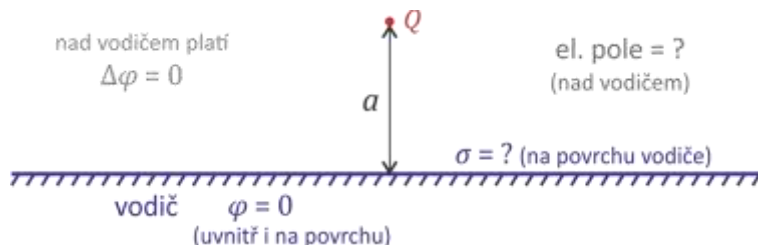


Máme bodový náboj Q ve vzdálenosti a od vodivé roviny. Jaké bude elektrické pole? A jak se jaký náboj rozloží na povrchu vodiče?

Situaci ukazuje obrázek. Ve vodiči i na jeho povrchu je konstantní potenciál, bereme ho $\varphi = 0$.¹ Nad povrchem vodiče je vakuum, potenciál tam tedy musí splňovat Laplaceovu rovnici $\Delta\varphi = 0$.

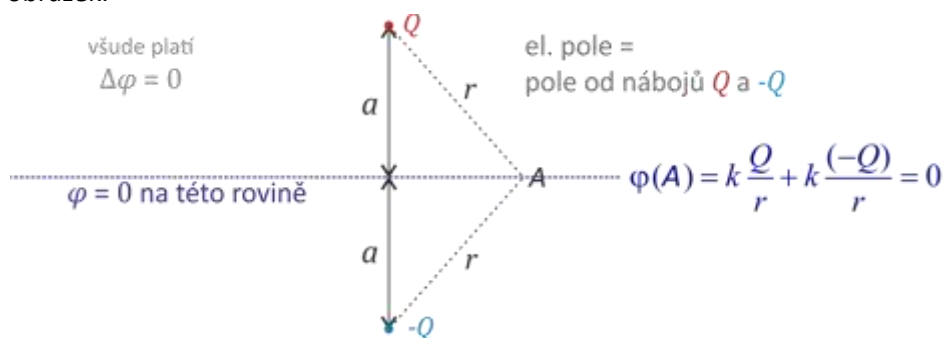
Potřebujeme tedy najít potenciál $\varphi(\vec{r})$, který bude splňovat Laplaceovu rovnici a podmínku, že na rovině, která je povrchem vodiče, je $\varphi = 0$.²



Naštěstí k tomu, abychom určili, jaké bude v tomto případě elektrické pole, nemusíme řešit Laplaceovu rovnici. Použijeme hezký trik známý pod názvem *metoda zrcadlení*.³

Budeme uvažovat situaci, kdy je všude vakuum (tedy není zde žádný vodič), a pole je buzeno nejen nábojem Q , ale i nějakým dalším nábojem Q' . Potenciál pole těchto bodových nábojů určitě splňuje Laplaceovu rovnici.⁴ Pokud se nám povede zvolit velikost a umístění náboje Q' tak, aby v rovině, kde byl původně vodič, byl potenciál nulový, pak jsme našli požadované řešení!

A ono to jde, stačí ten „dodatečný“ náboj zvolit $Q' = -Q$ a umístit ho zrcadlově vůči dané rovině, viz následující obrázek.



Samozřejmě, že jsme takhle dostali jen pole nad vodičem. (Pod danou rovinou je v reálném vodiči potenciál pole konstantní a intenzita nulová.) Elektrickou intenzitu nad rovinou vodiče dostaneme prostě jako součet intenzit od nábojů zvolit Q a $-Q$, jak to ukazuje následující obrázek. (Na něm pro jednoduchost nekreslíme osu z a ukazujeme intenzitu v bodě $\vec{r} = (x, y, 0)$.)

¹ Je to „bez újmy na obecnosti“, potenciál je určen až na konstantu.

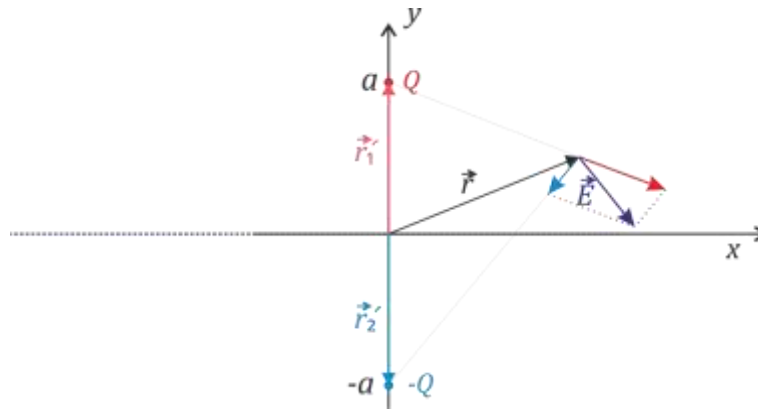
² Navíc v těsné blízkosti bodového náboje Q se pole musí prakticky rovnat poli bodového náboje ve vakuu. (Když se hodně přiblížíme k náboji Q , je intenzita pole od tohoto náboje mnohem větší, než intenzita od nábojů, která budou na povrchu vodiče. Rozmyslete si, že tenhle argument není žádný podvod.)

