Maxwellovy rovnice

Dostáváme se ke „zlatému hřebu“ celé přednášky – k rovnicím popisujícím obecné nestacionární elektromagnetické pole.

V kapitole o elektromagnetické indukci jsme tyto rovnice měli už téměř celé – ale zatím šlo o rovnice, které platily pouze pro kvazistacionární děje.

Poznali jsme, že magnetické pole ovlivňuje pole elektrické. Změny magnetického pole nutně znamenaly, že musí existovat pole elektrické, právě v tom tkví podstata elektromagnetické indukce. V kvazistacionárních dějích však změny elektrického pole neovlivňovaly pole magnetické.[1] Uvidíme, že v obecných nestacionárních situacích už s vlivem elektrického pole na pole magnetické budeme muset počítat.

Většina z rovnic (8.17) naštěstí může zůstat beze změny, k jejich modifikaci nás nenutí žádné výsledky experimentů ani teoretické úvahy.[2] Ovšem rovnici, která vyjadřovala Ampérův zákon celkového proudu, budeme muset doplnit:

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} \longleftarrow \text{bude třeba upravit}$$

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned}\right\} \text{platí obecně} \qquad (12.1)$$

Otázky, které nás v této kapitole čekají, jsou tedy celkem jasné:

- Co nás nutí upravit první z rovnic (12.1)?
- Jak tuto rovnici upravit?
- Jaké má tato úprava důsledky, tedy co z upravených rovnic plyne?

Třetí z uvedených otázek rozhodně celou nezodpovíme v této kapitole. Z upravených rovnic, které známe pod názvem **Maxwellovy rovnice**, totiž plyne veškeré chování elektromagnetických polí.[3] Na co se ale v této kapitole podíváme, bude energie elektromagnetického pole. Další nesmírně důležitý důsledek – existenci elektromagnetických vln a jejich vlastnosti – si schováme do následující kapitoly.

[1] Přesněji řečeno, vliv elektrického pole na pole magnetické jsme neuvažovali, skutečně je v těchto situacích zanedbatelný. Pro zájemce odvodíme podmínky, za nichž lze tento vliv zanedbat, v Dodatku B.

[2] Dané rovnice tedy dobře popisují to, co o obecných nestacionárních dějích zjišťujeme pomocí experimentů.

[3] Dá se říci, že této otázce se věnuje samostatný předmět *Klasická elektrodynamika*, který budete mít v dalším ročníku. Kromě toho se jí zabývá řada učebnic s názvy typu *Teorie elektromagnetického pole*, *Klasická elektrodynamika* a podobnými.

12.1 Proč a jak upravit zákon celkového proudu

Ve stacionárním a kvazistacionárním případě magnetické pole buzené proudem hustoty $\vec{j}$ odpovídalo rovnici

$$\operatorname{rot}\vec{H} = \vec{j} \ . \tag{12.2}$$

Jak už víme, tato rovnice je vyjádřením Ampérova zákona celkového proudu, $\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{r} = I$, v diferenciálním tvaru. Proč by se měla měnit?

Aplikujme na rovnici (12.2) operátor divergence, dostaneme $\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H} = \operatorname{div}\vec{j}$, čili[4]

$$\operatorname{div}\vec{j} = 0 \ . \tag{12.3}$$

Ovšem ***rovnice kontinuity*** říká obecně něco jiného:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \ . \tag{12.4}$$

Rovnice kontinuity přitom vyjadřuje zákon zachování náboje, tedy něco, čeho se určitě nechceme vzdávat. Nemůžeme ji tedy nijak měnit – změnit se musí rovnice (12.2), aby byla s rovnicí kontinuity v souladu.[5]

Zkusme (12.2) modifikovat tím, že do ní něco přidáme. Uvažujme rovnici

$$\operatorname{rot}\vec{H} + \vec{?} = \vec{j} \tag{12.5}$$

a zkusme určit neznámý člen $\vec{?}$ [6] tak, aby (12.5) byla v souladu s rovnicí kontinuity (12.4). Aplikací divergence na (12.5) získáme $\underbrace{\operatorname{div}\operatorname{rot}\vec{H}}_{0} + \operatorname{div}\vec{?} = \operatorname{div}\vec{j}$, a odtud

$$-\operatorname{div}\vec{?} + \operatorname{div}\vec{j} = 0 \ . \tag{12.6}$$

Porovnáním s (12.4) vidíme, že je potřeba, aby

$$-\operatorname{div}\vec{?} = \frac{\partial\rho}{\partial t} \ . \tag{12.7}$$

Hustota náboje ale souvisí s elektrickou indukcí: $\rho = \operatorname{div}\vec{D}$.[7] Derivací podle času odtud získáme $\frac{\partial\rho}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{div}\vec{D} = \operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$.[8] Vztah (12.7) tedy dává $-\operatorname{div}\vec{?} = \operatorname{div}\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$ a zjevně se nabízí volit $\vec{?} = -\frac{\partial\vec{D}}{\partial t}$. Rovnice (12.5) pak bude

$$\boxed{\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \ .} \tag{12.8}$$

---

[4] S uvážením toho, že $\operatorname{div}(\operatorname{rot}\vec{a}) = 0$ pro „libovolný rozumný“ vektor $\vec{a}$.

[5] Ampérův zákon (12.2) je s rovnicí kontinuity (12.4) v souladu, jen pokud $\frac{\partial\rho}{\partial t} = 0$, což je stacionární případ, nebo pokud je $\frac{\partial\rho}{\partial t}$ tak malé, že je lze zanedbat (což nastává v kvazistacionárním případě). My ale chceme rovnice pro obecný nestacionární případ.

[6] Takhle se asi nikde v literatuře neznačí, ale proč bychom si na chvíli neznámý člen neoznačili po svém? ☺

[7] Jde o jednu z rovnic (12.1), konkrétně o Gaussovu větu; ta platí i v obecném nestacionárním případě.

[8] Zde jsme zaměnili derivace podle času a podle prostorových proměnných.

Rovnice (12.8) je opravdu správnou Maxwellovou rovnicí[9] a spolu s ostatními Maxwellovými rovnicemi adekvátně popisuje chování elektromagnetického pole na klasické úrovni.[10]

Interpretace: Maxwellův posuvný proud

Dal by se dodatečný člen v rovnici (12.8) nějak názorně interpretovat? Můžeme ho převést na druhou stranu rovnice; dostaneme tak

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \ . \tag{12.9}$$

Člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ teď „funguje“ jako hustota jakéhosi proudu. V integrálním tvaru[11] je (12.9) zobecněním Ampérova zákona celkového proudu:

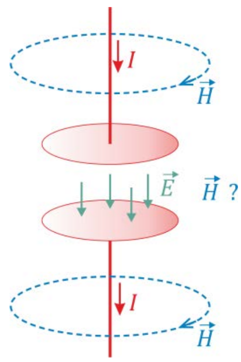
$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{r} = I + \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} \ . \tag{12.10}$$

Je tento „dodatečný proud“ v nějakém smyslu skutečný? Částečně ano. Elektrická indukce je dána součtem násobku elektrické intenzity a polarizace, $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$. Časová derivace je tedy

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \frac{\partial \vec{P}}{\partial t} \ . \tag{12.11}$$

Druhý člen na pravé straně (značený zelenou barvou) je časová derivace polarizace. Při změně polarizace se dipóly v dielektriku natáčejí, čili náboje na „koncích dipólů“ se skutečně posunují.[12] Tomuto proudu se proto někdy říká *posuvný proud*. A zjevně jde o reálný přesun nábojů (byť vázaných na dipóly), tedy o skutečný proud.

První člen na pravé straně (12.11) (značený oranžově) je ale při změnách elektrického pole nenulový i ve vakuu, kde se žádné skutečné náboje nepřesunují. Přesto do rovnic patří; navzdory tomu, že ve vakuu se reálně nic neposouvá, se někdy v analogii s posuvným proudem v dielektriku nazývá *Maxwellův posuvný proud ve vakuu*.



