Elektromagnetické vlny

Významným objevem J. C. Maxwella bylo zjištění, že jím zformulované rovnice mají řešení ve formě vln – a že rychlost šíření těchto vln, kterou jeho teorie předpovídá, se rovná rychlosti světla. Tím se otevřela cesta k pochopení souvislosti elektromagnetických jevů a optiky. Světlo tedy není nějakým samostatným fenoménem; jednoduše můžeme říci, že světlo jsou elektromagnetické vlny.[1]

Není asi nutno připomínat, že elektromagnetické vlny jsou v současné civilizaci využívány každodenně a velmi intenzivně. Nejde jen o vlny z radiových a televizních vysílačů, včetně satelitního příjmu. Ani jen o všudypřítomný signál mobilních telefonů. Vezměte si nejrůznější ovladače, wi-fi či bluetooth. Nebo, nemá-li jít jen o komunikaci, mikrovlnné trouby. V případě navigace pak systémy GPS. A řadu technologií, které nemáme přímo doma, ale jsou pro náš život stejně významné. Třeba radary – v letecké dopravě i v meteorologii.

Elektromagnetické vlny jsou i neocenitelným zdrojem informací při výzkumu vesmíru. Různé části elektromagnetického spektra nám otevřely řadu „oken do vesmíru“ – uvažte radioastronomii, infračervenou, ultrafialovou a rentgenovou astronomii.

Vlastnosti elektromagnetických vln ovšem nelze vystihnout jen klasickou elektromagnetickou teorií – to fyzika ví už déle než století.[2] Přesto nám klasická elektrodynamika o chování elektromagnetických vln umí říci mnoho.

V této kapitole se podíváme na základní věci:

- Jak vůbec z Maxwellových rovnic vyjde, že mohou existovat elektromagnetické vlny.
- Jaká je rychlost elektromagnetických vln ve vakuu a z čeho plyne.
- Čím lze elektromagnetické vlny charakterizovat a jaké mají vlastnosti.
- Zda a jakou nese elektromagnetická vlna energii.

Omezíme se přitom na nejjednodušší případ, tedy na rovinné elektromagnetické vlny. Stranou také necháme otázky buzení a příjmu elektromagnetických vln – toho se dotknete v přednáškách z Optiky a pak z Klasické elektrodynamiky.

[1] Samozřejmě, viditelné světlo jsou elektromagnetické vlny jen v poměrně úzkém rozmezí frekvencí resp. vlnových délek, asi 390 až 780 nm. (Jde o vlnové délky ve vakuu.)

[2] Klasicky nebylo možno vysvětlit spektrum záření absolutně černého tělesa. Max Planck v roce 1900 ukázal, že ke správnému výsledku lze dospět za předpokladu, že elektromagnetické záření je vyzařováno nikoli spojitě, ale v určitých „porcích“, tedy kvantově. V roce 1905 pak pojem kvanta využil Albert Einstein k vysvětlení fotoelektrického jevu.

13.1 Od Maxwellových rovnic k vlnové rovnici

Budeme uvažovat elektromagnetické pole **ve vakuu**.[3] To jednak znamená, že permeabilita a permitivita budou ε_0 a μ_0, takže bude platit

$$\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} \ , \tag{13.1}$$

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} \ . \tag{13.2}$$

Navíc zde nejsou proudy a náboje, takže $\rho = 0$ a $\vec{j} = 0$. Maxwellovy rovnice tedy jsou

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \ , \tag{13.3}$$

$$\operatorname{div}\vec{D} = 0 \ , \tag{13.4}$$

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \ , \tag{13.5}$$

$$\operatorname{div}\vec{B} = 0 \ . \tag{13.6}$$

Odvození vlnové rovnice pro H, resp. B

Na rovnici (13.3) zapůsobíme operátorem rotace a upravíme výsledek:

$$\operatorname{rot}\vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = 0 \qquad \Big/ \operatorname{rot} \tag{13.7}$$

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{H}}_{=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{H} - \Delta\vec{H}} = \operatorname{rot}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{D} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} \tag{13.8}$$

Při úpravě levé strany[4] využijeme toho, že v důsledku (13.6) je $\operatorname{div}\vec{H} = \left(1/\mu_0\right)\operatorname{div}\vec{B} = 0$. Na levé straně (13.8) tedy zbyde jen $-\Delta\vec{H}$.

Pravou stranu (13.8) upravíme s využitím (13.5)[5]:

$$\varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{E} = \varepsilon_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right) = -\varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} \ . \tag{13.9}$$

Rovnice (13.8) tedy po uvedených úpravách a převedení členů na jednu stranu dá

$$\Delta\vec{H} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{13.10}$$

Rozepíšeme-li Laplaceův operátor v kartézských souřadnicích, bude mít (13.10) tvar

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} - \varepsilon_0\mu_0 \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{13.11}$$

[3] Víme, že elektromagnetické vlny se šíří i meziplanetárním prostorem, takže ke svému šíření nepotřebují žádné hmotné prostředí. A uvažovat jevy ve vakuu je jistě jednodušší, než v nějakém dielektriku a magnetiku.

[4] Zde jsme už naznačili, že využíváme známý vzorec „rotace rotace je gradient divergence mínus laplace“.

[5] Tedy $\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$.

Teď můžeme využít rozměrovou úvahu: v prvních třech členech je H děleno délkou na druhou[6] (v jednotkách tedy m^2). V časové derivaci jde o dělení časem na druhou (v jednotkách tedy s^2). Faktor $\varepsilon_0\mu_0$ tedy musí mít rozměr (čas/délka)^2, v jednotkách tedy (s/m)^2. To znamená, že má rozměr 1/rychlost na druhou. Můžeme proto označit

$$\boxed{\varepsilon_0\mu_0 = \frac{1}{c^2}\ ,} \tag{13.12}$$

kde c je nějaká rychlost. Rovnice (13.10) tak dostane tvar

$$\Delta\vec{H} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{H}}{\partial t^2} = 0\ . \tag{13.13}$$

Vynásobíme-li ji μ_0, získáme stejnou rovnici pro magnetickou indukci $\vec{B}$, ta se možná píše častěji:

$$\boxed{\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0} \tag{13.14}$$

Rovnici tohoto typu se říká **vlnová rovnice**. Je to proto, že opravdu popisuje šíření vln.[7]

Často se pro její kratší zápis používá tzv. D´Alembertův operátor[8] označovaný □ a definovaný jako

$$\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\ . \tag{13.15}$$

Vlnová rovnice (13.14) se s jeho pomocí zapíše velmi stručně:

$$\boxed{\Box\vec{B} = 0} \tag{13.16}$$

Význam konstanty *c* ve vlnové rovnici

$\boxed{?}$ Jak velká je rychlost *c* daná (13.12)?

