Rovnováha soustavy hmotných bodů, princip virtuální práce

V této kapitole nepůjde o pohyb, ale o statické situace, o to, kdy je soustava hmotných bodů v rovnováze. Jak už jsme naznačili v úvodu, budeme se snažit vyjadřovat věci pokud možno pomocí skalárních veličin – zde konkrétně pomocí práce[1]. Začneme tou nejjednodušší situací: jedním hmotným bodem.

Jeden hmotný bod v rovnováze

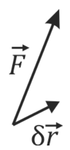
Předpokládejme, že hmotný bod je v klidu. Pak je v rovnováze právě tehdy, jestliže celková síla $\vec{F}$ na něj působící je nulová:

$$\vec{F} = 0 \ . \tag{1.1}$$

Tuto podmínku vyjádříme pomocí skalární veličiny. Představme si, že se hmotný bod posune o $\delta\vec{r}$. Když vztah (1.1) skalárně vynásobíme $\delta\vec{r}$, dostaneme

$$\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0 \ . \tag{1.2}$$

Člen na levé straně, $\vec{F} \cdot \delta\vec{r}$, je práce síly $\vec{F}$ při posunutí $\delta\vec{r}$.



Posunutí $\delta\vec{r}$ fakticky ani nemusí být skutečné. Vztah (2) nám jenom říká, jaká by byla práce, kdybychom hmotný bod nepatrně posunuli. Mluvíme proto o **virtuálním posunutí** a práci $\vec{F} \cdot \delta\vec{r}$ nazýváme **virtuální práce**. Posunutí $\delta\vec{r}$ přitom bereme jako velmi malé – přesněji řečeno „nekonečně malé“, tedy infinitesimální.[2]

Vztah (1.2) říká, že když je hmotný bod v rovnováze, je virtuální práce sil na bod působících rovna nule. A to při libovolném virtuálním posunutí $\delta\vec{r}$.

Totéž platí i obráceně: Je-li $\vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0$ pro libovolné $\delta\vec{r}$, musí být $\vec{F} = 0$ a tedy hmotný bod je v rovnováze. Proč je tomu tak? Rozepíšeme-li skalární součin do složek, dostaneme

$$0 = \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = F_x \cdot \delta x + F_y \cdot \delta y + F_z \cdot \delta z \tag{1.3}$$

Posunutí $\delta\vec{r}$ může být libovolné. Zvolme například $\delta y = 0,\ \delta z = 0$, tedy $\delta\vec{r} = \left(\delta x, 0, 0\right)$, kde předpokládáme, že $\delta x \neq 0$. Z (1.3) pak je $0 = F_x \cdot \delta x \ \Rightarrow\ F_x = 0$. Podobně dokážeme nulovost F_y a F_z. Celkově tedy platí, že

$$\boxed{\text{Hmotný bod je v rovnováze} \ \Leftrightarrow\ \vec{F} \cdot \delta\vec{r} = 0 \ \text{pro libovolná}\ \delta\vec{r}\ .}$$

Čili:

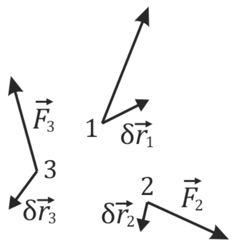
Hmotný bod je v rovnováze právě tehdy, když virtuální práce sil na něj působících při libovolných virtuálních posunutích je rovna nule.

Naprosto stejně můžeme postupovat i v případě soustavy hmotných bodů.

[1] Při čtení této kapitoly budete mít nejspíš pocit, že věci zcela jednoduché začínáme zaplétat a vyjadřovat hrozně komplikovaně. Ale vydržte, výsledky nakonec budou zajímavé a užitečné.

[2] Obrázek vpravo od textu slouží jen jako ilustrace; nulový vektor $\vec{F}$ a infinitesimální vektor $\delta\vec{r}$ nenakreslíme.

Soustava hmotných bodů v rovnováze



Soustava *N* hmotných bodů je v rovnováze, jestliže je v rovnováze každý její bod, tedy je v klidu a síla na něj působící je nulová: $\vec{F}_i = 0,\, i = 1,\ldots,N$.