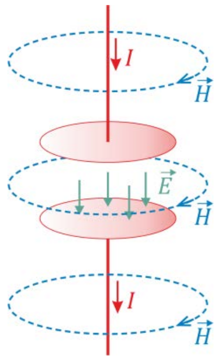
Konkrétně se vliv tohoto „proudu“ projeví například v situaci podle obrázku. Proud přitéká přímým vodičem do horní desky deskového kondenzátoru. Kolem vodiče je, jak už to známe, magnetické pole. Podobně je magnetické pole kolem vodiče, jímž proud odtéká ze spodní desky kondenzátoru. Jak je tomu ale v prostoru kondenzátoru a kolem něj?

[9] Poznámka „pro šťouraly“: Výše uvedené teoretické odvození nemůžeme brát jako zcela rigorózní, připouštělo by totiž možnost přidat k novému členu rotaci libovolné vektorové funkce. Asi by šlo rozvíjet teoretické argumenty, které by tuto možnost nějak omezovaly (pro stacionární případ musíme dostat zákon celkového proudu, přidaný člen by musel vyhovovat rozměrově, což by nebylo jednoduché zařídit, atd.), ale jednoduší je prostě konstatovat, že rovnice (12.8) je spolu s ostatními Maxwellovými rovnicemi v souladu s experimenty – takže tyto rovnice dobře vystihují reálné chování elektromagnetického pole.

[10] Tohle je důležité: Maxwellovy rovnice popisují chování elektromagnetického pole ***klasicky*** – pro popis kvantových efektů spojených s elektromagnetickým polem je potřeba přejít ke kvantové teorii, konkrétně ke *kvantové elektrodynamice*. Klasický popis naštěstí vystihuje chování elektromagnetického pole ve spoustě důležitých případů a situací, od odpuzování nabitých brček až po vysílání, šíření a příjem elektromagnetických vln. Navíc jsou Maxwellovy rovnice v souladu se speciální teorií relativity.

[11] Ten dostaneme z (12.9) integrací přes nějakou plochu S a aplikací Stokesovy věty; c je křivka ohraničující plochu S.

[12] Formálně se to projeví změnou velikosti vázaných nábojů třeba na okrajích dielektrika.



Ukazuje se, že magnetické pole je i v těchto místech. Kondenzátor se přitékajícím proudem nabíjí, elektrická intenzita mezi jeho deskami roste, tím pádem roste i elektrická indukce D a člen $\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$ ve vztahu (12.10) tak budí magnetické pole stejně, jako proud ve vodiči budí magnetické pole kolem vodiče.[13]

Posuvný proud ve vakuu si můžeme, ale nemusíme představovat jako analogii reálného proudu. V situaci, kterou jsme popsali, to vypadá, jako by proud I pokračoval „skrz kondenzátor“ ve formě posuvného proudu; ovšem prostorem mezi deskami kondenzátoru samozřejmě žádný náboj neprochází. Podstatné je, že magnetické pole se chová tak, jak popisují rovnice (12.9) resp. (12.10).

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru

Konečně tedy máme k dispozici úplnou soustavu Maxwellových rovnic, které platí ve všech případech: pro děje a jevy stacionární, kvazistacionární i obecně nestacionární:

$$
\begin{aligned}
\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \\
\operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\
\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\
\operatorname{div} \vec{B} &= 0
\end{aligned}
\tag{12.12}
$$

Zkuste si sami rozmyslet význam jednotlivých rovnic[14], dřív než se podíváte na další část kapitoly. (Nápověda: Mohou vám v tom pomoci integrální formulace těchto rovnic. I těm se budeme za chvíli věnovat.)

Poznámka k názvosloví a nejen k němu:

První dvě rovnice se někdy nazývají *první série Maxwellových rovnic*, zbylé dvě rovnice *druhá série Maxwellových rovnic*.

V různých učebnicích se ovšem rovnice (12.12) dají najít i v odlišném pořadí.

[13] Takhle je to v okolí kondenzátoru. Uvnitř kondenzátoru je situace analogická jako uvnitř silnějšího vodiče protékaného proudem.

[14] Většinu jsme jich ostatně poznali a diskutovali už dříve.

12.2 Diferenciální a integrální tvar Maxwellových rovnic

Pojďme porovnat diferenciální a integrální tvary Maxwellových rovnic a připomenout si jejich význam:

Diferenciální tvar	Integrální tvar	Význam
$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$	$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{r} - \int_S \frac{\partial\vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = I$	zobecnění Ampérova zákona celkového proudu
$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$	Gaussova věta (původně elektrostatiky, platí obecně)
$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$	$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	Faradayův zákon elektromagnetické indukce $U_{\text{ind.}} = -\frac{d\Psi}{dt}$
$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	neexistence magnetických monopólů

Diferenciální a integrální tvary Maxwellových rovnic vyjadřují tytéž fyzikální zákonitosti.[15]

Od diferenciálních tvarů přejdeme k integrálním samozřejmě integrací (přes uzavřené křivky nebo plochy) a použitím Stokesovy nebo Gaussovy věty.[16] Přitom samozřejmě $I = \int_S \vec{j}\cdot d\vec{S}$, kde S je plocha ohraničená uzavřenou křivkou c, a $Q = \int_V \rho\, dV$, kde V je objem ohraničený uzavřenou plochou S.

Naopak od integrálních tvarů k diferenciálním přejdeme pomocí Stokesovy nebo Gaussovy věty (převedením integrálního tvaru vždy do jednoho integrálu přes plochu nebo přes objem) a využitím toho, že integrální tvar musí platit pro libovolnou plochu, resp. objem.[17]

[15] Nejsou to tedy jiné rovnice, jsou jen jinak vyjádřené.

[16] Uvědomte si, v kterých rovnicích používáme integrály přes uzavřené křivky (a Stokesovu větu) a ve kterých rovnicích integrály přes uzavřené plochy (a Gaussovu větu) a zopakujte si, jak to děláme. Přechod od diferenciálních tvarů k integrálním by pro nás neměl být žádnou záhadou a neměl by nám dělat potíže.

[17] Takhle obecně popsáno to možná vypadá poněkud „krypticky" – proveďte si to konkrétně pro jednotlivé rovnice, bude to mnohem jasnější. (Už jsme to v některých případech dělali dříve, například pro Farayův zákon elektromagnetické indukce v kapitole 8.3.)

12.3 Maxwellovy rovnice – trochu bližší pohled

Maxwellovy rovnice jsou pohybové rovnice elektromagnetického pole

Podívejme se znovu na Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru:

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \tag{12.12 a}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho \tag{12.12 b}$$

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{12.12 c}$$

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0 \tag{12.12 d}$$

Hustota proudu $\vec{j}$ a hustota náboje ρ jsou v těchto rovnicích „zdrojovými členy“: Proudy a náboje budí elektrické a magnetické pole, Maxwellovy rovnice vystihují, jak je budí.

Trochu se to podobá situaci, kterou známe z mechaniky: Síla ovlivňuje pohyb hmotného bodu, a druhý Newtonův zákon $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$ říká, jak jej ovlivňuje. Z tohoto zákona můžeme vypočítat pohyb hmotného bodu, proto jsme říkali, že druhý Newtonův zákon je *pohybová rovnice* hmotného bodu.

Obecně jako ***pohybové rovnice*** označujeme rovnice, které ***umožňují vypočítat časový vývoj*** nějakého fyzikálního systému. V mechanice jde například o pohyb soustavy hmotných bodů nebo tuhého tělesa. V případě elektrického a magnetického pole jde o časový vývoj těchto polí.[18] A právě tohle umožňují vypočítat Maxwellovy rovnice. Proto má dobrý smysl říci, že Maxwellovy rovnice jsou vlastně pohybovými rovnicemi elektromagnetického pole.

V klasické mechanice soustav hmotných bodů a tuhého tělesa měly pohybové rovnice formu obyčejných diferenciálních rovnic, resp. soustav těchto rovnic. V případě Maxwellových rovnic jde o *parciální diferenciální rovnice*.[19] Řešení parciálních diferenciálních rovnic je obecně složitější záležitostí, než řešení obyčejných diferenciálních rovnic. Zde se proto omezíme jen na konstatování, že je lze řešit[20] a dodáme několik základních poznámek.

