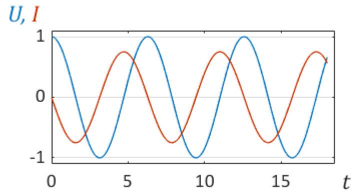
[13] Podobně tomu bylo při nabíjení kondenzátoru, které jsme probírali v předchozí kapitole, viz (9.2).

[14] Takhle se to běžně říká a píše v učebnicích. Jednoduše řečeno to znamená „nejdřív proud, potom napětí“. Konkrétně například: nejdřív nastane maximum proudu, až po něm maximum napětí. Nebo: když $t = 0$, je fáze napětí rovna nule ($\omega t = 0$), ale fáze proudu už je $\omega t + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}$, k této fázi dospěje napětí až za chvíli.

[15] Je $\hat{I}_m = i\omega C\,\hat{U}_m = \omega C\,\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}\,\hat{U}_m$.

[16] Některé prameny uvádějí, že toto je vhodnější termín, protože nepřipomíná anglický termín *capacitance*, který znamená kapacitu.

V našem případě jde o impedanci kondenzátoru – ale pojem impedance je obecnější, setkáme se s ním i u kombinací rezistorů, kondenzátorů a cívek. Značení bývá různé; my pro konzistenci s ostatními komplexními veličinami píšeme nad symbolem Z_C oblouček, často se však píše bez něj[17].



Proč proud předbíhá napětí, neboli, jinak řečeno, **napětí se zpožďuje za proudem**,[18] můžeme pochopit i kvalitativně: Do kondenzátoru musí nejprve téct proud, až díky přitékajícímu proudu na něm stoupá napětí. Že je fázové posunutí právě $\pi/2$, tedy 90° (čili **čtvrt periody**), plyne z kvantitativního odvození uvedeného výše. Na druhou stranu je posuv o čtvrt periody dobře vidět už z grafu.

Z (10.3) vidíme, že kapacitance kondenzátoru[19] *klesá* s rostoucí frekvencí. Podle (10.4) tedy proud s rostoucí frekvencí roste. Jednoduše můžeme říci, že

„kondenzátor propouští vyšší frekvence ochotněji".

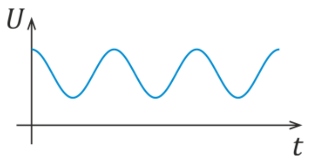
Navíc z daných vztahů vidíme, že

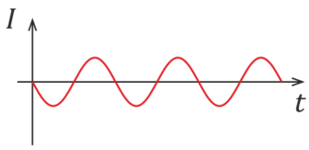
„kondenzátor s vyšší kapacitou propouští střídavý proud ochotněji".

A jak vůbec může kondenzátorem procházet proud, byť střídavý? Vždyť v mezeře mezi elektrodami může být vakuum, a přes něj žádný náboj neprojde.

Existuje na to vtip, ale i jednoduché vysvětlení: Kondenzátor se prostě opakovaně nabíjí a vybíjí (a zase nabíjí na opačnou polaritu a zase vybíjí…). Takže i když žádné elektrony mezerou mezi deskami kondenzátoru neprojdou, tak se ve vodičích „před kondenzátorem" i „za kondenzátorem" střídavě pohybují tam a zpátky.

Stejnosměrný proud[20] ovšem kondenzátorem neprojde. Má-li napětí z nějakého zdroje jak stejnosměrnou, tak střídavou složku, kondenzátor propustí jen střídavou složku:





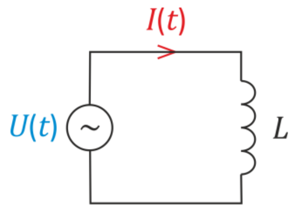
[17] Například v hesle na české Wikipedii, kde se ale (ovšem jen někde) píše tučným písmem, aby se zvýraznilo, že jde o komplexní veličinu. V učebnici Sedlák, Štoll *Elektřina a magnetismus* se značí pruhem nad písmenem, $\overline{Z}_C$, analogicky také značí komplexní amplitudy, např. komplexní amplituda napětí je tam značena $\overline{U}$. (Což by mohlo být někdy trochu matoucí, protože pruhem nad písmenem se označuje komplexní sdružení. My v tomto textu proto raději používáme označení $\widehat{U}_m$; oblouček vyznačuje, že jde o komplexní veličinu, index *m* skutečnost, že tato veličina dává informaci o maximální hodnotě veličiny, v tomto případě napětí.) Můžeme zde proto opět jen doporučit: V každé učebnici nebo jiném pramenu se vždy podívejte, co autoři jak značí.

[18] Z grafu to vidíme dobře: Nejdřív nastává vrchol proudu a až chvíli po něm (za čtvrt periody) vrchol napětí. Pak samozřejmě následuje další vrchol proudu, ale až za 3/4 periody – pro určení „co je před čím" bereme kratší dobu mezi maximy, resp. stejnými fázemi.

[19] Názorně (ale hodně nepřesně) řečeno „odpor, který kondenzátor klade střídavému proudu". (Rozmyslete si, proč je tohle vyjádření nepřesné.)

[20] Míněno *stacionární* proud.

Cívka



Již v předchozích kapitolách jsme poznali, že cívka díky elektromagnetické indukci brání změnám protékajícího proudu. Když k ní připojíme napětí, proud teprve začíná růst. Můžeme tedy usoudit, že když k cívce připojíme zdroj střídavého napěti (jak to ukazuje schéma vpravo), mohl by se proud zpožďovat za napětím. Tak zkusíme tento odhad podpořit výpočtem.

Druhý Kirchhoffův zákon dává pro daný obvod

$$U(t) + U_{ind.} = 0\ , \tag{10.7}$$

kde napětí indukované na cívce je $U_{ind.} = -L\dfrac{dI}{dt}$.[21] To znamená, že $\dfrac{dI}{dt} = \dfrac{1}{L}U(t) \Rightarrow I(t) = \dfrac{1}{L}\int U(t)dt$.[22] Odtud už spočteme vše další.

Chování cívky připojené ke zdroji střídavého napětí:

V reálné symbolice:

$$U(t) = U_m \cdot \cos(\omega t)$$

$$I(t) = \frac{1}{L}\int U(t)dt = \frac{1}{\omega L}U_m \cdot \sin(\omega t)$$

$$\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})$$

=> $I(t) = I_m \cdot \cos(\omega t - \tfrac{\pi}{2})$

Proud se zpožďuje za napětím.[23]

$$I_m = \frac{1}{\omega L}\, U_m = \frac{U_m}{\omega L}$$

Zavedeme: $X_L = \omega L$ (10.8)

(induktance)

$$I_m = \frac{U_m}{X_L} \tag{10.9}$$

(X_L hraje roli odporu)

V komplexní symbolice:

$\hat{U}(t) = \hat{U}_m \cdot e^{i\omega t}$, $\hat{U}_m = U_m$ je reálné

$$\hat{I}(t) = \frac{1}{L}\int \hat{U}(t)dt = \underbrace{\frac{1}{i\omega L}\hat{U}_m}_{\hat{I}_m} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} = \frac{1}{\omega L}\,\underbrace{\frac{1}{i}}_{=\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}}}\,\hat{U}(t)$$

=> $\hat{I}(t) = \hat{I}_m \cdot \mathrm{e}^{i\omega t} = I_m \cdot \mathrm{e}^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}$

Proud se zpožďuje za napětím.

$$\hat{I}_m = \frac{1}{i\omega L}\hat{U}_m = \frac{\hat{U}_m}{i\omega L}$$

$\hat{I}_m$ dává informace i o fázi proudu.

Zavedeme: $\hat{Z}_L = i\omega L$ (10.10)

(impedance cívky)

$$\hat{I}_m = \frac{\hat{U}_m}{\hat{Z}_L} \tag{10.11}$$

i pro hodnoty v čase t platí $\hat{I}(t) = \dfrac{\hat{U}(t)}{\hat{Z}_L}$

Přechod od komplexního vyjádření k reálným hodnotám:

$$U(t) = \mathrm{Re}\big(\hat{U}(t)\big),\ I(t) = \mathrm{Re}\big(\hat{I}(t)\big),\quad U_m = \left|\hat{U}_m\right|,\ I_m = \left|\hat{I}_m\right|,\ X_L = \left|Z_L\right|$$

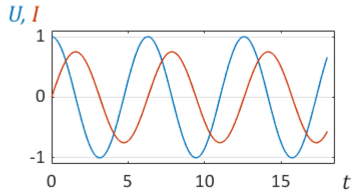
Vztahy (10.9) a (10.11) jsou opět analogické Ohmovu zákonu. Veličině X_L říkáme **induktance** nebo také ***induktivní reaktance***[24], komplexní veličina $\hat{Z}_L$ je **impedance** cívky.

[21] Znaménková konvence je stejná jako v kapitole 8.

[22] Používáme zde neurčitý integrál, takže k výsledku bychom mohli přičíst libovolnou konstantu. Ta ale reprezentuje případnou stacionární složku proudu, a o tu nám zde nejde. Konstantní složku proudu proto bereme rovnou nule.

[23] Například když $t = 0$, je fáze napětí rovna nule ($\omega t = 0$), ale fáze proudu je teprve $\omega t - \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2}$.

Proud cívkou se opravdu opožďuje za napětím, a to o čtvrt periody. Viz graf vpravo, proud je značen červeně. Všimněte si, že když je napětí maximální, proud teprve začíná růst z nuly. Fázové posunutí je tedy $-\pi/2$ resp. –90°.



Ze vztahů (10.8) a (10.10) je vidět, že induktance (resp. komplexní impedance) s rostoucí frekvencí *vzrůstá*. Tím pádem při vyšších frekvencích prochází cívkou menší proud.[25] Názorně můžeme říct, že

„cívka propouští vyšší frekvence méně ochotně“.[26]

Z (10.8) resp. (10.10) je také vidět, že

„cívka s větší indukčností propouští střídavý proud méně ochotně“.