Vezmeme-li přibližné hodnoty $\varepsilon_0 \doteq \dfrac{1}{4\pi\cdot 9\cdot 10^9}\ \mathrm{F/m}$ a $\mu_0 \doteq 4\pi\cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m}$, dostaneme

$$\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0 \doteq \frac{1}{9\cdot 10^9}\ (\mathrm{s/m})^2 = \frac{1}{\left(3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s}\right)^2}\ , \tag{13.17}$$

čili:

$$c \doteq 3\cdot 10^8\ \mathrm{m/s} \tag{13.18}$$

Vidíme, že rychlost *c* v rovnici (13.14) je **rychlost světla** ve vakuu.[9]

---

[6] Derivace např. podle *x* znamená dělení „kousky proměnné x“, druhá derivace znamená, že dělíme dvakrát.

[7] Uvidíme to v další části kapitoly.

[8] Vyslovováno „dalambérův operátor“; zkráceně slangově řečeno „dalambér“.

[9] Po dosazení přesnějších hodnot $\varepsilon_0 \doteq 8{,}85418781\cdot 10^{-12}$ F/m, $\mu_0 \doteq 1{,}256637062\cdot 10^{-6}$ H/m vyjde $c \doteq 299792458$ m/s. (Dnes je ve skutečnosti ε_0 definována z hodnoty μ_0 a přesné hodnoty rychlosti světla.)

Vlnová rovnice pro E

Analogicky můžeme odvodit vlnovou rovnici pro elektrickou intenzitu. Tentokrát operátorem rotace zapůsobíme na rovnici (13.5),

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \qquad \Big/ \operatorname{rot} \ . \tag{13.19}$$

Výsledek upravíme podobně, jako jsme to dělali výše s rovnicí (13.8):

$$\underbrace{\operatorname{rot}\operatorname{rot}\vec{E}}_{=\operatorname{grad}\operatorname{div}\vec{E}-\Delta\vec{E}} = -\operatorname{rot}\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{B} = -\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} \ . \tag{13.20}$$

Z rovnice (13.4) plyne $\operatorname{div}\vec{E} = (1/\varepsilon_0)\operatorname{div}\vec{D} = 0$; pravou stranu (13.20) upravíme s pomocí rovnice (13.3):

$$\mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\vec{H} = \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

Po dosazení do (13.20) a využití označení (13.12) pro součin $\varepsilon_0 \mu_0$ dostáváme

$$-\Delta\vec{E} = -\varepsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \ ,$$

čili

$$\boxed{\Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = 0 \ .} \tag{13.21}$$

Vidíme, že vlnová rovnice pro elektrickou intenzitu má přesně stejný tvar, jako vlnová rovnice (13.14) pro magnetickou indukci. Lze ji samozřejmě zapsat i pomocí D´Alembertova operátoru jako

$$\boxed{\Box\vec{E} = 0 .} \tag{13.22}$$

I když jsme pro $\vec{B}$ a $\vec{E}$ dostali samostatné vlnové rovnice, neznamená to, že z nich můžeme pro elektrickou intenzitu a magnetickou indukci dostat zcela nesouvisející řešení.[10] Veličiny $\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou totiž svázány Maxwellovými rovnicemi.

Termín **vlnové rovnice** použitý pro rovnice (13.14) a (13.21) napovídá, že jejich řešením mohou být elektromagnetické vlny. Ty mohou být nejrůznější, třeba kulové, válcové… My si odvodíme nejjednodušší případ – řešení ve tvaru rovinných vln.

[10] Tedy například, že by elektrická intenzita odpovídala vlně šířící se v naší laboratoři vodorovně a magnetická indukce vlně, která by se šířila svisle. (To by bylo jako v Saturninovi, kde se dědeček ptal, proč Šemík uháněl k Radotínu, zatímco Horymír běžel k Neumětelům… ☺) Takhle to opravdu nejde, konkrétně to ukážeme v následující části kapitoly.

13.2 Řešení vlnové rovnice ve tvaru monochromatické rovinné vlny

Zkusme najít co nejjednodušší řešení vlnové rovnice (13.14)[11]

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \ , \tag{13.23}$$

neboli

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial z^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0 \ . \tag{13.24}$$

Rovinná vlna ve směru osy x

Pro začátek budeme předpokládat, že $\vec{B}$ závisí jen na proměnných x a t.[12] Závislost na čase a na x budeme uvažovat harmonickou. V řešení se tedy bude vyskytovat jediná frekvence f, resp. úhlová frekvence

$$\omega = 2\pi f \ . \tag{13.25}$$

Vlna, kterou dostaneme, se proto nazývá ***monofrekvenční***, často se spíše používá poněkud starší název **monochromatická vlna**.[13]

Bude nás zajímat řešení popisující **postupnou rovinnou vlnu.**[14] Jeho obecný tvar je[15]

$$\boxed{\vec{B}(x,t) = \vec{B}_m \cos\left(\omega t - kx\right) \ .} \tag{13.26}$$

Že opravdu reprezentuje postupnou rovinnou vlnu, si ukážeme za chvíli; teď prozkoumáme, zda je opravdu řešením rovnice (13.24).

Derivace (13.26) podle x a t jsou:

$$\frac{\partial\vec{B}}{\partial x} = k\,\vec{B}_m \sin\left(\omega t - kx\right) \qquad \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = -\omega\,\vec{B}_m \sin\left(\omega t - kx\right)$$

$$\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial x^2} = -k^2\,\vec{B}_m \cos\left(\omega t - kx\right) \qquad \frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = -\omega^2\,\vec{B}_m \cos\left(\omega t - kx\right)$$

Dosazení do (13.24) dá

$$-k^2\,\vec{B}_m \cos\left(\omega t - kx\right) + \frac{1}{c^2}\omega^2\,\vec{B}_m \cos\left(\omega t - kx\right) = 0 \,, \qquad \text{čili}$$

---

[11] No, úplně nejjednodušší řešení ne, to je $\vec{B} = 0$, a to by nám mnoho informací nepřineslo…

[12] Derivace podle y a z tedy z rovnice (13.24) vypadnou.

[13] Termín „monochromatická“ vystihuje skutečnost, že jde-li o vlnění v optické oblasti spektra, má jedinou barvu. Termín „monofrekvenční“ lze použít pro vlny libovolné frekvence a je tedy proto obecnější a správnější; ovšem – alespoň dle osobního názoru autora – termín „monochromatická“ je tak nějak barevnější… ☺

[14] V uzavřených prostorách, například uvnitř mikrovlnné trouby, existují i ***stojaté vlny***, těmi se zde zabývat nebudeme.