[18] Tedy o to, jak se na různých místech elektrické a magnetické pole mění s časem.

[19] Parciální derivace podle času jsou v nich okamžitě vidět, parciální derivace podle prostorových proměnných se „skrývají“ v operátorech divergence a rotace.
Na parciální diferenciální rovnice jsme ostatně narazili už v hydrostatice a hydrodynamice, ale to bylo jen takové první setkání. Parciální diferenciální rovnicí byla také například Laplaceova-Poissonova rovnice, ale tam šlo jen o prostorové proměnné, v Maxwellových rovnicích jsou navíc časové derivace.

[20] Matematika umí ukázat, že (za „rozumných podmínek“) řešení existují a jsou jednoznačná. Aby řešení bylo jednoznačné, je ovšem potřeba zadat jak počáteční podmínky, tak okrajové podmínky. (Pro další podrobnosti zde odkážeme na předmět *Klasická elektrodynamika*.) V případě složitějších problémů spojených třeba s technickými aplikacemi se samozřejmě Maxwellovy rovnice dnes řeší numericky pomocí počítačů.

Vlastnosti Maxwellových rovnic – a ještě k jejich významu

Jedna vlastnost Maxwellových rovnic je velice důležitá: jsou to **lineární rovnice**.[21] To znamená, že dvakrát větší hustoty proudu a náboje znamenají, že budou dvakrát větší i intenzity a indukce polí. A rovněž, že součet řešení je také řešením – jinými slovy, že platí **princip superpozice**.[22]

Další vlastnost se týká počtu rovnic a počtu neznámých. Rovnice (12.12 a) a (12.12 c) jsou vektorové, každá tedy má tři složky. Dohromady je to tedy šest rovnic, v nichž se vyskytují časové derivace; právě tyto rovnice určují časový vývoj.[23]

Neznámých máme zdánlivě mnohem víc: vektory $\vec{E}, \vec{D}, \vec{H}, \vec{B}$; každý vektor má tři složky, to dává celkem 12 neznámých. Ovšem dané vektory nejsou nezávislé. Svazují je materiálové vztahy, konkrétně v měkkém homogenním izotropním dielektriku a magnetiku je

$$\begin{aligned} \vec{D} &= \varepsilon \vec{E} \\ \vec{B} &= \mu \vec{H} \end{aligned} \tag{12.13}$$

(ve vakuu samozřejmě také, permitivita a permeabilita jsou tam ε_0 a μ_0). Takže neznámé jsou vlastně jen dva vektory, ty mají dohromady šest složek. Čili máme šest rovnic pro šest neznámých.

Zatím jsme zdrojové členy Maxwellových rovnic, $\vec{j}$ a ρ, brali jako pevně zadané. To může být někdy pravda[24]. Často ovšem elektromagnetické pole naopak ovlivňuje pohyb nábojů (a tedy i proudy). Působení pole na náboje, jak víme, popisuje Lorentzova síla

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right) . \tag{12.14}$$

Toto se uplatňuje například ve fyzice plazmatu: proudy v plazmatu budí magnetické pole, to zase zpětně působí na pohyb části, a tedy ovlivňuje proudy. Celý problém už proto *není lineární* a chování systémů nabitých částic a elektromagnetického pole tak může být značně složité.[25]

V zásadě ale můžeme vzájemný vztah pohybujících se nabitých částic a elektromagnetického pole na klasické úrovni charakterizovat konstatováním

> „Náboje a proudy říkají elektromagnetickému poli, jak se má chovat,
> elektromagnetické pole říká nabitým částicím, jak se mají pohybovat."[26]

---

[21] Nevyskytují se v nich žádné nelineární členy typu třeba E^2 nebo $\vec{E} \cdot \vec{B}$ apod.

[22] Jsou-li $\vec{E}_1, \vec{D}_1, \vec{H}_1, \vec{B}_1$ řešením pro proudy $\vec{j}_1$ a náboje ρ_1 a $\vec{E}_2, \vec{D}_2, \vec{H}_2, \vec{B}_2$ řešením pro proudy $\vec{j}_2$ a náboje ρ_2, pak řešením pro zdrojové členy $\vec{j}_1 + \vec{j}_2$ a $\rho_1 + \rho_2$ jsou $\vec{E}_1 + \vec{E}_2,\ \vec{D}_1 + \vec{D}_2,\ \vec{H}_1 + \vec{H}_2,\ \vec{B}_1 + \vec{B}_2$.

[23] V rovnicích (12.12 b) a (12.12 d) se časové derivace nevyskytují. Lze ukázat, že tyto rovnice stačí splnit jen v určitém počátečním čase, pak už jsou díky ostatním rovnicím splněny automaticky. Fakticky to znamená, že (12.12 b) a (12.12 d) pouze kladou omezení na počáteční podmínky, pro časový vývoj je už nemusíme uvažovat. O těchto detailech se více dozvíte v přednášce *Klasická elektrodynamika*.

[24] Například, když budeme mávat nabitým plastovým brčkem nebo koulí van de Graaffova generátoru nebo (abychom vzali reálnější příklad), když budeme znát proud, který teče anténou vysílače.

[25] Podívejte se třeba na sluneční protuberance nebo na to, kolik desetiletí fyzikové věnovali tomu, aby zkrotili chování plazmatu v zařízeních typu Tokamak.

[26] Zde parafrázujeme známý výrok J. A. Wheelera týkající se gravitace v rámci obecné teorie relativity: „Hmota říká prostoročasu, jak se má zakřivovat, prostoročas říká hmotě, jak se má pohybovat."
Ale ono to v naší formulaci vzájemnou interakci nabitých částic a elektromagnetické pole také vystihuje.

Při našem seznamování s elektřinou a magnetismem jsme se nejprve zabývali zvlášť elektrickým a magnetickým polem. Postupně jsme začínali vidět, jak se vzájemně ovlivňují.[27] V této kapitole jsme už několikrát použili výraz, který je sjednocuje: **elektromagnetické pole**. K tomu, že elektrické a magnetické jevy jsou vzájemně provázány a že jsou projevem jediné *elektromagnetické interakce*, dospěli fyzikové postupně. My teď toto provázání vidíme v Maxwellových rovnicích: Jednoznačně ukazují, že elektrické a magnetické pole od sebe obecně nejde odtrhnout – zvlášť se mohou projevovat jen v konkrétních speciálních situacích.[28]

Mohli bychom se ptát, jestli Maxwellovy rovnice (spolu se vztahem pro Lorenztovu sílu) opravdu poskytují celý potřebný základ pro popis elektrických a magnetických jevů. Opravdu nejsou potřeba žádné další základní zákony?[29] Co třeba Coulombův zákon? Nebo zákon zachování náboje?

Ukazuje se, že Maxwellovy rovnice skutečně jsou dostatečným základem. Například Coulombův zákon z nich odvodit lze[30]. A zákon zachování náboje – ten souvisí s rovnicí kontinuity, takže stačí dokázat, že z Maxwellových rovnic plyne ona. Podívejme se, jak na to.

Rovnice kontinuity jako důsledek Maxwellových rovnic

Rovnici kontinuity jsme použili při úvahách, jak upravit rovnici (12.2). Takže není překvapující, že z Maxwellových rovnic půjde rovnici kontinuity zpětně odvodit.

Je to jednoduché. Vyjdeme z rovnice (12.12 a):

$$\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \Big/ \mathrm{div} \tag{12.15}$$

Protože $\mathrm{div}(\mathrm{rot}\,\vec{H}) = 0$ [31] a operátor divergence a parciální derivaci podle času lze prohodit[32], dostaneme

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\mathrm{div}\vec{D}\right) = \mathrm{div}\,\vec{j} \tag{12.16}$$

Další z Maxwellových rovnic, (12.12 b), je $\mathrm{div}\,\vec{D} = \rho$. Po dosazení do (12.16) dostaneme

$$-\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\right) = \mathrm{div}\,\vec{j}\ , \tag{12.17}$$

což už je kýžená rovnice kontinuity (12.4). Jejím integrálním tvarem je zákon zachování náboje – takže opravdu vidíme, že jej lze dostat z Maxwellových rovnic.