Pamatovat si, že cívka propouští proud nižších frekvencí ochotněji, je vlastně snadné. Stačí uvažovat extrémní případ: při hodně nízkých frekvencích jde o „skoro stejnosměrný“ (tedy skoro konstantní) proud – a tomu se cívka nebrání.

Průchodu střídavého proudu cívka brání. Dalo by se říci, že ho „tlumí“. Proto se cívce použité za tímto účelem říká ***tlumivka***.

Vraťme se ještě od kvalitativních úvah k formalismu. Důležitým zjištěním, k němuž jsme se dopracovali, je fakt, že:

Komplexní veličiny poskytují informace jak o amplitudě, tak o fázi napětí a proudu.

Impedance $\hat{Z}$ dává informaci jak o poměru amplitud napětí a proudu,
tak o fázovém posunutí mezi napětím a proudem. [27]

[24] Tento název se uvádí jako správnější (a podle norem). Název „induktance“ je sice zaužívaný, ale pozor, v angličtině „inductance“ znamená indukčnost.

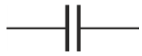
[25] Samozřejmě, když amplituda napětí je stejná.

[26] Jinak řečeno, „cívka propouští ochotněji nižší frekvence“.

[27] $\hat{Z}$ je také komplexní veličina. Informaci dává prostřednictvím vztahu $\hat{I}_m = \hat{U}_m / \hat{Z}$.
Poznámka: Tuhle informaci, i když je v rámečku ☺, se samozřejmě neučte nazpaměť jako básničku! Důležité je chápat její význam – fakticky nám ukazuje, proč je komplexní formalismus pro popis střídavých proudů efektivní a užitečný. Ostatně to uvidíme ještě dále.

Shrnutí: jak se v obvodu střídavého proudu chová rezistor, kondenzátor a cívka

Možná těch informací a vztahů při odvozování a porovnávání reálného a komplexního formalismu bylo trochu moc. Pojďme si je shrnout, abychom viděli, že těch výsledných je vlastně jen pár a že mají stejnou strukturu:

	Rezistor	Kondenzátor	Cívka	
Značka (obvod)				
Co charakterizuje součástku	odpor R	kapacita C	indukčnost L	
Reaktance	[28]	$X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ (kapacitance)	$X_L = \omega L$ (induktance)	(10.12)
Vztah amplitud proudu a napětí	$U_m = R\, I_m$	$U_m = X_C\, I_m$	$U_m = X_L\, I_m$	(10.13)
Posunutí proudu vůči napětí	ve fázi	proud předbíhá napětí o 1/4 periody [29]	proud se opožďuje za napětím o 1/4 periody	
Fázový posuv proudu vůči napětí	0 $U(t) = U_m \cos(\omega t)$ $I(t) = I_m \cos(\omega t)$	$\dfrac{\pi}{2}$, tj. 90° $U(t) = U_m \cos(\omega t)$ $I(t) = I_m \cos(\omega t + \frac{\pi}{2})$	$-\dfrac{\pi}{2}$, tj. –90° $U(t) = U_m \cos(\omega t)$ $I(t) = I_m \cos(\omega t - \frac{\pi}{2})$	
Komplexní symbolika:				
Impedance	$\hat{Z}_R = R$	$\hat{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}$	$\hat{Z}_L = i\omega L$	(10.14)
Vztah proudu a napětí	$\hat{U}_m = R\, \hat{I}_m$ $\hat{U}(t) = R\, \hat{I}(t)$	$\hat{U}_m = \hat{Z}_C\, \hat{I}_m$ $\hat{U}(t) = \hat{Z}_C\, \hat{I}(t)$	$\hat{U}_m = \hat{Z}_L\, \hat{I}_m$ $\hat{U}(t) = \hat{Z}_L\, \hat{I}(t)$	(10.15)

Za připomenutí stojí, že jde o vztahy pro *ideální* rezistor, kondenzátor a cívku.[30] Jak je tomu v případě reálných cívek a kondenzátorů, uvidíme za chvíli. Nejdřív se ale podíváme, jak jdou fázové poměry napětí a proudů vyjádřit názorně geometricky, resp. graficky. Nepůjde o grafy časového průběhu, ty už známe, ale o tzv. ***fázory***.

[28] Pro odpor se nepoužívá termín „reaktance“, ten je vyhrazen pro součástky, které způsobují fázové posunutí. Někdy se užívá termín *rezistance*, lze se setkat i s termínem *ohmický odpor*, ale my budeme mluvit prostě o odporu.

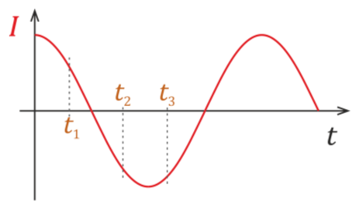
[29] Pro jistotu ještě jednou upozorňujeme, že termín „předbíhá“ se sice běžně užívá, ale někoho může mást. (Rozhodně to není tak, že by proud nejdřív byl za napětím a pak ho předběhl! ☺) Takže si klidně pro sebe říkejte, že u kondenzátoru je „nejdřív proud, pak napětí“ a u cívky „nejdřív napětí, pak proud“.

[30] Například u cívky by to znamenalo, že její vodič má nulový odpor.

10.3 Fázory

Seznámíme se s dalším způsobem, jak popsat střídavé proudy. Vyjdeme z vyjádření pomocí komplexních čísel – ale uvidíme, že nakonec se obejdeme i bez nich.

Uvažujme situaci, kdy nějakou součástkou protéká střídavý proud o amplitudě I_m a úhlové frekvenci ω. Hodnota proudu v čase t je $I(t) = I_m \cos(\omega t)$.[31] [32]

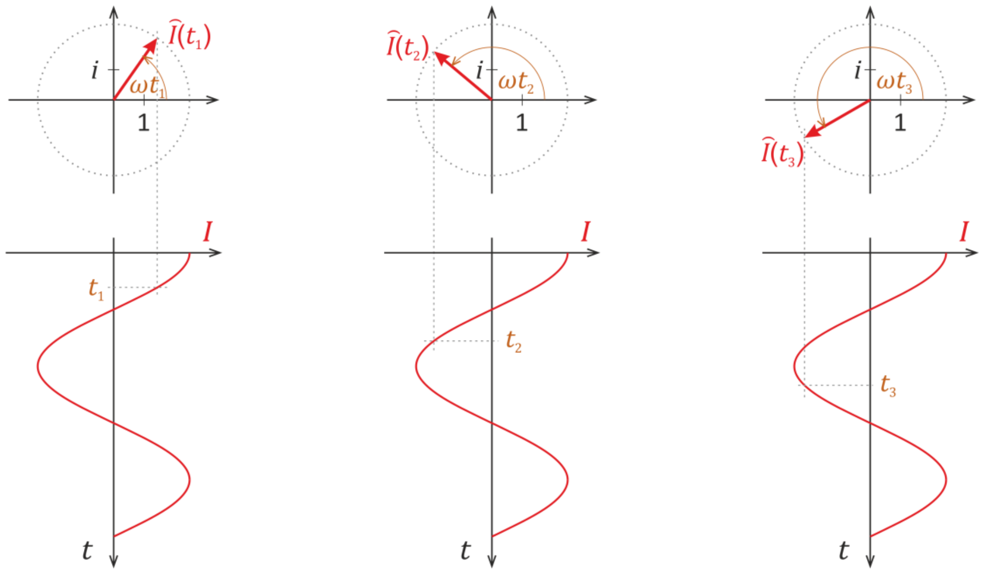


V komplexním vyjádření je proud dán vztahem

$$\widehat{I}(t) = I_m \, \mathrm{e}^{i\omega t} \, .^{33} \qquad (10.16)$$

Jde o komplexní číslo, jehož absolutní hodnota je konstantní a fáze je přímo úměrná času. V Gaussově rovině[34] je toto číslo reprezentováno bodem na konci vektoru délky I_m, který začíná v počátku a svírá s reálnou osou úhel ωt, viz obrázky níže. Komplexním číslem vyjádřenou okamžitou hodnotu proudu tedy vlastně reprezentuje i daný vektor – a právě takovým vektorům se říká **fázory**.[35]

S časem se fázor proudu[36] otáčí úhlovou rychlostí ω proti směru hodinových ručiček. Když jeho průmět na vodorovnou osu[37] vynášíme do grafu jako hodnotu proudu (oproti času t jako nezávisle proměnné), dostaneme reálnou závislost proudu na čase.[38]



Časový průběh proudu je tedy reprezentován **rotujícím fázorem**.[39]

---

[31] Obecně by samozřejmě mohlo být $I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_0)$, ale pro jednoduchost uvažujeme konkrétní případ, kdy $\varphi_0 = 0$.

[32] Na grafu vpravo jsou vyznačeny hodnoty ve třech časech t_1, t_2, t_3. Ve stejných časech si dále v textu ukážeme reprezentaci proudu pomocí fázorů.

[33] Komplexní amplituda $\widehat{I}_m$ je v našem případě rovna amplitudě reálné, $\widehat{I}_m = I_m$.

[34] Připomeňme, že na vodorovnou osu se vynáší reálná část čísla, na svislou ryze imaginární část. Gaussova rovina bývá nazývána též *komplexní rovina* nebo *rovina komplexních čísel*.

[35] Uvádí se, že termín *fázor* vznikl zkrácením dvouslovného vyjádření „fázový vektor“.

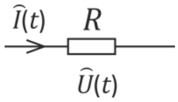
[36] Tedy ten červený vektor na obrázcích.

[37] Uvědomte si, že to je reálná hodnota $\widehat{I}(t)$, tedy $\mathrm{Re}(I_m \mathrm{e}^{i\omega t}) = I_m \cos(\omega t)$.

[38] Jen jsou ty grafy na obrázcích otočené o 90° oproti normální orientaci grafu (viz obrázek vpravo nahoře).