[15] Řekněme, že nám tento tvar někdo prozradil… Například učebnice fyziky pro gymnázia *Mechanické kmitání a vlnění* (autor O. Lepil). Rovnice postupného vlnění je tam ve tvaru $y = y_m \sin 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right)$. Jestli vzít sinus nebo kosinus, je jedno (liší se jen o fázové posunutí), k veličinám v (13.26) přejdeme lehce: $\omega = 2\pi/T$, $k = 2\pi/\lambda$. V argumentu kosinu v (13.26) by mohlo být ještě fázové posunutí φ, zde pro jednoduchost bereme $\varphi = 0$.

$$\left(k^2 - \frac{\omega^2}{c^2}\right) \vec{B}_m \cos(\omega t - kx) = 0 \ . \tag{13.27}$$

Toto je podmínka, aby (13.26) bylo řešením rovnice (13.24).[16] $\vec{B}_m$ je nenulové, kosinus je nulový jen pro některé kombinace x a t. My ovšem potřebujeme, aby podmínka (13.27) byla splněna pro všechna x a t. Jedinou možností tedy je, aby se nule rovnala závorka $\left(k^2 - \omega^2/c^2\right)$, tedy aby bylo

$$k^2 = \frac{\omega^2}{c^2} \tag{13.28}$$

Můžeme tedy uzavřít, že (13.26), tedy

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - kx) \ ,} \tag{13.29}$$

je řešením vlnové rovnice (13.24) pro

$$\boxed{k = \frac{\omega}{c}} \tag{13.30}$$

nebo

$$k = -\frac{\omega}{c} . \tag{13.31}$$

? Jak se přesvědčíme, že (13.29) opravdu reprezentuje postupnou vlnu?

Podívejme se, jak se s časem posunují body, kde je maximální nějaká složka $\vec{B}$, například B_y. Maxima jsou v bodech, kde argument kosinu v (13.29) je roven 0, 2π, 4π, … viz graf vpravo.[17] Pro polohu maxim tedy platí

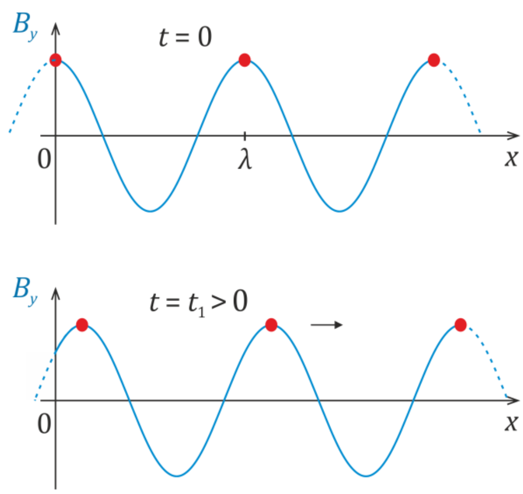
$$\omega t - kx = 0, 2\pi, 4\pi, \ldots \ . \tag{13.32}$$

Odtud okamžitě

$$x = \frac{\omega}{k} t + x_0 \ . \tag{13.33}$$

kde $x_0 = 0, -2\pi/k, -4\pi/k, \ldots$. Dosazením (13.30) do (13.33) dostáváme pro polohu maxim vztah

$$\boxed{x = ct + x_0 \ .} \tag{13.34}$$



Tohle je ale vzoreček pro rovnoměrný přímočarý pohyb rychlostí c. (!) Maxima se tedy pohybují rychlostí c. Okamžitě vidíme, že rychlost c, která je ve vlnové rovnici, je **rychlost šíření postupné vlny**.

Úhlovou frekvenci předpokládáme kladnou, $\omega > 0$.[18] Pro $k > 0$, tedy pro (13.30), jde o vlnu šířící se **ve směru osy** x; tuto situaci ukazuje také obrázek.

Pro $k < 0$, tedy pro (13.31), jde o vlnu šířící se **proti směru osy** x. Někdy se toto řešení zapisuje jako $\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t + kx)$, k je potom kladné.

? Jak je to s vlnovou délkou a jejím vztahem k veličinám, s nimiž zde pracujeme?

[16] Podrobněji řečeno: Když je splněno (13.27), pak (13.26) po dosazení do levé strany (13.24) dá nulu, to znamená, že rovnice (13.24) bude splněna. (Podmínka (13.27) je přitom nutná a postačující, rozmyslete si, proč.)

[17] Maxima, mohli bychom říci „hřebeny vln“, jsou tam vyznačena červenými tečkami.

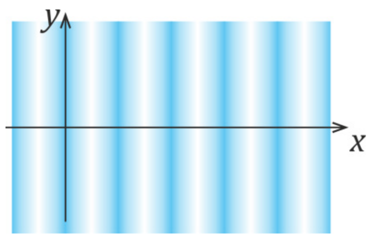
[18] Zápornou v našich víceméně středoškolských úvahách nemá smysl uvažovat.

Vlnová délka je vzdálenost mezi dvěma následujícími maximy vlny[19]. Vlnu samozřejmě v tomto případě musíme brát v jednom konkrétním čase t.[20]

Když v naší vlně $B_y = B_{ym} \cos(\omega t - kx)$ zvolíme například $t = 0$, půjde o maxima funkce $\cos(-kx)$. Maxima jsou pro $kx = 0,\ kx = 2\pi, \ldots$, tj. $x = 0,\ x = 2\pi/k, \ldots$ Odsud je vidět, že vlnová délka je

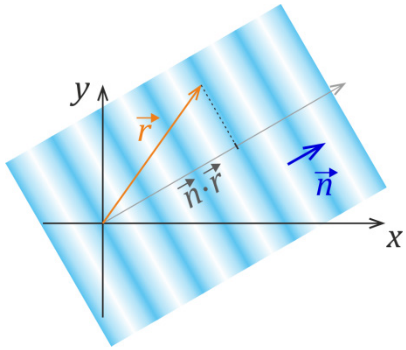
$$\boxed{\lambda = \frac{2\pi}{k}\ .} \tag{13.35}$$

Poznamenejme, že veličině k se říká ***vlnové číslo***.[21]



Snad není třeba připomínat, že plochám, na nichž má vlna v daném čase stejnou fázi, říkáme **vlnoplochy**. V případě vlny šířící se ve směru osy x jsou vlnoplochy na tuto osu kolmé. Rovnice každé takové vlnoplochy je tedy $x = \text{konst.}$ Názorně vlnoplochy v určitém čase t ukazuje obrázek.

Rovinná vlna v obecném směru



Je jasné, že rovinná elektromagnetická vlna se může šířit v libovolném směru.[22] Směr šíření vlny označíme jednotkovým vektorem $\vec{n}$. Vztah vystihující takovou vlnu je

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{B}_m \cos(\omega t - k\,\vec{n}\cdot\vec{r})\ . \tag{13.36}$$

Z obrázku vidíme, že $\vec{n}\cdot\vec{r}$ je vzdálenost vlnoplochy od počátku ve směru $\vec{n}$, hraje tedy stejnou roli, jako souřadnice x u vlny šířící se ve směru osy x.