> Na druhou stranu, zákony zachování jsou tak fundamentálními zákony, že je rozhodně má smysl uvažovat nezávisle na rovnicích popisujících chování polí. (Ostatně, zákon zachování náboje platí i v kvantové elektrodynamice, která chování elektromagnetického pole popisuje úplně jinak, než Maxwellovými rovnicemi.)

[27] Tok nábojů, tedy proud (který je ve vodiči vyvoláván elektrickým polem) budí magnetické pole, časové změny magnetického pole budí elektrické pole (elektromagnetická indukce).

[28] Například, když máme kousek od sebe v klidu dvě nabitá plastová brčka… ☺

[29] Míněno na klasické úrovni, jak už jsme uvedli výše, kvantování elektromagnetického pole zde necháváme stranou.

[30] To si ukážete v přednášce *Klasická elektrodynamika*.

[31] Tohle platí obecně, viz první poznámku pod čarou na s. 2.

[32] Prohodit s operátorem divergence, tedy s derivacemi podle prostorových proměnných; uvědomte si, proč to lze.

12.4 Podmínky na rozhraní

Maxwellovy rovnice v diferenciálním tvaru umožňují řešit, jaké pole je buzeno ve vakuu nebo spojitém prostředí, když známe hustoty nábojů a proudů. Co když je ale prostředí víc a mezi nimi existují rozhraní?[33] Rozhraní navíc mohou být nabitá, případně po nich mohou téci plošné proudy. Pro tyto případy se hodí znát, jaké podmínky elektrické a magnetické pole splňují na rozhraní, přesněji řečeno, při přechodu z jednoho prostředí do druhého. Už jsme to řešili třeba v elektrostatice, nyní se na tyto podmínky podíváme obecně.

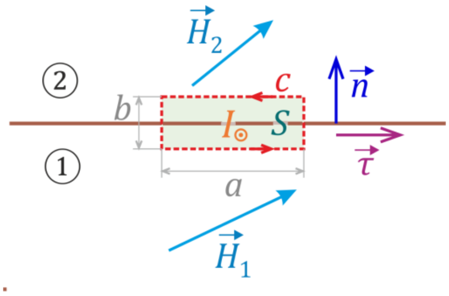
Pomohou nám přitom Maxwellovy rovnice v integrálním tvaru. Projdeme si je v pořadí, v jakém jsme je seřadili výše, viz tabulku v části 12.2. Z každé rovnice vyplyne jedna podmínka.

Podmínka pro tečné složky magnetické intenzity

Vyjdeme z rovnice

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{r} \;=\; \int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} + I \qquad (12.18)$$

Křivku c zvolíme tak, jak ukazuje obrázek[34]: ve tvaru malého obdélníku; jeho strana délky a je rovnoběžná s rozhraním, strana b na něj kolmá.[35] Stranu b zvolíme velmi krátkou a za chvíli budeme navíc limitovat $b \to 0$, takže v křivkovém integrálu zůstanou jen příspěvky od integrace po stranách délky a. Obecně navíc obdélníček volíme tak malý, že magnetické intenzity $\vec{H}_1$ a $\vec{H}_2$ (tedy intenzity „pod rozhraním“, neboli v prostředí 1, a „nad ním“, tedy v prostředí 2) můžeme považovat po celé délce a za konstantní; podobně to bude s ostatními veličinami.[36]



Křivkový integrál na levé straně (12.18) tedy dá

$$\oint_c \vec{H}\cdot d\vec{r} \;=\; \vec{H}_1\cdot\vec{\tau}\,a + \vec{H}_2\cdot(-\vec{\tau})\,a \;, \qquad (12.19)$$

kde $\vec{\tau}$ je jednotkový vektor tečný k rozhraní, jak to ukazuje obrázek. Pro výpočet pravé strany (12.18) se nám bude hodit jednotkový vektor kolmý na plochu obdélníčku. Označíme jej $\vec{e}$; platí, že

$$\vec{e} \;=\; \vec{\tau}\times\vec{n} \;, \qquad (12.20)$$

kde $\vec{n}$ je normálový vektor kolmý k rozhraní (také jednotkový). Vektor $\vec{e}$ by na obrázku mířil kolmo na plochu papíru směrem k nám. Velikost prvního členu na pravé straně můžeme odhadnout jako

$$\left|\int_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\right| \;<\; \text{maximum}\left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| a\,b \;. \qquad (12.21)$$

Po limitě $b \to 0$, kterou uděláme, dá tento člen nulu. Analogicky dají po uvedené limitě nulu příspěvky k proudu I dané hustotami proudu $\vec{j}_1$ a $\vec{j}_2$ pod rozhraním a nad rozhraním.

---

[33] Třeba mezi dvěma dielektriky nebo mezi dielektrikem a vodičem.

[34] Rozhraní mezi prostředími 1 a 2 je zde zobrazeno v řezu.

[35] Poznámka pro „šťoury“: Rozhraní samozřejmě nemusí být rovinné. Ale náš obdélníček můžeme volit tak malý, že v daném měřítku je rozhraní prakticky rovinné. (Vyhneme se přitom ostrým hranám a hrotům.) Pokud byste chtěli mít celou úvahu a výpočet exaktněji, můžete místo obdélníčku volit křivku zakřivenou tak, aby kopírovala zakřivené rozhraní. Výpočty budou trochu delší a komplikovanější, výsledek vyjde stejný.

[36] Bez tohoto předpokladu bychom se mohli obejít, počítat křivkový integrál přesně a pracovat pak se středními hodnotami veličin. Bylo by to exaktnější, delší, méně názorné a vedlo by to ke stejnému výsledku. (Necháváme proto na laskavých čtenářích, aby si v případě zájmu provedli dané odvození sami.)

Nenulový může být příspěvek od plošného proudu $\vec{J}$ tekoucího rozhraním. K proudu I přispívá jen jeho složka do směru $\vec{e}$, je tedy[37]

$$I = \vec{J} \cdot \vec{e} \; a \; . \tag{12.22}$$

Celkově tedy (po limitě $b \to 0$) dostáváme z (12.18) výsledek

$$\left(\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau} \right) a = \vec{J} \cdot \vec{e} \; a \; . \tag{12.23}$$

Po vydělení a pak navíc můžeme provést ještě limitu $a \to 0$, abychom všechny veličiny dostali opravdu v jednom bodě. Ve výsledku ještě vyjádříme $\vec{e}$ pomocí (12.20) a dostáváme výslednou podmínku

$$\boxed{\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau} = \vec{J} \cdot (\vec{\tau} \times \vec{n}) \; .} \tag{12.24}$$

Vidíme, že

pokud rozhraním neprotéká plošný proud, jsou tečné složky magnetické intenzity spojité.[38]

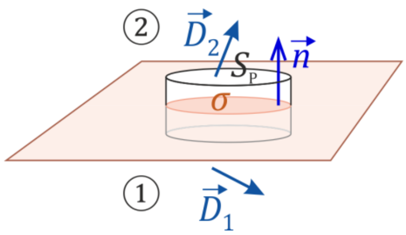
Když rozhraním plošný proud protéká, pak spojité jsou složky $\vec{H}$ ve směru proudu (pro $\vec{\tau} \parallel \vec{J}$)[39]. Rozdíl složek kolmých na plošný proud je určen vztahem (12.24).

