Střídavé proudy II

Význam střídavých proudů v moderní civilizaci jsme už zdůraznili v úvodu minulé kapitoly. V této kapitole si všimneme témat více související s rozvodem elektrické energie.

Jak jsme slíbili, podíváme se na výkon střídavého proudu, třífázový proud a na transformátory. Těm se budeme věnovat nejprve na té nejjednodušší úrovni, ale pak zabrousíme trochu hlouběji. V posledních částech kapitoly jsou proto některé části označeny hvězdičkou – ne že by byly mládeži nepřístupné, ale odvození v nich mohou být brány jako spíše „rozvíjející“ partie. Na druhou stranu, výsledky z nich plynoucí jsou důležité a věřme i zajímavé nejen pro skalní zájemce o problematiku transformátorů.[1]

Na co se v souvislosti s danými tématy můžeme ptát a co může být lidem nejasné? Například:

- Jak je to s hodnotami napětí v síti? Mluví se o 230 V a 400 V, jak spolu souvisí?
- Když budu mít kondenzátor, na kterém je napsáno, že vydrží napětí 300 V, mohu ho připojit k síťovému napětí 230 V?
- A když k síti připojím kondenzátor, který to vydrží, jak velký výkon spotřebovává?
- Multimetry přepnuté na měření střídavého napětí ukazují jeho efektivní hodnotu. Zvládnou to i pro napětí, jehož průběh není sinusový? A jaká je vlastně v tomto případě efektivní hodnota?
- Proč se pro přenos elektrické energie na velké vzdálenosti používá vysoké napětí? Vždyť vztah pro výkon, který se na rezistoru mění na teplo je U^2/R, odpor vedení je pořád stejný, tak ten „ztracený“ výkon bude při vyšším napětí větší, nebo ne?[2]
- Proč jsou transformátory tak velké a těžké? A jak to, že v nabíječkách nebo zdrojích pro notebooky jsou pro stejně velké výkony transformátorky malé a mnohem lehčí?

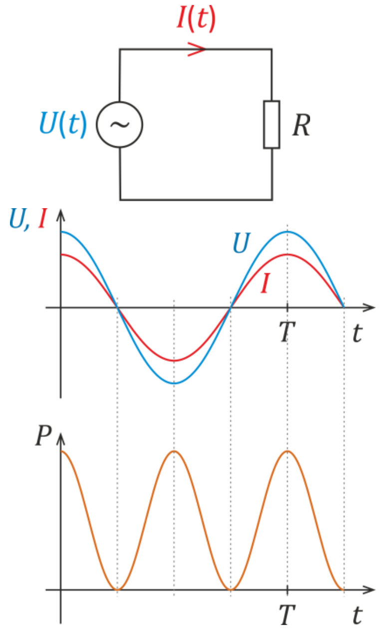
Takže, s chutí do toho!

[1] Ti by nám s lehkým úsměvem řekli, že tady nijak do hloubky nejdeme a vlastně prezentujeme věci spíš základní. A ono to nijak obtížné nebude – když jsme zvládli třeba vektorový potenciál, tak tady to bude vlastně „brnkačka“.

[2] Zkušenost říká, že v tomhle má řada lidí opravdu zmatek.

11.1 Výkon střídavého proudu

Výkon na rezistoru



Spočítáme, jaký výkon má střídavý proud, když teče rezistorem o odporu R.[3] Napětí na rezistoru je

$$U(t) = U_m \cos(\omega t)\ .^4$$

Proud je dán Ohmovým zákonem jako $I(t) = U(t)/R$, takže

$$I(t) = I_m \cos(\omega t)\ .$$

Okamžitý výkon v čase *t* je dán součinem napětí a proudu:

$$P(t) = U(t)\cdot I(t) = U_m I_m \cos^2(\omega t) \qquad (11.1)$$

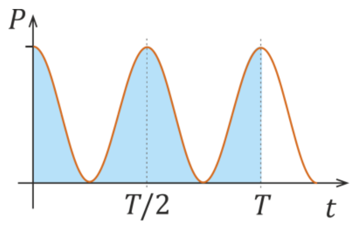
Časový průběh napětí, proudu a okamžitého výkonu ukazují grafy.

Pokud je rezistorem například topné těleso varné konvice nebo topná spirála elektrického radiátoru, nezajímá nás většinou okamžitý výkon. Zajímá nás spíš, za jak dlouho si uvaříme vodu na čaj; informaci, jak se výkon mění v průběhu jedné periody, můžeme oželet. Důležitý pro nás tedy je nikoli okamžitý, ale **střední výkon** $\overline{P}$.

Střední výkon určíme tak, že spočteme práci W vykonanou elektrickým proudem za určitý čas t_{konc} , $W = \int_0^{t_{\text{konc}}} P(t)\,dt$, a vydělíme ji tímto časem: $\overline{P} = W/t_{\text{konc}}$.

Čas t_{konc} bychom mohli vzít třeba 200 sekund (doba ohřátí vody na čaj). To je ale zbytečně dlouho, stačí vzít jednu periodu.[5] Střední výkon tedy je

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt\ .} \qquad (11.2)$$



Graficky je práce proudu dána plochou pod křivkou za jednu periodu, viz obrázek. Po dosazení (11.1) dostáváme[6]

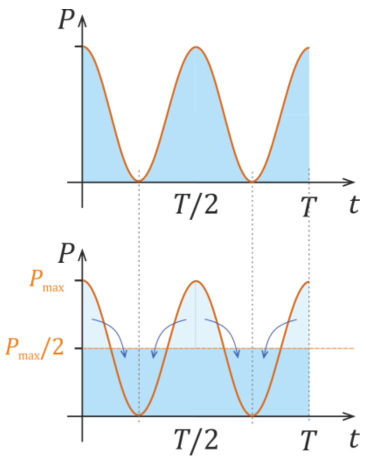
$$\begin{aligned}\overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T U_m I_m \cos^2(\omega t)\,dt = U_m I_m \frac{1}{T}\int_0^T \tfrac{1}{2}\big(1+\cos(2\omega t)\big)\,dt = \\ &= \frac{U_m I_m}{2}\left\{\frac{1}{T}\underbrace{\int_0^T dt}_{=T} + \frac{1}{T}\underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt}_{=0}\right\} = \frac{1}{2}U_m I_m\ .\end{aligned} \qquad (11.3)$$

[3] Do velké míry asi půjde o opakování toho, co už znáte ze střední školy. Ale pár věcí snad přidáme, zejména v Dodatku A.

[4] Perioda je $T = 1/f = \omega/(2\pi)$. U_m je amplituda napětí; analogicky označíme amplitudu proudu jako I_m.

[5] 200 s znamená (při frekvenci 50 Hz) 10 tisíc period a v každé periodě se průběh opakuje stejně. Tak proč integrovat desetitisíc krát totéž.

[6] Při úpravách využíváme toho, že $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$. Navíc $\int_0^T \cos(2\omega t)\,dt = (1/2\omega)\left[\sin(2\omega t)\right]_0^T = 0$, protože $\sin(2\omega T) = \sin(2\cdot 2\pi f T) = \sin(4\pi) = 0$.



Totéž ale můžeme názorně odvodit středoškolsky, z představy, že práce je dána jako plocha pod křivkou grafu $P = P(t)$.

Z obrázku vidíme, že tato plocha je stejná, jako plocha obdélníka o délce T a výšce $P_{max}/2$: $W = T \cdot P_{max}/2$. Střední výkon je $\overline{P} = W/T = P_{max}/2$.

Maximální výkon je samozřejmě $P_{max} = U_m I_m$, takže

$$\boxed{\overline{P} = \frac{1}{2} U_m I_m ,} \tag{11.4}$$

stejně jako to vyšlo výpočtem (11.3).

Vztah (11.4) je **střední výkon střídavého elektrického proudu harmonického průběhu na rezistoru**[7], když amplituda napětí je U_m a amplituda proudu I_m.[8]

Protože $I_m = U_m/R$, můžeme (11.4) přepsat na tvar $\overline{P} = U_m^{\ 2}/(2R)$ a dále na $\overline{P} = \left(U_m/\sqrt{2}\right)^2/R$.

Odtud vidíme, že je výhodné zavést **efektivní napětí** (a podobně i efektivní proud):

$$\boxed{U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}, \qquad I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} .} \quad ^{9} \tag{11.5}$$

Střední výkon střídavého proudu na rezistoru se pak s pomocí efektivních hodnot vyjádří jednoduše:

$$\boxed{\overline{P} = U_{ef} I_{ef} = \frac{U_{ef}^{\ 2}}{R} = R I_{ef}^{\ 2} ,} \tag{11.6}$$

tedy stejnými vztahy, které platily pro výkon stacionárního elektrického proudu.

Napětí 230 V v elektrické síti v ČR je právě efektivní napětí. Amplituda napětí je $U_m = \sqrt{2} U_{ef} = \sqrt{2} \cdot 230\ \text{V} \doteq 325\ \text{V}$.

Obecně je efektivní napětí definováno tak, že stejnosměrné napětí této hodnoty dává na rezistoru stejný výkon, jako je střední výkon $\overline{P}$ střídavého napětí. Musí tedy být $\dfrac{U_{ef}^{\ 2}}{R} = \overline{P} = \dfrac{1}{T} \displaystyle\int_0^T \frac{U^2(t)}{R} dt$.

Odtud dostáváme obecný vztah pro efektivní hodnotu napětí:[10]

$$\boxed{U_{ef}^{\ 2} = \frac{1}{T} \int_0^T U^2(t)\, dt ,} \tag{11.7}$$

resp. samozřejmě

$$U_{ef} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T U^2(t)\, dt} . \tag{11.8}$$

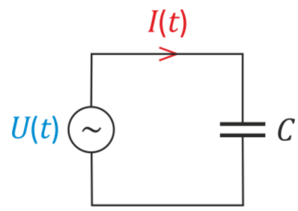
[7] Často se explicite neříká, že jde o střední výkon a že průběh musí být harmonický, a mluví se jen o *výkonu střídavého proudu na rezistoru*.

[8] Pozor, pro průběhy napětí, které nejsou harmonické, tento vzorec obecně neplatí. Blíže viz Dodatek A.

[9] Tyto vztahy také platí jen pro harmonický průběh napětí a proudu.

[10] Tento vztah platí i pro neharmonické průběhy napětí, viz Dodatek A. Díky takto zavedené velikosti efektivního napětí je střední výkon na rezistoru i pro neharmonické průběhy dán vztahy (11.6).

Výkon na ideálním kondenzátoru



Jaký je výkon, když střídavé napětí přivedeme na kondenzátor? Napětí je

$$U(t) = U_m \cos(\omega t) \ , \qquad (11.9)$$

proud je[11]

$$I(t) = -\omega C U_m \sin(\omega t) \ . \qquad (11.10)$$

Okamžitý výkon je tedy

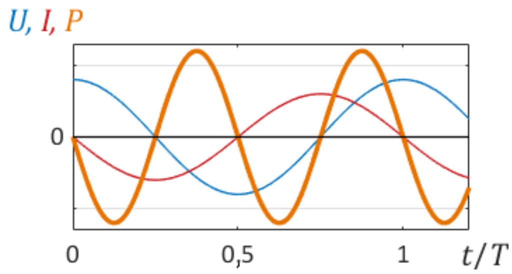
$$P(t) = U(t)I(t) = -\omega C U_m^{\ 2} \sin(\omega t)\cos(\omega t) = -\tfrac{1}{2}\omega C U_m^{\ 2} \sin(2\omega t) \ . \qquad (11.11)$$

Střední výkon je tedy (dosazením do (11.2) a úpravami[12]):

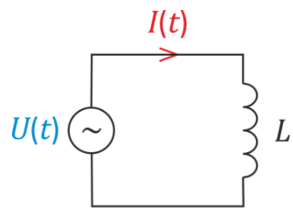
$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = -\tfrac{1}{2}\omega C U_m^{\ 2}\,\frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = 0 \ . \qquad (11.12)$$

Čili: **Střední výkon střídavého proudu na ideálním kondenzátoru je nulový**.

Proč je střední výkon nulový, je dobře vidět na grafu časového průběhu, do něhož spolu s napětím a proudem vyneseme také okamžitý výkon (sinější tmavě žlutá křivka). Výkon je v části periody kladný a v části záporný – energie tedy chvíli do kondenzátoru přitéká (když se kondenzátor nabíjí) a pak (když se kondenzátor vybíjí) z něj zase vytéká zpět do obvodu.



Výkon na ideální cívce



Podívejme se na výkon na cívce. Napětí je dáno (11.9), proud je[13]

$$I(t) = \frac{1}{\omega L} U_m \sin(\omega t) \ . \qquad (11.13)$$

Okamžitý výkon je

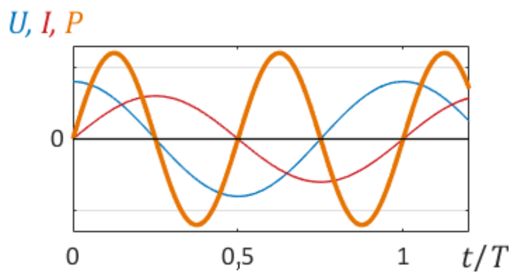
$$P(t) = U(t)I(t) = \frac{1}{\omega L} U_m^{\ 2} \sin(\omega t)\cos(\omega t) = \frac{1}{2\omega L} U_m^{\ 2} \sin(2\omega t)$$

a střední výkon: $$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt = \frac{1}{2\omega L} U_m^{\ 2}\,\frac{1}{T}\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = 0 \qquad (11.14)$$

Čili podobně jako u kondenzátoru:

Střední výkon střídavého proudu na ideální cívce je nulový.

Energie se rovněž přelévá do cívky a z ní zase zpět do obvodu, jak je to ukazuje graf časového průběhu okamžitého výkonu.