Pokud si představíme, že *i*-tý hmotný bod posuneme o $\delta\vec{r}_i$ (viz ilustrační obrázek, kde ovšem posunutí nekreslíme nekonečně malá), je celková práce působících sil rovna $\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i$. Podobně jako v případě jednoho hmotného bodu, mluvíme i zde o **virtuální práci** sil působících na soustavu. Je-li soustava v rovnováze, jsou všechny síly nulové, takže celková virtuální práce je nulová:

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 \,. \tag{1.4}$$

Platí to i obráceně: Jestliže platí (1.4) pro *libovolná* virtuální posunutí $\delta\vec{r}_i$, jsou všechny síly nulové a soustava je v rovnováze. Toto bychom dokázali naprosto stejně jako výše v případě jednoho bodu: Nejprve bychom vzali všechna virtuální posunutí nulová, až na $\delta\vec{r}_1 = (\delta x, 0, 0)$. Ze (1.4) pak plyne, že $F_{1x} = 0$. Podobně dokážeme nulovost F_{1y} a F_{1z}, pak F_{2x}, … Celkově tedy platí tvrzení, jemuž se říká **princip virtuální práce**:

Soustava hmotných bodů je v rovnováze $\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ pro libovolná $\delta\vec{r}$.

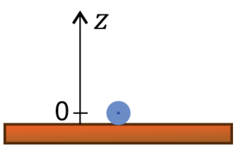
Čili:

Soustava hmotných bodů je v rovnováze právě tehdy, když virtuální práce sil na soustavu působících při libovolných virtuálních posunutích je rovna nule.

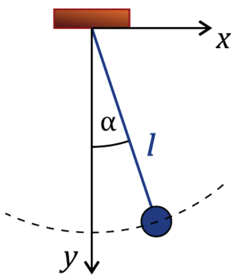
Zatím to stále vypadá, že jsme jen jednoduchou věc (nulovost sil) vyjádřili složitě. Zajímavější to začne být, pokud je pohyb hmotných bodů omezen vazbami.

Vazby

Vazby jsou **podmínky omezující pohyb**[3].



Příkladem může být kulička položená na desce stolu: můžeme ji posouvat po stole, zvednout, ale nemůžeme ji zatlačit do stolu. Vazbu v tomto případě můžeme vyjádřit nerovností $z \geq 0$, kde z je souřadnice kolmá na desku stolu.



Jiným příkladem je matematické kyvadlo. (Závěs délky l přitom bereme jako tuhou tyčku, která se nemůže prodloužit ani zkrátit.) Vazbu v daném případě můžeme vyjádřit rovností $x^2 + y^2 = l^2$. (Dokreslete si do obrázku příslušný pravoúhlý trojúhelník, abyste jasně viděli, jak daná rovnost plyne z Pythagorovy věty.)

Vazbou může být také například tuhá tyčka spojující dva hmotné body apod.

Teď trochu názvosloví, aneb jak rozdělujeme vazby. Jednak na **jednostranné** a

[3] V podobném smysly používáme tento termín i v běžném životě: když je někdo ve vazbě, je jeho pohyb také omezen.

oboustranné. Příkladem jednostranné vazby byla právě kulička na desce stolu, příkladem oboustranné vazby matematické kyvadlo. Další rozdělení zahrnuje cizokrajně znějící slova – vazby dělíme na:

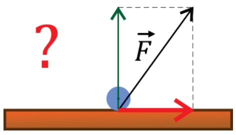
- ***Holonomní*** – ty jsou vždy vyjádřitelné algebraickými vztahy (rovnostmi) obsahujícími souřadnice. Příkladem je matematické kyvadlo popsané výše, vztahem je $x^2 + y^2 = l^2$. Těmto vztahům říkáme **vazbové podmínky**[4].
  Holonomní vazby se dále dělí na:
  - ***skleronomní***[5] – tyto vazby nezávisí na čase (např. délka závěsu kyvadla je konstantní) a
  - ***reonomní***[6] – závisí na čase (např. hmotný bod vázaný na rovinu, která se otáčí).
- ***Neholonomní*** neboli *anholonomní*. Nejsou vyjádřitelné rovnostmi obsahujícími souřadnice[7].

Podstatné je připomenout jednu důležitou skutečnost: **vazby jsou idealizace**. Ve skutečnosti, když položíme kuličku na stůl, tak se stůl nepatrně prohne. V matematickém kyvadle působí hmotný bod na závěs silou, závěs se v důsledku toho o maličko prodlouží. Když se na dané omezení pohybu díváme jako na vazby, tak tyto deformace zanedbáváme. Je to idealizace (tedy abstrakce), ale velmi užitečná.

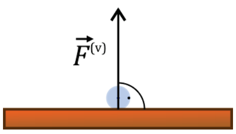
Vazbové síly

Co udrží kuličku, že nepropadne deskou stolu, i když ji gravitace táhne dolů? Stůl zjevně působí na kuličku silou. Podobně závěs působí silou na zavěšené závaží. Těmto silám říkáme **vazbové síly**. Jejich velkost je právě taková, že kulička zůstane na stole, že závaží kyvadla má od bodu závěsu stále délku l.