Směr šíření vlny a vlnové číslo se obvykle spojují do jediného vektoru

$$\boxed{\vec{k} = k\vec{n}\ ,} \tag{13.37}$$

ten se nazývá **vlnový vektor**.[23] Vztah pro rovinnou vlnu má pak tvar

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\ .} \tag{13.38}$$

Dosazením do (13.24) se můžete přesvědčit, že (13.38) je opravdu řešením vlnové rovnice.[24] Dodejme, že v komplexním formalismu má vztah pro tuto rovinnou vlnu tvar

$$\boxed{\vec{B} = \vec{B}_m\, \mathrm{e}^{i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})}\ .} \tag{13.39}$$

---

[19] Nebo minimy nebo obecně body, v nichž se argument v kosinu liší o 2π.

[20] Jako kdybychom vzali „mžikový fotografický obrázek“ vlny. (Pro elektromagnetickou vlnu bychom ovšem potřebovali „fotoaparát“, který by snímal hodnotu třeba magnetické indukce.)

[21] Bere se vždy $k > 0$.

[22] Konec konců jsme do libovolného směru mohli natočit osu x soustavy, v níž vlnu popisujeme.

[23] Vlnové číslo z vlnového vektoru samozřejmě dostaneme jako $k = |\vec{k}|$.

[24] Proveďte si toto ověření sami. (13.38) zapište jako $\vec{B} = \vec{B}_m \cos(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z))$, spočítejte druhé derivace podle všech proměnných a po dosazení do (13.24) využijte toho, že $k^2 = |\vec{k}|^2 = k_x{}^2 + k_y{}^2 + k_z{}^2$.

13.3 Vlastnosti rovinné elektromagnetické vlny (ve vakuu)

Elektromagnetické pole rovinné vlny musí splňovat Maxwellovy rovnice. Uvidíme, že z toho vyplynou některé důležité vlastnosti rovinných vln. Pojďme si je odvodit.

Směr magnetické indukce

Magnetická indukce musí splňovat rovnici (13.6), tedy

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \ . \tag{13.40}$$

Co tato rovnice dá, když do ní dosadíme (13.38)? Proveďme si výpočet nejdříve podrobně, v co nejjednodušším označení. Vztah (13.38) si přepíšeme jako

$$\vec{B} = \tilde{\vec{B}} \cos\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) \ . \tag{13.41}$$

Amplitudu magnetické indukce jsme zde označili vlnkou.[25] Složky magnetické indukce tedy jsou:

$$\begin{aligned} B_x &= \tilde{B}_x \cos\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) \\ B_y &= \tilde{B}_y \cos\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) \\ B_z &= \tilde{B}_z \cos\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) \end{aligned} \tag{13.42}$$

Rovnice (13.40) rozepsaná do složek je

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \ . \tag{13.43}$$

Derivováním (13.42) získáme

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} = k_x \tilde{B}_x \sin\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right), \ \frac{\partial B_y}{\partial y} = k_y \tilde{B}_y \sin\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right), \dots \tag{13.44}$$

a dosazení do (13.43) dá

$$\underbrace{\left(k_x \tilde{B}_x + k_y \tilde{B}_y + k_z \tilde{B}_z\right)}_{= \vec{k}\cdot\tilde{\vec{B}}} \sin\left(\omega t - (k_x x + k_y y + k_z z)\right) = 0 \ . \tag{13.45}$$

Aby tato rovnice platila pro všechna místa a časy, musí se rovnat nule první závorka na levé straně., tj. musí být $\vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}} = 0$. Toto platí nejen pro amplitudu, ale i pro vektor magnetické indukce samotný:[26]

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{B} = 0} \tag{13.46}$$

Protože vlnový vektor $\vec{k}$ určuje směr šíření vlny, zjistili jsme, že

magnetická indukce v elektromagnetické vlně je kolmá na směr šíření vlny.

Dodejme, že i když jsme si to zde neukázali, toto platí nejen pro rovinnou monochromatickou vlnu, ale obecně.

[25] Výše jsme amplitudu značili indexem *m*, ale teď budeme používat indexy značící souřadnice, tak abychom neměli u symbolu *B* dva indexy. (Laskavý čtenář snad tuto drobnou změnu označení bude tolerovat, inu, změna je život… ☺)

[26] Přesvědčte se dosazením (13.41) do (13.46), že to je pravda.

Kdybychom místo rozepisování do x, y a z použili označení proměnných x_i a v zápisu využili sumační konvenci, bylo by odvození samozřejmě kratší. Složky $\vec{B}$ bychom zapsali jako

$$B_l = \tilde{B}_l \cos\left(\omega t - k_j x_j\right) , \tag{13.47}$$

derivace podle x_p by vyšla

$$\frac{\partial B_l}{\partial x_p} = \tilde{B}_l \sin\left(\omega t - k_j x_j\right) \frac{\partial (k_j x_j)}{\partial x_p} = k_p \tilde{B}_l \sin\left(\omega t - k_j x_j\right) \tag{13.48}$$

Rovnice $\operatorname{div} \vec{B} = 0$ zapsaná ve složkách je

$$\frac{\partial B_l}{\partial x_l} = 0 \tag{13.49}$$

a dosazení (13.48) (kde bude $p = l$) dá

$$k_l \tilde{B}_l \sin\left(\omega t - k_j x_j\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad k_l \tilde{B}_l = 0 \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \tilde{\vec{B}} = 0 \ . \tag{13.50}$$

Snad ještě kratší je odvození v komplexním formalismu. Vztah (13.39) ve složkách je[27]

$$B_l = \tilde{B}_l \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} = \tilde{B}_l \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - k_j \cdot x_j\right)} \tag{13.51}$$

Derivováním dostaneme

$$\frac{\partial B_l}{\partial x_p} = \tilde{B}_l \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - k_j \cdot x_j\right)} \frac{\partial (-i\, k_j x_j)}{\partial x_p} = -i\, k_p \tilde{B}_l \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - k_j \cdot x_j\right)} = -i\, k_p B_l \tag{13.52}$$

a po dosazení do $\operatorname{div} \vec{B} = 0$, tedy do $\dfrac{\partial B_l}{\partial x_l} = 0$, pak okamžitě

$$0 = \frac{\partial B_l}{\partial x_l} = -i\, k_l B_l \quad \Rightarrow \quad \vec{k} \cdot \vec{B} = 0 \ . \tag{13.53}$$

Takže si vyberte, kterému typu odvození dáváte přednost. Dále pro stručnost v jednom odvození použijeme komplexní formalismus; pokud preferujete reálný, přepište si do něj prosím příslušné odvození sami.