Podmínka pro normálové složky elektrické indukce

Vyjdeme z Maxwellovy rovnice

$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \; . \tag{12.25}$$

Jako plochu S zvolíme povrch malého válečku (viz obrázek[40]), jeho výšku budeme následně zmenšovat k nule. Tok elektrické indukce (integrál v (12.25)) tedy spočteme jako součet toků přes horní a dolní podstavu válečku:



$$\oint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \left(\vec{D}_2 \cdot \vec{n} + \vec{D}_1 \cdot (-\vec{n}) \right) S_P \; , \tag{12.26}$$

kde S_P je plocha podstavy a $\vec{D}_1$ a $\vec{D}_2$ jsou vektory elektrické indukce v prostředích 1 a 2. Náboj ve válečku je dán plošnou hustotou náboje σ na rozhraní:[41]

$$Q = \sigma S_P \; . \tag{12.27}$$

Po dosazení do (12.25) a vydělení S_P dostáváme výslednou podmínku

$$\boxed{\vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \sigma \; .} \tag{12.28}$$

Pokud rozhraní není nabité, jsou normálové složky elektrické indukce spojité.[42]

Nespojitost normálových složek elektrické indukce je rovna plošné hustotě náboje na rozhraní.

---

[37] Složka plošného proudu ve směru $\vec{\tau}$ neproteče plochou obdélníčku. Složka plošného proudu ve směru $\vec{e}$ je na plochu obdélníčku kolmá. Rozmyslete si, že (12.22) dává při naší volbě orientace vektoru $\vec{e}$ správné znaménko proudu do (12.18). (Pomoci vám může obrázek a pravidlo pravé ruky.)

[38] Pro $\vec{J} = 0$ dává (12.24) $\vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} - \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau} = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \vec{H}_1 \cdot \vec{\tau} = \vec{H}_2 \cdot \vec{\tau}$.

[39] Rozmyslete si, že toto z (12.24) opravdu plyne.

[40] Plášť válečku protíná rozhraní, spodní podstava je v prostředí 1, horní v prostředí 2. Ostatně, s tímto odvozením jsme se už setkali v elektrostatice, tak ho nyní můžeme zopakovat už spíše stručně.

[41] Váleček je malý, takže hodnoty veličin uvnitř něj a na jeho podstavách bereme jako konstantní. Případný objemový náboj k celkovému náboji Q nepřispěje, protože po limitování výšky válečku k nule dá nulu.

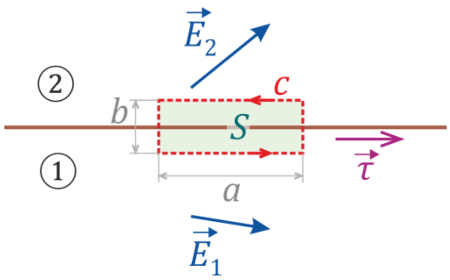
[42] Pro σ = 0 dává (12.28) $\vec{D}_2 \cdot \vec{n} - \vec{D}_1 \cdot \vec{n} = \sigma \;\; \Rightarrow \;\; \vec{D}_2 \cdot \vec{n} = \vec{D}_1 \cdot \vec{n}$.

Podmínka pro tečné složky elektrické intenzity

Při odvozování nám bude základem Maxwellova rovnice

$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} + \frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (12.29)$$

Křivkou pro integraci bude opět malý obdélníček; jeho výšku b budeme následně zmenšovat k nule. Do křivkového integrálu tedy přispějí jen příspěvky přes strany rovnoběžné s rozhraním, takže:



$$\oint_c \vec{E}\cdot d\vec{r} = \vec{E}_1\cdot\vec{\tau}\,a + \vec{E}_2\cdot(-\vec{\tau})\,a \ . \qquad (12.30)$$

Velikost integrálu přes plochu S můžeme odhadnout jako[43]

$$\left|\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S}\right| = \left|\int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}\right| < \text{maximum}\left|\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\right| a\,b\,,$$

což pro $b \to 0$ jde k nule. Z (12.29) a (12.30) tedy dostaneme výslednou podmínku:

$$\boxed{\vec{E}_1\cdot\vec{\tau} = \vec{E}_2\cdot\vec{\tau}} \qquad (12.31)$$

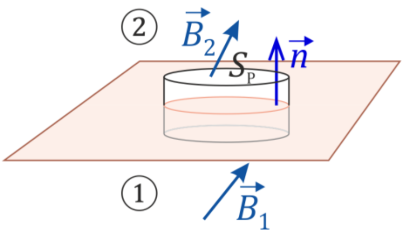
Tečné složky elektrické intenzity jsou spojité.

Podmínka pro normálové složky magnetické indukce

Tentokrát vyjdeme z rovnice

$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0 \qquad (12.32)$$

Odvození bude analogické podmínce pro normálovou složku $\vec{D}$:



$$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \left(\vec{B}_2\cdot\vec{n} + \vec{B}_1\cdot(-\vec{n})\right)S_P \qquad (12.33)$$

Z (12.32) a (12.33) dostáváme $\vec{B}_2\cdot\vec{n} - \vec{B}_1\cdot\vec{n} = 0$, neboli výslednou podmínku

$$\boxed{\vec{B}_1\cdot\vec{n} = \vec{B}_2\cdot\vec{n}} \qquad (12.34)$$

Normálové složky magnetické indukce jsou spojité.

[43] Plocha je pevná (nemění se s časem), takže $\frac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S \frac{\partial\vec{B}}{\partial t}\cdot d\vec{S}$.

12.5 Hustota a tok energie elektromagnetického pole

Již v kapitolách o elektrostatice a o magnetickém poli jsme začali rozvíjet představu, že elektrické a magnetické pole mají energii a že tato energie je v prostoru rozložena s nějakou hustotou. Pojďme se podívat, jak je to s energií elektromagnetického pole v obecném případě.

Vyjdeme přitom z Maxwellových rovnic, tedy z pohybových rovnic elektromagnetického pole. Inspirovat nás může postup, jakým jsme odvozovali kinetickou energii hmotného bodu. Vyšli jsme také z pohybové rovnice (v daném případě z druhého Newtonova zákona) a pohybovou rovnici jsme násobili takovou veličinou, abychom na pravé straně rovnice dostali výkon.[44] Levou stranu jsme pak upravili na derivaci „něčeho“ podle času, a to „něco“ tedy musela být energie. V případě elektromagnetického pole budeme postupovat analogicky, jen to bude početně trochu zdlouhavější.

Odvození hustoty energie pole

Vyjdeme z Maxwellových rovnic (12.12). Pro přehlednost si je zde přepíšeme a hned naznačíme první úpravu:

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} \qquad \Big/ \cdot \vec{E} \tag{12.35 a}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = \rho \tag{12.35 b}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{12.35 c}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \tag{12.35 d}$$

Proč násobíme rovnici (12.35 a) elektrickou intenzitou? Protože $\vec{j}\cdot\vec{E}$ je objemová hustota výkonu.[45] Na pravé straně (12.35 a) tedy po vynásobení bude hustota výkonu. A hustota výkonu musí souviset s časovou změnou hustoty energie.[46] Přesněji řečeno, s časovou derivací hustoty energie. Stačí nám tedy výslednou levou stranu rovnice upravit na derivaci „něčeho“ podle času – a to „něco“ zřejmě bude hustota energie elektromagnetického pole. [47]

Z (12.35 a) po naznačeném násobení elektrickou intenzitou dostaneme

$$\vec{E}\cdot\operatorname{rot}\vec{H} - \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}\cdot\vec{E} \tag{12.36}$$

Levou stranu této rovnice rozepíšeme ve složkách (užíváme přitom Einsteinovu sumační konvenci), a upravíme:

---

[44] Určitě si vzpomenete: rovnici $m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}$ jsme násobili rychlostí $\vec{v}$ a na pravé straně získali $\vec{F}\cdot\vec{v}$, což je výkon. Z toho plynulo, že výraz na levé straně, $m\vec{v}\cdot\frac{d\vec{v}}{dt}$, musí být časovou derivací (kinetické) energie.

[45] Jde o výkon, kterým se zahřívá například materiál rezistoru, když jím prochází proud; viz kapitola 6. Ostatně vzorec $P = U \cdot I$ pro výkon na rezistoru si pamatujeme snad všichni, a z něj se už hustota výkonu dostane rychle.

[46] Výkon je změna energie s časem, po vydělení objemem dostaneme hustoty, jak energie, tak výkonu.