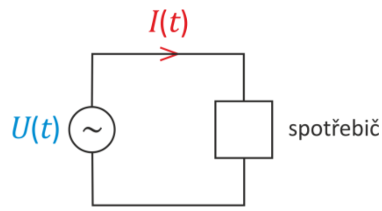


[11] Viz předchozí kapitolu nebo výpočet $I = \frac{dQ}{dt} = \frac{d}{dt}(CU) = \frac{d}{dt}(C U_m \cos(\omega t))$.

[12] Využíváme toho, že integrál z periodické funkce přes periodu je roven nule; integrál také můžeme explicite vyjádřit jako $-\int_0^T \sin(2\omega t)\,dt = \frac{1}{2\omega}\left[\sin(2\omega t)\right]_0^T = \frac{1}{2\omega}\left[\sin(2\omega T) - \sin 0\right] = 0$, když uvážíme, že $\omega = 2\pi f = 2\pi/T$.

[13] Viz předchozí kapitolu.

Výkon na spotřebiči s obecným fázovým posunem



Co když je na spotřebiči proud oproti napětí fázově posunut o obecnou hodnotu φ? [14] Napětí na spotřebiči je

$$U(t) = U_m \cos(\omega t) \ , \qquad (11.15)$$

proud spotřebičem

$$I(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi) \ . \qquad (11.16)$$

Střední výkon je[15]

$$\begin{aligned}
\overline{P} &= \frac{1}{T}\int_0^T U(t)\,I(t)dt = \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,dt = \\
&= \frac{U_m I_m}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\left[\cos(\omega t)\cos\varphi - \sin(\omega t)\sin\varphi\right]dt = \\
&= \frac{U_m I_m}{T}\cos\varphi \underbrace{\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt}_{=\frac{T}{2}} - \frac{U_m I_m}{T}\sin\varphi \underbrace{\int_0^T \cos(\omega t)\sin(\omega t)\,dt}_{=0} = \\
&= \frac{U_m I_m}{2}\cos\varphi = U_{ef}\,I_{ef}\cos\varphi \ .
\end{aligned}$$

Střední výkon na spotřebiči s fázovým posunutím φ proudu vůči napětí je tedy

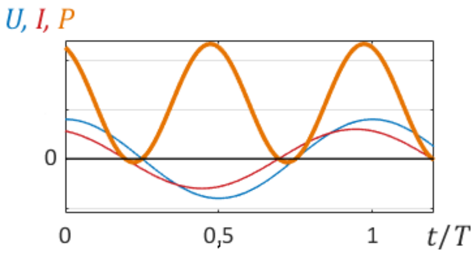
$$\boxed{\overline{P} = U_{ef}\,I_{ef}\cos\varphi \ .} \qquad (11.17)$$

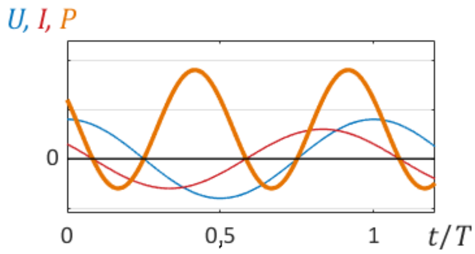
Faktor $\cos\varphi$ se nazývá **účiník**.

Z obecného vztahu (11.17) samozřejmě plynou konkrétní vztahy pro výkon na rezistoru, kondenzátoru a cívce. Na rezistoru je $\varphi = 0$, takže $\cos\varphi = 1$ a výkon je $\overline{P} = U_{ef}\,I_{ef}$; na kondenzátoru a cívce je $\varphi = \pi/2$ resp. $-\pi/2$, takže $\cos\varphi = 0$ a výkon je $\overline{P} = 0$.[16]

Pro reálnou cívku se ztrátovým úhlem δ je $\varphi = \pi/2 - \delta$, takže $\cos\varphi = \sin\delta$. Větší ztrátový úhel tedy opravdu znamená větší výkon „ztracený na teplo".

Grafy ukazují průběhy napětí, proudu a okamžitého výkonu pro fázové posuvy 20° ($\cos\varphi \doteq 0{,}94$) a 60° ($\cos\varphi = 0{,}5$):





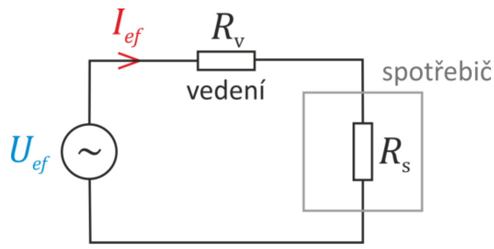
[14] Spotřebičem může být reálná cívka, kombinace cívek, kondenzátorů a rezistorů nebo třeba elektrický motor, který koná nějakou práci.

[15] Při úpravách využíváme toho, že $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\,\cos\beta - \sin\alpha\,\sin\beta$; integrály, jejichž hodnotu potřebujeme určit, jsou stejné jako v případě rezistoru a kondenzátoru nebo cívky.

[16] Výkon by tedy šel odvodit od začátku pro obecný fázový posuv a pak jen specifikovat konkrétní případy. My jsme v tomto textu při výkladu raději postupovali pomaleji, podle zásady „od konkrétního k obecnému". Můžete si vybrat, který postup je vám bližší.

Proč se pro dálkový přenos elektrické energie používá vysoké napětí

Proč se pro přenos energie používají vedení vysokého napětí, je v zásadě jednoduché vysvětlit, přesto v tom má občas někdo nejasnosti.



Princip rozebereme na jednoduchém obvodu, který ukazuje schéma. Výkon odebíraný ze zdroje je[17]

$$\overline{P} = U_{ef}\, I_{ef} \quad . \qquad (11.18)$$

Část výkonu se ovšem spotřebuje na ohřátí vodičů tvořících vedení. Tento výkon je

$$\overline{P}_{\text{„ztracený“ ve vedení}} = R_V\, I_{ef}^{\ 2} \ , \qquad (11.19)$$

kde R_V je ***odpor vedení***.[18]

Ztráty (11.19) chceme co nejmenší. Řešením by bylo snížit odpor vedení, ovšem to by vyžadovalo vodiče o větším průřezu, což by bylo dražší, těžší vodiče by více zatěžovaly stožáry… a při výkonech, které se přenášejí, by takovéto řešení nebylo prakticky realizovatelné.[19]

Takže je potřeba snížit proud vedením. Má-li se přenést potřebný výkon, znamená to zvýšit napětí. To znamená u elektrárny napětí transformovat na vysoké napětí a poblíž místa spotřeby ho zase transformovat na nižší; postupně až na 230 V, které máme v zásuvkách.

Výhodnost tohoto řešení je jasná z jednoduché úvahy: desetkrát vyšší napětí znamená při stejném výkonu desetkrát menší proud, a tedy podle (11.19) stokrát menší ztráty. Tisíckrát vyšší napětí … ale to už je jasné.

V ČR se pro dálkový přenos elektrické energie používají vedení velmi vysokého napětí 400 kV, 220 kV a 110 kV, pro další distribuci pak zejména vedení vysokého napětí 22 kV.[20]

Dosud jsme uvažovali, že spotřebič má charakter rezistoru. Ale i kdyby spotřebičem bylo zařízení, které by způsobovalo fázový posuv a účiník $\cos\varphi$ byl třeba 0,5, ztráty ve vedení by to nezmenšilo, stále by byly dány protékajícím proudem podle (11.19). Situace by byla vlastně ještě horší: aby výkon na spotřebiči (daný (11.17)) byl při nižším účiníku stejný, musel by proud být větší – a větší proud znamená vyšší ztráty ve vedení. Proud, který není ve fázi s napětím, tedy znamená vyšší ztráty.[21]

---

[17] Spotřebič zde považujeme za „ohmickou zátěž“, takže účiník je roven 1.

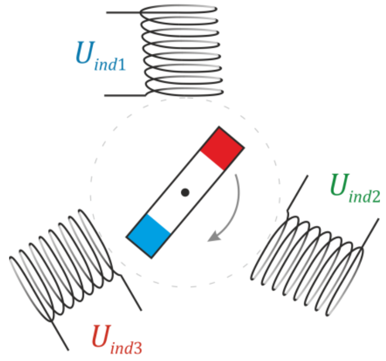
[18] Důvod, proč v této problematice má občas někdo nejasnosti, tkví v tom, že buď zaměňuje odpor vedení a odpor spotřebiče nebo použije vztah U^2/R_V , ale za U bere celé napětí zdroje. Ovšem na vodiči je úbytek napětí jen $R_V\, I$, což je výrazně méně, než je napětí zdroje. (Jinak by na spotřebič nic nezbylo. ☺)

[19] Zkuste si spočítat, jaké by muselo být vedení, které by užívalo napětí 230 V a přeneslo výkon řekněme 230 MW (to je ani ne čtvrtina výkonu jednoho temelínského bloku). Proud by byl 10^6 A. I při kabelech o průměru 1 m (!) by ztráty na vedení dlouhém jen pět a půl kilometru činily asi 50 % dodaného výkonu.
Řešením by samozřejmě bylo použít supravodivé kabely. O tom se uvažuje, ale zatím je to hudba budoucnosti.

[20] Zájemci si mohou podrobnosti najít na řadě webových stránek, například na vzdělávacím portálu *Svět energie* společnosti ČEZ (https://www.svetenergie.cz/).

[21] Část proudu, která je vůči napětí fázově posunutá o 90° bývá označována jako ***jalový proud***. Snahou je, aby jalový proud byl co nejmenší, a účiník se tedy co nevíce blížil k 1. Fázový posuv na spotřebičích indukčního charakteru se proto v průmyslových podnicích kompenzuje připojením vhodných kondenzátorů.

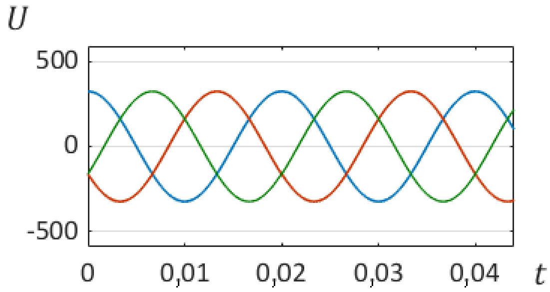
11.2 Třífázový proud



V kapitole 8 jsme si uvedli princip generátoru střídavého proudu (alternátoru): rotující magnet se otáčí mezi cívkami statoru a indukuje v nich střídavé napětí.

V generátorech v elektrárnách se používá zapojení, jehož princip ukazuje obrázek: tři cívky vzájemně otočené o 120°. Při otáčení magnetu rotoru se v nich indukují střídavá napětí fázově posunutá také o 120°, tedy o třetinu periody. Mluvíme o **třífázovém napětí**. To se pak rozvádí do elektrické sítě.[22]

Reálně je konstrukce alternátorů samozřejmě výrazně složitější.[23] Do technických detailů zde ale nebudeme zabíhat, postačí nám základní princip.



Průběh jednotlivých napětí v závislosti na čase ukazuje graf. Čas je vynesen v sekundách, napětí ve voltech, hodnoty odpovídají tomu, co je v rozvodné síti (v třífázové zásuvce):[24]

$$\begin{aligned} U_1(t) &= U_m \cos(\omega t) \\ U_2(t) &= U_m \cos(\omega t - 2\pi/3) \\ U_3(t) &= U_m \cos(\omega t - 4\pi/3) \end{aligned} \qquad (11.20)$$

Těmto napětím říkáme **fázová napětí**. Efektivní hodnota fázových napětí je 230 V.[25] U_m je amplituda těchto napětí; jak jsme už uvedli, je $U_m = \sqrt{2}\,U_{ef} \doteq 325\,\mathrm{V}$.

Zajímavou a důležitou vlastnost trojfázového napětí objevíme, když sečteme všechna tři napětí:[26]

$$\begin{aligned} U_1(t)+U_2(t)+U_3(t) &= U_m\left\{\cos(\omega t)+\cos(\omega t-2\pi/3)+\cos(\omega t-4\pi/3)\right\} = \\ &= U_m\left\{\cos(\omega t)+2\underbrace{\cos(\omega t-\pi)}_{=-\cos(\omega t)}\underbrace{\cos(\pi/3)}_{=1/2}\right\} = 0 \end{aligned} \qquad (11.21)$$

Jednodušeji lze výpočet provést v komplexním formalizmu:

$$\widehat{U}_1+\widehat{U}_2+\widehat{U}_3 = U_m\left(\mathrm{e}^{i\omega t}+\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-i(2\pi/3)}+\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{e}^{-i(4\pi/3)}\right) = U_m\mathrm{e}^{i\omega t}\left[1+\left(-\tfrac{1}{2}+i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(-\tfrac{1}{2}-i\tfrac{\sqrt{3}}{2}\right)\right] = 0\,. \qquad (11.22)$$

---

[22] Ostatně se o tom zpívá v již výše vzpomenuté písničce: „Jedna fáze, druhá fáze, třetí pěkně vedle ní…“.

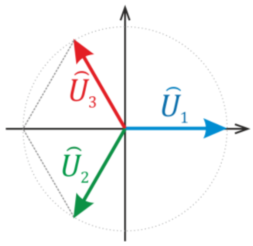
[23] Tyčový magnet nakreslený na našem obrázku by při otáčení neindukoval v cívkách harmonický, ale značně zkreslený průběh napětí. Harmonického průběhu se dosahuje vhodnými pólovými nástavci. Pólů rotoru může být více, takže za jednu otáčku proběhne více period střídavého napětí. (To je výhodné proto, že rotor se nemusí otáčet 50-krát za sekundu, ale pomaleji, toho se využívá ve vodních elektrárnách.)

[24] U napětí už explicite nevyznačujeme, že jde o napětí indukovaná, i když v obrázku jsme to psali.