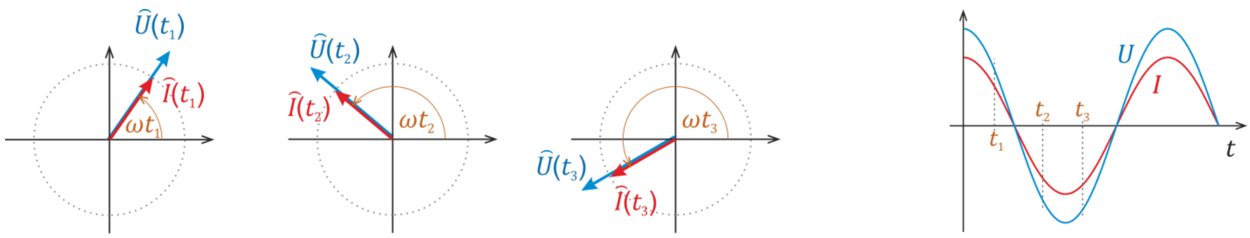
[39] Slovo „rotující“ se často vynechává.

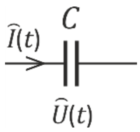
Můžete namítnut, že to je pěkné, ale k čemu je nám to dobré? Zajímavé to začne být, když fázorem znázorníme i napětí na dané součástce.



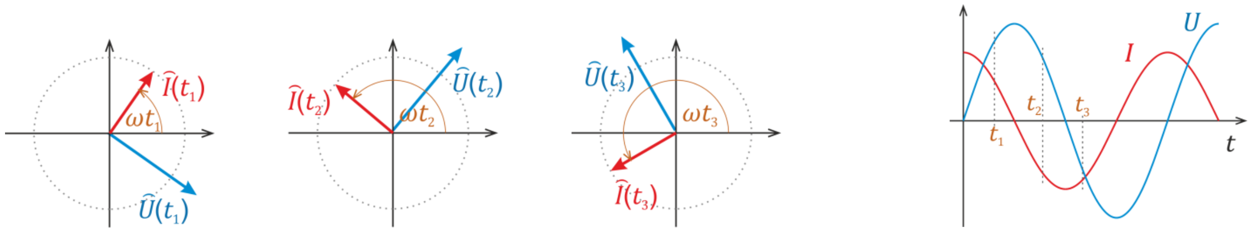
Pro **rezistor** to ještě nepřináší moc nového.

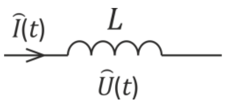
Napětí na rezistoru je úměrné proudu podle Ohmova zákona, $\hat{U}(t) = R\,\hat{I}(t)$, a je s proudem ve fázi. Vidíme to jak ve fázorových diagramech, tak na časovém průběhu proudu a napětí.



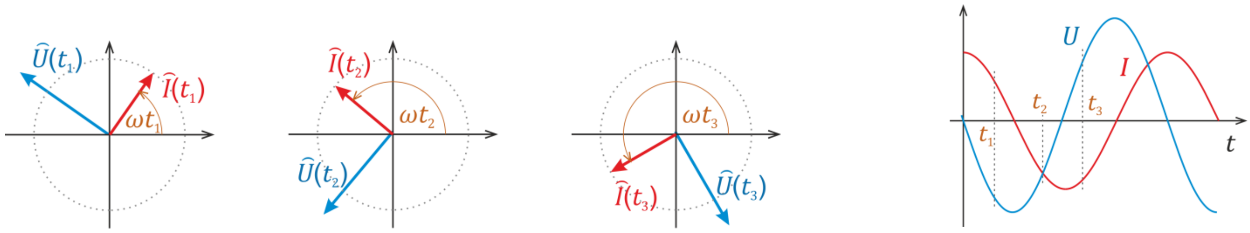


Pro **kondenzátor** už je to zajímavější, tam nastává fázový posuv. Napětí na kondenzátoru je $\hat{U}(t) = \hat{Z}_C\,\hat{I}(t) = \dfrac{1}{i\omega C}\hat{I}(t) = -i\dfrac{1}{\omega C}\hat{I}(t)$, takže jeho fázový posuv vůči proudu je –90°.[40] Fázový posuv je na fázorových diagramech dobře vidět; jasně je také patrné, že napětí se zpožďuje za proudem.





Obdobně je to u **cívky**, jen fázový posun napětí vůči proudu je tam opačný, +90°. Napětí je s proudem svázáno vztahem $\hat{U}(t) = \hat{Z}_L\,\hat{I}(t) = i\omega L\,\hat{I}(t)$. Na fázorových diagramech i časovém průběhu je vidět, že napětí je před proudem (tedy „předbíhá proud“).



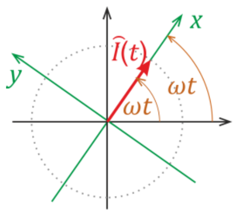
[40] V tabulce na s. 8 jsme u kondenzátoru uváděli fázový posuv +90°. Tam ovšem šlo o posuv *proudu vůči napětí*. Nyní uvádíme fázový posuv *napětí vůči proudu*, ten je samozřejmě opačný. (Poučení: Neexistuje žádný fázový posuv „sám o sobě“, vždy musíme specifikovat, co je posunuto vůči čemu.)

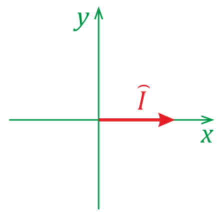
Fázorové diagramy, v nichž fázory nerotují

Dosud jsme ve fázorových diagramech zobrazovali časový průběh napětí a proudu. Fázory proto rotovaly s úhlovou rychlostí ω; v komplexním vyjádření byl v napětí i proudu vždy člen $\mathrm{e}^{i\omega t}$.

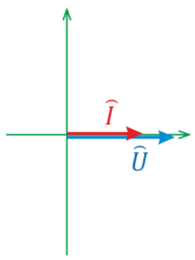
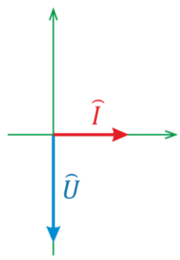
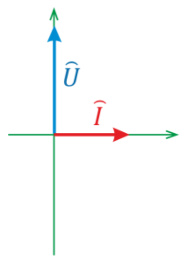
Člen $\mathrm{e}^{i\omega t}$ je ve všech napětích a proudech společný – když nám jde o *vzájemné fázové posuvy*, tak si ho všímat nepotřebujeme. Ve vztazích pro napětí a proud, $\widehat{U}(t) = \widehat{U}_m e^{i\omega t}$, $\widehat{I}(t) = \widehat{I}_m e^{i\omega t}$ nám tak fakticky stačí porovnávat jejich komplexní amplitudy $\widehat{U}_m$ a $\widehat{I}_m$ – a ty zobrazit ve fázorovém diagramu. Tyto fázory pak samozřejmě nerotují.[41]

Možná ještě jednodušeji si to můžeme představit tak, že bychom fázory, které jsme ukázali na předchozí straně, sledovali ze soustavy, která by kolem počátku rotovala stejnou úhlovou rychlostí ω. Vybereme ji tak, aby její „x-ová osa“ měla směr fázoru proudu. Tím pádem v této nové soustavě míří fázor proudu stále do vodorovné osy x.[42]





V tomto fázorovém diagramu se fázové posuny napětí vůči proudu na rezistoru, kondenzátoru a cívce zobrazují jednoduše:

rezistor	kondenzátor	cívka
		

V tomto typu fázorových diagramů budeme v dalších částech kapitoly zobrazovat proud a napětí i na kombinacích prvků R, C a L.

Sčítání fázorů

Kdy má smysl fázory sčítat? Například když máme v sérii zapojené dva rezistory nebo rezistor a kondenzátor. Napětí na nich se sčítají – a funguje to, i když napětí vyjádříme komplexním číslem nebo reprezentujeme pomocí vektoru (v Gaussově rovině). Prostě normálně sčítáme příslušná komplexní čísla nebo vektory.[43] Brzy to využijeme v dalších částech kapitoly.

[41] Jsou to konstantní amplitudy, mají tedy konstantní velikost i fázi.

[42] Osy již dále nebudeme popisovat symboly x, y. Stejně tak už nevyznačujeme jednotku a imaginární jednotku, takže už nezdůrazňujeme, že fázory jsou komplexní čísla, a budeme se na ně dívat spíše jako na vektory.

[43] Je to vidět například v animaci na Wikipedii, viz https://cs.wikipedia.org/wiki/Fázor .

Dvě upřesňující poznámky

1) K definici fázoru:

V našem seznamování s fázory jsme začali s komplexními čísly, pak přešli k vektorům, nejprve rotujícím a poté nerotujícím. Mohli byste se zeptat, co z toho vlastně je fázor. Odpověď zní, že vlastně všechny tyto věci. Fázor se většinou definuje jako komplexní veličina (popisující střídavé napětí nebo proud), vektor je pak jejím grafickým znázorněním v komplexní rovině.

V nerotující variantě pak fázory reprezentují amplitudu a fázi napětí či proudu, když z popisu vyloučíme společnou závislost na čase $e^{i\omega t}$.

Pro úplnost dodejme, že fázory se v některých učebnicích zavádějí graficky poněkud jinak, než jsme to učinili výše – pro zájemce o tom informuje Dodatek A.

2) Ke znaménku ve vztazích pro napětí na kondenzátoru a cívce:

Tato poznámka se vlastně netýká fázorů, ale toho, jak jsme napětí na kondenzátoru a cívce chápali už v části 10.2, a jak je budeme chápat i ve zbytku této kapitoly.

Například pro cívku připojenou ke zdroji střídavého napětí $U(t)$ dává druhý Kirchhoffův zákon (viz (10.7)):

$$U(t)+U_{ind.}(t) = 0 \ .$$

To znamená, že napětí na cívce je

$$U_L(t) = U(t) = -U_{ind.}(t). \qquad (10.17)$$

Indukované napětí $U_{ind.} = -L\dfrac{dI}{dt}$, napětí $U_L(t)$ je opačné: $U_L(t) = +L\dfrac{dI}{dt}$. Takže pozor na znaménka! Jaký je jejich význam? Ve vztahu pro indukované napětí $U_{ind.}$ je cívka brána jako ***zdroj napětí***.[44]

Naopak $U_L(t)$ znamená ***úbytek napětí*** na cívce. Ta je tu chápána jako pasivní prvek zapojený do obvodu, podobně jako když do něj byl zapojen rezistor. Poněkud podrobněji komentujeme tuto „znaménkovou záležitost" v Dodatku B.