[47] Ještě si budeme muset dát pozor na znaménko: když se díky proudu a elektrickému poli zahřívá rezistor, energie pole nebude zřejmě stoupat, ale klesat…

$$\vec{E}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{H}-\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = E_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k}{\partial x_j}-\varepsilon_0\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = -\varepsilon_{jik}E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}-\frac{1}{2}\frac{\partial(\varepsilon_0\vec{E}\cdot\vec{E})}{\partial t} = -\varepsilon_{jik}E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)$$ [48]

Rovnice (12.36) tedy je (po vynásobení –1):

$$\varepsilon_{jik}E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E} \qquad (12.37)$$

Vidíme, že hustota výkonu se nerovná přímo časové derivaci, je zde ještě jeden člen. Jeho význam poznáme za chvíli, až k rovnici (12.37) ještě něco dodáme.

Budeme teď chvíli upravovat rovnici (12.35 c), tu pro změnu vynásobíme magnetickou intenzitou:[49]

$$\mathrm{rot}\,\vec{E}+\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \Big/\cdot\vec{H}$$

Dostaneme
$$\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad (12.38)$$

a podobně jako výše upravíme její levou stranu:[50]

$$\vec{H}\cdot\mathrm{rot}\,\vec{E}+\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = H_i\varepsilon_{ijk}\frac{\partial E_k}{\partial x_j}+\mu_0\vec{H}\cdot\frac{\partial\vec{H}}{\partial t} = \varepsilon_{jki}H_i\frac{\partial E_k}{\partial x_j}+\mu_0\frac{1}{2}\frac{\partial(\vec{H}\cdot\vec{H})}{\partial t} = \varepsilon_{jik}H_k\frac{\partial E_i}{\partial x_j}+\frac{1}{2}\frac{\partial(\mu_0\vec{H}\cdot\vec{H})}{\partial t} =$$
$$= \varepsilon_{jik}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}H_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)$$

Rovnice (12.38) tedy je:

$$\varepsilon_{jik}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}H_k+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = 0 \qquad (12.39)$$

Dostali jsme výsledek, který má podobnou strukturu, jako (12.37). Rovnice (12.37) a (12.39) nyní sečteme:

$$\varepsilon_{jik}E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}+\varepsilon_{jik}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}H_k+\underbrace{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)}_{=\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right)} = -\vec{j}\cdot\vec{E} \qquad (12.40)$$

První část levé strany (12.40) je

$$\varepsilon_{jik}E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}+\varepsilon_{jik}\frac{\partial E_i}{\partial x_j}H_k = \varepsilon_{jik}\left(E_i\frac{\partial H_k}{\partial x_j}+\frac{\partial E_i}{\partial x_j}H_k\right) = \frac{\partial(\varepsilon_{jik}E_iH_k)}{\partial x_j} = \mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right).$$

Po dosazení do (12.40) dostaneme výsledek:

$$\boxed{\mathrm{div}\left(\vec{E}\times\vec{H}\right)+\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D}+\frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}\right) = -\vec{j}\cdot\vec{E}} \qquad (12.41)$$

[48] Při úpravách jsme využili známého vztahu pro Levi-Civitův symbol, $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$. Faktor ½ se ve vztahu objeví stejným „trikem“, jako v mechanice při zavádění kinetické energie.
[49] Obě Maxwellovy rovnice, v nichž jsou časové derivace, tedy upravujeme analogicky. Momentálně se může zdát, že pro úpravu (12.35 c) nemáme žádný přímý důvod – ale jak uvidíme, bude to úprava velmi užitečná. (Také si můžete říci, že když už jsme upravili rovnici (12.35 a), bude fér upravovat také rovnici (12.35 c), „aby jí nebylo líto, že jsme na ni zapomněli“ ☺ ☺.)
[50] Při úpravě využíváme vztah $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki}$ a následně vzájemně přejmenováváme indexy *i* a *k*.

Výkon na pravé straně (12.41) se tedy nerovná jen časové derivaci. Na levé straně je ještě další člen, divergence vektoru $\vec{E} \times \vec{H}$. Jeho význam se nám ukáže za chvíli, až přejdeme k integrálnímu vyjádření vztahu (12.41).[51]

Pro členy v rovnici (12.41) si zavedeme zvláštní označení:

$$\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}} \tag{12.42}$$

$$\boxed{\vec{\mathscr{S}} = \vec{E}\times\vec{H}} \tag{12.43}$$

Rovnice (12.41) pak získá jednoduchý a přehledný tvar:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\mathscr{S}} = -\vec{j}\cdot\vec{E}} \tag{12.44}$$

Vidíme, že se podobá rovnici kontinuity.[52] Její význam bude názornější, když přejdeme k integrálnímu tvaru, tedy když (12.44) zintegrujeme přes nějaký pevný objem V:

$$\int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t} dV + \int\limits_V \operatorname{div}\vec{\mathscr{S}}\, dV = -\int\limits_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, dV \tag{12.45}$$

V prvním členu prohodíme pořadí integrování a derivace podle času: $\int\limits_V \frac{\partial w}{\partial t} dV = \frac{d}{dt}\int\limits_V w\, dV$.[53] Druhý člen upravíme jako: $\int\limits_V \operatorname{div}\vec{\mathscr{S}}\, dV = \oint\limits_S \vec{\mathscr{S}}\cdot d\vec{S}$.[54] Rovnice (12.45) pak získá tvar

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\int\limits_V w\, dV}_{\text{označíme } W} + \oint\limits_S \vec{\mathscr{S}}\cdot d\vec{S} = -\underbrace{\int\limits_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, dV}_{\text{označíme } P} \tag{12.46}$$

Člen na pravé straně $\int\limits_V \vec{j}\cdot\vec{E}\, dV = P$ je **výkon**, kterým elektrické síly např. zahřívají nějaký rezistor, obecně tímto výkonem působí na přítomné náboje a dodávají jim energii.

V prvním členu na levé straně (12.46) označíme

$$\boxed{W = \int\limits_V w\, dV\ .} \tag{12.47}$$

A jak vypadá výsledek?

---

[51] Poznámka pro zájemce: Možná by šlo význam odhadnout už ze stávajícího tvaru. Divergence bývá lokálním vyjádřením toku nějaké veličiny z okolí daného místa (uvědomte si příklady, kdy tomu tak je), takže můžeme tušit, že (12.40) vystihuje změnu hustoty energie jednak díky „ztrátám na teplo“ a jednak díky tomu, že energie může z daného místa odtékat nebo k němu přitékat. Jasněji to bude vidět z té integrální formulace.

[52] Jen zde, na rozdíl od rovnice kontinuity pro náboj, $\frac{\partial\rho}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{j} = 0$, není na pravé straně nula.

[53] Objem V je pevný (nemění se s časem), takže to můžeme udělat.

[54] Využíváme přitom Gaussovu větu matematiky.

Integrální formulace rovnice (12.44) nám vyšla ve tvaru[55]

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\oint_S \vec{\mathscr{S}} \cdot d\vec{S} - P \ .} \tag{12.48}$$

Obě strany rovnice mají rozměr výkonu; W tedy musí mít rozměr energie. V případě, že $\vec{\mathscr{S}} = 0$, bude mít (12.48) tvar $\frac{dW}{dt} = -P$. Odtud je vidět, že W je energie, na jejíž úkor konají elektrické síly práci na zahřívání rezistoru nebo obecně na urychlování elektrických nábojů v daném objemu.

A energie čeho to může být? Jedině elektromagnetického pole v daném objemu. Vidíme tedy, že

$W = \int_V w\,dV$ je **energie elektromagnetického pole** v objemu V.

$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}$ je **hustota energie elektromagnetického pole**.

Rovnice (12.48) ovšem ukazuje, že energie elektromagnetického pole v objemu V klesá i díky členu $-\oint_S \vec{\mathscr{S}} \cdot d\vec{S}$. Jde zjevně o tok plochou ohraničující náš objem. Pokles energie je tedy přirozené interpretovat tak, že energie elektromagnetického pole vytéká z daného objemu. (Pokud by bylo $\oint_S \vec{\mathscr{S}} \cdot d\vec{S} < 0$, bude energie do objemu naopak vtékat.) Můžeme tedy říci, že

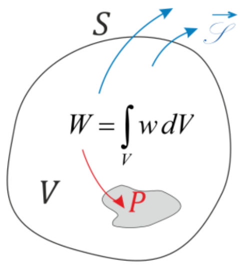
$\int_S \vec{\mathscr{S}} \cdot d\vec{S}$ je **tok energie elektromagnetického pole** plochou S.