Jaký je **směr** vazbových sil? Může například na kuličku na desce stolu působit síla šikmo nahoru, jak to ukazuje obrázek? Kdyby tomu tak bylo, pak by složka síly rovnoběžná s deskou stolu (na obrázku vyznačená červeně), kuličku podél desky stolu urychlovala. Něco takového ovšem vazbová síla nedělá!



Vazbová síla $\vec{F}^{(v)}$ tedy musí být **kolmá** na desku stolu. Obecně říkáme, že **vazbová síla je kolmá na vazbovou plochu**.[8]



Práce vazbových sil

Kulička se po desce stolu může pohybovat do různých směrů; vazbová síla je vůči všem těmto směrům kolmá. Z tohoto příkladu můžeme usoudit, že práce vazbových sil je nulová. To je pravda i v obecném případě, jen tento výsledek musíme vyjádřit trochu přesněji.

---

[4] Pojem vazbová podmínka je obecnější a vztahuje se i na vazby, které nejsou holonomní. My jej však prakticky vždy budeme užívat jen v případě holonomních vazeb.

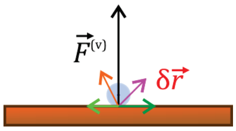
[5] Tyto vazby bychom tedy mohli označit za **tuhé**. Pomůckou, jak si daný termín pamatovat, nám může být skleróza. To, že mají obě slova stejný kořen, není náhoda – při skleróze kornatějí, tedy tuhnou, stěny cév.

[6] Také se píše s písmenem h jako *rheonomní*.

[7] Takto složité případy tady nebudeme uvažovat. V následujícím textu budeme vazby vždy uvažovat jako holonomní (díky tomu půjde o vazby oboustranné) a ve většině případů za skleronomní. (Zcela jistě tak tomu bude v této kapitole, kdy jde o rovnováhu, tedy o statické situace.)

[8] Například v případě matematického kyvadla je vazbovou plochou kružnice. Pokud vám přijde divné, že vazbovou plochou je v tomto případě křivka, je to proto, že pohyb kyvadla jsme od začátku uvažovali jen v jedné rovině. Chcete-li postupovat „pořádněji“ a vyjít ze třírozměrného případu, můžete říci, že vazbovou plochou je sféra $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$, druhou vazbovou plochou je rovina $z = 0$.

Zajímá nás virtuální práce, tedy práce sil při virtuálních posunutích. Jelikož tato posunutí chápeme opravdu jako virtuální (nikoli reálná), mohli bychom si představit třeba i posunutí kuličky dovnitř desky stolu. To by ovšem narušilo vazbu (v našem případě by už pro kuličku neplatilo $z \geq 0$). Proto se omezíme na **posunutí slučitelná s vazbami[9]**.



Navíc například v případě kuličky na stole zjevně existují posunutí (mířící šikmo nahoru, viz obrázek), pro něž skalární součin $\vec{F}^{(v)} \cdot \delta\vec{r} > 0$. Proto se zavádí pojem **vratná virtuální posunutí slučitelná s vazbami**. Jde o taková posunutí $\delta\vec{r}$, že opačné posunutí, tj. $-\delta\vec{r}$ je také slučitelné s vazbami. Posunutí vedoucí šikmo nahoru (nebo přímo ve směru vazbové síly) toto nesplňují – opačné posunutí by kuličku zatlačovalo do stolu[10], takže by nebylo slučitelné s vazbou. Jako vratná virtuální posunutí slučitelná s vazbami tedy zbývají posunutí po desce stolu (tedy ta, která jsou na obrázku značena zeleně).

Podobné příklady můžeme zobecnit a konstatovat, že

> **virtuální práce vazbových sil při vratných virtuálních posunutích slučitelných s vazbami je rovna nule.**[11]

Zobecněný princip virtuální práce

Z čeho se skládá síla $\vec{F}_i$ působící na *i*–tý hmotný bod? Jednak ze sil, kterými na něj působí ostatní body[12] a vnější silová pole[13]. Takovýmto silám říkáme **aktivní[14]**, značit je budeme $\vec{F}_i^{(a)}$. A dále z vazbových sil $\vec{F}_i^{(v)}$. Je tedy:

$$\vec{F}_i = \vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)} \tag{1.5}$$

Podle principu virtuální práce je soustava bodů v rovnováze právě když celková virtuální práce všech sil je nulová (viz (1.4)):

$$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = 0 .$$

Dosadíme-li sem (1.5), dostáváme (pro případ vratných virtuálních posunutí slučitelných s vazbami):

$$0 = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \left(\vec{F}_i^{(a)} + \vec{F}_i^{(v)}\right) \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i + \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(v)} \cdot \delta\vec{r}_i = \sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i , \tag{1.6}$$

kde jsme již využili toho, že virtuální práce *vazbových* sil je nulová.