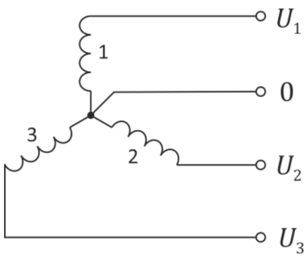
[25] Jde o hodnotu napětí u konečného spotřebitele, tedy v zásuvce. Samozřejmě, při větším zatížení sítě nebo někde na konci dlouhého přívodního vedení může být napětí o něco nižší, jindy zase poněkud vyšší. Na webu lze najít informaci, že za normálních provozních podmínek má být napětí v toleranci ± 10 %. (Viz např. https://www.eon-distribuce.cz/navod-na-pouzivani-elektriny.) Ono ani frekvence 50 Hz není hodnota, která by platila stále a na nekonečný počet desetinných míst. ☺ Uvádí se tolerance 1 %; výrobci elektřiny se navíc snaží dosáhnout toho, aby v dlouhodobém průměru byla skutečná frekvence síťového napětí opravdu 50 Hz.

[26] Při úpravách využíváme vztahy $\cos\alpha+\cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ a $\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$.

Názorně[27] je to vidět na fázorovém diagramu. Fázový posun $2\pi/3$ je 120°. Jasně je vidět, že $\widehat{U}_2 + \widehat{U}_3 = -\widehat{U}_1$. Vektorový součet fázorů dá proto nulu.

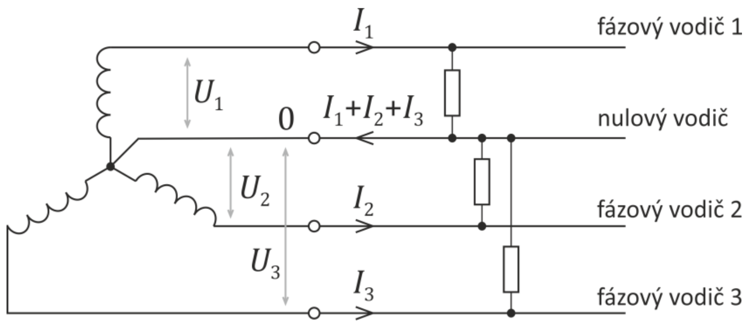


Za chvíli se k tomuto důležitému výsledku vrátíme. Nejdřív si ale všimneme toho, jak se cívky generátoru napětí spojují a jak se proud dále rozvádí.



Jeden konec všech cívek je spojen dohromady a vede k odběratelům jako **nulový vodič**. Ke druhým koncům cívek jsou připojeny **fázové vodiče**. Na nich jsou (oproti nulovému vodiči) napětí U_1, U_2, U_3.

Proudy v jednotlivých fázových vodičích označíme I_1, I_2 a I_3.[28] Nulovým vodičem se proud vrací, takže proud nulovým vodičem je součtem proudů v jednotlivých fázových vodičích, tedy $I_1 + I_2 + I_3$. (Plyne to ostatně z prvního Kirchhoffova zákona pro uzel spojující přívody cívek generátoru a nulový vodič.) Situaci ukazuje schéma, spotřebiče jsou tam symbolicky vyznačeny jako rezistory:[29]



A teď to důležité: Jestliže jsou zátěže v jednotlivých fázích rozděleny rovnoměrně (a proudy jsou s napětími ve fázi[30]), budou amplitudy proudů ve všech fázích stejné a budou navzájem posunuty o 120°, stejně jako napětí. A stejně jako napětí dají dohromady nulu:

$$I_1(t) + I_2(t) + I_3(t) = 0 \; . \qquad (11.23)$$

To znamená, že při vyrovnaných zátěžích nepoteče nulovým vodičem žádný proud! A i reálně (při ne zcela vyrovnaných zátěžích) poteče nulovým vodičem výrazně menší proud, než vodiči fázovými.

Tady vidíme jednu výhodu třífázového proudu:

Kdybychom od elektrárny ke spotřebitelům vedli jenom jednu fázi, potřebovali bychom dva stejně silné vodiče[31]. V případě třífázového vedení máme tři fázové vodiče (a jeden nulový, který může mít menší průřez) – a ty přitom přepraví ke spotřebitelům třikrát větší výkon než v případě jedné fáze! To není špatné, pro přepravu třikrát většího výkonu potřebovat ani ne dvakrát víc materiálu vodičů!

[27] A bez nutnosti pracovat s komplexními čísly.

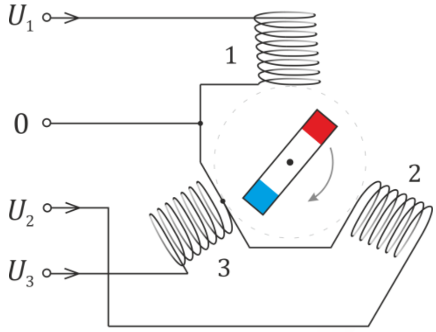
[28] Myslíme tím proudy v jednom konkrétním čase t, zde už explicite nepíšeme $I_1(t)$ apod., podobně je tomu pro napětí.

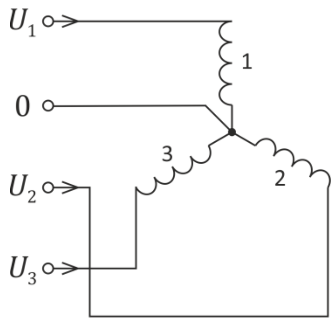
[29] V tomto schématu pomíjíme, že ve skutečnosti se napětí u elektrárny transformuje, pak se vedením vysokého napětí rozvádí a poblíž spotřebitelů zase transformuje dolů na běžné síťové napětí. Není to podstatné pro princip následující úvahy.

[30] Toto bude rozumně splněno protože, jak už jsme uvedli výše, dbá se, aby účiník byl blízký jedničce.

[31] „Tam a zpátky“, elektrický obvod musí být uzavřen.

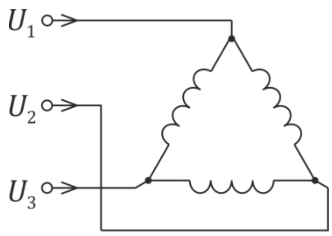
Další výhodou je skutečnost, že třífázový proud zavedený do třech cívek vzájemně otočených o 120° vytvoří točivé magnetické pole, a toho můžeme využít v elektrických motorech. Jde vlastně o analogickou situaci, jakou jsme výše popsali u třífázového generátoru – tam jsme ale otáčeli magnetem a v cívkách se indukovalo napětí. V motoru do cívek přivádíme proud, ty vytvoří točivé magnetické pole. Když je na ose permanentní magnet, bude se otáčet. To je princip **synchronního motoru**. Magnet se při něm otáčí synchronně s rotací magnetického pole. Zapojení cívek statoru, které ukazujeme na obrázcích, se celkem přirozeně nazývá **zapojení do hvězdy**.





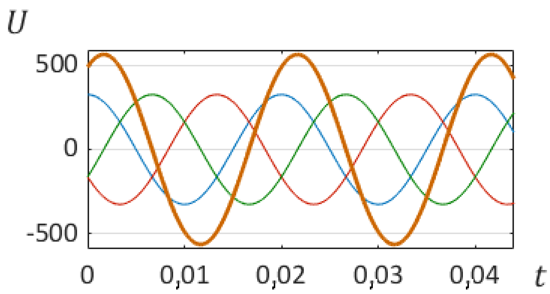
Druhý základní typ motorů na třífázový proud jsou **asynchronní motory**. V nich je rotorem místo magnetu soustava propojených vodičů[32]. Díky otáčení magnetického pole se v nich indukují proudy a ty působí proti změně, která je vyvolala. Můžeme si představit, že indukované proudy se snaží dosáhnout toho, aby byl rotor vůči otáčejícímu se magnetickému poli v klidu. Rotor se proto roztočí. Kdyby se ale točil stejně rychle jako magnetické pole, nic by se v jeho vodičích neindukovalo. Na rotor by tedy nepůsobila žádná síla (resp. moment síly) a motor by nekonal žádnou práci. Reálně se proto rotor otáčí o něco pomaleji než magnetické pole.[33]

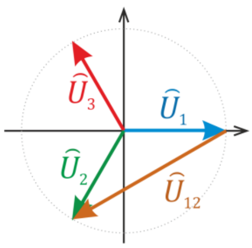
Cívky statoru třífázového motoru[34] můžeme zapojit ještě jedním způsobem: **do trojúhelníka**.



Při tomto zapojení jsou na cívkách rozdíly fázových napětí, například $U_{12}(t) = U_1(t) - U_2(t)$. Tato napětí se nazývají **sdružená**.

Časový průběh sdruženého napětí U_{12} ukazuje graf (je v něm zobrazeno tmavší žlutou barvou). Je vidět, že sdružené napětí má větší amplitudu, než je amplituda fázových napětí. (Stejně je tomu pro efektivní hodnoty.)





Je to vidět i z fázorového diagramu. Jednoduše z něj lze odvodit, že $\left|\hat{U}_{21}\right| = \sqrt{3}\left|\hat{U}_1\right|$.[35]

Pro (efektivní) fázové napětí 230 V je tedy efektivní hodnota sdruženého napětí $\sqrt{3} \cdot 230\,\mathrm{V} \doteq 400\,\mathrm{V}$. (Jeho amplituda je asi 566 V.)

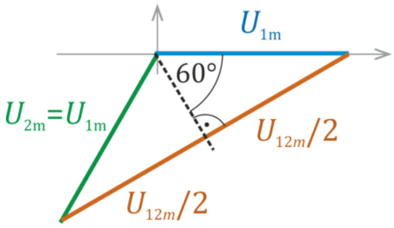
[32] Vyhledejte si na webu heslo *kotva nakrátko*, resp. *kotva klecová*, najdete tam obrázky hezčí, než by se podařilo vytvořit do tohoto textu.

[33] Je tedy jasné, proč se tento motoru nazývá asynchronní. Relativnímu rozdílu otáček se říká *skluz*; měří se obvykle v procentech, se zatížením motoru roste.

[34] Ať synchronního, nebo asynchronního.

[35] Zkuste si to sami dřív, než se podíváte na další stránku.

Pro výpočet vztahu mezi sdruženým a fázovým napětím můžeme vyjít z trojúhelníka ve fázorovém diagramu. (Na obrázku vlevo je nakreslen pro amplitudy napětí, ale přesně stejné poměry jsou mezi efektivními hodnotami.) Je vidět, že $U_{12m}/2 = U_{1m}\sin 60^\circ = U_{1m}\sqrt{3}/2$, takže opravdu



$$U_{12m} = \sqrt{3}U_{1m} \doteq 1{,}73\,U_{1m}\ . \qquad (11.24)$$

Samozřejmě lze také vyjít ze vztahů v komplexním formalismu $\widehat{U}_1 = U_m e^{i\omega t}$, $\widehat{U}_2 = U_m e^{i\omega t} e^{i(-2\pi/3)}$ a vypočítat $\left|\widehat{U}_1 - \widehat{U}_2\right| = U_m\left|1 - e^{i(-2\pi/3)}\right| = U_m\left|1 - \cos(-2\pi/3) + i\sin(-2\pi/3)\right| = U_m\left|1 + 1/2 + i\sqrt{3}/2\right| =$
$= U_m\sqrt{(3/2)^2 + (\sqrt{3}/2)^2} = U_m\sqrt{12/4} = U_m\sqrt{3}$. [36]

Sdružené napětí je tedy vyšší než fázové, proto se statorové cívky třífázových motorů často zapojují do trojúhelníku, motor má pak větší výkon, než kdyby byly stejné cívky zapojeny do hvězdy. (Dokonce se někdy mezi oběma zapojení přepíná: při zapínání motoru jsou cívky zapojeny do hvězdy, aby se omezil proudový náraz po zapnutí, pak se přepnou do trojúhelníku, aby měl motor plný výkon.)[37]

Poznamenejme, že problematiky motorů jsme se zde jen velmi lehce dotkli. Nezmínili jsme například ***jednofázové motory***. V nich není rotující pole, ale když už se rotor točí, i pole střídající orientaci ho dokáže pohánět. (Zejména pro rozběh se v nich kromě hlavní statorové cívky používá ještě pomocná cívka, v níž je proud fázově posunutý například pomocí kondenzátoru.[38]) Pak jsou zde samozřejmě ***stejnosměrné motory***, tedy motory na stejnosměrný proud. V nich se proud do rotoru přivádí pomocí kartáčků dosedajících na *komutátor*[39]. Pokud není stator tvořen permanentními magnety (jako je tomu například u malých hračkových motorků), má formu elektromagnetů. Podle vzájemného propojení cívek statoru a rotoru se rozlišuje několik typů motorů[40], ale to už jsou opravdu více technické záležitosti. ***Krokové motory*** mohou nastavit přesnou polohu rotoru. Jsou buzeny a řízeny pomocí elektronických obvodů.[41]

---

[36] Jak jsme už uvedli, stejný poměr je mezi efektivními hodnotami sdruženého a fázového napětí. Pozorný čtenář si možná už všiml, že 230·$\sqrt{3}$ není přesně 400 ale asi 398, ovšem tento rozdíl se ztratí v toleranci napětí v síti. Pro označování napětí je jistě pohodlnější užívat hodnoty zaokrouhlené na desítky voltů. (Ostatně, s hodnotami a tolerancemi napětí vzhledem k přechodu z dříve užívané hodnoty 220 V na 230 V je to vůbec zajímavé. Wikipedie uvádí odkaz na zdroj https://www.se.com/uk/en/faqs/FA144717/, kde si zájemci mohou přečíst o „harmonizaci" napětí mezi evropskými státy a Velkou Británií.)

[37] Na okraj ještě jedna „lingvistická" poznámka: V angličtině se zapojení neoznačují doslovnými překlady termínů „hvězda" a „trojúhelník", ale *configurations wye* (Y) a *delta* (Δ).