Zde nám stačí uvědomit si, že ze vztahů (10.14) a (10.15) plyne (v komplexním vyjádření) ***pro úbytky napětí***:[45]

Na rezistoru:	Na cívce:	Na kondenzátoru:	
$\hat{U}(t) = R\,\hat{I}(t)$	$\hat{U}(t) = i\omega L\,\hat{I}(t)$	$\hat{U}(t) = \dfrac{1}{i\omega C}\hat{I}(t)$	(10.18)
$\hat{U}_m = R\,\hat{I}_m$	$\hat{U}_m = i\omega L\,\hat{I}_m$	$\hat{U}_m = \dfrac{1}{i\omega C}\hat{I}_m$	(10.19)

Pokud budou dvě součástky zapojeny za sebou, například cívka a rezistor, budou se na nich úbytky napětí sčítat. To využijeme hned v následující části kapitoly.

---

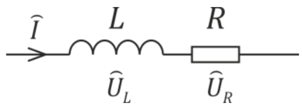
[44] A používáme pro něj znaménkovou konvenci zavedenou v kapitole 8 a použitou v kapitole 9.

[45] Kdybychom chtěli být precizní, mohli bychom v tabulce úbytky napětí označovat jako $\hat{U}_R(t), \hat{U}_{Rm}, \hat{U}_L(t), \hat{U}_{Lm}, \ldots$, ale snad to zde není nezbytné.

10.4 Reálná cívka a kondenzátor

Reálná cívka

Zatím jsme popisovali, jak spolu souvisí napětí a proud pro *ideální* cívky a kondenzátory. Ale například reálná cívka je z vodiče, který má určitý odpor.



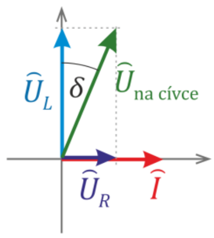
Abychom spočetli, jak vypadá vztah napětí a proudu na takové cívce, představíme si, že její odpor je soustředěn do jediného rezistoru o odporu R, a ten připojen do série s ideální cívkou o indukčnosti L. [46] (Takovéto zapojení nazýváme *náhradní schéma*.)

Při průchodu proudu jsou napětí na (ideální) cívce a rezistoru:[47]

$$\hat{U}_L = \hat{Z}_L \hat{I} = i\omega L \hat{I}, \qquad \hat{U}_R = R\hat{I} \tag{10.20}$$

Napětí na sériově zapojených prvcích se sčítá. Celkové napětí na reálné cívce tedy je

$$\hat{U}_{\text{na cívce}} = \hat{U}_L + \hat{U}_R = \underbrace{\left(\hat{Z}_L + R\right)}_{=\hat{Z}_{\text{cívky}}} \hat{I} \, . \tag{10.21}$$



Fázorový diagram ukazuje vztahy mezi napětími a proudem přehledně graficky. Vidíme z něj, že fázové posunutí napětí na reálné cívce vůči proudu není celých 90°, ale je menší, $90° - \delta$. Úhel δ se nazývá ***ztrátový úhel***.[48] Z diagramu je zřejmé, že $\operatorname{tg}\delta = \left|\hat{U}_R\right| / \left|\hat{U}_L\right|$ a po dosazení (10.20) pak $\operatorname{tg}\delta = \left|R\hat{I}\right| / \left|i\omega L\hat{I}\right|$, takže

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{R}{\omega L} \, . \tag{10.22}$$

Vztah (10.21) vypadá formálně jako Ohmův zákon, jen místo odporu v něm máme **impedanci cívky**

$$\hat{Z}_{\text{cívky}} = \hat{Z}_{\text{L}} + R = i\omega L + R \quad . \tag{10.23}$$

Vidíme, že

při sériovém zapojení prvků obvodu sčítáme jejich impedance,

podobně jako jsme při sériovém zapojení rezistorů sčítali jejich odpory. V našem případě šlo o ideální cívku a rezistor, ale platí to obecně.

Z (10.21) můžeme vypočítat proud reálnou cívkou připojenou k napětí $\hat{U}$:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}_{\text{cívky}}} \tag{10.24}$$

[46] Ve skutečnosti je odpor samozřejmě rozložen v celém vodiči, z něhož je navinuta cívka. Při průchodu proudu je ovšem na jeho odporu stejný úbytek napětí, jako když celý odpor soustředíme do jediného rezistoru.

[47] Může přitom jít buď o okamžité hodnoty $\hat{U}_L(t), \hat{U}_R(t), \hat{I}(t)$ nebo o komplexní amplitudy $\hat{U}_{Lm}, \hat{U}_{Rm}, \hat{I}_m$.

[48] Jak uvidíme dále, jeho velikost souvisí s odporem R cívky. Díky odporu se při průchodu proudu cívka zahřívá, takže dochází ke ztrátám elektrické energie (resp. přeměně elektrické energie na teplo). Takže název „ztrátový úhel“ dává smysl. Poznamenejme, že u cívky s jádrem může docházet ke ztrátám elektrické energie i dalšími procesy, to zde ale zatím nebudeme řešit; dotkneme se toho v souvislosti s transformátory v příští kapitole.

Připomeňme, že (10.24) platí jak pro okamžité, tak pro maximální hodnoty[49], tedy

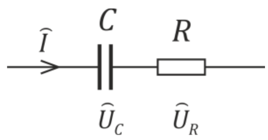
$$\widehat{I}(t) = \frac{\widehat{U}(t)}{\widehat{Z}_{\text{cívky}}} , \qquad (10.25)$$

$$\widehat{I}_m = \frac{\widehat{U}_m}{\widehat{Z}_{\text{cívky}}} . \qquad (10.26)$$

Amplituda skutečného proudu je absolutní hodnotou komplexní amplitudy, $I_m = \left|\widehat{I}_m\right|$. Z (10.26) pro ni dostaneme

$$I_m = \frac{\left|\widehat{U}_m\right|}{\left|\widehat{Z}_{\text{cívky}}\right|} = \frac{U_m}{\left|i\omega L + R\right|} = \frac{U_m}{\sqrt{(\omega L)^2 + R^2}} . \qquad (10.27)$$

Reálný kondenzátor



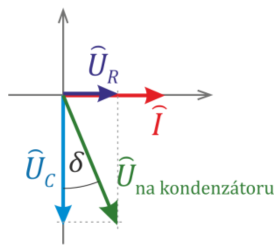
Podobně jako u cívky se reálný kondenzátor liší od ideálního v tom, že fázové posunutí mezi napětím a proudem není přesně 90°. V náhradním schématu se to vystihuje tak, že se k ideálnímu kondenzátoru připojí rezistor. Někdy se kreslí připojen paralelně, ale často také do série, podobně, jako jsme to uvažovali u cívky, a jak to ukazuje náhradní schéma vpravo.[50]

Napětí při proudu $\widehat{I}$ jsou:

$$\widehat{U}_C = \widehat{Z}_C\,\widehat{I} = \frac{1}{i\omega C}\widehat{I} , \qquad \widehat{U}_R = R\,\widehat{I} \qquad (10.28)$$

Celkové napětí na reálném kondenzátoru tedy je

$$\widehat{U}_{\text{na kondenzátoru}} = \widehat{U}_C + \widehat{U}_R = \underbrace{\left(\widehat{Z}_C + R\right)}_{=\widehat{Z}_{\text{kondenzátoru}}}\widehat{I} . \qquad (10.29)$$



Fázorový diagram ukazuje, že fázový posun napětí a proudu se od 90° liší o ztrátový úhel δ, pro který platí $\operatorname{tg}\delta = \left|\widehat{U}_R\right| / \left|\widehat{U}_C\right|$. Dosazení z (10.28) dá

$$\operatorname{tg}\delta = \left|\widehat{Z}_R\right| / \left|\widehat{Z}_C\right| = \omega C R . \qquad (10.30)$$

Poznamenejme, že $\operatorname{tg}\delta$ se také nazývá *ztrátový činitel*.[51] Čím je menší, tím je kondenzátor bližší ideálnímu.[52] Ztrátový činitel bývá uveden například v katalozích součástek (pro různé frekvence). Je různý pro různé typy kondenzátorů.[53]

---

[49] Obojí stále v komplexním formalismu.

[50] „Technicky“ bývá hodnota odporu R označována zkratkou ESR (z *equivalent series resistance*, zájemci si mohou dohledat toto heslo např. na anglické Wikipedii).

[51] Všechny tyhle názvy si samozřejmě nemusíte pamatovat. Uvádíme je proto, že se s nimi v praxi, zejména technické, můžete setkat.

[52] Někdy se i u kondenzátoru používá pojem *činitel jakosti*; definuje se jako $Q = 1/\operatorname{tg}\delta$. (Další pojem, který je tu pro úplnost, kdybyste se s ním setkali.)

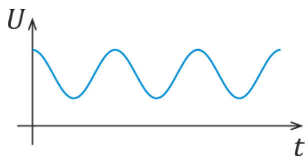
[53] Například pro slídové kondenzátory se uvádí řádově 10^{-4} až 10^{-3}, pro keramické 10^{-3} až 10^{-2}, pro fóliové až 0,03, pro elektrolytické až 0,15. (Nejkvalitnější jsou kondenzátory vzduchové, pro ně se uvádí 10^{-6} až 10^{-5}.)