Výsledek (1.6) již představuje **zobecněný princip virtuální práce**:

---

[9] To znamená, že i po posunutí zůstane platit vazbová podmínka.

[10] Opačné posunutí provádíme z výchozí polohy kuličky položené na stole, tedy ne tak, že bychom kuličku posunuli o $\delta\vec{r}$ a pak zase zpátky.

[11] V učebnicích se někdy na základě příkladů konstatuje, že pro virtuální posunutí slučitelná s vazbami (ne nutně vratná) platí $\vec{F}^{(v)} \cdot \delta\vec{r} \geq 0$. Toto se někdy chápe jako nezávislý axiom, resp. obecná vlastnost vazbových sil. Pro vratná posunutí musí totéž platit i pro opačná posunutí, tj. $\vec{F}^{(v)} \cdot \left(-\delta\vec{r}\right) \geq 0$, čili $\vec{F}^{(v)} \cdot \delta\vec{r} \leq 0$. Kombinací obou nerovností pak už okamžitě dostáváme pro virtuální práci vazbových sil $\vec{F}^{(v)} \cdot \delta\vec{r} = 0$.

[12] Třeba prostřednictvím pružinek, gravitačního přitahování, elektrostatické interakce apod.

[13] Například když jsou hmotné body v gravitačním poli Země nebo v případě, kdy by nabité hmotné body byly třeba v elektrostatickém poli deskového kondenzátoru.

[14] Používá se též název **vtištěné** síly.

Soustava hmotných bodů s vazbami je v rovnováze	$\Leftrightarrow$	$\sum_{i=1}^{N} \vec{F}_i^{(a)} \cdot \delta\vec{r}_i = 0$ pro libovolná $\delta\vec{r}_i$ vratná, slučitelná s vazbami.

Čili:

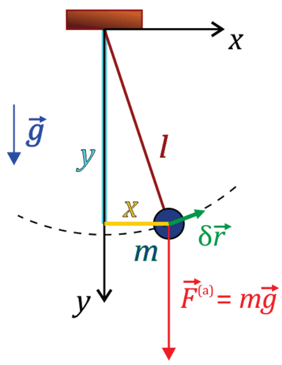
Soustava hmotných bodů s vazbami je v rovnováze právě tehdy, když virtuální práce aktivních sil působících na soustavu při libovolných vratných virtuálních posunutích slučitelných s vazbami je rovna nule.

Podstatné je, že se nyní vůbec nemusíme starat o vazbové síly! V zobecněném principu virtuální práce vystupují jen síly aktivní[15].

Jak to funguje a k čemu je to dobré ukáží následující příklady.

Příklady

Příklad 1: rovnováha matematického kyvadla



Pro první příklad zvolíme jeden z nejjednodušších systémů, u něhož předem známe výsledek: matematické kyvadlo v homogenním gravitačním poli.

Souřadnice x a y zvolíme tak, jak to ukazuje obrázek vpravo. Vazbová podmínka vyjadřuje, že závěs kyvadla má konstantní délku:

$$x^2 + y^2 = l^2 = \text{konst.} \tag{1.7}$$

Jak z této podmínky spočítat směr virtuálního posunutí $\delta\vec{r}$? Virtuální posunutí považujeme za nekonečně malá, proto s nimi můžeme pracovat jako s diferenciály. Totální diferenciál (1.7) dá

$$2x\,\mathrm{d}x + 2y\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}(l^2) = 0\,, \tag{1.8}$$

právě proto, že pravá strana (1.7) je konstantní. Vydělíme-li (1.8) dvěma a místo diferenciálů píšeme složky $\delta\vec{r} = (\delta x, \delta y)$, dostaneme výslednou podmínku $x\,\delta x + y\,\delta y = 0$. Odtud

$$\delta y = -\frac{x}{y}\,\delta x\,. \tag{1.9}$$

Gravitační síla (jediná aktivní síla v dané situaci) má složky $\vec{F}^{(a)} = (0, mg)$. Podle zobecněného principu virtuální práce[16] je matematické kyvadlo v rovnováze právě tehdy, když

$$0 \;=\; \vec{F}^{(a)} \cdot \delta\vec{r} \;=\; 0 \cdot \delta x + mg \cdot \delta y \;=\; -\frac{mg}{y} \cdot x \cdot \delta x\,. \tag{1.10}$$

a to pro libovolné δx (tedy obecně pro $\delta x \neq 0$). To lze splnit jedině tak, že $x = 0$.