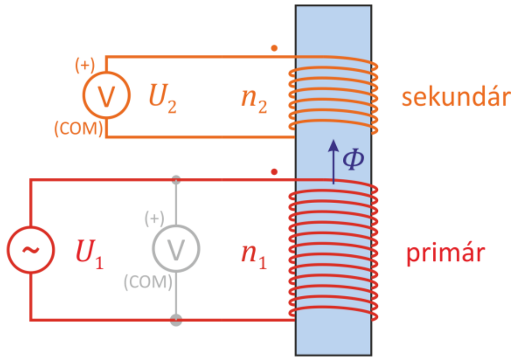
[38] Tohle není jediný způsob, který se v jednofázových motorech používá, ale to bychom už zabíhali do technických detailů – byť ono to není jen technické, pod každým řešením je vždy příslušný fyzikální princip.

[39] Takže proud tekoucí vinutím samotného rotoru mění polaritu (a je tedy vlastně střídavý).

[40] Pro zájemce: Označují se jako *sériové* (se sériovým buzením), *derivační* (s paralelním buzením) a *kompaundní* (se smíšeným buzením). Mají různé pracovní charakteristiky, například závislost momentu síly na otáčkách. Základní informaci poskytne například Wikipedie, zdrojů je ale na webu mnohem víc.

[41] Dnes jsou příslušné obvody (včetně krokového motoru) k dispozici například i ve stavebnici Arduino, takže s nimi mohou experimentovat i zájemci z řad žáků.

11.3 Transformátor (zatím jednoduše)



Naviňme na společné jádro dvě cívky: **primární** (zkráceně **primár**), s n_1 závity a **sekundární** (neboli **sekundár**) s n_2 závity.

Jádro bude z materiálu o vysoké permeabilitě, takže magnetický indukční tok Φ procházející oběma cívkami bude stejný.[42]

Primární cívka je připojena ke zdroji střídavého napětí, takže jí teče střídavý proud a magnetický tok se s časem mění. Podívejme se, jaké napětí se přitom na cívkách indukuje.

Napětí na jednom závitu je rovno časové změně magnetického indukčního toku:[43]

$$\left| U_{\text{jeden závit}} \right| = \left| \frac{d\Phi}{dt} \right| \tag{11.25}$$

Podstatné je, že napětí je stejné na závitu primární i sekundární cívky.[44] Celkové napětí na každé cívce je dáno součtem napětí na jednotlivých závitech, je proto úměrné počtu závitů. To znamená, že napětí jsou:

na primáru: $$U_1 = n_1 U_{\text{jeden závit}} \tag{11.26}$$

na sekundáru: $$U_2 = n_2 U_{\text{jeden závit}} \tag{11.27}$$

Vydělením (11.27) a (11.26) dostáváme známý vztah

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \,.} \tag{11.28}$$

Poměr napětí na sekundáru a na primáru (tedy poměr n_2/n_1) se nazývá **transformační poměr**.[45]

Ve vztahu (11.25) pro napětí na jeden závit šlo o velikost napětí. Jaká je ale polarita napětí na primáru a sekundáru?

Základní úvaha je naštěstí jednoduchá. Obě vinutí jsou ve stejném smyslu (viz obrázek nahoře[46]), a protože oběma cívkami prochází magnetický tok ve stejném směru, musí i polarita obou napětí být stejná. Napětí stejné polarity tedy naměří voltmetry zapojené v obou obvodech.[47] To znamená, že vztah (11.28) určuje správně poměr napětí i co do znaménka.

---

[42] Tohle je důležitý předpoklad pro naše jednoduché odvození! Ve skutečnosti toto neplatí úplně přesně, ale drobné rozdíly zatím zanedbáme.
U voltmetru označujeme svorky symboly (+) a (COM), jak tomu bývá na multimetrech. Když je na svorce (+) kladné napětí oproti svorce (COM), ukazuje voltmetr kladné napětí.

[43] Zatím nám jde o velikost, polaritou napětí se budeme zabývat za chvíli.

[44] A to na každém závitu; předpokládáme přece, že každým závitem prochází stejný magnetický indukční tok. Stejná je tedy i jeho časová změna v (11.25).

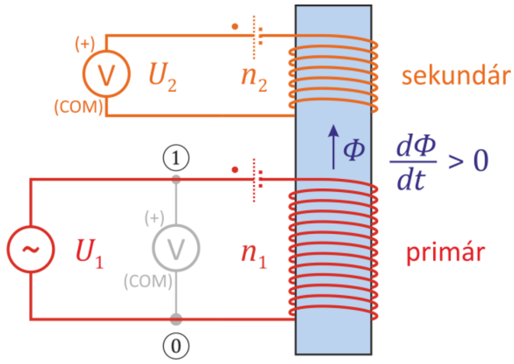
[45] Uvědomte si, že z odvození plyne, že v tomto poměru jsou ***okamžitá*** napětí na sekundární a primární cívce. A samozřejmě, že ve stejném poměru jsou amplitudy těchto napětí, a také efektivní hodnoty napětí, že tedy je $U_{2\,ef}/U_{1\,ef} = n_2/n_1$.

[46] Smysl vinutí se někdy ve schématech a případně i na reálných cívkách vyznačuje tečkou u jednoho konce vinutí.

[47] Musely by to ovšem být voltmetry velmi rychlé, ukazující okamžitou hodnotu napětí. V praktickém experimentu bychom využili buď počítačové měření, nebo bychom napětí sledovali na dvoukanálovém osciloskopu.

Polaritu napětí můžeme ještě ověřit podrobnější úvahou využívající Lenzovo pravidlo.

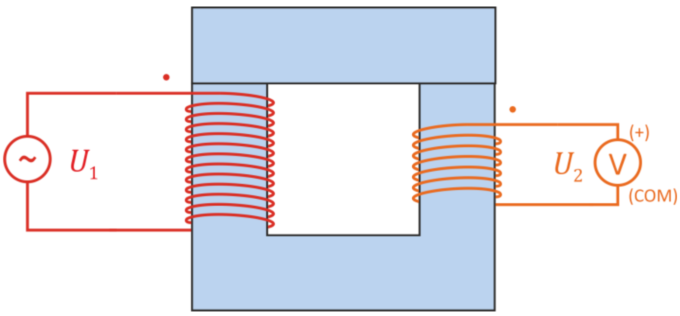
Uvažujme situaci, kdy magnetický indukční tok roste. V každé z cívek se indukuje napětí takové polarity, aby indukovaný proud působil proti změně, která ho vyvolala – tedy proti nárůstu Φ. A to je polarita vyznačená v obrázku vpravo články symbolicky zakreslenými do obvodu (čárkovaně).[48] Oba voltmetry tedy budou v dané situaci ukazovat kladné napětí.



Na obrázku je také vidět, že napětí indukované na primární cívce je přesně rovno napětí střídavého zdroje, který je k ní připojen. (Obě napětí jsou připojena ke stejným uzlům, v obou případech jde o napětí v bodě ① vzhledem k bodu ⓪.)

Odvození, které jsme zde uvedli, je fakticky středoškolské. Poněkud formálnější odvození využívající druhý Kirchhoffův zákon najdete v Dodatku B.

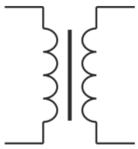
Cívky navinuté na přímém jádře[49] fungují jako transformátor, ovšem v tomto případě by se přece jen významná část magnetického toku z primární cívky rozptylovala do okolí a neprocházela sekundární cívkou.[50] Pomohlo by, kdybychom jádro měli nekonečně dlouhé (☺), ve skutečných transformátorech se místo toho užívá jádro uzavřené.[51]



Cívky mohou být navinuté buď na sobě (tak tomu bývá u transformátorů používaných v praxi) nebo na dvou sousedních sloupcích jádra – tak je to u školních rozkladných transformátorů a často se to takto názorně kreslí v učebnicích.

(Rozmyslete si, že polarita napětí v obrázku vlevo je opravdu správně vyjádřena tečkami u vývodů cívek. Pozor na smysl vinutí cívek – podrobněji to rozebírá Dodatek C.)

Základní schematickou značku transformátoru ukazuje obrázek vpravo[52]; někdy se i u ní tečkami vyznačuje smysl vinutí. Transformátor může mít ovšem i více sekundárních cívek, z cívek mohou být vyvedeny odbočky; tyto věci bývají ve schematických značkách celkem srozumitelně vyznačeny.



---

[48] Proud vytvářený těmito „články“, tedy indukovaným napětím, by vyvolal magnetický tok směřující v jádru směrem dolů, tedy proti nárůstu Φ.

[49] Někdy se pro něj užívá název „jádro I“.

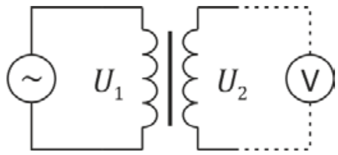
[50] U transformátoru se skutečně o této „nevyužité“ části magnetického toku mluví jako o ***rozptylovém toku***.

[51] Ve školním rozkladném transformátoru je jádro složeno ze dvou částí, „jádra U“ a „jádra I“. Jádra se skládají z transformátorových plechů (kvůli omezení ztrát vířivými proudy, k tomu se ještě dostaneme). V běžných transformátorech se používají zejména jádra EI skládaná z plechů ve tvaru E a I. Transformátory lze vinout i na toroidní jádra.

[52] Takhle je to ve schématech pro elektroniku. V elektrotechnice se ve schématech požívají i velmi odlišné typy značek, tak nebuďte překvapeni, pokud na ně narazíte.

Někdy je na jádře jen jediná cívka s odbočkami. I ta, podle poměru počtu závitů, transformuje napětí na vyšší nebo nižší, takovému zařízení se říká ***autotransformátor***.

Dosud jsme se věnovali situaci, kdy k sekundární cívce byl připojen jen voltmetr. Ten neodebírá téměř žádný proud. Takovému zapojení se říká **transformátor naprázdno**. Pro něj s dobrou přesností platí transformační poměr daný poměrem počtu závitů (11.28). Nemusíme snad připomínat, že je-li transformační poměr > 1, mluví se o *transformaci nahoru*, je-li < 1, pak o *transformaci dolů*. (Ono je to spíš taková školní terminologie.)



Zatížíme-li sekundár nějakým spotřebičem, sekundární napětí v závislosti na odebíraném proudu poněkud klesne; tomu se budeme věnovat v další části kapitoly.

Využití transformátorů

O jednom využití transformátorů jsme se už zmiňovali: jej jím **transformace napětí** u elektráren nahoru na vysoké, resp. velmi vysoké napětí a poblíž spotřebitelů pak dolů, na 230/400 V.[53] Transformátory jsou však i v řadě přístrojů spotřební elektroniky, počítačích, televizích, všemožných zdrojích a nabíječkách.[54] A navíc třeba v transformátorové páječce a dalších zařízeních.

S tím souvisí i druhý účel využití transformátorů: **galvanické oddělení** primáru a sekundáru. Prostě: výstup nabíječky (nebo třeba školního zdroje) není přímo vodivě spojen se sítí. Tím pádem na něj můžeme sáhnout a nehrozí úraz síťovým napětím.[55]

Tím není použití transformátorů vyčerpáno. Používají se v nízkofrekvenčních i vysokofrekvenčních obvodech, k přizpůsobení impedance apod. Ale to už jde trochu mimo rámec tohoto textu.

Jak se s principem transformátoru seznamovat „badatelsky“

Seznámení s transformátory, ať už ve školní výuce nebo v zájmových kroužcích, může začít tím, že cívku na uzavřeném jádře (vhodný je školní rozkladný transformátor) připojíme ke zdroji nízkého střídavého napětí, např. 6 V. To bude primární cívka. Jako sekundární cívku nejdřív z drátu resp. kabelu vytvoříme jeden závit. Změříme na něm napětí voltmetrem.[56] Má-li primární cívka 60 závitů, naměříme asi 0,1 V. Pak přidáme další závit a ejhle, napětí bude asi 0,2 V. Pak další závit… atd.

S pokusy tohoto typu se budete seznamovat v didaktice fyziky, jednodušší i složitější experimenty lze samozřejmě najít na internetu.[57]

---

[53] V těchto případech se používají třífázové transformátory, není problém si o nich dohledat informace na webu.

[54] Kdybychom připojili mobil přímo na síťové napětí, měli bychom v mžiku jen bývalý mobil. ☺

[55] Pozor, tohle neplatí u autotransformátorů!

[56] Nezapomeňte ho přepnout na měření střídavých napětí. ☺

[57] Viz např. publikaci V. Koudelková: *Hrátky s transformátorem*. Dostupné online na https://www.svetenergie.cz/cz/tiskoviny/hratky-s-transformatorem.

11.4 Zatížený transformátor

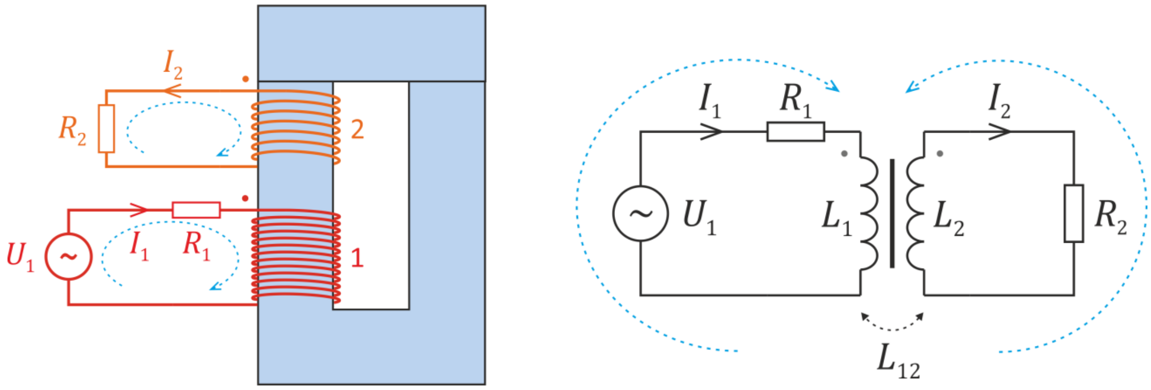
Pojďme spočítat, jak je tomu s napětími a proudy v transformátoru, když k sekundární cívce připojíme nějaký spotřebič. (Spotřebiči se také říká „zátěž“, proto mluvíme o zatíženém transformátoru.) Budeme uvažovat zátěž charakteru odporu; ta je v obrázku a ve schématu níže reprezentována rezistorem o odporu R_2.[58] V primárním obvodu uvažujeme odpor vinutí primární cívky R_1.