Ještě reálnější cívky a kondenzátory

Ve skutečnosti je situace samozřejmě ještě složitější, než jak ji postihují jednoduchá náhradní schémata uvedená výše. Jednotlivé závity cívky mají navzájem určitou kapacitu, vodiče v kondenzátoru zas představují určitou indukčnost[54]. Ztráty v kondenzátoru nejsou dány jen odporem vodičů, ale i různými procesy v dielektriku.[55] Pro vystižení těchto faktorů se používají složitější náhradní schémata kombinující třeba dva rezistory, ideální cívku a ideální kondenzátor – ale do těchto detailů zde nepůjdeme.[56]

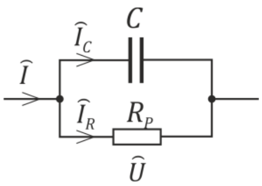
Co je však vhodné připomenout, je chování **elektrolytických kondenzátorů**. Jak už jsme uvedli dříve, musí na ně být přiloženo napětí se správnou polaritou; při opačné polaritě jimi začne procházet proud a kondenzátor se za chvíli zničí. To znamená, že ***elektrolytický kondenzátor nesmíme připojit přímo na střídavé napětí***![57]

Co můžeme udělat, je připojit elektrolytický kondenzátor k napětí, které má jak stejnosměrnou složku (ve správné polaritě), tak složku střídavou. Kondenzátorem samozřejmě prochází jen proud střídavý.



Poznámka na okraj k jinému náhradnímu schématu reálného kondenzátoru

(pro zájemce)



Jako náhradní schéma reálného kondenzátoru se také často uvádí ideální kondenzátor s paralelně zapojeným rezistorem (o odporu R_P).

V tomto případě je napětí na kondenzátoru i paralelním rezistoru stejné, sčítají se proudy. Když byly v podobném zapojení paralelně dva rezistory, sčítali jsme jejich vodivosti; ty byly převrácenými hodnotami odporů. Nyní je to podobné, ***sčítají se převrácené hodnoty impedancí***,

$$\frac{1}{\widehat{Z}} = \frac{1}{\widehat{Z}_C} + \frac{1}{R_P} \,. \qquad (10.31)$$

Pro převrácenou hodnotu impedance se užívá název ***admitance***, značí se symbolem $\widehat{Y}$. (Je tedy $\widehat{Y}_C = i\omega C$, $\widehat{Y}_R = G = 1/R$, kdybyste se s těmito pojmy a značením někdy potkali…)

---

[54] Ta se samozřejmě uplatní až při vyšších frekvencích.

[55] Dielektrikum například není absolutní izolant, takže jím může téci i určitý nepatrný proud; v této souvislosti se říká, že kondenzátor má *svod*. (Pozor si na něj musíme dát u elektrolytických kondenzátorů, tam může dosahovat hodnot řádu μA.) Ale jde i o další procesy – laicky a jednoduše si můžeme představit, že když se dielektrikum v kondenzátoru připojenému ke střídavému napětí polarizuje střídavě oběma směry, neobejde se natáčení dipólů v dielektriku beze ztrát.

[56] I proto, že stále jde jen o *náhradní* schémata a reálné fyzikální procesy na dané součástce jsou složitější. (Například u cívek na feromagnetickém jádře se uplatní hysterezní smyčka, takže tam chování cívky závisí i na velikosti proudu.) Takže si nesmíme představovat, že třeba složitější náhradní schéma s konstantními hodnotami R, C a L popíše přesně chování součástky při všech frekvencích. Prostě, reálná příroda a technika jsou složitější než naše zjednodušené popisy. I ty jsou však cenné a řadu vlastností a chování součástek a obvodů vystihují s dobrou přesností – ostatně, chválou zanedbávání jsme už v předchozím semestru začali studium mechaniky…

[57] Výjimkou jsou tzv. bipolární elektrolytické kondenzátory, které mají oxidové vrstvy na obou elektrodách.

10.5 RC členy v obvodu střídavého proudu: frekvenční filtry

V prvních částech této kapitoly jsme se naučili, jak popisovat střídavý proud a napětí a chování základních součástek v obvodu střídavého proudu komplexním formalismem. Teď toho využijeme pro rozbor chování dvou jednoduchých zapojení. Nejprve si však shrneme, jak obecně řešit chování elektrických obvodů se střídavým proudem.[58]

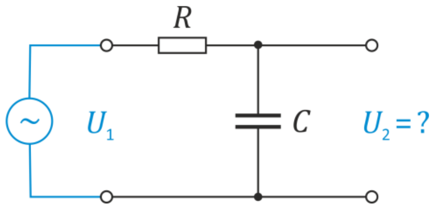
Jak řešit elektrické obvody se střídavým proudem

Je to hrozně jednoduché:

> Elektrické obvody se střídavým proudem řešíme přesně stejně, jako elektrické obvody se stacionárním elektrickým proudem, jen místo hodnot odporů používáme impedance součástek a napětí a proudy popisujeme komplexním formalismem.

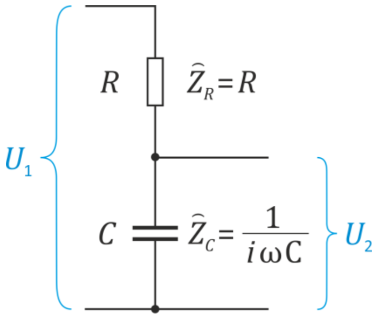
A to je všechno! Teď už jen tenhle recept použijeme v konkrétních situacích, pro velmi jednoduché obvody s kondenzátorem a rezistorem. Uvidíme, že přes svou jednoduchost jsou užitečné.

První obvod (dolnofrekvenční propust)



Podívejme se na zapojení podle schématu. Přivádíme do něj střídavé napětí o frekvenci ω a napětí U_1.[59] Zajímá nás, jaké napětí U_2 bude na výstupu.

Když si schéma zapojení překreslíme (viz obrázek níže), jasně vidíme, že jde o dělič napětí. Ten už umíme řešit, takže rovnou můžeme psát



$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{\hat{Z}_C}{R+\hat{Z}_C} \ . \tag{10.32}$$

Po dosazení impedance kondenzátoru[60] a po úpravě dostáváme

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{\hat{Z}_C}{R+\hat{Z}_C} = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R+\frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1+i\omega RC} \tag{10.33}$$

Chování obvodu při různých frekvencích jednoduše prozkoumáme tak, že si všimneme, jak se chová v extrémních případech, tedy pro velmi malé a velmi velké frekvence.

Pro $\omega RC \ll 1$:

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{1+\cancel{i\omega RC}} \doteq 1 \ , \tag{10.34}$$

a pro $\omega RC \gg 1$:

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{1}{\cancel{1}+i\omega RC} \doteq (-i)\frac{1}{RC}\frac{1}{\omega} \tag{10.35}$$

---

[58] Tedy jak najít hodnoty proudů v jednotlivých větvích obvodu a napětí mezi jednotlivými uzly obvodu. „Najít hodnoty“ přitom znamená najít amplitudy a fázová posunutí proudů a napětí.

[59] Charakterizovat ho můžeme amplitudou napětí U_m, stejně tak napětí na výstupu.

[60] Kondenzátor zde považujeme za ideální, takže impedance je dána (10.14).

Pro nízké frekvence, $\omega \ll 1/(RC)$, tedy obvod propouští napětí na vstupu prakticky beze změny, $\hat{U}_2 \doteq \hat{U}_1$.

Pro vysoké frekvence, $\omega \gg 1/(RC)$, napětí na výstupu klesá jako $1/\omega$: $\left|\dfrac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| \doteq \dfrac{\omega_0}{\omega}$, kde

$$\omega_0 = \frac{1}{RC} \tag{10.36}$$

se označuje jako *mezní úhlová frekvence*. ***Mezní frekvence*** v Hz je

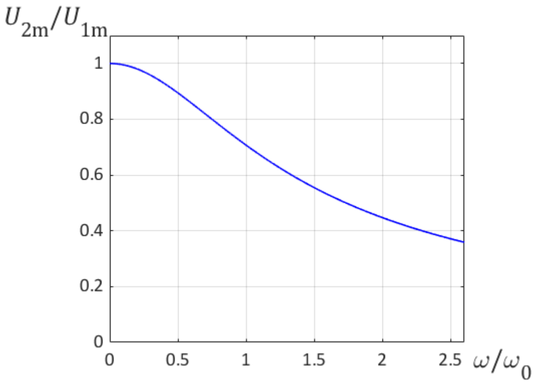
$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi RC}\,. \tag{10.37}$$ [61]

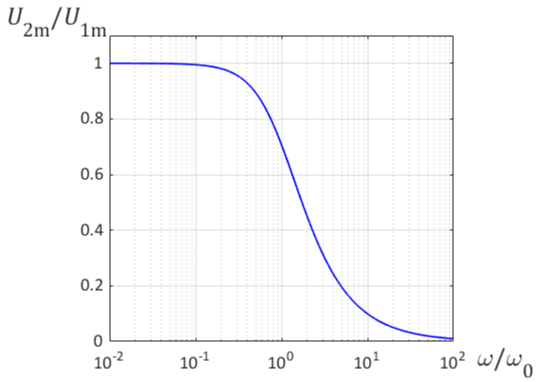
Obvod propouští signály nízkých frekvencí, nazývá se proto **dolnofrekvenční propust**.

Signály vyšších frekvencí potlačuje, navíc z (10.35) vidíme, že jsou na výstupu oproti vstupu fázově posunuté.
Podíl reálných amplitud na výstupu a vstupu získáme z (10.33) tím, že vezmeme absolutní hodnotu:

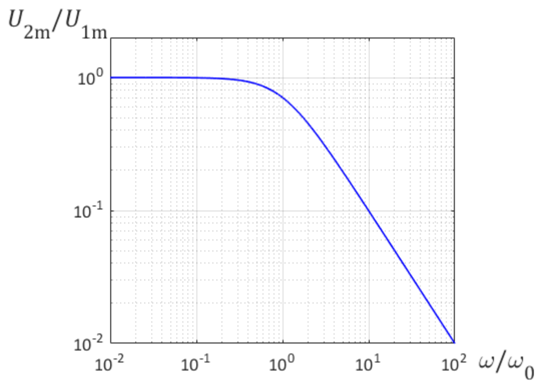
$$\frac{U_{2m}}{U_{1m}} = \left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| = \frac{1}{|1+i\omega RC|} = \frac{1}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \tag{10.38}$$

Na mezní frekvenci činí výstupní napětí $1/\sqrt{2} \doteq 0,71$ napětí vstupního. Závislost výstupního napětí na frekvenci ukazují následující grafy. [62] Průběh lépe vidíme, když frekvence jsou v logaritmické škále.