Směr elektrické intenzity

Řešení vlnové rovnice (13.21) pro elektrickou intenzitu je (v analogii k (13.38))

$$\vec{E}(x,t) = \vec{E}_m \cos\left(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r}\right) , \tag{13.54}$$

v komplexním vyjádření pak

$$E_l = \tilde{E}_l \, \mathrm{e}^{i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \ . \tag{13.55}$$

---

[27] Amplitudu opět značíme vlnkou. Komplexní charakter veličiny B už jsme ale přestali značit obloučkem nad písmenem, ono se to většinou nepíše…

Rovnice (13.4), kterou musí elektrické pole splňovat, tedy $\operatorname{div}\vec{D} = 0$, dá po vydělení ε_0

$$\operatorname{div}\vec{E} = 0 \ . \tag{13.56}$$

Vidíme, že jde přesnou analogii s rovnicí $\operatorname{div}\vec{B} = 0$ pro magnetickou indukci. Odvození, co z této podmínky plyne, by tedy bylo stejné, jako pro $\vec{B}$, a stejný bude i důsledek:

$$\boxed{\vec{k}\cdot\vec{E} = 0 ,} \tag{13.57}$$

elektrická intenzita v elektromagnetické vlně je kolmá na směr šíření vlny.

Toto opět platí nejen pro rovinnou monochromatickou vlnu, ale obecně.[28]

Elektrická intenzita i magnetická indukce jsou tedy obě kolmé na směr šíření. Jinak řečeno:

Elektromagnetické vlny jsou příčné.

Tohle je velice důležitá vlastnost elektromagnetických vln.[29] Díky ní mohou být elektromagnetické vlny polarizované – ale to už přenecháme přednáškám z Optiky.

Vzájemný vztah $\vec{E}$ a $\vec{B}$ v elektromagnetické vlně

Elektrickou intenzitu a magnetickou indukci svazuje rovnice (13.5), tedy

$$\operatorname{rot}\vec{E} + \frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \ . \tag{13.58}$$

Ze vztahu (13.55) pro elektrickou intenzitu v rovinné vlně,[30]

$$E_l = \tilde{E}_l \, \mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_m \cdot x_m)} \ , \tag{13.59}$$

vypočteme i-tou složku rotace $\vec{E}$:

$$\begin{aligned}\left(\operatorname{rot}\vec{E}\right)_i &= \varepsilon_{ijl}\frac{\partial E_l}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijl}\,\tilde{E}_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_m \cdot x_m)}\frac{\partial(-\mathrm{i}\,k_m\cdot x_m)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijl}\,(-\mathrm{i}k_j)\tilde{E}_l\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\omega t - k_m \cdot x_m)} = \\ &= -\mathrm{i}\varepsilon_{ijl}\,k_j E_l = -\mathrm{i}\left(\vec{k}\times\vec{E}\right)_i\end{aligned} \tag{13.60}$$

Vidíme, že pro $\vec{E}$ v monochromatické rovinné vlně platí

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\mathrm{i}\,\vec{k}\times\vec{E} \ . \tag{13.61}$$

[28] Důkaz tohoto tvrzení necháme přednáškám *Optika* resp. *Klasická elektrodynamika*. Z fyzikálního náhledu se však dá pochopit, že takovéto chování bude obecné: Pokud vlna není monochromatická, lze ji složit z mnoha monochromatických vln (tomu se někdy říká *fourierovská syntéza*). A pokud vlna není rovinná, ale třeba kulová, v malém okolí nějakého bodu můžeme vlnoplochy považovat za téměř rovinné. (Představte si kulovou vlnu šířící se ze zdroje vzdáleného kilometr, kterou přijímáte anténou ve vašem mobilu; v rozměrech centimetrů až desítek centimetrů je zakřivení vlnoplochy opravdu nepatrné.) Takže není divu, že kolmost vektorů $\vec{E}$ a $\vec{B}$ na směr šíření, kterou jsme odvodili pro rovinnou elektromagnetickou vlnu, platí i obecně.

[29] Tím se elektromagnetické vlny liší například od zvukových vln ve vzduchu, tam jde o vlnění podélné, kdy „kousky vzduchu“ kmitají tam a zpět ve směru šíření vlny (vzduch se prostě stlačuje a zřeďuje).

[30] Imaginární jednotku zde píšeme jako „i“, abychom ji odlišili od indexu *i*. (Ono písmenek je málo…)

Ze vztahu (13.39) pro magnetickou indukci,

$$\vec{B} = \tilde{\vec{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)} \,, \tag{13.62}$$

určíme časovou derivaci $\vec{B}$ v dané rovinné vlně:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \tilde{\vec{B}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}\left(\mathrm{i}\omega\right) = \mathrm{i}\omega\vec{B} \;. \tag{13.63}$$

Po odsazení (13.61) a (13.63) do Maxwellovy rovnice (13.58) dostaneme

$$\underbrace{\mathrm{rot}\,\vec{E}}_{=-\mathrm{i}\vec{k}\times\vec{E}} + \underbrace{\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}}_{=\mathrm{i}\omega\vec{B}} = 0 \,, \tag{13.64}$$

čili

$$\boxed{\vec{B} = \frac{\vec{k}}{\omega}\times\vec{E} \;.} \tag{13.65}$$

Protože $\vec{k} = k\vec{n}$ a z (13.30) je $\frac{k}{\omega} = \frac{1}{c}$, dá se výsledek (13.65) zapsat také ve tvaru

$$\boxed{\vec{B} = \frac{1}{c}\,\vec{n}\times\vec{E} \;.} \tag{13.66}$$

Odtud jednak vidíme, že okamžité hodnoty elektrické intenzity a magnetické indukce v daném místě jsou svázány vztahem

$$\boxed{E = c\,B \,,} \tag{13.67}$$

a jednak, že

elektrická intenzita a magnetická indukce v rovinné vlně jsou na sebe kolmé.

Toto opět platí i pro obecnou elektromagnetickou vlnu, stejně tak vztah (13.66).

Vektory $\vec{E}$, $\vec{B}$ a $\vec{k}$ (resp. $\vec{n}$) jsou tedy na sebe vzájemně kolmé; v tomto pořadí přitom tvoří pravotočivý systém.[31]

Poznámka: Uvědomte si, že při výše uvedeném odvozování jsme automaticky pro $\vec{E}$ a $\vec{B}$ brali stejnou úhlovou frekvenci ω a stejný vlnový vektor $\vec{k}$. A že to bylo nezbytné – kdyby v členech $\mathrm{rot}\,\vec{E}$ a $\partial\vec{B}/\partial t$ byly různé frekvence nebo různé vlnové délky, nikdy by tyto členy v rovnici $\mathrm{rot}\,\vec{E} + \partial\vec{B}/\partial t = 0$ nemohly dát dohromady nulu pro všechny hodnoty t a $\vec{r}$.

A ještě jedna poznámka: Mohlo by nás napadnout, zda nějakou další vlastnost elektromagnetických vln nedostaneme ještě z rovnice $\mathrm{rot}\,\vec{H} - \frac{\partial\vec{D}}{\partial t} = 0$. Inu, nedostaneme. Můžeme se přesvědčit, že z dané rovnice znovu vyjde již známý výsledek (13.66).

