

Lagrangeovy rovnice druhého druhu

V této kapitole již půjde o dynamiku, tedy o pohyb soustavy hmotných bodů. Téměř ve všech zajímavých případech bude jejich pohyb omezen vazbami; nadále budeme uvažovat pouze vazby **holonomní**. Od kartézských souřadnic hmotných bodů přejdeme k zobecněným souřadnicím¹ a odvodíme rovnice, které budou velmi užitečné jak pro řešení příkladů, tak v dalších kapitolách. Výchozím bodem nám bude princip, který je analogií zobecněného principu virtuální práce.

D'Alembertův princip

V předchozí kapitole jsme se seznámili s principem virtuální práce. Ten je však použitelný jen v případě rovnováhy, kdy síla na každý hmotný bod je rovna nule. V případě, kdy se hmotné body pohybují, je ale síla obecně *nenulová*. Víme, že souvisí se zrychlením podle **2. Newtonova zákona**:

$$m_{(n)} \ddot{\vec{r}}_{(n)} = \vec{F}_{(n)} . \quad (2.1)$$

Zde index n čísluje hmotné body, $n = 1, \dots, N$, kde N je počet hmotných bodů².

Existuje ale trik, který nám umožní použít to, co jsme zvládli v první kapitole, tedy virtuální posunutí a virtuální práci. Ve vztazích (2.1) převedeme vše na jednu stranu:

$$\vec{F}_{(n)} - m_{(n)} \ddot{\vec{r}}_{(n)} = 0 . \quad (2.2)$$

Výraz na levé straně (2.2) má rozměr síly, můžeme ho tedy celý chápat jako sílu. Používá se pro něj název **ztracená síla**³. Podstatné je, že tyto ztracené síly se pro každý hmotný bod rovnají nule. Lze na ně tedy aplikovat stejný postup, jako jsme v kap. 1 aplikovali na normální síly: Vztah (2.2) pro každé n vynásobíme virtuálním posunutím $\delta\vec{r}_{(n)}$ a sečteme pro všechna n od 1 do N :

$$\sum_{n=1}^N (\vec{F}_{(n)} - m_{(n)} \ddot{\vec{r}}_{(n)}) \cdot \delta\vec{r}_{(n)} = 0 . \quad (2.3)$$

Síla na každý bod se skládá ze síly aktivní a vazbové, $\vec{F}_{(n)} = \vec{F}_{(n)}^{(a)} + \vec{F}_{(n)}^{(v)}$.⁴ Podobně jako ve statickém případě popsaném v předchozí kapitole je virtuální práce *vazbových* sil rovna nule:

$\sum_{n=1}^N \vec{F}_{(n)}^{(v)} \cdot \delta\vec{r}_{(n)} = 0$.⁵ Vazbové síly tedy z (2.3) vypadnou a můžeme říci, že za pohybu soustavy hmotných bodů platí:

$$\sum_{n=1}^N (\vec{F}_{(n)}^{(a)} - m_{(n)} \ddot{\vec{r}}_{(n)}) \cdot \delta\vec{r}_{(n)} = 0 . \quad (2.4)$$

¹ Jak holonomní vazby, tak zobecněné souřadnice jsme již potkali v kap. 1.

² Index n píšeme do závorek, abychom zde odlišili číslování jednotlivých bodů od číslování souřadnic, které zavedeme níže a které budeme používat velmi často – číslování souřadnic bude bez závorek.

³ Snad proto, že tato „síla“ je za pohybu rovna nule, jakoby se tedy její hodnota „ztratila“. Někdy se také můžeme setkat s názvem „efektivní síla“.

⁴ Do síly $\vec{F}_{(n)}^{(a)}$ přitom zahrnujeme všechny aktivní síly působící na daný bod (např. síly od všech ostatních bodů), do síly $\vec{F}_{(n)}^{(v)}$ všechny vazbové síly působící na tento bod.

⁵ Omezujeme se přitom samozřejmě jen na virtuální posunutí *slučitelná s vazbami*. Díky tomu, že jde o vazby holonomní, jde o posunutí vratná. Poznámka „pro šouraly“: V případě reonorních vazeb je důležitá ještě jedna věc. Virtuální posunutí bereme tak, že se odehrávají okamžitě, tedy že se na ně nespotřebuje žádný čas.