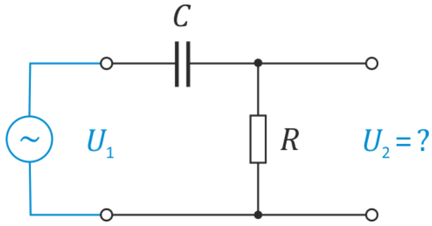
Často se používá zobrazení, kdy i podíl napětí na výstupu a vstupu je v logaritmické škále, jak to ukazuje graf vpravo. Logaritmus podílu se pak obvykle vyjadřuje v **decibelech** (dB). Podrobněji toto vyjádření popisuje Dodatek C.



[61] Připomeňme, že při nabíjení a vybíjení kondenzátoru byla časová konstanta $\tau = RC$. Vidíme, že faktor RC se ve vzorcích popisujících chování obvodů s rezistorem a kondenzátorem vyskytuje vždy, když jde o čas nebo o frekvenci.

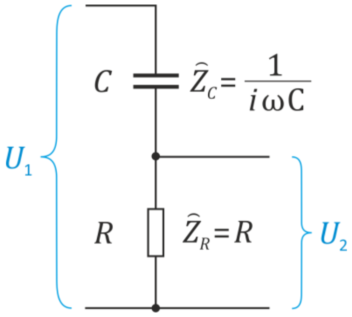
[62] Poznamenejme (spíše pro zájemce), že poměr napětí na výstupu a vstupu bývá nazýván *útlum*; značí se A.

Druhý obvod (hornofrekvenční propust)



V druhém zapojení oproti prvnímu přehodíme umístění kondenzátoru a rezistoru.

Na obvod se opět můžeme dívat jako na dělič napětí. Je tedy



$$\hat{U}_2 = \hat{U}_1 \frac{R}{R+\hat{Z}_C}$$, takže

$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{R}{R+\hat{Z}_C} = \frac{R}{R+\frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega RC}{1+i\omega RC} \qquad (10.39)$$

Chování obvodu při různých frekvencích opět prozkoumáme pro velmi malé a velmi velké frekvence:

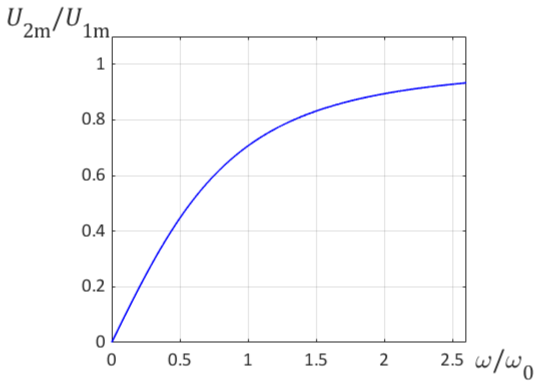
Pro $\omega RC \ll 1$:
$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{i\omega RC}{1+\cancel{i\omega RC}} \doteq i\omega RC \;, \qquad (10.40)$$

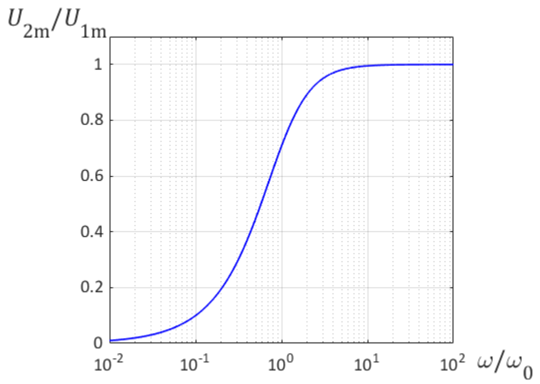
a pro $\omega RC \gg 1$:
$$\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1} = \frac{i\omega RC}{\cancel{1}+i\omega RC} \doteq 1 \;. \qquad (10.41)$$

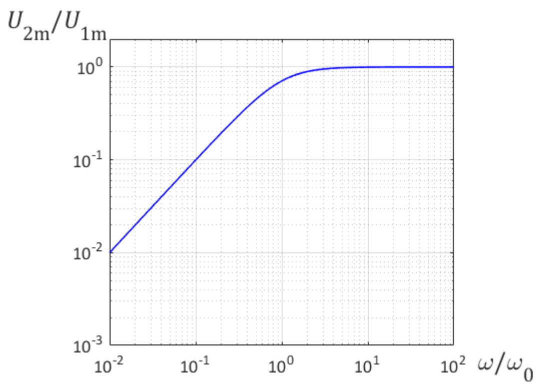
Obvod propouští vyšší frekvence, proto se nazývá **hornofrekvenční propust**. Nízké frekvence jsou potlačeny, pro $\omega RC \ll 1$, tj. $\omega \ll \omega_0$ (viz (10.36)) je $\left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| \doteq \frac{\omega}{\omega_0}$. Obecně je poměr reálných amplitud:

$$\frac{U_{2m}}{U_{1m}} = \left|\frac{\hat{U}_2}{\hat{U}_1}\right| = \frac{|i\omega RC|}{|1+i\omega RC|} = \frac{\omega RC}{\sqrt{1+(\omega RC)^2}} \qquad (10.42)$$

Přehledně jej opět ukazují grafy:







K čemu je to dobré

K čemu mohou uvedené obvody sloužit? Pustíme-li například do dolnofrekvenční propusti hudební signál, budou na výstupu potlačeny vysoké tóny. (Jak moc, závisí na mezní frekvenci.) Naopak na výstupu hornofrekvenční propusti budou potlačeny hluboké tóny.

Vidíme,[63] že naše obvody mohou sloužit jako tónové korekce k potlačení výšek (třeba když chceme utlumit přílišné sykavky nebo ostrý zvuk žesťových nástrojů) nebo hloubek (třeba když je zvuk příliš dunivý). Skutečné tónové korekce v zesilovačích a podobných zařízeních bývají většinou složitější, my jsme se seznámili alespoň s jejich nejjednodušší podobou.[64]

Podobné frekvenční filtry bývají v reproduktorových soustavách[65]: Pro reprodukci tónů nízkých frekvencí se v nich užívá tzv. hlubokotónový reproduktor (též nazývaný basový reproduktor); do něj nemá cenu pouštět vysoké tóny. A pro vysoké frekvence je tam vysokotónový (neboli výškový) reproduktor; ten by hluboké tóny nejen nepřenesl, ale mohly by ho i poškodit. Proto se v reproduktorových soustavách užívají tzv. výhybky.[66]

Další použití:

Hornofrekvenční propust samozřejmě odděluje střídavý signál od stejnosměrného: propouští jen střídavý signál. (Ovšem i ten střídavý propouští bez výraznějšího útlumu až zhruba od mezní frekvence, například hornofrekvenční propust, která má kondenzátor o kapacitě 100 pF a rezistorem o odporu 100 Ω, má na frekvenci 50 Hz útlum velmi značný.[67])

Obvod, který jsme popsali jako dolnofrekvenční propust, je také principem filtrů na výstupu usměrňovačů v síťových zdrojích stejnosměrného napětí. Výstup z transformátoru se v takových zdrojích usměrňuje diodami. Výsledné napětí by ale bylo „tepavé“. Kondenzátor ho „vyhladí“, takže na výstupu je pak konstantní stejnosměrné napětí.[68]

[63] A když výstup obvodu připojíme k zesilovači s reproduktorem, tak také slyšíme. ☺

[64] Pro zájemce: Kdybyste chtěli třeba výšky „odříznout razantněji“, ale netlumit střední frekvence, můžete zapojit dvě dolnofrekvenční propusti za sebou, tím byste dostali strmost (viz Dodatek C) 40 dB/dekádu resp. 12 dB/oktávu.

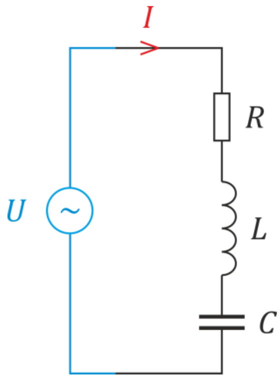
[65] Ne v těch úplně laciných, kde všechnu reprodukci obstarává jeden reproduktor, ale v těch, kde jsou zvlášť reproduktory pro reprodukci hloubek, středních tonů a výšek.

[66] V nich ovšem nejsou rezistory, výhybky se konstruují z kondenzátorů a cívek.

[67] Můžete si spočítat, že při vstupním napětí 1 V by na výstupu byly asi 3 μV. Mezní frekvence pro dané hodnoty by totiž byla asi 16 MH.

[68] Pro upřesnění: s malou střídavou složkou. Jak velká je, závisí na tom, jak moc zdroj zatížíme, tedy jak velký proud odebíráme. (V kvalitnějších zdrojích je navíc samozřejmě napětí elektronicky stabilizováno, což střídavou složku dále významně potlačí.)

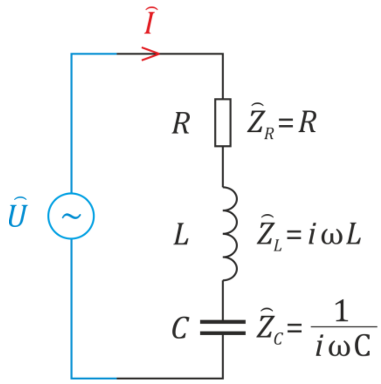
10.6 Sériový RLC obvod napájený střídavým napětím



Nyní přejdeme k „téměř zlatému hřebu“ této kapitoly. Ukážeme, jak lze odvodit chování sériového rezonančního RLC obvodu zcela bez diferenciálních rovnic.