---

[15] Pozor: Na rozdíl od principu virtuální práce pro soustavy bodů bez vazeb ze zobecněného principu virtuální práce *neplyne*, že by síly v něm vystupující (tedy aktivní síly) byly nulové. V rovnováze platí, že vazbové síly se nastaví tak, aby vždy právě vyrovnaly síly aktivní; nulový je součet aktivních a vazbových sil na každý bod.

[16] Posunutí (1.9) jsou vratná a slučitelná s vazbami.

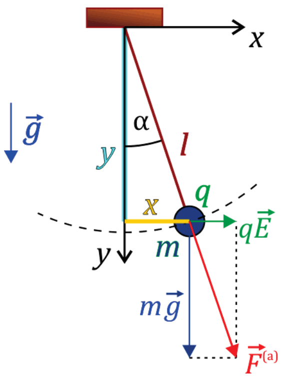
Odvodili jsme tedy, že matematické kyvadlo je v rovnováze pro $x=0$, tedy když visí svisle dolů[17]. K výsledku můžeme doplnit dvě poznámky:

1) Vidíme, že pro výpočet jsme opravdu nepotřebovali vazbové síly, tedy sílu závěsu.

2) Výsledek $x=0$ odpovídá i případu, kdy by kyvadlo stálo svisle nahoru! (Závěs bereme jako tuhý, tedy jako tyčku, ne jako nit nebo provázek.) Poloha kyvadla svisle nahoru je také rovnovážnou polohou, ale polohou *labilní*. Vidíme tedy, že zobecněný princip virtuální práce **nerozlišuje stabilní a labilní rovnovážnou polohu**.

Příklad 2: matematické kyvadlo ovlivněné elektrickým polem

Uvažujme ještě jeden příklad: matematické kyvadlo, na něž kromě gravitačního pole působí i homogenní elektrické pole. Hmotný bod matematického kyvadla má náboj q, intenzitu elektrického pole budeme pro jednoduchost brát vodorovnou, tj. $\vec{E}=(E,0)$. Aktivní síla působící na hmotný bod je tedy $\vec{F}^{(a)}=(qE,mg)$.



Pro zápis zobecněného principu virtuální práce bychom mohli využít vztahu (1.9) svazujícího složky virtuálního posunutí δx a δy. Ukážeme si však ještě jinou možnost, jak složky posunutí odvodit. Z obrázku je zřejmé, že pro kartézské souřadnice x a y platí

$$\begin{aligned} x &= l \sin\alpha \\ y &= l \cos\alpha \end{aligned} \tag{1.11}$$

Úhel α jednoznačně určuje polohu hmotného bodu, můžeme ho tedy chápat jako souřadnici, byť ne kartézskou[18]. Je příkladem toho, čemu říkáme ***zobecněné souřadnice***; v následujících kapitolách je budeme používat velmi často. Přírůstky souřadnic vypočteme z (1.11) pomocí derivací[19]:

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{d(l\sin\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha = l\cos(\alpha)\,\delta\alpha \\ \delta y &= \frac{d(l\cos\alpha)}{d\alpha}\delta\alpha = -l\sin(\alpha)\,\delta\alpha \end{aligned} \tag{1.12}$$

Po dosazení do zobecněného principu virtuální práce dostáváme

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{F}^{(a)}\cdot\delta\vec{r} = qE\cdot\delta x + mg\cdot\delta y = qE\cdot l\cos(\alpha)\,\delta\alpha - mg\cdot l\sin(\alpha)\,\delta\alpha = \\ &= l\cdot(qE\cdot\cos\alpha - mg\cdot\sin\alpha)\cdot\delta\alpha \ . \end{aligned}$$

Toto musí platit pro libovolné δα, takže

$$\mathrm{tg}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{qE}{mg} \ .$$

Ze směru síly na obrázku můžeme ověřit, že toto je správný výsledek.

[17] Samozřejmě můžeme ironicky zvolat „To je tedy objevný výsledek!“ Ovšem již předem jsme upozorňovali, že princip virtuálního práce zde ilustrujeme na velmi jednoduchém příkladě, kde předem známe výsledek.
[18] V našem případě jde o jednu z polárních souřadnic.
[19] Přírůstky souřadnic (tedy složky virtuálního posunutí) bereme jako infinitesimální, tj. „nekonečně malé“.