³ A také pod některými dalšími: V učebnici Sedlák, Štol: Elektřina a magnetismus se užívá název *metoda elektrostatického zobrazení*. V angličtině se užívá název *method of images*, takže bychom mohli mluvit i o *metodě obrazů*.

⁴ Pole libovolného elektrostatického pole ve vakuu musí splňovat Laplaceovu rovnici, ať jde o pole jakkoli rozmístěných a jakkoli velkých nábojů. Laskavý čtenář se o tom ostatně může přesvědčit přímým výpočtem:

Když si pro potenciál $\varphi(\vec{r}) = k \sum_{i=1}^N Q_i / |\vec{r} - \vec{r}'_i| = \sum_{i=1}^N Q_i / \sqrt{(x-x'_i)^2 + (y-y'_i)^2 + (z-z'_i)^2}$ spočtete $\Delta\varphi$ (stačí

vypočítat ty druhé derivace...), dostanete nulu.



Je tedy $\vec{E}(\vec{r}) = k \frac{Q}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_1}{|\vec{r} - \vec{r}'_1|} + k \frac{(-Q)}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|^2} \frac{\vec{r} - \vec{r}'_2}{|\vec{r} - \vec{r}'_2|}$.

Jak tomu bude konkrétně pro body, pro něž je $y=0$, tedy **pro body na povrchu vodiče**? Pro ně bude $\vec{r} = (x, 0, 0)$. Navíc platí $\vec{r}'_1 = (0, a, 0)$ a $\vec{r}'_2 = (0, -a, 0)$. Je tedy $|\vec{r} - \vec{r}'_1| = |\vec{r} - \vec{r}'_2| = \sqrt{x^2 + a^2}$.⁵

Pro x-ovou složku \vec{E} dostaneme $E_x(\vec{r}) = k \frac{Q}{x^2 + a^2} \frac{x-0}{\sqrt{x^2 + a^2}} + k \frac{(-Q)}{x^2 + a^2} \frac{x-0}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 0$. To je

v pořádku, tak tomu musí být.⁶ Pro y-ovou složku je:

$$E_y(\vec{r}) = k \frac{Q}{x^2 + a^2} \frac{0-a}{\sqrt{x^2 + a^2}} + k \frac{(-Q)}{x^2 + a^2} \frac{0-(-a)}{\sqrt{x^2 + a^2}} = 2k \frac{-Qa}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{Q}{2\pi\epsilon_0 a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}}$$

Z Coulombovy věty⁷ pak už lehce dostaneme plošnou hustotu náboje na povrchu vodiče:

$$\sigma = -\frac{Q}{2\pi a^2} \frac{1}{\left(1 + \frac{x^2}{a^2}\right)^{3/2}}$$

Vidíme, že na povrchu vodiče je rozložen náboj opačného znaménka, než má náboj Q ,⁸ největší hustotu má samozřejmě v místech nejbližších k náboji.⁹

Co bychom dostali, kdybychom zintegrovali plošnou hustotu na povrchu vodiče přes celou rovinu? Tohle přenecháme laskavému čtenáři jako malé cvičení na plošný integrál.¹⁰ A co vyjde? Zkuste to nejprve odhadnout na základě „fyzikálního názoru“, když vyjdete z názorné představy, že prakticky všechny siločáry vycházející z náboje Q skončí na povrchu vodiče.¹¹

⁵ Nakreslete si k tomu sami příslušný obrázek.

⁶ Proč? Inu proto, že těsně u povrchu vodiče k němu musí být elektrická intenzita...

(Správně, kolmá. Viz obrázek, který jste si sami nakreslili, jak vás k tomu vybídla předchozí poznámka.)

⁷ Těsně u povrchu vodiče je $E = \sigma/\epsilon_0$.

⁸ To je rozumné, například kladný náboj $Q > 0$ přitáhne z vodiče na povrch záporné náboje.

⁹ Poznamenejme, že σ známe ve všech bodech povrchu vodiče, protože náš problém má válcovou symetrii – rozmyslete si, že když jsme výše pro jednoduchost volili $z=0$, bylo to bez újmy na obecnosti.

¹⁰ Náповěda: Dobře se to dělá v polárních souřadnicích.

¹¹ Ano, po integraci vyjde, že celkový náboj na povrchu vodiče je $-Q$.