Pro primární i sekundární obvod napíšeme druhý Kirchhoffův zákon:[59]

$$U_1 + U_{\text{ind.1}} = R_1 I_1 \tag{11.29}$$

$$U_{\text{ind.2}} = -R_2 I_2 \tag{11.30}$$

Z těchto vztahů už vypočteme vše potřebné.



Napětí indukovaná na primární a sekundární cívce jsou

$$\begin{aligned} U_{\text{ind.1}} &= -\frac{d\Psi_1}{dt} \ , \\ U_{\text{ind.2}} &= -\frac{d\Psi_2}{dt} \ , \end{aligned} \tag{11.31}$$

kde Ψ_1 a Ψ_2 jsou celkové magnetické indukční toky primární a sekundární cívkou.[60] Magnetický indukční tok můžeme ale vyjádřit pomocí indukčností a proudů:

$$\Psi_1 = L_1 I_1 + L_{12}(-I_2) \ , \tag{11.32}$$

[58] V R_2 je ve skutečnosti „schován“ i odpor vinutí sekundární cívky, pokud není zanedbatelný vůči odporu spotřebiče. Přesněji bychom tedy měli psát $R_2 = R_{\text{vinutí 2}} + R_{\text{spotřebič v sekundáru}}$, ale toto ve schématu ani v následujících vztazích nerozepisujeme. V R_1 je započítán odpor primární cívky, přívodních vodičů a vnitřního odporu zdroje.

[59] Směry, kterými probíháme smyčku primárního a sekundárního obvodu, jsou na obrázku a ve schématu vyznačeny modrými čárkovanými šipkami. (Viz též Dodatek B, kde je výpočet pomocí druhého Kirchhoffova zákona proveden pro transformátor naprázdno.) Napětí indukované na cívkách ($U_{\text{ind.1}}$ a $U_{\text{ind.2}}$) ve schématu ani obrázku zvlášť nevyznačujeme; znaménková konvence je zde stejná, jako jsme užívali výše, např. v části 8.5 kapitoly o elektromagnetické indukci nebo v části 9.3, kde šlo o oscilační obvod. Hodnoty napětí a proudů v (11.29) a (11.30) jsou okamžité hodnoty; podrobněji bychom mohli psát $U_1(t) + U_{\text{ind.1}}(t) = R_1 I_1(t)$ a $U_{\text{ind.2}}(t) = -R_2 I_2(t)$, ale to už snad není nezbytné.

[60] Viz kap. 7.7, tam jsme ovšem celkový tok ještě označovali $\Phi_{\text{celk.}}$, k obvyklému označení Ψ jsme přešli v kapitole o elektromagnetické indukci.

$$\Psi_2 = L_{21} I_1 + L_2(-I_2) \ . \tag{11.33}$$

L_1 je indukčnost primární cívky, L_2 indukčnost sekundární cívky a $L_{12} = L_{21}$ vzájemná indukčnost obou cívek.[61] [62]

Po dosazení do (11.31) dostáváme

$$\begin{aligned} U_{\text{ind.1}} &= -\frac{d\Psi_1}{dt} = -L_1\frac{dI_1}{dt} - L_{12}\frac{d(-I_2)}{dt}, \\ U_{\text{ind.2}} &= -\frac{d\Psi_2}{dt} = -L_{21}\frac{dI_1}{dt} - L_2\frac{d(-I_2)}{dt}, \end{aligned} \tag{11.34}$$

a po dosazení do (11.29) a (11.30) pak definitivní tvar druhého Kirchhoffova zákona pro primární a sekundární obvod:

$$\begin{aligned} U_1 - L_1\frac{dI_1}{dt} + L_{12}\frac{dI_2}{dt} &= R_1 I_1 \\ -L_{21}\frac{dI_1}{dt} + L_2\frac{dI_2}{dt} &= -R_2 I_2 \end{aligned} \ . \tag{11.35}$$

Toto už jsou rovnice, z nichž určíme proudy v primárním a sekundárním obvodu. Budeme to dělat pro střídavé napětí s úhlovou frekvencí ω, takže opět s výhodou použijeme komplexní formalismus.[63] Takže teď chvíli bude jen matematika…

* Řešení rovnic pro proudy v primárním a sekundárním obvodu

Rovnice (11.35) přepíšeme pro komplexní hodnoty:

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 - L_1\frac{d\widehat{I}_1}{dt} + L_{12}\frac{d\widehat{I}_2}{dt} &= R_1 \widehat{I}_1 \\ -L_{21}\frac{d\widehat{I}_1}{dt} + L_2\frac{d\widehat{I}_2}{dt} &= -R_2 \widehat{I}_2 \end{aligned} \tag{11.36}$$

[61] V kap. 7.7 jsme uvažovali zvlášť magnetický tok vyvolaný jednou cívkou v cívce druhé a zvlášť magnetický tok, který cívka vyvolá v sobě samé. Celkový magnetický tok je součtem obou těchto příspěvků.
Proč je u I_2 znaménko mínus: Protože jako kladný směr proudu jsme zvolili směr od vývodu sekundární cívky označené tečkou; kladný směr je tedy brán opačně než v primárním obvodu. (Tato volba je názornější pro výpočet napětí na sekundáru, každá volba má své výhody a nevýhody…)

[62] Poznamenejme, že pokud bereme indukčnosti L_1, L_2 a L_{12} jako konstanty (což v dalším výpočtu budeme dělat), vlastně si tím situaci zjednodušujeme. Zanedbáváme totiž fakt, že ve feromagnetickém jádru magnetická intenzita H (která je úměrná proudu) a magnetická indukce B (jíž je úměrný magnetický tok) obecně nejsou vzájemně přesně úměrné; jejich závislost je složitá, daná hysterezní smyčkou. Chování skutečného transformátoru tedy bude o něco složitější než to, co vyjde z našich výpočtů. Určitě se tedy na základě této kapitoly nestaneme experty na návrhy reálných transformátorů ☺; přesto nám naše výsledky dají o chování zatíženého transformátoru dobrý obraz.

[63] Ti z laskavých čtenářů, kterým by se nechtělo užívat komplexní formalismus, mohou (11.35) řešit jako soustavu diferenciálních rovnic. Ale komplexním formalismem je to kratší a jednodušší… (Poznámka pro zájemce: Na druhou stranu, pokud by napětí na vstupu transformátoru mělo obecný průběh, nebo bychom dokonce chtěli počítat s nelineární závislostí magnetického toku na proudu, tak na řešení diferenciálních rovnic dojde.)

Napětí a proudy v závislosti na čase jsou[64]

$$\begin{aligned} \widehat{U}_1 &= \tilde{U}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t} \,, \\ \widehat{I}_1 &= \tilde{I}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t} \,, \\ \widehat{I}_2 &= \tilde{I}_2\, \mathrm{e}^{i\omega t} \,, \end{aligned} \tag{11.37}$$

kde

$$\tilde{U}_1 = U_{1m} \tag{11.38}$$

je amplituda zdroje střídavého napětí připojeného k primáru,

$$\tilde{I}_1 = I_{1m}\, \mathrm{e}^{i\varphi_1} \tag{11.39}$$

je komplexní amplituda proudu v primárním obvodu (I_{1m} je skutečná amplituda proudu v primáru, φ_1 jeho fázové posunutí vůči napětí zdroje) a

$$\tilde{I}_2 = I_{2m}\, \mathrm{e}^{i\varphi_2} \tag{11.40}$$

analogicky komplexní amplituda proudu v sekundárním obvodu (I_{2m} skutečná amplituda proudu v sekundáru, φ_2 jeho fázové posunutí, opět vůči napětí zdroje v primárním okruhu).

Po dosazení (11.37) do (11.36) dostáváme

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t} - L_1 \frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) + L_{12} \frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_2\, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) &= R_1 \tilde{I}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t} \\ -L_{21} \frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_1\, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) + L_2 \frac{d}{dt}\left(\tilde{I}_2\, \mathrm{e}^{i\omega t}\right) &= -R_2 \tilde{I}_2\, \mathrm{e}^{i\omega t} \end{aligned} ,$$

a po zderivování a zkrácení $\mathrm{e}^{i\omega t}$ pak rovnice pro komplexní amplitudy proudů:

$$\begin{aligned} \tilde{U}_1 - i\omega L_1 \tilde{I}_1 + i\omega L_{12} \tilde{I}_2 &= R_1 \tilde{I}_1 \\ -i\omega L_{21} \tilde{I}_1 + i\omega L_2 \tilde{I}_2 &= -R_2 \tilde{I}_2 \end{aligned} \tag{11.41}$$

Neznámé jsou zde proudy $\tilde{I}_1$ a $\tilde{I}_2$. Úpravou (11.41) pro ně získáme soustavu dvou rovnic pro dvě neznámé ve standardním tvaru

$$(R_1 + i\omega L_1)\ \tilde{I}_1 \ + \ (-i\omega L_{12})\ \tilde{I}_2 = \tilde{U}_1 \,, \tag{11.42}$$

$$i\omega L_{21}\ \tilde{I}_1 \ + \ (-R_2 - i\omega L_2)\ \tilde{I}_2 = 0 \ . \tag{11.43}$$

Z (11.43) okamžitě dostaneme proud v sekundáru vyjádřený pomocí proudu v primáru:

$$\tilde{I}_2 = \frac{i\omega L_{21}}{R_2 + i\omega L_2}\, \tilde{I}_1 \ . \tag{11.44}$$

[64] V kapitole 10 jsme označovali komplexní amplitudu napětí a proudu $\widehat{U}_m$ a $\widehat{I}_m$. V duchu tohoto označení bychom komplexní amplitudy proudů v primáru a sekundáru měli nyní označovat jako $\widehat{I}_{1m}$ a $\widehat{I}_{2m}$. To už by bylo indexů trochu moc, proto je nyní pro zjednodušení označujeme $\tilde{I}_1$ a $\tilde{I}_2$, podobně pro napětí.
(Je pravda, že v tomto značení by se mohly plést oblouček a vlnka nad písmenem – ale nadále už budeme pracovat jen s komplexními amplitudami, takže obloučky už tu nebudou.)

Po dosazení (11.44) do (11.42) dostaneme

$$\left(R_1 + i\omega L_1 + \frac{\omega^2 L_{12} L_{21}}{R_2 + i\omega L_2} \right) \tilde{I}_1 = \tilde{U}_1 \tag{11.45}$$

a odtud po úpravě

$$\left(\omega^2 (L_{12} L_{21} - L_1 L_2) + R_1 R_2 + i\omega (R_1 L_2 + R_2 L_1) \right) \tilde{I}_1 = (R_2 + i\omega L_2) \tilde{U}_1 \, , \tag{11.46}$$

z čehož

$$\tilde{I}_1 = \frac{R_2 + i\omega L_2}{\omega^2 (L_{12} L_{21} - L_1 L_2) + R_1 R_2 + i\omega (R_1 L_2 + R_2 L_1)} \tilde{U}_1 \, . \tag{11.47}$$

Z (11.44) pak

$$\tilde{I}_2 = \frac{i\omega L_{21}}{\omega^2 (L_{12} L_{21} - L_1 L_2) + R_1 R_2 + i\omega (R_1 L_2 + R_2 L_1)} \tilde{U}_1 \, . \tag{11.48}$$

Vztahy se ještě nepatrně zjednoduší, když do nich dosadíme $L_{21} = L_{12}$. Toto jsou přesné vztahy pro proudy, určují jak jejich amplitudy, tak fázová posunutí.

Pro jednoduchost budeme dále uvažovat případ, kdy odpor v primáru lze zanedbat, budeme tedy brát $R_1 = 0$.[65]

Vztah (11.48)[66] se pak zjednoduší na

$$\tilde{I}_2 = \frac{i\omega L_{21}}{\omega^2 (L_{12}{}^2 - L_1 L_2) + i\omega L_1 R_2} \tilde{U}_1 = \frac{\dfrac{L_{12}}{L_1}}{1 + \dfrac{i\omega}{L_1 R_2} (L_1 L_2 - L_{12}{}^2)} \frac{\tilde{U}_1}{R_2} \tag{11.49}$$

Ovšem napětí na sekundáru je[67]

$$\tilde{U}_2 = R_2 \tilde{I}_2 \, . \tag{11.50}$$

Z (11.50) a (11.49) tedy pro napětí na sekundáru dostáváme

$$\tilde{U}_2 = \frac{\dfrac{L_{12}}{L_1}}{1 + \dfrac{i\omega}{L_1 R_2} (L_1 L_2 - L_{12}{}^2)} \tilde{U}_1 \, . \tag{11.51}$$

---

[65] Zejména odpor primární cívky jistě není nulový, ovšem pokud bude $R_1 \ll \omega L_1$ (což v případě cívky s jádrem bývá splněno) a zároveň transformátor na sekundáru nezatěžujeme příliš malým odporem R_2, takže $R_1 L_2 \ll R_2 L_1$, bude zanedbání R_1 oprávněné.

[66] Kam dosadíme $L_{21} = L_{12}$.

[67] Jde o komplexní amplitudu napětí na sekundáru. Pokud odpor cívky sekundáru není zanedbatelný vůči odporu spotřebiče, bude ve skutečnosti (komplexní amplituda) napětí na spotřebiči $\tilde{U}_2 = R_{\text{spotřebič v sekundáru}} \tilde{I}_2$, viz první poznámku pod čarou na straně 14. To znamená, že napětí na spotřebiči bude oproti tomu, které určíme z (11.50) a (11.49) menší o úbytek napětí na odporu sekundáru $R_{\text{vinutí 2}} \tilde{I}_2$; tuto korekci si už v případě potřeby laskavý čtenář do výpočtu jistě zahrne sám.