---

[31] Přesvědčte se z (13.66), že toto tvrzení je pravda. V jakém pořadí tvoří pravotočivý systém, se lépe mnemotechnicky pamatuje, pokud místo magnetické indukce $\vec{B}$ vezmeme magnetickou intenzitu $\vec{H}$. Pak je totiž $\vec{E}, \vec{H}, \vec{k}$ v pořadí podle abecedy. (Ne že by tato znalost byla otázkou života a smrti… ☺)

13.4 Energie a tok energie v rovinné elektromagnetické vlně

V předchozí kapitole jsme odvodili vztahy pro hustotu energie elektromagnetického pole,

$$w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} \;, \tag{13.68}$$

a pro tok energie elektromagnetického pole. Ten je dán Poyntingovým vektorem

$$\vec{\mathscr{S}} = \vec{E}\times\vec{H} \;. \tag{13.69}$$

Můžeme se tedy podívat, jak je to s energií a tokem energie v (rovinné monochromatické) elektromagnetické vlně šířící se ve vakuu.

Hustota energie

Protože jde o vlnu ve vakuu, můžeme (13.68) přepsat na tvar

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0}B^2\right) . \tag{13.70}$$

Z (13.67) plyne $B^2 = \frac{1}{c^2}E^2 = \varepsilon_0\mu_0\,E^2$. Vidíme tedy, že oba členy v závorce v (13.70) jsou stejně velké. Zjistili jsme tedy, že hustota energie v monochromatické rovinné elektromagnetické vlně je

$$w = \varepsilon_0 E^2 \;. \tag{13.71}$$

Asi zajímavější je ale už zmíněný fakt, že oba členy ve vztahu pro hustotu energie jsou stejně velké – názorně můžeme říci, že hustoty „energie elektrického pole" a „energie magnetického pole" v daném místě (a v určitý čas) jsou stejné.[32] Toto je také výsledek, který platí pro elektromagnetické vlny ve vakuu obecně.

Tok energie

Tok energie je dán Poyntingovým vektorem (13.69). Protože, jak už víme, jsou $\vec{E}$ a $\vec{H}$ na sebe kolmé, je velikost toku energie prostě $\mathscr{S} = E\,H$. Tento výraz můžeme dále upravit:[33]

$$\mathscr{S} = E\,H = E\frac{1}{\mu_0}B = \varepsilon_0\frac{1}{\underbrace{\varepsilon_0\mu_0}_{c^2}}E\,B = \varepsilon_0\,c^2 E\underbrace{B}_{E/c} = c\underbrace{\varepsilon_0 E^2}_{w} = c\,w \tag{13.72}$$

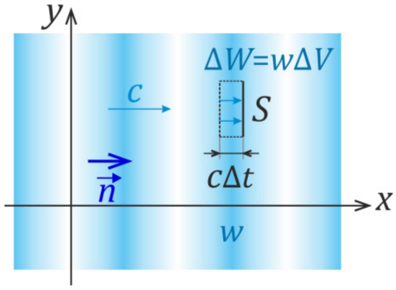
A jak je to se směrem $\vec{\mathscr{S}}$? Jak už bylo řečeno výše, vektory $\vec{E}$, $\vec{H}$ a $\vec{n}$ jsou na sebe kolmé a tvoří pravotočivý systém. Součin $\vec{E}\times\vec{H}$ tedy míří ve směru $\vec{n}$. Ono je to logické: **tok energie míří stejným směrem, kterým se šíří elektromagnetická vlna**.

Celkově tedy dostáváme výsledek

$$\boxed{\vec{\mathscr{S}} = c\,w\,\vec{n} \;.} \tag{13.73}$$

[32] Když si tohle pamatujeme, tak z toho můžeme rychle odvodit vztah svazující velikosti $\vec{E}$ a $\vec{B}$, aniž bychom museli počítat rotaci $\vec{E}$ apod.

[33] Jak je naznačeno, při úpravách používáme vztahy (13.12), (13.67) a (13.71).



Na konkrétním případě se dá názorně ilustrovat, že tento výsledek je pochopitelný a přirozený. Uvažujme vlnu šířící se ve směru osy x. Kolmo na osu x mějme plochu S – právě tok energie touto plochou budeme počítat.

Za krátký čas Δt projde plochou část vlny o délce $c\Delta t$. Objem části vlny, která projde plochou, je tedy $\Delta V = S\,c\,\Delta t$. Hustota energie v dané části vlny je w.[34] Energie, která za čas Δt projde plochou S, je tedy

$$\Delta W = w\Delta V = w\,S\,c\,\Delta t\ .$$

Výkon, který prochází plochou, tedy tok energie, je

$$P = \frac{\Delta W}{\Delta t} = c\,w\,S\ . \tag{13.74}$$

Hustotu toku energie[35] získáme vydělením výkonu plochou S:

$$\frac{P}{S} = c\,w\ . \tag{13.75}$$

A to už je výsledek (13.72), který jsme získali výpočtem Poyntingova vektoru.

Hustota energie a hustota toku energie určené vztahy (13.70) a (13.73) jsou ***okamžité hodnoty*** v určitém místě. Často nás též zajímají průměrné, tedy **střední hodnoty** těchto veličin.[36]

Závislost elektrické intenzity (i dalších veličin) na čase stále uvažujeme harmonickou. (Pracujeme s monochromatickou rovinnou vlnou.) Proto podobně, jako tomu bylo u výkonu střídavého proudu, bude střední hustota toku poloviční, než hodnota maximální:[37]

$$\left\langle \mathscr{S} \right\rangle = \frac{1}{2}\,c\,w_{\max} = \frac{1}{2}\,c\,\varepsilon_0 E_m{}^2\ . \tag{13.76}$$

Analogicky bychom mohli vypočítat střední hodnotu energie v elektromagnetické vlně; přirozeně z výpočtu vychází

$$\left\langle w \right\rangle = \frac{1}{2}\,c\,w_{\max}\ . \tag{13.77}$$

Vztah mezi střední hodnotou hustoty toku energie a střední hodnotou hustoty energie je tedy stejný jako pro okamžité hodnoty:

$$\boxed{\left\langle \mathscr{S} \right\rangle = c\left\langle w \right\rangle} \tag{13.78}$$

Poznamenejme, že toto opět platí obecněji, nejen pro monochromatickou vlnu.

[34] Předpokládáme, že hustota energie je v objemu ΔV prakticky konstantní. To je zřejmě splněno, když $c\Delta t$ je mnohem menší, než vlnová délka.

[35] Tedy fakticky procházející výkon na jednotku plochy.

[36] Například při řezání laserovým paprskem jde o to, kolik energie dodá paprsek materiálu za určitou dobu. (Okamžitá hodnota toku, která se mění v době řádu femtosekund, v tomto případě pro nás nemá význam.)

[37] Poznámka k označení: Střední hodnota se značí buď pruhem nad veličinou nebo špičatými závorkami kolem veličiny. (To je lepší, protože se to nemůže splést s označením vektoru.)

Hustota toku energie – význam a příklady

Z úvah na předchozí stránce je zřejmé, že hustota toku energie není žádná záhadná esoterická veličina daná nepochopitelným Poyntingovým vektorem, ale naopak veličina docela jednoduchá, a přitom velice užitečná a praktická.