Tento výsledek se nazývá **d'Alembertův⁶ princip**. Stručně bychom ho mohli vyslovit tak, že:

Soustava hmotných bodů se pohybuje tak, že virtuální práce ztracených sil při libovolných vratných virtuálních posunutích slučitelných s vazbami je nulová.

Přitom vazby omezující pohyb považujeme za holonomní a do ztracených sil nezapočítáváme vazbové síly. Matematicky je d'Alembertův princip dán vztahem (2.4), čili

Soustava hmotných bodů s holonomními vazbami se pohybuje právě tak, že:	$\sum_{n=1}^N (\vec{F}_{(n)}^{(a)} - m_{(n)} \ddot{\vec{r}}_{(n)}) \cdot \delta \vec{r}_{(n)} = 0$ pro libovolná $\delta \vec{r}_{(n)}$ slučitelná s vazbami. ⁷
---	--

Pomocí d'Alembertova principu bychom mohli řešit i některé příklady. Pro nás však bude důležitý hlavně proto, že z něj odvodíme Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Nejprve si ovšem vhodně očíslováme souřadnice a další veličiny, aby se nám s nimi dobře a jednotně pracovalo.

Konfigurační prostor

V dalším odvozování přejdeme od vektorů k souřadnicím. Přitom bude užitečné očíslovat si všechny souřadnice „plynule vpřed“, tedy následujícím způsobem:

$$\begin{aligned}
 \vec{r}_{(1)} &= (x_1, x_2, x_3) \\
 \vec{r}_{(2)} &= (x_4, x_5, x_6) \\
 \vec{r}_{(3)} &= (x_7, x_8, x_9) \\
 &\dots \\
 \vec{r}_{(N)} &= (x_{3N-2}, x_{3N-1}, x_{3N})
 \end{aligned}
 \tag{2.5}$$

Naprostojeně očíslováme složky sil⁸:

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{(1)} &= (F_1, F_2, F_3) \\
 \vec{F}_{(2)} &= (F_4, F_5, F_6) \\
 &\dots
 \end{aligned}
 \tag{2.6}$$

Podobné značení zavedeme i pro hmotnosti bodů:

$$\begin{aligned}
 m_{(1)} &= m_1 = m_2 = m_3 \\
 m_{(2)} &= m_4 = m_5 = m_6 \\
 &\dots \\
 m_{(N)} &= m_{3N-2} = m_{3N-1} = m_{3N}
 \end{aligned}
 \tag{2.7}$$

Na první pohled to může působit „neekonomicky“ zavádět pro hmotnost jednoho bodu tři různé symboly, ale umožní nám to zapsat například druhý Newtonův zákon velmi jednoduše pro všechny souřadnice:

$$m_i \ddot{x}_i = F_i, \quad i = 1, \dots, 3N. \tag{2.8}$$

⁶ Vyslovujeme [dalambérův].

⁷ Protože vazby jsou holonomní, jsou libovolná virtuální posunutí slučitelná s vazbami **vratná**, proto zde už vratnost virtuálních posunutí už explicitě nezdůrazňujeme.

⁸ Stejně číslování budeme používat pro složky aktivních a vazbových sil.

Formálně můžeme říci, že polohy N hmotných bodů popisujeme jediným $3N$ -rozměrným vektorem:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_{3N}) \quad (2.9)$$

Toto můžeme chápat jako polohu jediného bodu ve $3N$ -rozměrném prostoru⁹. Tomuto prostoru se říká **konfigurační prostor**¹⁰.

Konfigurační prostor samozřejmě v přírodě reálně neexistuje, je to matematická abstrakce. Pohyb soustavy hmotných bodů prostě formálně vyjadřujeme jako pohyb jednoho bodu v $3N$ -rozměrném konfiguračním prostoru. Pokud vám toto vyjadřování připadá příliš nepřírozené, berte to prostě tak, že máme $3N$ souřadnic, které se mění s časem:

$$x_i = x_i(t), \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (2.10)$$

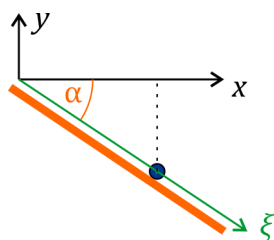
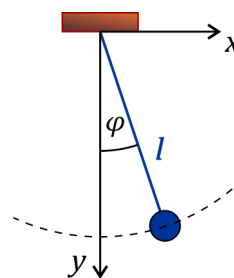
Jak pomocí souřadnic konfiguračního prostoru zapsat d'Alembertův princip, tedy vztah (2.4), který platí při pohybu soustavy hmotných bodů? Jednoduše¹¹:

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(a)} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i = 0. \quad (2.11)$$

Zobecněné souřadnice

Se zobecněnými souřadnicemi jsme se již potkali v příkladu v kapitole 1. Například polohu matematického kyvadla jednoznačně vyjádříme pomocí jediné souřadnice φ , viz obrázek. Známe-li hodnotu φ , jsou kartézské souřadnice dány vztahy¹²

$$\begin{aligned} x &= l \cdot \sin \varphi \\ y &= l \cdot \cos \varphi \\ z &= 0 \end{aligned} \quad (2.12)$$



Dalším příkladem může být pohyb hmotného bodu na nakloněné rovině. V tomto případě může být rozumné měřit polohu bodu měřítkem nataženým podél nakloněné roviny; příslušnou souřadnici označíme třeba ξ , viz obrázek vlevo. Kartézské souřadnice jsou opět hodnotou ξ jednoznačně dány¹³:

$$\begin{aligned} x &= \xi \cdot \cos \alpha \\ y &= -\xi \cdot \sin \alpha \end{aligned} \quad (2.13)$$

Vidíme, že zobecněné souřadnice volíme tak, abychom respektovali vazby. Hodnoty kartézských souřadnic nemohou být libovolné, jsou omezeny vazbami. (Bod například nemůže být „zatlačen“ do nakloněné roviny.) Zobecněné souřadnice naproti tomu mohou mít libovolné hodnoty. (ξ v našem

⁹ Jde přitom o fiktivní bod, nikoli o jeden z hmotných bodů soustavy. Také nám může připadat trochu zvláštní, že tomuto bodu přísluší řada různých hmotností (2.7). Ale jde o formální vyjadřování, a dá se na něj zvyknout.

¹⁰ Konfiguraci soustavy hmotných bodů, tedy polohy všech hmotných bodů v „našem“ třírozměrném prostoru popisujeme polohou jednoho (fiktivního) bodu v konfiguračním prostoru.

¹¹ Složky virtuálního posunutí δx_i číslujeme stejně jako složky polohových vektorů v (2.5)

¹² Kyvadlo kýve v rovině $z = 0$. Místo souřadnic x_1, x_2, x_3 zde prostě píšeme x, y, z .

¹³ Sklon nakloněné roviny je konstantní, $\alpha = \text{konst.}$ Hodnotu z zde nepíšeme, může být např. $z = 0$.

příkladem může být libovolné.) Zobecněných souřadnic je ovšem méně než $3N$ – je jich právě tolik, kolik je **stupňů volnosti** soustavy¹⁴.

Zobecněné souřadnice budeme označovat symboly q_j , index j má hodnoty od 1 do počtu stupňů volnosti r . Kartézské souřadnice jsou jednoznačně určeny hodnotami zobecněných souřadnic a času:

$$x_i = x_i(q_1, q_2, \dots, q_r, t), \quad i = 1, \dots, 3N. \quad (2.14)$$

Konkrétními příklady těchto vztahů (pro jeden stupeň volnosti, tedy $r = 1$) byly (2.12) a (2.13).¹⁶ Zápis (2.14) je ale trochu zdlouhavý, takže často píšeme jen

$$x_i = x_i(q_j, t), \quad i = 1, \dots, 3N, \quad j = 1, \dots, r,$$

případně ani explicitě nepíšeme rozsahy indexů, pokud jsme dohodnuti, že i „běží“ od 1 do $3N$ a j od 1 do r :

$$x_i = x_i(q_j(t), t) \quad (2.15)$$

Zobecněné rychlosti (a několik pomocných vztahů)

Z úvodního kurzu mechaniky jsme zvyklí pracovat s kartézskými složkami rychlostí $v_i = \dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt}$.¹⁷

Ty vystihují, jak rychle se s časem mění souřadnice x_i . Podobně časové derivace souřadnic q_j ,

$\dot{q}_j \equiv \frac{dq_j}{dt}$ vyjadřují rychlost změny *zobecněných souřadnic* s časem. Říkáme jim **zobecněné rychlosti**.