Vektor $\vec{\mathscr{S}} = \vec{E} \times \vec{H}$, představuje **hustotu toku energie** elektromagnetického pole.

Nazývá se ***Poyntingův vektor***.

Několik poznámek závěrem a pro shrnutí:

S hustotou energie elektrického a magnetického pole jsme se už setkali dříve. Trochu s nadhledem jsme tyto představy označovali jako „šílené myšlenky“. Nyní vidíme, že představa, že elektromagnetické pole má energii, funguje i v obecném nestacionárním případě. Tato energie může dokonce někam téci. Pokud z nějakého objemu vytéká (viz obrázek vpravo), energie pole v tomto objemu se snižuje. Pokud bude naopak přitékat, energie v daném objemu se zvyšuje. (Energie může samozřejmě také jednou částí plochy do objemu přitékat a jinou vytékat.)



Hustotu toku energie vystihuje Poyntingův vektor.[56] V příští kapitole se s ním potkáme u elektromagnetických vln, kde dobře popíše, jak přenášejí energii.

[55] Jeden člen jsme ještě přehodili z levé strany na pravou; usnadní nám to interpretaci.

[56] Pro zájemce a šťoury: Otázku, zda Poyntigův vektor určuje hustotu toku energie zcela jednoznačně, zde nebudeme řešit. Například pro statická pole $\vec{E}$ a $\vec{H}$, která jsou na sebe kolmá, je Poyntingův vektor nenulový, přitom představa, že zde teče energie, je poněkud umělá. Ovšem celkový tok energie z daného objemu určuje integrál z Poyntingova vektoru spolehlivě a bez problémů.

Shrnutí

Maxwellovy rovnice:

v diferenciálním tvaru:	v integrálním tvaru:	význam:
$\operatorname{rot}\vec{H} - \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$	$\oint_C \vec{H}\cdot d\vec{r} - \int_S \dfrac{\partial \vec{D}}{\partial t}\cdot d\vec{S} = I$	zobecněný Ampérův zákon celkového proudu
$\operatorname{div}\vec{D} = \rho$	$\oint_S \vec{D}\cdot d\vec{S} = Q$	Gaussova věta
$\operatorname{rot}\vec{E} + \dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$	$\oint_C \vec{E}\cdot d\vec{r} + \dfrac{d}{dt}\int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	Faradayův zákon elektromagnetické indukce, $U_{\text{ind.}} = -\dfrac{d\Psi}{dt}$
$\operatorname{div}\vec{B} = 0$	$\oint_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = 0$	neexistence magnetických monopólů

Podmínky na rozhraní dvou prostředí

$\vec{H}_1\cdot\vec{\tau} - \vec{H}_2\cdot\vec{\tau} = \vec{J}\cdot(\vec{\tau}\times\vec{n})$;
pokud rozhraním neprotéká plošný proud, jsou tečné složky magnetické intenzity spojité.

$\vec{D}_2\cdot\vec{n} - \vec{D}_1\cdot\vec{n} = \sigma$; pokud rozhraní není nabité, jsou normálové složky elektrické indukce spojité.

Tečné složky elektrické intenzity jsou spojité.

Normálové složky magnetické indukce jsou spojité.

Energie elektromagnetického pole:

$W = \int_V w\,dV$ **hustota energie:** $\boxed{w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B}}$

hustota toku energie: $\boxed{\vec{\mathscr{S}} = \vec{E}\times\vec{H}}$ (Poyntingův vektor)

rovnice pro hustotu a tok energie:

$$\boxed{\frac{\partial w}{\partial t} + \operatorname{div}\vec{\mathscr{S}} = -\vec{j}\cdot\vec{E}}$$

v integrální formulaci:

$$\boxed{\frac{dW}{dt} = -\oint_S \vec{\mathscr{S}}\cdot d\vec{S} - P}$$

kde $P = \int_V \vec{j}\cdot\vec{E}\,dV$

Dodatek 12.A: Maxwellovy rovnice pro statické, stacionární a kvazistacionární jevy a děje

Shrňme si stručně, které členy z Maxwellových rovnic „vypadnou", tedy budou nulové nebo zanedbatelné, pro některé druhy jevů a dějů.

Úplná soustava Maxwellových rovnic (pro všechny děje, tedy i nestacionární):

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (12.A.1)$$

Statické jevy (elektrostatika a statické magnetické pole). Nic nezávisí na čase, neteče žádný proud.

$$\operatorname{rot}\vec{H} = 0\,, \quad \operatorname{div}\vec{D} = \rho\,, \qquad \operatorname{rot}\vec{E} = 0\,, \quad \operatorname{div}\vec{B} = 0 \qquad (12.A.2)$$

Poznámka: Z rovnice $\operatorname{rot}\vec{E} = 0$ plyne existence elektrostatického potenciálu (tj. funkce φ, pro kterou platí $\vec{E} = -\operatorname{grad}\varphi$) a z rovnice $\operatorname{div}\vec{D} = \rho$ pak plyne Laplaceova-Poissonova rovnice.

Stacionární jevy (např. magnetické pole stacionárního proudu). Nic nezávisí na čase, může ale téci časově neproměnný elektrický proud.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (12.A.3)$$

Poznámka: Z první z těchto rovnic plyne $\operatorname{div}\vec{j} = 0$ a z toho pak první Kirchoffův zákon.

Kvazistacionární děje. Člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ lze zanedbat[57]; změny elektrického pole nepůsobí na pole magnetické. Zákon elektromagnetické indukce se ovšem v těchto dějích uplatňuje, tj. časové změny magnetického pole působí na pole elektrické.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}\vec{H} &= \vec{j} \\ \operatorname{div}\vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div}\vec{B} &= 0 \end{aligned} \qquad (12.A.4).$$

[57] Kdy ho lze zanedbat, rozebereme pro zájemce v Dodatku B.

* Dodatek 12.B: Kdy lze děj považovat za kvazistacionární (pro zájemce)

Podíváme se, kdy lze člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ v rovnici $\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j}$ zanedbat. Rozlišíme dva případy: 1) ve vodičích, 2) vně vodičů.

Zanedbání $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ ve vodičích

Uvnitř vodiče se při kvazistacionárních dějích člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ zanedbává vůči hustotě proudu $\vec{j}$. Ta je dána Ohmovým zákonem $\vec{j} = \gamma \vec{E}$.[58] Maximum hustoty proudu je $j_{\mathrm{m}} = \gamma E_{\mathrm{m}}$, kde E_{m} je maximální velikost elektrické intenzity $\vec{E}$.

Elektrická indukce je $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, obvykle bereme $\varepsilon \doteq \varepsilon_0$.[59] Jestliže proud je střídavý s úhlovou frekvencí ω, mění se se stejnou frekvencí i elektrická intenzita a indukce a maximum členu $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$, resp. jeho absolutní hodnoty, je ωD_{m}, čili (po dosazení výše uvedených vyjádření) přibližně $\omega \varepsilon_0 E_{\mathrm{m}}$.

Když řekneme, že chceme $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ zanedbat oproti $\vec{j}$, což symbolicky zapíšeme jako

$$\left| \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right|_{\max} \ll \left| \vec{j} \right|_{\max} , \tag{12.B.1}$$

nemyslíme tím, že by (12.B.1) mělo platit pro okamžité hodnoty $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ a $\vec{j}$, ale pro jejich typické, případně maximální velikosti.[60] Z výše odvozených hodnot maxim tedy dostáváme požadavek

$$\omega \varepsilon_0 E_{\mathrm{m}} \ll j_{\mathrm{m}} = \gamma E_{\mathrm{m}} .$$

Odtud okamžitě plyne

$$\omega \ll \frac{\gamma}{\varepsilon_0} . \tag{12.B.2}$$

Dosadíme-li číselné hodnoty ($\varepsilon_0 \doteq 8{,}8 \cdot 10^{-12}\ \mathrm{N\,C^2 m^{-2}}$, $\gamma > 10^6\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$), vyjde nám podmínka pro zanedbání členu s časovou derivací $\vec{D}$ konkrétně řádově

$$\omega \ll 10^{17}\ \mathrm{s}^{-1} . \tag{12.B.3}$$

To je bohatě splněno až do optických frekvencí.