> Hustota toku energie je prostě výkon, který projde jednotkovou plochou kolmou na směr šíření energie. Tedy, jinak řečeno, energie, která projde 1 m^2 plochy (kolmé ke směru šíření energie) za jednu sekundu.

Výkon procházející plochou S je tedy[38]

$$P = \mathscr{S}\, S \; . \tag{13.79}$$

Energie, která projde plochou S za čas Δt, je

$$W_{\text{za krátký čas}} = \mathscr{S}\, S\, \Delta t \; . \tag{13.80}$$

Uvedené vztahy ovšem určují okamžitý výkon a energii za velmi krátký čas, mnohem kratší, než je perioda vlny.

Pokud nám jde o energii, která prošla za mnohonásobek periody elektromagnetické vlny, je třeba uvažovat střední výkon

$$\langle P \rangle = \langle \mathscr{S} \rangle\, S \; , \tag{13.81}$$

energie za (dlouhý) čas t je pak

$$W = \langle \mathscr{S} \rangle\, S\, t \; . \tag{13.82}$$

$\boxed{?}$ Proč je tohle užitečné a praktické?

Protože energie může dopadnout na nějaký předmět, pohltit se a přeměnit se na jiné formy energie. Například daný předmět zahřát.

Příkladem jsou solární panely pro ohřev vody. To, kolik energie mohou maximálně dodat,[39] je dáno právě hustotou toku energie $\langle \mathscr{S} \rangle$ slunečního záření dopadajícího na daný solární kolektor.[40]

Hustota toku energie slunečního záření dopadajícího na Zemi, ale ještě vně atmosféry, se nazývá **solární konstanta**.[41] Její průměrná hodnota se uvádí přibližně[42]

1360 W/m^2 .

U zemského povrchu je hustota toku energie slunečního záření nižší. Při jasné obloze můžeme uvažovat zhruba

1 kW/m^2.

---

[38] Stále máme na mysli plochu kolmou na směr šíření energie, v případě elektromagnetické vlny tedy na směr $\vec{n}$.

[39] Tedy kolik a jak teplé vody mohou za jak dlouho připravit.

[40] V případě slunečního záření samozřejmě nejde o monochromatické vlny; vztahy pro hustotu a tok energie však platí obecně.

[41] Užívá se také název *sluneční* konstanta. (Někdy i *solární* nebo *sluneční irradiace*). Přesněji řečeno, solární konstanta je hustota energie slunečního záření ve vzdálenosti jedné astronomické jednotky od Slunce. Vzhledem k tomu, že vzdálenost Země od Slunce se v průběhu roku mírně mění (asi o ±1,7 %), kolísá i skutečná hustota toku slunečního záření u Země.

[42] Různé zdroje uvádějí nepatrně odlišné údaje. Mezi maximy a minimy sluneční aktivity se hodnota solární konstanty mění asi o 0,1 %.

Jeden metr čtvereční solárního panelu, kdyby byl přesně kolmo ke směru k Slunci a absorboval všechno sluneční záření, by tedy za jasného dne mohl dodat tepelný výkon až 1 kW. Pokud panel není orientován kolmo ke Slunci, musíme vzít průmět jeho plochy do tohoto směru.

Fotovoltaické solární panely mění dopadající sluneční záření na elektřinu. Jejich účinnost ovšem u komerčně dodávaných článků bývá v rozmezí deset až dvacet procent.[43] Takže i kdybyste měli panel o ploše metr čtvereční a nastavili ho kolmo ke slunci, dostanete z něj i za jasného dne maximálně asi dvě stě wattů elektrického výkonu.

$\boxed{?}$ Jak je to s hustotou energie slunečního záření?

Z (13.78) plyne $\langle w \rangle = \langle \mathscr{S} \rangle / c$, takže vidíme, že například pro sluneční záření na Zemi je velmi malá, řádově $3 \cdot 10^{-5}$ J/m^3.

$\boxed{?}$ Můžeme zvětšit hustotu toku energie slunečního záření?

Jistě, například tak, že sluneční paprsky soustředíme čočkou.[44] Pokud čočkou o průměru 10 cm soustředíme sluneční paprsky v ohnisku na průměr řekněme 2 mm,[45] zmenší se průměr 50-krát. Takže plocha se zmenší 2500-krát a tolikrát se zvětší i hustota toku energie; bude tedy asi $2{,}5 \cdot 10^6$ W/m^2.

To zní mohutně, přes 2 megawatty na metr čtvereční! Proto také čočkou můžeme zapálit nebo propálit papír.[46] Celkový výkon dopadající do ohniska bude ovšem stejný, jako výkon, který prošel plochou čočky. (V našem případě to bude asi 7 W.)

Z hustoty toku energie bychom mohli odhadovat například i hodnoty elektrické intenzity ve slunečním záření (pomocí vztahu (13.76)). Pojďme se však raději podívat na další zdroje záření. Dosáhnou vyšších hodnot hustoty toku energie?

Nepochybně ano. Například pro ***řezací lasery*** se uvádí výkon zhruba 100 W a paprsek soustředěný na průměr až asi 0,1 mm. Hustota výkonu (čili hustota toku energie) je tedy řádově

$$\frac{100\ \mathrm{W}}{\left(10^{-4}\ \mathrm{m}\right)^2} = 10^{10}\ \mathrm{W/m^2}\ .$$

Nejvýkonnější laser ATON v centru ELI Beamlines v dolních Břežanech bude mít špičkový výkon 10 PW (deset petawattů, tj. 10^{16} W, ovšem jen po dobu asi 150 fs).[47] Plocha průřezu svazku bude asi 1/4 m^2. Špičková hustota toku energie tedy bude zhruba

$$4 \cdot 10^{16}\ \mathrm{W/m^2}.$$

To je o deset řádů víc než v ohnisku naší čočky; však také má jít o nejintenzivnější laser pro uživatelský výzkum na světě.

---

[43] Uvádí se, že u fotovoltaických panelů instalovaných kolem roku 2010 byla účinnost tenkovrstvých panelů asi 10 %, v současnosti nabízené panely z monokrystalického křemíku uvádějí účinnost až přes 22 %.
U laboratorních solárních článků činí rekordní dosažená účinnost asi 47 % (údaj z roku 2019). Vývoj účinnosti solárních článků dosažené v laboratořích viz např. https://www.nrel.gov/pv/cell-efficiency.html.

[44] Sice pak už nepůjde o rovinnou vlnu, protože paprsky se budou sbíhat do ohniska, ale to nevadí.

[45] Nemůžeme je soustředit na nulový průměr, uvědomte si, že v ohnisku dostáváme obrázek sluníčka, a Slunce není bodový zdroj!

[46] Lépe vám to půjde, když ho začerníte, aby záření neodrážel, ale pohlcoval.