Vidíme, že obecně napětí na primáru a sekundáru nejsou ve fázi.[68] Ze vztahu (11.51) také na první pohled není jasné, zda, resp. za jakých podmínek je poměr amplitud napětí roven poměru počtu závitů.

Transformace napětí na ideálním transformátoru

Podívejme se, jak se napětí transformuje v případě ***ideálního transformátoru***. V něm je magnetický tok oběma cívkami stejný.[69] Indukčnosti a vzájemné indukčnosti cívek pak jsou (viz kapitolu 7.7):[70]

$$L_1 = \mu_0 \mu_r \left(S/l\right) \cdot n_1^{\,2},$$
$$L_2 = \mu_0 \mu_r \left(S/l\right) \cdot n_2^{\,2}, \qquad (11.52)$$
$$L_{12} = \mu_0 \mu_r \left(S/l\right) \cdot n_1 n_2$$

Odtud vidíme, že pro ideální transformátor je

$$L_{12} = \sqrt{L_1 L_2} \quad \Rightarrow \quad L_1 L_2 - L_{12}^{\,2} = 0 \ , \qquad (11.53)$$

$$\frac{L_{12}}{L_1} = \frac{n_2}{n_1} \ . \qquad (11.54)$$

Poměr napětí na sekundáru a primáru tedy z (11.51) vychází

$$\boxed{\frac{\tilde{U}_2}{\tilde{U}_1} = \frac{n_2}{n_1} \ .} \qquad (11.55)$$

To znamená, že nejen pro transformátor naprázdno, ale i

pro ideální zatížený transformátor je poměr napětí na sekundáru a primáru roven počtu závitů; navíc jsou obě napětí ve fázi.

Vztah (11.55) to ukazuje pro komplexní amplitudy, tentýž poměr ovšem samozřejmě platí i pro reálné amplitudy a tedy i pro poměr efektivních hodnot napětí. Rozmyslete si, že platí i pro okamžité hodnoty napětí.

Je vhodné uvědomit si, že (11.55) jsme odvodili za předpokladu, že odpor primární cívky lze zanedbat; navíc zde neuvažujeme úbytek napětí na odporu sekundární cívky. Z toho je vidět, že ideálnost transformátoru je opravdu vhodné definovat požadavkem, aby v něm nenastávaly žádné energetické ztráty.

U neideálního transformátoru s rostoucím zatížením napětí na sekundáru více či méně klesá.

---

[68] Ve fázi by byly, kdyby koeficient před $\tilde{U}_1$ ve vztahu (11.51) byl reálný.

[69] Není zde tedy žádný rozptylový tok. Poznamenejme, že pojem ideální transformátor může být chápán různě. To, že magnetický tok oběma cívkami je stejný, se používá v učebnici Sedlák, Štoll: *Elektřina a magnetismus*. V jiných pramenech se uvádí, že ideální transformátor je takový, v němž nejsou žádné ztráty energie. (To mimo jiné znamená, že zanedbatelný musí být odpor primárního i sekundárního vinutí.)

[70] S je průřez jádra, l střední délka magnetické indukční čáry (předpokládáme přitom, že délky magnetických indukčních čar v jádře se příliš neliší) a μ_r relativní permeabilita materiálu jádra.

Transformace proudu

Vztah (11.44) můžeme upravit na tvar

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{i\omega L_{21}}{R_2 + i\omega L_2} = \frac{L_{12}}{L_2} \frac{1}{1+\dfrac{R_2}{i\omega L_2}} . \tag{11.56}$$

Pro ideální transformátor plyne z (11.52)

$$\frac{L_{12}}{L_2} = \frac{n_1}{n_2} , \tag{11.57}$$

takže

$$\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{n_1}{n_2} \frac{1}{1+\dfrac{R_2}{i\omega L_2}} . \tag{11.58}$$

Vidíme, že obecně proudy nejsou ve fázi, ani jejich poměr není dán pouze poměrem počtu závitů. Ale pokud je odpor spotřebiče zanedbatelně malý[71], tedy transformátor pracuje „skoro do zkratu“ – taková situace bývá označována jako **transformátor nakrátko** – dostáváme z (11.58) výsledek[72]

$$\boxed{\frac{\tilde{I}_2}{\tilde{I}_1} = \frac{n_1}{n_2} .} \tag{11.59}$$

[73]

Vidíme, že

v transformátoru nakrátko se proudy transformují v opačném poměru, než je poměr počtu závitů.

Příkladem, kdy transformátor je zapojen nakrátko, je transformátorová páječka (někdy nazývaná též *pistolová páječka*). V ní je k sekundáru transformátoru připojena krátká smyčka z tlustšího drátu. Ta se průchodem velkého proudu rychle zahřeje a taví cín.

[71] Malý oproti induktanci cívky sekundáru, tj. $R_2 \ll \omega L_2$.

[72] Analogicky k tomu, jak je to při transformaci napětí, platí stejný poměr i pro poměr reálných amplitud proudů, efektivních hodnot proudů i jejich okamžitých hodnot.

[73] V některých pramenech můžeme narazit na zjednodušené odvození tohoto vztahu (resp. vztahu mezi efektivními hodnotami proudu) poukazem na to, že výkon $U\,I$ musí být v případě ideálního transformátoru stejný na primáru i na sekundáru. Jak vidíme z (11.58), takhle jednoduché to není. Ale pro ideální transformátor nakrátko je opravdu poměr proudů určen poměrem počtu závitů (a to opačným než u napětí).

11.5 * Transformátor „pro pokročilé": od teorie k realitě

Vzorce pro transformační poměry ideálního transformátoru (které se často jako jediné uvádějí v základoškolské a středoškolské fyzice) by v nás mohly vyvolat dojem, že zhotovit si transformátor je velice jednoduché: zdá se, že stačí vzít libovolné uzavřené jádro a namotat na něj dvě vinutí ve správném poměru závitů. V praxi to ale samozřejmě není tak jednoduché!

Pojďme se proto podívat na některé trochu „techničtější" aspekty transformátorů – uvidíme, že i za vztahy, které jsou v různých příručkách uváděny bez odvození a někdy jako spíše empirické, stojí zajímavá fyzika.

Stačí namotat na libovolné jádro pár závitů?

Kdybychom si chtěli udělat transformátor, který by nám síťové napětí 230 V transformoval na 10 V, stačilo by na libovolné uzavřené jádro namotat 23 závitů jako primární cívku a jeden závit jako sekundár?

Inu, nestačilo. Musíme například dbát na to, aby magnetická indukce v jádře nebyla příliš velká, aby nedošlo k *saturaci* (někdy se též říká k *nasycení*) materiálu jádra. Viděli jsme to v kapitole 5 u hysterezní smyčky: při příliš velkých hodnotách magnetické intenzity H (a tedy i magnetické indukce B) se už s růstem H indukce B téměř nezvětšuje.[74] Prakticky se volí maximální hodnota magnetické indukce v jádře $B_{\max}$ asi 1 T.[75] Předpokládáme harmonický časový průběh,

$$B(t) = B_{\max} \cos(\omega t) \ . \tag{11.60}$$

Magnetický indukční tok jádrem o průřezu S je

$$\Phi(t) = B(t) S \ . \tag{11.61}$$

Má-li primární cívka n závitů, indukuje se na ní napětí

$$U(t) = -\frac{d(n\Phi)}{dt} = -nS\frac{dB}{dt} = nS\,B_{\max}\,\omega \sin(\omega t) \ . \tag{11.62}$$

Toto napětí je co do velikosti rovno napětí připojeného zdroje střídavého napětí. Aby nebyla překročena maximální hodnota magnetické indukce, může tedy být amplituda napětí přivedeného na primár nejvýše $U_m = nS\,B_{\max}\,\omega$. Jeho efektivní hodnota tedy musí být maximálně

$$U_{ef} = nS\,B_{\max}\,\omega/\sqrt{2} \ . \tag{11.63}$$

Počet závitů potřebný k tomu, aby nedošlo k nasycení jádra, je tedy $n = \sqrt{2}\,U_{ef}/(S\,B_{\max}\,\omega)$. Obvykle se to vyjadřuje jako **počet závitů na volt**:

$$\frac{n}{U_{ef}} = \frac{\sqrt{2}}{S\,B_{\max}\,\omega} = \frac{\sqrt{2}}{2\pi f}\frac{1}{B_{\max}}\frac{1}{S} \ , \tag{11.64}$$

[74] To by fakticky znamenalo, že indukčnost cívky by byla velmi malá a cívka by se tedy vůči střídavému proudu chovala spíše jako odpor. Tekl by jí velký proud, příliš by se zahřívala a na to zahřátí by se spotřebovala většina energie dodané do primáru. Takový transformátor s enormními elektrickými ztrátami určitě nechceme.

[75] Toto platí pro jádra z transformátorových plechů, někdy se uvádí hodnota 1,2 T. (Obecně se pro $B_{\max}$ někdy používá název *sycení* jádra.) Pro feritová jádra může být hodnota indukce vyšší.

kde f je frekvence napětí. Po dosazení frekvence síťového napětí f = 50 Hz a $B_{\max}$ = 1 T dává (11.64) konkrétní výsledek:

$$\frac{n}{U_{ef}} \doteq \frac{45\cdot 10^{-4}\,\mathrm{m}^2}{S}\,\frac{1}{\mathrm{V}} = 45\frac{\mathrm{cm}^2}{S}\,\frac{1}{\mathrm{V}} = \frac{45}{(S/\mathrm{cm}^2)}\,\frac{1}{\mathrm{V}}\ . \qquad (11.65)$$

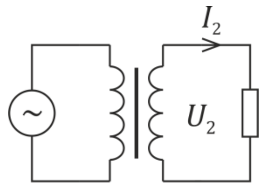
Počet závitů na volt je tedy 45 děleno průřezem jádra v centimetrech čtverečních.[76] Pro feritová jádra může být sycení jádra vyšší, počet závitů na volt pak stačí nižší.

Jak volit průřez jádra?

Kvalitativní odpověď zní jednoduše: Podle výkonu, který chceme transformátorem přenášet.[77]

Zkusíme odvodit, jak by mohl potřebný průřez jádra na výkonu záviset. (Nevyhneme se přitom určitým odhadům, ale uvidíte, že půjde o odhady rozumné.)

Průměrný výkon na spotřebiči (charakteru rezistoru, viz schéma) je

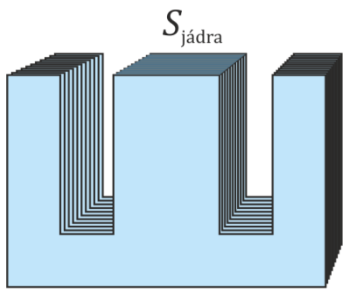


$$P = U_{2\,ef}\, I_{2\,ef}\ . \qquad (11.66)$$

Efektivní napětí na sekundáru je (viz (11.63)):

$$U_{2\,ef} = n_2\, S_{\text{jádra}}\, B_{\max}\, \omega/\sqrt{2}\ , \qquad (11.67)$$

kde n_2 je počet závitů sekundáru a $S_{\text{jádra}}$ je průřez jádra (viz obrázek pro plechy tvaru E[78]).

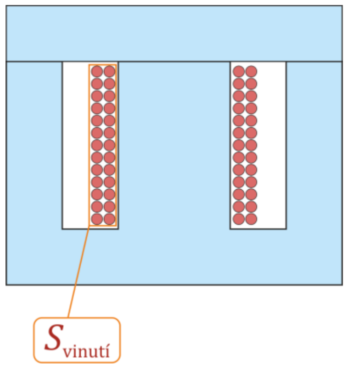


Proud vinutím transformátoru souvisí s průřezem vodiče, kterým je cívka vinuta. Tenčí vodič má vyšší odpor a více by se zahříval. Proud vodičem je

$$I_{2\,ef} = S_{\text{vodiče}}\, j\ , \qquad (11.68)$$

kde $S_{\text{vodiče}}$ je průřez vodiče a j proudová hustota. Pro cívky transformátorů se většinou doporučuje proudová hustota 2,5 A/mm^2, tj. j = 2,5·10^6 A/m^2.

Průřez vodiče krát počet závitů dá plochu, kterou v „okénku“ transformátoru zabere vinutí. Reálně vinutí samozřejmě zabere větší plochu, protože materiál vodiče nevyplní celou plochu, něco zaberou proklady jednotlivých vrstev vinutí (kvůli izolaci se prokládají tzv. transformátorovým papírem), něco kostra cívky. Takže můžeme odhadnout, že



$$S_{\text{vinutí}} = a\cdot n_2\, S_{\text{vodiče}}\ , \qquad (11.69)$$

kde a je konstanta zohledňující plochu zabranou jinými materiály, než vodičem. (Vzhledem k tomu, že vodič má kruhový průřez, bude $a > 4/\pi \doteq 1{,}3$.)

[76] To znamená, že je-li napětí na primáru 10 V a jádro má průřez 1 cm^2, musí mít primární cívka 450 závitů. Je-li průřez jádra 5 cm^2, bude mít primár 90 závitů. (45/5 = 9 závitů na volt.) Má-li ovšem být primární cívka připojena na síťové napětí 230 V, musí mít (pro průřez jádra 5 cm^2) 2 070 závitů. (Není to samozřejmě kritické, pokud navineme jen 2 tisíce závitů, bude sycení jádra jen o necelá 4 % vyšší a to zřejmě jádro snese; už výše jsme uvedli, že se někdy uvádí maximální hodnota magnetické indukce 1,2 T.)

[77] Ono je to jasné i názorně: Transformátor u temelínské elektrárny asi nemůže mít jádro o průřezu pár centimetrů. (Nezkoušejte to navrhnout pracovníkům v oblasti rozvodných sítí, že by se tím ušetřilo železo. Asi by se na vás nedívali jako na experta v oblasti transformátorů. ☺)

[78] Plechy tvaru E se skládají s plechy tvaru I, to na obrázku není vyznačeno.