---

[58] Připomeňme, že $\gamma = 1/\rho_R$ je měrná elektrická vodivost materiálu vodiče. (ρ_R je měrný elektrický odpor.) V Dodatku A kapitoly 6 jsme poznali, že pro vodiče (od uhlíku po stříbro) je řádově $\gamma = 10^6$ až $10^8\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$.

[59] Literatura nás poučí, že pro kovy se obvykle bere relativní permitivita rovna jedné. Například pro grafit lze ovšem najít hodnoty relativní permitivity 10 až 15. (Poznámka: Permitivitu vodičů nemá smysl uvažovat v elektrostatice, kdy je uvnitř vodiče elektrické pole nulové. Ovšem při průchodu proudu elektrická intenzita ve vodiči není nulová a v kvazistacionárních dějích permitivita hraje roli.)

[60] Tohle je důležitá úvaha. Rozmyslete si, že platí. Názorně je to vidět třeba na příkladu sériového RLC obvodu. Když požadujeme, aby tlumení na rezistoru bylo zanedbatelné, také to můžeme vyjádřit požadavkem, aby příslušný člen v rovnici byl zanedbatelný vůči ostatním – tedy fakticky, aby napětí na rezistoru bylo zanedbatelné vůči napětím na cívce a kondenzátoru. Ovšem napětí na rezistoru je oproti napětí třeba na cívce fázově posunuto, takže má smysl porovnávat amplitudy těchto napětí a ne okamžité hodnoty. (V okamžiku, kdy je na cívce napětí nulové, na rezistoru je nenulové, přesto lze celkově vliv napětí na rezistoru zanedbat.)

Zanedbání $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vně vodičů

Zde bude situace na první pohled záhadnější. Vně vodičů totiž je $\vec{j} = 0$. V tomto případě dá první Maxwellova rovnice

$$\mathrm{rot}\, \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \tag{12.B.4}$$

Naivně bychom řekli, že pokud člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ má být zanedbatelný, musí být co do velikosti mnohem menší, než zbylý člen v rovnici, takže by mělo platit $\left|\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}\right| \ll \left|\mathrm{rot}\, \vec{H}\right|$. Ale ouha, z (12.B.4) vidíme, že $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mathrm{rot}\, \vec{H}$. Zjevně nemůžeme zanedbat $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ vůči tomu, čemu se rovná! Tak jak to s tím zanedbáním je?

Abychom se v tom vyznali, podívejme se třeba na z-ovou složku (12.B.4):

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} - \frac{\partial D_z}{\partial t} = 0 \tag{12.B.5}$$

Zde už vidíme, vůči čemu $\left|\frac{\partial D_z}{\partial t}\right|$ zanedbávat: vůči velikosti parciálních derivací, tedy vůči $\left|\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|$ a $\left|\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|$.[61]

V následujícím přibližném odhadu nahradíme derivace podílem přírůstků veličin, například $\left|\frac{\partial D}{\partial t}\right| \approx \left|\frac{\Delta D}{\Delta t}\right|$. Přitom za ΔD vezmeme charakteristickou velikost veličiny (v našem případě elektrické indukce) a za Δt charakteristický čas, za který se veličina výrazně změní, například mezi nulovou a maximální hodnotou. V případě dějů s frekvencí f to může být perioda T.[62] Za odhad velikosti prostorových derivací H analogicky vezmeme $\left|\frac{\Delta H}{\Delta x}\right|$, kde Δx je charakteristická délka, na které se hodnota H významně mění – typicky to může být rozměr oblasti, v níž provádíme pokusy nebo v níž popisujeme jevy, které nás zajímají.[63] (Δx nebereme jako rozměr ve směru osy x, ale opravdu jako charakteristickou délku.)

Lze tedy konstatovat, že člen $\frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$ můžeme zanedbat, pokud

$$\left|\frac{\Delta D}{\Delta t}\right| \ll \left|\frac{\Delta H}{\Delta x}\right| . \tag{12.B.6}$$

Dobrá, ale co nám tento odhad říká?

Zatím moc ne, musíme ho ještě doplnit o další úvahu.

---

[61] V kvazistacionárním případě budou $\left|\frac{\partial H_y}{\partial x}\right|$ a $\left|\frac{\partial H_x}{\partial y}\right|$ prakticky stejné, $\left|\frac{\partial D_z}{\partial t}\right|$ bude mnohem menší.

[62] Mohli byste namítnout, že spíše polovina periody, ale v úvahách „mnohem menší než" se polovina ztratí.

[63] Když provádíme školní pokus s cívkou napájenou střídavým proudem, tak obvykle magnetické intenzita výrazně klesne, když se od cívky vzdálíme o metr či dva. Když budeme popisovat rozvod střídavého proudu ve třídě, tak magnetické pole vodičů vně třídy bude zřejmě výrazně slabší než pole v těsném okolí vodičů.

V případě kvazistacionárních dějů v rovnici

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \tag{12.B.7}$$

žádný člen nezanedbáváme. Z toho můžeme usoudit, že člen $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ je co do velikosti srovnatelný s velikostí derivací $\frac{\partial E_y}{\partial x}$ apod. Mohl by být i menší.[64] Pokud derivace odhadneme dělením charakteristickými časy a délkami, jako jsme to udělali výše, můžeme odhadnout, že

$$\left|\frac{\Delta B}{\Delta t}\right| \lesssim \left|\frac{\Delta E}{\Delta x}\right| . \tag{12.B.8}$$

Pojďme teď konkretizovat, že jde o děje ve vakuu. V tom případě je $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E},\ \vec{B} = \mu_0 \vec{H}$. Z (12.B.6) a (12.B.7) dostáváme

$$\varepsilon_0 \left|\frac{\Delta E}{\Delta t}\right| \ll \left|\frac{\Delta H}{\Delta x}\right| \quad \Big/ \cdot \Delta x \tag{12.B.9}$$

$$\mu_0 \left|\frac{\Delta H}{\Delta t}\right| \lesssim \left|\frac{\Delta E}{\Delta x}\right| \quad \Big/ \cdot \frac{\Delta t}{\mu_0} \tag{12.B.10}$$

Po naznačených úpravách z těchto vztahů vychází

$$\varepsilon_0 \left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| \left|\Delta E\right| \ll \left|\Delta H\right| \lesssim \frac{1}{\mu_0}\left|\frac{\Delta t}{\Delta x}\right| \left|\Delta E\right| .$$

Odtud již okamžitě dostaneme

$$\left(\Delta x\right)^2 \ll \frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0}\left(\Delta t\right)^2 . \tag{12.B.11}$$

V příští kapitole uvidíme, že $\frac{1}{\varepsilon_0 \mu_0} = c^2$, kde c je rychlost světla ve vakuu. Výše jsme uvedli, že jako Δt je vhodné brát periodu T střídavého proudu, který se vyskytuje v našem ději. Ovšem $cT = \lambda$ je vlnová délka elektromagnetické vlny odpovídající frekvenci našeho střídavého proudu.

Podmínka (12.B.11) pak (po odmocnění) získává velmi jednoduchý a srozumitelný tvar:

$$\boxed{\left|\Delta x\right| \ll \lambda .} \tag{12.B.12}$$

To znamená, že

> děj můžeme považovat za kvazistacionární, jestliže charakteristické rozměry našeho experimentu, resp. děje, jsou mnohem menší než vlnová délka elektromagnetických vln s frekvencí odpovídající frekvenci střídavých proudů v daném ději.

[64] Ale kdyby byl zanedbatelný, šlo by už o stacionární případ.