[47] Viz například https://www.eli-beams.eu/cs/infrastruktura/lasery/laser-4-aton-10-pw-2-kj/.

Shrnutí

Vlnová rovnice (ve vakuu):

$$\Delta\vec{B} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{B}}{\partial t^2} = 0\ ,\qquad \Delta\vec{E} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}}{\partial t^2} = 0\ ,$$ přitom $\frac{1}{c^2} = \varepsilon_0\mu_0$, c je rychlost světla ve vakuu

(Zápis též $\Box\vec{B} = 0$, $\Box\vec{E} = 0$, kde $\Box = \Delta - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ je D´Alembertův operátor.)

Řešení ve tvaru rovinné vlny: (jde o postupnou monochromatickou vlnu)

Vlna ve směru osy *x*: $\vec{B}(x,t) = \vec{B}_m \cos(\omega t - kx)$, ω je úhlová frekvence ($\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$)

k je vlnové číslo ($k = \frac{2\pi}{\lambda}$, λ je vlnová délka)

rychlost vlny: $c = \frac{\omega}{k}$

(odsud $c = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi f}{2\pi/\lambda} = f\lambda \ \Rightarrow\ f = \frac{c}{\lambda}$ a související středoškolské vzorce)

Vlna v obecném směru $\vec{n}$: $\vec{B} = \vec{B}_m \cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)$ $\vec{k} = k\,\vec{n}$ je vlnový vektor, $|\vec{n}| = 1$

V komplexním formalismu: $\vec{\tilde{B}} = \vec{\tilde{B}}\,\mathrm{e}^{\,i\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}\right)}$

Analogické jsou vztahy pro $\vec{E}$, ω a $\vec{k}$ jsou stejné ve vztazích pro $\vec{B}$ i $\vec{E}$

Vlastnosti rovinné elektromagnetické vlny:

$\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou kolmé na směr šíření vlny $\vec{n}$, tj. elektromagnetické vlnění je **příčné**

(díky tomu může být elektromagnetická vlna polarizovaná).

$\vec{E}$ a $\vec{B}$ jsou kolmé i na sebe navzájem, $\vec{E}, \vec{H}, \vec{n}$ tvoří pravotočivý systém.

V elektromagnetické vlně platí $E = c\,B$ (pro okamžité velikosti v daném místě).

Energie a tok energie v rovinné elektromagnetické vlně:

Hustota energie: $w = \frac{1}{2}\vec{E}\cdot\vec{D} + \frac{1}{2}\vec{H}\cdot\vec{B} = \varepsilon_0 E^2$ (členy $\vec{E}\cdot\vec{D}$ a $\vec{H}\cdot\vec{B}$ jsou stejně velké)

Hustota toku energie: $\vec{\mathscr{S}} = \vec{E}\times\vec{H} = c\,w\,\vec{n}$ => velikost hustoty toku energie je $\mathscr{S} = c\,w$

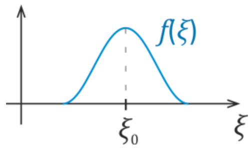
Střední hustota toku energie: $\langle\mathscr{S}\rangle = c\,\langle w\rangle$ (Pro monochromatickou vlnu $\langle\mathscr{S}\rangle = \frac{1}{2}\,c\,w_{\max}$.)

* Dodatek 13.A: Řešení vlnové rovnice pro libovolnou rovinnou vlnu (pro zájemce)

Jak se bude ve vakuu šířit rovinná vlna, která není monochromatická?

Uvažujme vlnu šířící se ve směru osy x. Její profil ovšem bude dán nikoli harmonickou závislostí, ale libovolnou funkcí[48]

$$f = f(\xi) \ . \qquad (13.A.1)$$



Může jít o funkci hodně složitou[49], pro jednoduchost však můžeme uvažovat funkci na grafu vpravo, ta má jasné maximum, takže budeme moci lehce sledovat, jak rychle se daná vlna šíří.

Uvažujme tedy elektromagnetickou vlnu s profilem (13.A.1). Vztah vystihující danou vlnu je[50]

$$\vec{B} = \vec{B}_m \, f(x - \upsilon t) \ .^{51} \qquad (13.A.2)$$

Maximální hodnotu bude mít B pro místa a časy, pro něž $x - \upsilon t = \xi_0$, tj.

$$x = \upsilon t + \xi_0 \ . \qquad (13.A.3)$$

Je vidět, že vlna se pohybuje ve směru osy x rychlostí υ.[52]

Vlnová rovnice popisující šíření vlny je (viz (13.24))[53]

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = 0 \ . \qquad (13.A.4)$$

Parciální derivace (13.A.2) jsou

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial x} = \vec{B}_m \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \vec{B}_m \frac{df}{d\xi} \qquad \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{B}_m \frac{df}{d\xi}\frac{\partial \xi}{\partial t} = \vec{B}_m \frac{df}{d\xi}\cdot(-\upsilon)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial x^2} = \vec{B}_m \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \vec{B}_m \frac{d^2 f}{d\xi^2} \qquad \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{B}_m \frac{d^2 f}{d\xi^2}\frac{\partial \xi}{\partial t}\cdot(-\upsilon) = \vec{B}_m \frac{d^2 f}{d\xi^2}\cdot \upsilon^2$$

Dosazení do (13.A.4) dá

$$\vec{B}_m \cdot \left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\cdot \frac{d^2 f}{d\xi^2} = 0 \qquad (13.83)$$

Je vidět, že pro $|\upsilon| = c$ je vlnová rovnice splněna – naše vlna s libovolným profilem se ve vakuu šíří rychlostí c.

---

[48] Jako obvykle pod „libovolnou“ míníme funkci, která je „rozumná“, tedy má všechny potřebné derivace. Nezávisle proměnnou v (13.A.1) jsme označili jako ξ. „Ksí“ je pěkné písmeno, zvukem připomíná x a jistě ho rád píše každý… ☺ (Pokud někomu z laskavých čtenářů tento výrok připomíná větu z Cimrmanovy hry *Záskok* „V Budějovicích by chtěl žít každý“, jde o podobnost čistě náhodnou. ☺)

[49] Například odpovídající vysílanému televiznímu záznamu rockového koncertu nebo Olympijských her.

[50] Budeme se zabývat magnetickou indukcí dané vlny, vztahy pro elektrickou intenzitu by byly analogické. (Pokud by maximální hodnota funkce f byla rovna 1, bude $|\vec{B}_m|$ maximální hodnota magnetické indukce v dané vlně; na velikosti magnetické indukce ale v naší úvaze nezáleží.)

[51] Zde jsme za ξ ve (13.A.1) dosadili $\xi = x - \upsilon t$.

[52] Nemusíme snad dodávat, že o pohyb ve směru osy x jde, když $\upsilon > 0$; pokud $\upsilon < 0$, jde o pohyb proti směru osy.

[53] Derivace podle y a z už zde nepíšeme, protože na těchto souřadnicích $\vec{B}$ nezávisí.