Dosazením (11.67) a (11.68) do (11.66) a úpravou s využitím (11.69) dostáváme

$$P = U_{2\,ef}\, I_{2\,ef} = (1/\sqrt{2})\; S_{\text{jádra}}\, B_{\max}\, \omega\, \underbrace{n_2\, S_{\text{vodiče}}}_{=S_{\text{vinutí}}/a}\, j = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,a}\, f\, B_{\max}\, j\, S_{\text{jádra}}\, S_{\text{vinutí}}\ . \tag{11.70}$$

Vinutí se ovšem musí vejít do okénka transformátoru. Rozměr okénka přitom souvisí s rozměry jádra. Pokud je průřez středního sloupku E jádra čtvercový, vychází z rozměrů transformátorových plechů[79], že plocha okénka je $S_{\text{okénka}}$ = (3/4) $S_{\text{jádra}}$.[80] Vinutí samozřejmě nemůže zaplnit celou plochu okénka; musí se do něj vejít ještě vinutí primární cívky, jinak bychom neměli transformátor. (☺) Aby se do okénka vešla dvě vinutí, musí jedno zabírat nanejvýš $S_{\text{okénka}}$/2; aby to bylo s rezervou, dejme tomu, že zabere 0,4 plochy okénka. Alespoň přibližně tedy bude

$$S_{\text{vinutí}} \doteq 0,4\, S_{\text{okénka}} = 0,4\left(3/4\right) S_{\text{jádra}} = 0,3\, S_{\text{jádra}}\ . \tag{11.71}$$

Dosazení do (11.70) dá

$$P = \frac{2\pi}{\sqrt{2}\,a}\, f\, B_{\max}\, j\, S_{\text{jádra}}\, S_{\text{vinutí}} \doteq \frac{2\pi\cdot 0,3\, f\, B_{\max}\, j}{\sqrt{2}\,a} \left(S_{\text{jádra}}\right)^2 \tag{11.72}$$

Po dosazení konkrétních hodnot f = 50 Hz, $B_{\max}$ = 1 T, j = 2,5·10⁶ A/m² dostaneme

$$P \doteq \frac{1,67\cdot 10^8\ \mathrm{W}}{a} \left(\frac{S_{\text{jádra}}}{\mathrm{m}^2}\right)^2 \tag{11.73}$$

Výše jsme uvedli, že konstanta a zohledňující zaplnění vinutí jinými materiály, než vodičem, je větší než asi 1,3. V rámci našich odhadů ji zvolíme 1,67; vztah (11.73) se tím zjednoduší na

$$P \doteq 10^8\ \mathrm{W} \left(\frac{S_{\text{jádra}}}{\mathrm{m}^2}\right)^2 = 1\mathrm{W} \left(\frac{S_{\text{jádra}}}{\mathrm{cm}^2}\right)^2 \tag{11.74}$$

Odtud je vidět, že aby transformátor mohl přenést výkon P, musí být plocha jeho jádra

$$S_{\text{jádra}} \doteq \sqrt{\frac{P}{1\mathrm{W}}}\ \mathrm{cm}^2 \tag{11.75}$$

Plocha jádra v centimetrech čtverečních je tedy rovna odmocnině z výkonu, který má transformátor přenášet, ve wattech.

Právě takový vzorec bývá uveden v návodech, jak si navrhnout transformátor.

Odhady, jimiž jsme ke vztahu (11.75) dospěli, na některých místech nebyly příliš striktní a připouštěly jistou libovůli, ale to, že potřebná plocha jádra je úměrná odmocnině z výkonu, z nich plyne jasně. A i kvantitativně výsledek odpovídá užívaným vztahům.[81]

[79] Zájemci si je mohou hravě najít na webu.

[80] Tohle opravdu vyjde, když se vezmou konkrétní rozměry transformátorových plechů.

[81] Ve vztazích pro návrhy transformátorů se občas ve vztahu (11.75) před odmocninou objevuje konstanta mírně odlišná od 1, většinou v rozmezí 0,8 až 1,2. Zohledňuje například fakt, že mezi transformátorovými plechy tvořícími jádro je izolační lak, a také skutečnost, že účinnost transformátoru není sto procent, takže příkon je o něco větší než výkon.

Ztráty v reálném transformátoru

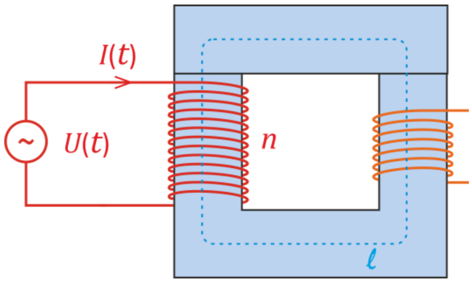
Ideální transformátor přenáší energii mezi primárem a sekundárem beze ztrát. Ve skutečných transformátorech ovšem ke ztrátám energie dochází. Hlavní druhy ztrát jsou:

- „Ohmické“, dané odporem vinutí cívek.
  Střední výkon „ztracený“ na ohřev vodičů je $P = R\,I_{ef}^{\;2}$, musí se samozřejmě sečíst ztráty v primární i sekundární cívce.
- Vířivými proudy.
  Kdyby bylo jádro z jednoho kusu železa, indukovaly by se v něm velké vířivé proudy, zahřívaly by jádro a ztráty by byly veliké.[82] Ztráty vířivými proudy se proto omezují tím, že jádro je složeno z velkého množství tenkých transformátorových plechů navzájem izolovaných lakem.[83] Feritová jádra jsou z nevodivého, resp. špatně vodivého materiálu, proto mohou být v jednom kuse.
- Ztráty ve feromagetickém jádře – říká se jim „ztráty v železe“.
  Můžeme říci, že vznikají kvůli hysterezní smyčce – a dokonce je můžeme i spočítat:

Uvažujme cívku na feromagnetickém jádře. Odpor vodiče cívky zanedbáme (nebudou zde tudíž žádné ohmické ztráty), sekundár není k ničemu připojen, takže neodebírá žádný výkon. Ztráty vířivými proudy také neuvažujeme. Veškerý výkon, který odebírá primární cívka, tedy bude dán „ztrátami v železe“.

Magnetická intenzita v jádře je[84]

$$H = \frac{nI}{\ell}\,, \tag{11.76}$$



kde n je počet závitů cívky a ℓ střední délka magnetické indukční čáry. Odtud

$$I(t) = \frac{\ell}{n}H(t)\,. \tag{11.77}$$

Napětí na cívce je

$$U(t) = n\frac{d\Phi}{dt} = nS\frac{dB}{dt}\,, \tag{11.78}$$

kde S je plocha průřezu jádra. Z proudu a napětí určíme okamžitý výkon:

$$P(t) = U(t)I(t) = nS\frac{dB}{dt}\frac{\ell}{n}H(t) = \underbrace{S\ell}_{V}\,H(t)\frac{dB}{dt}\,. \tag{11.79}$$

Zde $S{\cdot}\ell = V$ je objem jádra.[85]

---

[82] Proto nedostanete kvalitní transformátor, když si primární a sekundární vinutí namotáte na tlustý železný hřebík nebo šroub.

[83] Poznámka ke skládání transformátorových jader: Aby byl omezen rozptylový magnetický tok, neskládá se zvlášť E jádro a zvlášť I jádro s tím, že by se tyto části pak na sebe „připlácly“. Místo toho se plechy skládají střídavě: na nejdelší stranu plechu E přijde v další vrstvě plech I (a proti němu otočený plech E), nad plech I v následující vrstvě zase nejdelší strana plechu E atd.

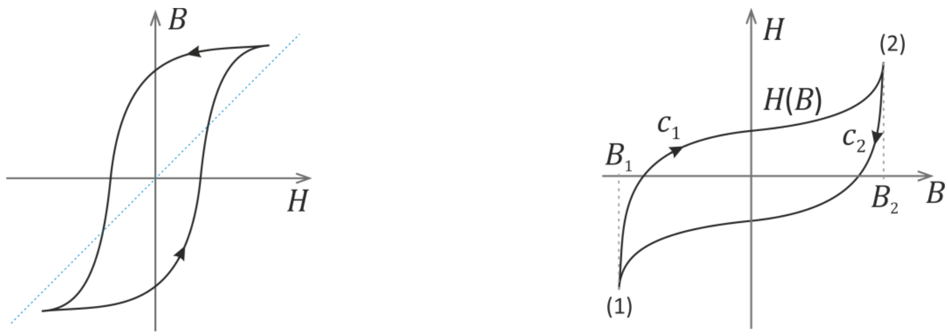
[84] Vyjde to z Ampérova zákona celkového proudu, viz například výpočet pole toroidu v kapitole 7.5.

[85] Samozřejmě, nemusí jít o přesný objem, protože ℓ je střední délka čáry jdoucí jádrem, ale o přesnou hodnotu nám tady nepůjde.

Práci, která je do transformátoru dodána za polovinu periody, určíme integrací:

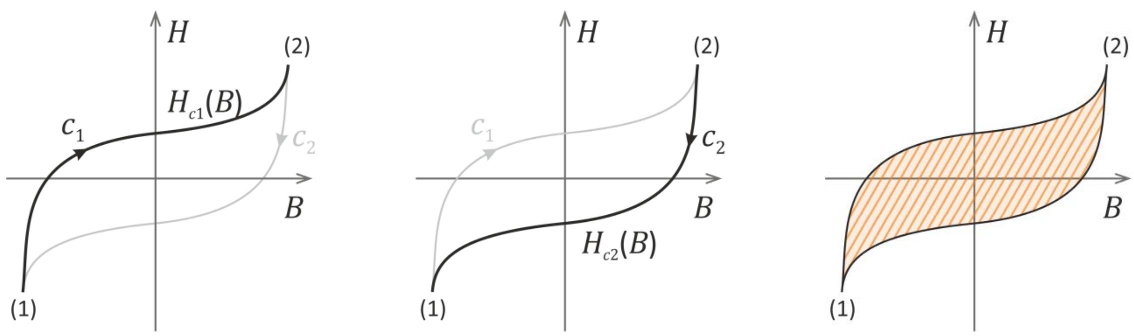
$$W_{12} = V\int_{t_1}^{t_2} H(t)\frac{dB}{dt}\,dt = V\int_{B_1}^{B_2} H\,dB \tag{11.80}$$

Čas t_1 zvolíme tak, aby v něm byla magnetická indukce B minimální, čas t_2 tak, aby v něm byla maximální.[86] Závislost B a H pro feromagnetické materiály vystihuje hysterezní křivka. Ta však udává závislost magnetické indukce B na magnetické intenzitě H. My v integrálu v (11.80) potřebujeme závislost opačnou, H na B. Ale to není problém, prostě hysterezní smyčku překlopíme okolo přímky svírající s osami úhel 45°, jak to ukazuje obrázek.



Závislosti $H = H(B)$ zde ovšem máme dvě. Pro práci v první polovině periody (od stavu (1) do stavu(2)), kdy B roste, se uplatňuje křivka c_1. V druhé polovině periody (když B klesá), je ovšem závislost jiná, uplatňuje se křivka c_2. Celková práce je tedy

$$\begin{aligned} W_{\text{za periodu}} &= V\left(\int_{(1)}^{(2)} H_{c1}(B)\,dB + \int_{(2)}^{(1)} H_{c2}(B)\,dB\right) = \\ &= V\left(\int_{(1)}^{(2)} H_{c1}(B)\,dB - \int_{(1)}^{(2)} H_{c2}(B)\,dB\right) \end{aligned} \tag{11.81}$$



Protože „určitý integrál je plocha pod křivkou“[87], je zřejmé že „ztráty v železe“ jsou úměrné ploše hysterezní smyčky. Vidíme, že pro transformátorová jádra je třeba volit materiály s hysterezní smyčkou co nejužší.

[86] Upozornění: B zde není velikost magnetické indukce, ale její složka do směru daného osou cívky. Má tedy jak kladné, tak záporné hodnoty, podobně je tomu pro H. (Správně bychom to, že jde o složky, měli vyznačovat nějakým indexem, ale snad stačí toto upozornění.)

[87] Snad zde tato nepřesná, ale názorná formulace postačí; samozřejmě by šla matematicky precizovat.

11.6 Transformátor: ještě dvě zajímavosti

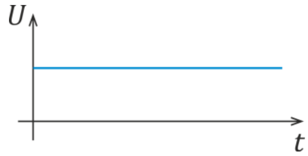
Proč jsou transformátorky v nabíječkách malé a lehké

Výše jsme odvodili (viz (11.75)), že pro přenesený výkon musí mít jádro transformátoru dostatečný průřez. S tím souvisí i hmotnost jádra. Celková hmotnost ještě výrazně naroste o hmotnost vinutí cívek. U transformátorů, které mají přenášet výkony desítek wattů, tak vychází jejich hmotnost blízká zhruba jednomu kilogramu.[88] Přitom ale zdroje notebooků a nabíječky tabletů, mobilů a dalších zařízení jsou malé a výrazně lehčí. Jak je to možné?

Vtip je v tom, že výše jsme uvažovali transformátory pracující s napětím o frekvenci sítě, tedy 50 Hz. V malých nabíječkách se ovšem síťové napětí nejprve usměrňuje a pak z něj speciální elektronické obvody udělají napětí o vysoké frekvenci (užívají se frekvence desítek až stovek kHz). Transformuje se pak napětí této frekvence. Počet závitů na volt daný (11.64) je proto výrazně nižší (tím se ušetří na hmotnosti a rozměrech vinutí cívek) a přenesený výkon (viz (11.72)) je při stejném průřezu jádra výrazně vyšší – takže pro stejný výkon stačí menší jádro.[89]

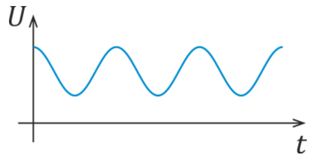
Takže malé nabíječky nejsou žádný zázrak, fyzikálně dokážeme pochopit, proč nemusí být velké a těžké.