Obvod napájíme ze zdroje střídavého napětí o frekvenci ω a amplitudě napětí U_m. Proud tekoucí obvodem, označíme I. Hodnoty odporu, indukčnosti cívky a kapacity kondenzátoru jsou R, L a C.[69]

Přejdeme ke komplexnímu vyjádření a ve schématu uvedeme i impedance jednotlivých prvků:



Celková impedance sériově zapojených prvků je součtem jednotlivých impedancí:

$$\hat{Z} = R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C} = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{10.43}$$

Proud je dán jako podíl napětí a impedance:

$$\hat{I} = \frac{\hat{U}}{\hat{Z}}. \tag{10.44}$$

Reálná amplituda proudu je dána absolutní hodnotou:

$$I_m = \frac{\left|\hat{U}_m\right|}{\left|\hat{Z}\right|} = \frac{U_m}{\left|\hat{Z}\right|} \tag{10.45}$$

Okamžitě je vidět, že aby proud byl maximální, musí být minimální absolutní hodnota impedance:

$$\left|\hat{Z}\right| = \left|R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)\right| = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2} \tag{10.46}$$

Je jasné, že minimum impedance (a tedy maximum proudu) nastává pro $\omega L = \dfrac{1}{\omega C}$. Odtud ihned plyne

$$\omega^2 = \frac{1}{LC} \quad \Rightarrow \quad \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \tag{10.47}$$

což je vztah pro rezonanční frekvenci, který jsme v předchozí kapitole odvodili za pomoci diferenciální rovnice.[70]

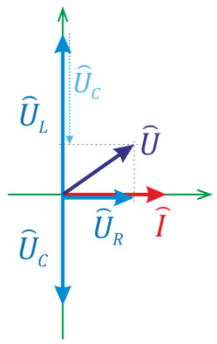
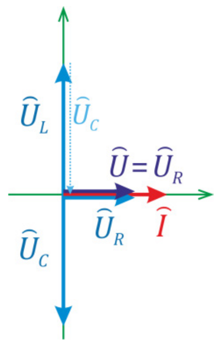
Ze vztahů (10.45) a (10.46) by nám vyšla rezonanční křivka. Její grafy už jsme kreslili v předchozí kapitole, tak je zde opakovat nebudeme.

[69] Jde tedy o stejný buzený rezonanční obvod, který jsme řešili v předchozí kapitole pomocí diferenciální rovnice.

[70] V předchozí kapitole jsme rezonanční frekvenci značili Ω_r, protože frekvenci zdroje budicího napětí jsme označovali velkým písmenem Ω. (Laskavý čtenář snad promine, že zde místo velkého omega píšeme malé. Vy, kdo neprominete, si prosím vzorce na této straně přepište s velkým Ω. ☺)

Co však bude užitečné uvést, je ilustrace chování sériového rezonančního obvodu pomocí fázorů.

Napětí na rezistoru je ve fázi s procházejícím proudem, napětí na cívce proud předbíhá o 90°, napětí na kondenzátoru se oproti proudu naopak opožďuje o 90°.[71] Celkové napětí je součtem všech napětí, což se ve fázorovém diagramu projeví jako součet všech fázorů.

Obecná situace (mimo rezonanci)[72]:	Situace v rezonanci ($\lvert U_C \rvert = \lvert U_L \rvert$):
	

Totéž můžeme samozřejmě vidět početně. Je-li proud $\hat{I}(t) = I_m \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}$, jsou napětí na jednotlivých prvcích:

$$\hat{U}_R = R \cdot I_m \mathrm{e}^{i\omega t}, \quad \hat{U}_L = i\omega L \cdot I_m \mathrm{e}^{i\omega t}, \quad \hat{U}_C = -i \frac{1}{\omega C} I_m \mathrm{e}^{i\omega t} \qquad (10.48)$$

a celkové napětí:
$$\hat{U} = \hat{U}_R + \hat{U}_L + \hat{U}_C . \qquad (10.49)$$

Velikosti napětí na cívce a kondenzátoru se tedy fakticky odečítají: $\hat{U}_L + \hat{U}_C = i\left(\omega L - \dfrac{1}{\omega C}\right) I_m \mathrm{e}^{i\omega t}$, v rezonanci jsou co do velikosti přesně stejné, ale mají opačnou fázi. Celkové napětí je pak $\hat{U} = \hat{U}_R$.

To znamená, že **v rezonanci**[73] **může být napětí na kondenzátoru a cívce i mnohonásobně větší, než napětí zdroje**. Dokonce můžeme lehce určit, kolikrát větší.[74]

[71] Proud je v rezistoru, kondenzátoru i cívce stejný (protože jsou zapojeny v sérii), proto ho kreslíme jediným fázorem.

[72] Toto je konkrétně v situaci, kdy $\lvert U_C \rvert < \lvert U_L \rvert$. Rozmyslete si, zda toto nastává pro frekvenci zdroje nižší nebo vyšší než rezonanční frekvence. A nakreslete si sami fázový diagram pro opačnou situaci.

[73] A také v jejím okolí, tedy pro frekvence blízké rezonanční frekvenci.

[74] Pro zájemce: Z (10.48) vidíme, že poměr reálných amplitud napětí na cívce a rezistoru je $\omega L / R$. Pro $\omega = \omega_0$ (rezonanční frekvence) a s uvážením, že $R/(2L) = \delta = 1/\tau$ (viz předchozí kapitola), dostáváme, že v rezonanci je poměr amplitud napětí na cívce a na rezistoru je $\omega_0 \tau / 2 = Q/2$, kde Q je činitel jakosti rezonančního obvodu. V rezonanci je přitom napětí na rezistoru rovno napětí na celém obvodu. Takže:

> V rezonanci je poměr amplitud napětí na cívce (nebo kondenzátoru) k amplitudě napětí přivedeného na sériový RLC obvod roven $Q/2$.

To je další, docela názorná interpretace činitele jakosti.

Shrnutí

Reálná a komplexní symbolika pro popis střídavého proudu:

$U(t) = U_m \cos(\omega t) = \mathrm{Re}\left(\hat{U}(t)\right)$,

$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) = \mathrm{Re}\left(\hat{I}(t)\right)$

$\hat{U}(t) = \hat{U}_m \cdot e^{i\omega t}$ (zde $\hat{U}_m = U_m$ je reálné)

$\hat{I}(t) = \hat{I}_m e^{i\omega t} = I_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = I_m e^{i(\omega t + \varphi)}$, $I_m = \left|\hat{I}_m\right|$

rezistor: $U_m = R I_m$, | $\hat{U}_m = R \hat{I}_m$, $\boxed{\hat{Z}_R = R}$ proud a napětí jsou ve fázi ($\varphi = 0$)

kondenzátor: $U_m = X_C I_m$, $X_C = \dfrac{1}{\omega C}$ | $\hat{U}_m = \hat{Z}_C \hat{I}_m$, $\boxed{\hat{Z}_C = \dfrac{1}{i\omega C}}$ proud je před napětím o $T/4$ ($\varphi = \pi/2$)

cívka: $U_m = X_L I_m$, $X_L = \omega L$ | $\hat{U}_m = \hat{Z}_L \hat{I}_m$, $\boxed{\hat{Z}_L = i\omega L}$ proud se opožďuje za napětím o $T/4$ ($\varphi = -\pi/2$)

Komplexní veličiny poskytují informace jak o amplitudě, tak o fázi napětí a proudu.

Impedance $\hat{Z}$ dává informaci o jak o poměru amplitud napětí a proudu,
tak o fázovém posunutí mezi napětím a proudem.

Reálná cívka: posun fáze je menší než $\pi/2$ (90°) o ztrátový úhel δ, $\mathrm{tg}\,\delta = \dfrac{R}{\omega L}$; $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}_{\text{cívky}}$

Reálný kondenzátor: posun fáze je menší než $\pi/2$ (90°) o ztrátový úhel δ, $\mathrm{tg}\,\delta = \omega C R$; $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}_{\text{kond.}}$

Elektrolytické kondenzátory nepřipojujeme přímo na střídavé napětí!

> Elektrické obvody se střídavým proudem řešíme přesně stejně, jako elektrické obvody se stacionárním elektrickým proudem, jen místo hodnot odporů používáme komplexní impedance součástek a napětí a proudy popisujeme komplexním formalismem.

Příklady:

- dolnofrekvenční propust (propouští signály nižších frekvencí, potlačuje vyšší frekvence)
- hornofrekvenční propust (propouští signály vyšších frekvencí, potlačuje nižší frekvence)
- sériový RLC obvod: $\hat{Z} = R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}$; $\hat{I} = \hat{U}/\hat{Z}$ (pro $\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ je $\hat{Z} = R$, proud je největší, rezonance)

Důležité pojmy a koncepty:

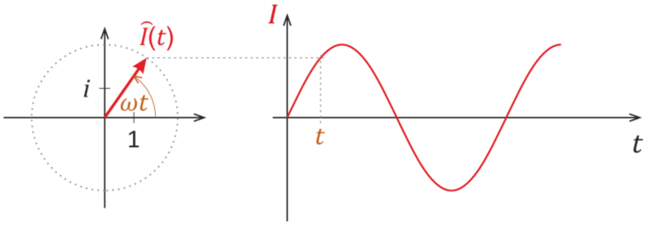
impedance $\hat{Z}$ (komplexní veličina; $1/\hat{Z} = \hat{Y}$ se nazývá admitance, je analogií vodivosti)

reaktance: kapacitní X_C (kapacitance), induktivní X_L (induktance) … reálné veličiny

fázory (grafické vyjádření amplitud a fází napětí, obvykle vůči proudu; sčítají se jako vektory)

Dodatek 10.A: Alternativní zavedení fázorů
(pro zájemce)

Někdy bývají fázory graficky zavedeny resp. ilustrovány poněkud jinak, než jsme to udělali my v části 10.3. Používá se k tomu obrázek následujícího typu:[75]



Skutečná hodnota proudu se počítá jako průmět rotujícího fázoru na svislou osu; graf časového průběhu má pak časovou osu vodorovnou a celý obrázek je názornější.

Pozorný čtenář může ale namítnout, že promítnout fázor na svislou osu v Gaussově rovině znamená vzít pro skutečný proud ***ryze imaginární*** složku příslušného komplexního vyjádření:

$$I(t) = \mathrm{Im}\left(\hat{I}(t)\right) = \mathrm{Im}\left(I_m \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\right) . \tag{10.A.1}$$

My jsme ale u napětí a proudu skutečné hodnoty brali vždy jako ***reálnou část*** komplexních hodnot:

$$I(t) = \mathrm{Re}\left(\hat{I}(t)\right) = \mathrm{Re}\left(I_m \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\right) \tag{10.A.2}$$

Tak jak to tedy je? Můžeme si dovolit vzít místo reálné části vzít část ryze imaginární? A pokud ano, proč?

Naštěstí je to jednoduché. Je totiž

$$\mathrm{Im}\left(\mathrm{e}^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left((-i)\cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{-i\frac{\pi}{2}} \cdot \mathrm{e}^{i\omega t}\right) = \mathrm{Re}\left(\mathrm{e}^{i(\omega t - \frac{\pi}{2})}\right) ,$$[76]

čili když vezmeme (10.A.1) místo (10.A.2), je to ekvivalentní fázovému posuvu resp. tomu, že čas začneme odečítat od trochu jiného okamžiku. V reálném vyjádření pak bude proud $I(t) = I_m \sin(\omega t)$ a nikoli $I(t) = I_m \cos(\omega t)$; opravdu jde o průběhy pouze posunuté o čtvrt periody.

Takže pokud bude v učebnicích, podle kterých budete učit, zavedení fázorů obrázkem podobného typu jako výše na této stránce, můžete ho směle používat.[77]

---

[75] Podobně jsou fázory zavedeny například v učebnici Halliday, Resnick, Walker: *Fyzika*.

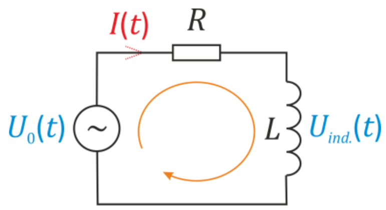
[76] Přesvědčte se, že to opravdu platí. Buď tak, že si rozepíšete komplexní jednotku pomocí sinů a kosinů, nebo že si uvědomíte, že pro komplexní číslo $a+bi$ platí $\mathrm{Im}(a+bi) = b = \mathrm{Re}\left((-i)\cdot(a+bi)\right)$.

[77] Nezavádí žádné jiné fázory s nějakými jinými, neznámými vlastnostmi. ☺

Dodatek 10.B: Ke znaménku ve vztazích pro napětí na cívce

(spíše pro zájemce, ale nejen pro ně)

V závěrečné poznámce v části 10.3 této kapitoly jsme stručně komentovali, proč když počítáme napětí na cívce podle vztahu $\hat{U}(t) = i\omega L\,\hat{I}(t)$, viz (10.18), vychází toto napětí s opačným znaménkem, než indukované napětí $U_{ind.} = -L\dfrac{dI}{dt}$.



Pojďme tuto „znaménkovou záležitost“ ilustrovat na konkrétním příkladu.[78] Uvažujme obvod, v němž sériově zapojený rezistor a cívka jsou napájeny ze zdroje střídavého proudu, viz schéma na obrázku.

Šipka ukazuje směr probíhání smyčky, který použijeme, když na obvod aplikujeme druhý Kirchhoffův zákon:

$$U_0(t) + U_{ind.}(t) = RI \ . \tag{10.B.1}$$

Zde bereme cívku jako další zdroj napětí, navíc ke zdroji střídavého napětí s napětím $U_0(t)$. Interpretace (10.B.1) je jasná: součet napětí zdrojů se rovná součtu úbytků napětí na spotřebičích. Spotřebičem je zde pouze rezistor.

Ve vztahu (10.B.1) můžeme ale převést $U_{ind.}$ na pravou stranu:

$$U_0(t) = RI + \left(-U_{ind.}(t)\right) \tag{10.B.2}$$

Označíme-li pak

$$\underline{U_L(t) = -U_{ind.}(t)\ ,} \tag{10.B.3}$$

bude (10.B.2) vypadat takto:

$$U_0(t) = RI + U_L(t)\ . \tag{10.B.4}$$

Na tento vztah se stále můžeme dívat jako na druhý Kirchhoffův zákon, jen zde už nyní vystupuje jediný zdroj a dva spotřebiče, rezistor a cívka. Na rezistoru je úbytek napětí RI, na cívce ***úbytek napětí*** $U_L(t)$. Z (10.B.3) je vidět, že tento úbytek má opačné znaménko, než $U_{ind.}$.

Je tedy $U_L(t) = -\left(-L\dfrac{dI}{dt}\right) = +L\dfrac{dI}{dt}$. V komplexním formalismu pak pro proud $\hat{I}(t) = I_m\,\mathrm{e}^{i\omega t}$ vychází $\hat{U}_L(t) = i\omega L\, I_m\,\mathrm{e}^{i\omega t} = i\omega L\,\hat{I}(t)$.[79]

Promyslete si sami, že tyto úvahy o zdrojích a úbytcích napětí nejsou žádný „podvod“ – a v učebnicích a dalších pramenech si dávejte pozor, které napětí autoři jak značí a co tím myslí.[80]

---

[78] Pro jistotu… Ono, když se se těmito věcmi člověk seznamuje, může mít dojem, že je v těch znaménkách trochu chaos. Není tomu tak – ale je potřeba vědět, co kterým napětím myslíme.

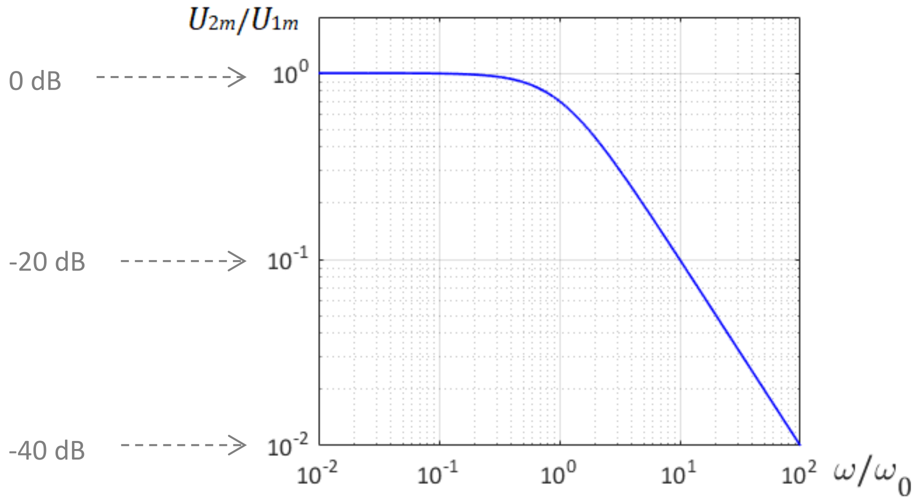
[79] Teď jsme vlastně podrobněji odvodili vztah v (10.18).

[80] Občas se bohužel stane, že značení se poněkud mění i v rámci jednoho textu. Ilustrují to ostatně i tyto „prozatímní učební texty“: V kapitole 9 jsme symbolem U_L pro stručnost značili indukované napětí $U_{ind.}$ (a U_L tedy bylo na straně zdrojů), v této kapitole symbolem U_L značíme úbytek napětí na cívce. (Autor tímto prosí laskavé čtenáře, aby tuto nekonzistentnost omluvili; časem snad značení trochu upravíme…)

Dodatek 10.C: Vyjádření poměru napětí v decibelech

V části 10.5 jsme viděli, že poměr napětí na výstupu a vstupu RC filtru se dá přehledně zobrazit v grafu, kde jak frekvence, tak poměr napětí jsou v logaritmických škálách.

Konkrétně pro dolnofrekvenční propust vypadá graf takto:



Poměr napětí vyjádřený logaritmicky se často vyjadřuje v **decibelech** (značka dB). Logaritmus se přitom užívá dekadický.[81] Poměr napětí vyjádřený v decibelech je

$$20\ \log\left(\frac{U_{2m}}{U_{1m}}\right) \quad . \tag{10.50}$$

Pokles napětí ***na jednu desetinu*** tedy znamená pokles ***o 20 decibelů***. (Pokles na jednu setinu znamená pokles o 40 dB, atd.)

Na grafu výše vidíme, že při vyšších frekvencích platí, že když se frekvence zvýší desetkrát, klesne poměr napětí na jednu desetinu, tedy o 20 dB. Techničtějším žargonem se říká, že jde o „pokles 20 dB na dekádu“. Nebo ještě jinak, že daný filtr má „strmost 20 dB na dekádu“. Ale to už jsou trochu technické detaily, pokud byste je potřebovali, s užívaným názvoslovím se jistě seznámíte sami.[82]

Za zmínku stojí, že v decibelech se často vyjadřují i jiné veličiny – v akustice například akustický tlak[83]. Přesněji řečeno, vyjadřuje se tak poměr akustického tlaku k nějakému zvolenému (referenčnímu) tlaku.[84] Proto se hlasitost zvuku měří v decibelech.

[81] Pro zájemce: V teoretičtějších pracích se někdy užívá přirozený logaritmus, jednotkou pak je *neper* (značka Np).

[82] Například v elektroakustice se často místo o „poklesu na dekádu“ mluví o „poklesu na oktávu“, tedy když frekvence stoupne na dvojnásobek. (Tón, jehož frekvence je dvakrát vyšší, vnímáme jako stejný tón o oktávu výše, odtud označení „na oktávu“.) Strmosti 20 dB/dekádu odpovídá 6 dB/oktávu. (Ne úplně přesně, 20 log 2 je asi 6,02; ale rozdíl je jen malý.)

[83] To je amplituda změn tlaku díky tomu, že zní nějaký zvuk.

[84] V daném případě jde o tlak $2{\cdot}10^{-5}$ Pa, ale to už jsme od elektřiny a magnetismu opravdu docela daleko.