Lze transformovat stejnosměrné napětí?

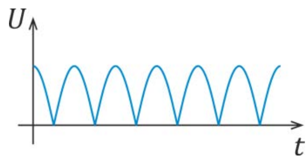


Samozřejmě ne, zní okamžitá odpověď. Pokud je napětí přivedené na primární cívku konstantní, cívkou prochází konstantní proud, v jádře transformátoru je konstantní magnetický tok – a protože se nemění, na sekundární cívce se nic neindukuje. **Stejnosměrné napětí se transformovat nedá!**

Jenže: tohle platí pro ***stacionární***, tedy opravdu v čase neproměnné napětí.



Kdyby ovšem napětí mělo sice stále stejnou polaritu, ale měnilo svou velikost, pak se magnetický tok bude s časem měnit, a na sekundáru se napětí objeví. Na situaci se lze také podívat tak, že toto napětí má stejnosměrnou (tj. konstantní) a střídavou složku. Konstantní složka se netransformuje, ta střídavá ano.



Tohle může někdy připravit překvapení. Z praxe je znám případ, kdy rozvod malého napětí v učebně fyziky při přepnutí na stejnosměrné napětí dává usměrněné pulzující napětí, zhruba takové, jaké ukazuje graf vpravo.[90] A zkuste s takovým zdrojem demonstrovat žákům, že stejnosměrné napětí se netransformuje… ☺ Takže před podobnými demonstračními pokusy si ověřte, jaké napětí váš zdroj dává.

[88] Jde o hrubý odhad. Můžete si ho zkusit sami, nebo se podívat do nabídky některých výrobců, resp. dodavatelů síťových transformátorů.

[89] Navíc se pro tyto transformátory používají feritová jádra, která dovolují vyšší sycení, tedy vyšší maximální magnetickou indukci.

[90] Takové napětí vznikne dvojcestným usměrněním střídavého napětí. Má stále stejnou polaritu, ale střídavá složka je velmi výrazná.

Shrnutí

Výkon střídavého proudu:

Okamžitý: $P(t) = U(t) \cdot I(t)$, střední: $\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T P(t)\,dt$, $\overline{P} = U_{ef}\, I_{ef}$

Efektivní napětí obecně: $U_{ef}^{\;2} = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt$

pro harmonický průběh: efektivní napětí $U_{ef} = \frac{U_m}{\sqrt{2}}$, efektivní proud: $I_{ef} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$

Výkon střídavého proudu na rezistoru: $\overline{P} = U_{ef}\, I_{ef} = \frac{U_{ef}^{\;2}}{R} = R\, I_{ef}^{\;2}$

Na ideálním kondenzátoru a ideální cívce je střední výkon střídavého proudu nulový.

Výkon na spotřebiči při obecném fázovém posuvu φ: $\overline{P} = U_{ef}\, I_{ef} \cos\varphi$; $\cos\varphi$ ... účiník

Třífázový proud:

Fázové a sdružené napětí (sdružené je √3-krát větší než fázové, v síti ČR: fázové: 230 V, sdružené: 400 V)

Zapojení cívek třífázových motorů do hvězdy a do trojúhelníka.

Transformátor:

Transformace napětí: $\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1}$ (pro transformátor naprázdno a ideální zatížený transformátor)

Napětí na primáru a sekundáru jsou ve fázi.

Transformace proudu: $\frac{I_2}{I_1} = \frac{n_1}{n_2}$ (pro transformátor nakrátko)

Stejnosměrný proud se netransformuje; ale má-li střídavou složku, ta se transformuje.

* „Technické detaily“ (pro zájemce a pro ty, kdo to potřebují):

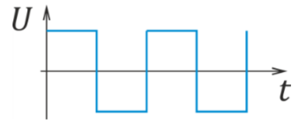
- Závitů na volt: $\frac{n}{U_{ef}} \doteq \frac{45}{(S/\mathrm{cm}^2)}\,\frac{1}{\mathrm{V}}$ (pro frekvenci 50 Hz a sycení jádra 1 T)
- Maximální proudová hustota ve vinutí cívek se doporučuje asi 2,5 A/mm^2.
- Průřez jádra: $S_{\text{jádra}} \doteq \sqrt{\frac{P}{1\mathrm{W}}}\ \mathrm{cm}^2$ (pro frekvenci 50 Hz)

Ztráty v transformátoru:

- „Ohmické“
- Vířivými proudy (omezují se jádrem ze vzájemně izolovaných transformátorových plechů)
- „V železe“ (aby byly co nejmenší, musí být co nejužší hysterezní smyčka)

Dodatek 11.A: Výkon střídavého proudu neharmonického průběhu a jeho měření (spíše pro zájemce)

To, že efektivní hodnota napětí je rovna $1/\sqrt{2}$ krát amplituda napětí, platí jen pro napětí harmonického průběhu.



Například pro napětí ***obdélníkového průběhu*** s amplitudou U_m je při připojení na rezistor odporu R okamžitý výkon stále stejný: $P(t) = U_m{}^2/R$. Efektivní napětí tedy bude zjevně rovno U_m. Totéž vyjde ze vztahu (11.7):

$$U_{ef}{}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T U^2(t)\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T U_m{}^2\,dt = U_m{}^2\,\frac{1}{T}\int_0^T dt = U_m{}^2\,. \qquad (11.A.1)$$

Pro obdélníkový průběh napětí je tedy efektivní napětí stejné jako maximální.

Pro napětí ***trojúhelníkového průběhu*** stačí počítat střední výkon jen přes první čtvrtinu periody[91]. V ní platí $U(t) = U_m \dfrac{t}{(T/4)}$, takže ze vztahu (11.7) upraveného pro integraci jen přes čtvrtinu periody dostaneme

$$U_{ef}{}^2 = \frac{1}{(T/4)}\int_0^{T/4} U^2(t)\,dt = \frac{U_m{}^2}{(T/4)^3}\int_0^{T/4} t^2 dt = \frac{U_m{}^2}{(T/4)^3}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{T/4} = \frac{U_m{}^2}{3}\,, \qquad (11.A.2)$$

takže pro trojúhelníkový průběh napětí je efektivní napětí rovno

$$U_{ef} = \frac{1}{\sqrt{3}}\,U_m\,. \qquad (11.A.3)$$

Jak je to s měřením střídavých napětí?

Multimetry přepnuté na měření střídavého napětí ukážou efektivní hodnotu napětí – v případě napětí harmonického průběhu ji naměří bez problémů. Umí si ale poradit i v případě jiných průběhů?

Odpověď zní: jak které.

Levnější multimetry totiž nepočítají efektivní hodnotu napětí podle vztahu (11.7), ale jednoduše napětí usměrní, z usměrněného tepavého napětí získají střední hodnotu napětí a tu pak vhodným koeficientem přepočtou na efektivní hodnotu. Přepočet ale dá správnou hodnotu jen pro harmonický průběh napětí.

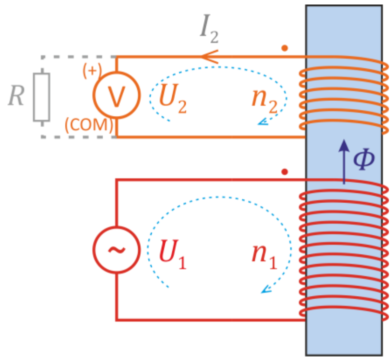
Správnou hodnotu i pro jiné průběhy dají jen multimetry, které opravdu integrují druhou mocninu okamžitého napětí. Ty bývají označeny jako „True RMS“.[92]

---

[91] Rozmyslete si, že to je pravda. (Když je tento dodatek v titulku označen „pro zájemce“, tak zde snad lze napsat oblíbenou frázi „laskavý čtenář snadno nahlédne“… ☺ Ale ono to tady opravdu není těžké vidět.)

[92] Z anglického „root mean square“ – to značí, že používají odmocninu z integrované hodnoty, viz (11.8).

Dodatek 11.B: Transformátor (jednoduše, ale formálněji)



Při formálnějším odvozování vztahů, které platí pro napětí na transformátoru, budeme využívat druhý Kirchhoffův zákon. Směry, kterými probíháme smyčky primárního a sekundárního obvodu, jsou vyznačeny na obrázku.[93]

Věnujme se nejprve primárnímu obvodu. V něm jsou dva zdroje napětí: zdroj střídavého napětí $U_1 = U_1(t)$ a napětí indukované v primární cívce:

$$U_{ind.1} = -\frac{d}{dt}\left(n_1 \Phi\right) \text{ .}^{94} \tag{11.B.1}$$

Z druhého Kirchoffova zákona pro daný obvod plyne

$$U_1 + U_{ind.1} = 0 \text{ .} \tag{11.B.2}$$

Po dosazení (11.B.1) dostáváme

$$U_1 = n_1 \frac{d\Phi}{dt} \text{ .} \tag{11.B.3}$$

Napětí indukované na sekundární cívce je analogicky k (11.B.1)

$$U_{ind.2} = -\frac{d}{dt}\left(n_2 \Phi\right) \text{ .} \tag{11.B.4}$$

Toto napětí je jediným zdrojem v sekundárním obvodu. V obvodu budeme uvažovat ještě rezistor o odporu R. Může jít o odpor samotného voltmetru, v každém případě jde o odpor tak velký, že proud I_2 je velmi malý a prakticky ovlivňuje magnetický indukční tok.[95] Druhý Kirchhoffův zákon aplikovaný na sekundární obvod dá

$$U_{ind.2} = -R I_2 \text{ .}^{96} \tag{11.B.5}$$

Ovšem $R I_2$ je napětí U_2, které ukáže voltmetr v sekundárním obvodu, čili $U_2 = -U_{ind.2}$.
Z (11.B.4) tedy dostáváme

$$U_2 = n_2 \frac{d\Phi}{dt} \text{ .} \tag{11.B.6}$$

A z (11.B.6) a (11.B.3) pak už okamžitě

$$\boxed{\frac{U_2}{U_1} = \frac{n_2}{n_1} \text{ .}} \tag{11.B.7}$$

---

[93] V případě primární smyčky elektrický proud ve směru probíhání (tj. na obrázku ve směru hodinových ručiček) vytváří v jádře magnetický indukční tok Φ ve směru šipky.

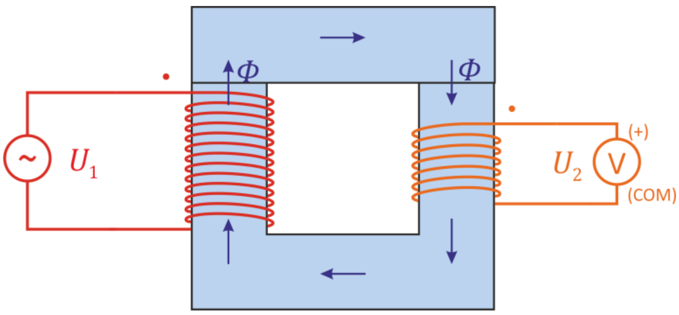
[94] Tento vztah můžeme odvodit dvěma způsoby: Buď jako $U_{ind.1} = -\frac{d\Psi}{dt}$, kde celkový magnetický indukční tok cívkou je $\Psi = n_1 \Phi$, nebo možná názorněji jako násobek napětí $-\frac{d\Phi}{dt}$ na jednom závitu. Poznamenejme, že znaménková konvence je stejná, jako jsme používali v kapitole věnované elektromagnetické indukci.

[95] Fakticky nám tento proud jen umožní názorně spočítat napětí na voltmetru.

[96] Znaménko mínus je zde proto, že směr, v němž proud I_2 bereme jako kladný, je opačný než směr probíhání smyčky.

Dodatek 11.C: Ještě ke smyslu vinutí cívek a polaritě napětí na cívkách transformátoru

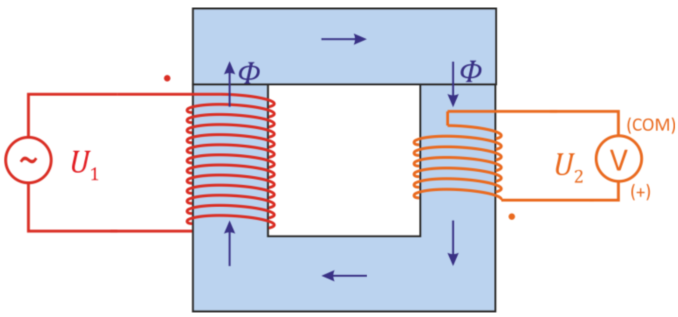
Podívejme se trochu podrobněji na polaritu napětí na primární a sekundární cívce a na to, jak souvisí se smyslem jednotlivých vinutí.



Pro určení polarity napětí indukovaného na cívkách můžeme uvažovat například situaci, kdy magnetický indukční tok (ve směru šipky) s časem roste. V cívkách se indukuje takové napětí, které by indukovaným proudem působilo proti změně, tedy vyvolávalo tok proti směru šipky. Pravidlem pravé ruky můžeme ověřit, že na vývodech cívek označených tečkami je kladné napětí (vždy oproti neznačenému vývodu).

Ovšem pozor – záleží na smyslu vinutí. Všimněte si, že na obrázku výše je sekundární cívka vinuta v opačném smyslu, než cívka primární.

Pokud by byly obě cívky vinuty stejně, bude polarita napětí opačná vůči napětí na primáru:



Opět to můžete ověřit úvahou vycházející ze směrů magnetického indukčního toku a Lenzova pravidla.

Druhý možný způsob: Myšlenkově si posuňte sekundární cívku po jádře na levou stranu k primární cívce. Uvidíte, že bude mít stejnou orientaci (resp. bude vinuta ve stejném smyslu) jako primární cívka – z toho je jasné, že napětí na obou cívkách bude mít stejnou polaritu.[97]

[97] Tečka u vývodu sekundární cívky bude po přesunu této cívky na jejím horním vývodu; takže tečku označující polaritu máme na obrázku správně.