Kartézské složky rychlosti lze vyjádřit pomocí zobecněných rychlostí. Zderivujeme-li (2.15) podle času a použijeme pravidla o derivaci složené funkce více proměnných, dostáváme

$$\dot{x}_i \equiv \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{dq_j}{dt} + \frac{\partial x_i}{\partial t} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t}. \quad (2.16)$$

Přitom parciální derivace na pravé straně (2.16) jsou funkcemi zobecněných souřadnic q_k a času.

Je vidět, že \dot{x}_i závisí na q_k , \dot{q}_k a t .¹⁸

¹⁴ V obou uvedených příkladech byl jen jeden stupeň volnosti, takže jsme měli vždy jen jednu zobecněnou souřadnici. Kdybychom uvažovali nikoli kyvadlo kývající v jedné rovině, ale sférické kyvadlo, potřebovali bychom k určení jeho polohy dvě souřadnice, například sférické souřadnice θ a ϕ .

¹⁵ Při pohybu soustavy se samozřejmě zobecněné souřadnice mění s časem, $q_j = q_j(t)$, takže bychom mohli psát obšírněji $x_i = x_i(q_1(t), q_2(t), \dots, q_r(t), t)$, $i = 1, \dots, 3N$.

¹⁶ V nich nebyly kartézské souřadnice explicitě závislé na čase. Příkladem, kdy by x_i byly explicitě závislé na čase, by bylo matematické kyvadlo, jehož délka závěsu l by se měnila – například nějaký robotický mechanismus by prodlužoval délku závěsu, třeba podle vztahu $l = l_0 + v_0 \cdot t$.

¹⁷ Zde už používáme číslování souřadnic (2.5).

¹⁸ Poznamenejme, že zobecněné souřadnice q_k a zobecněné rychlosti \dot{q}_k jsou vzájemně *nezávislé*. Názorně je to vidět třeba na stále uváděném příkladu kyvadla: nezávisle můžeme nastavit polohu kyvadla, tedy souřadnici φ a nezávisle do kyvadla strčit, tedy zadat úhlovou rychlost $\dot{\varphi}$.

Pro další odvození budeme potřebovat derivaci \dot{x}_i podle zobecněné rychlosti \dot{q}_k . Derivací (2.16) dostaneme¹⁹

$$\frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \delta_{jk} = \frac{\partial x_i}{\partial q_k}.$$

Potřebovat budeme také derivaci \dot{x}_i podle zobecněné souřadnice q_k . Z (2.16) po derivaci plyne²⁰

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} &= \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial q_k} \left(\frac{\partial x_i}{\partial t} \right) = \\ &= \sum_{j=1}^r \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \end{aligned}$$

Odvodili jsme tedy následující pomocná tvrzení:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_k} &= \frac{\partial x_i}{\partial q_k} \\ \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_k} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_k} \right) \end{aligned} \tag{2.17}$$

V d'Alembertově principu budeme potřebovat vyjádřit ještě virtuální posunutí δx_i pomocí (virtuálních) změn zobecněných souřadnic δq_j . Virtuální posunutí bereme jako nekonečně malá, pracujeme s nimi tedy jako s diferenciály. Z (2.15), čili z $x_i = x_i(q_j, t)$, dostaneme diferencováním

$$\delta x_i = \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j. \tag{2.18}$$

Pro další odvození je důležité, že všechny změny δq_j jsou navzájem zcela nezávislé. (Kartézské souřadnice a jejich virtuální posunutí δx_i jsou omezena vazbami, zobecněné souřadnice mohou nabývat libovolných hodnot, takže na δq_j nejsou žádná omezení²².)

¹⁹ Při úpravách využíváme toho, že $\frac{\partial x_i}{\partial q_j}$ ani $\frac{\partial x_i}{\partial t}$ nezávisí na \dot{q}_k a dále toho, že $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = 0$ pro $j \neq k$

(různé složky zobecněných rychlostí jsou vzájemně nezávislé) a $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_j} = 1$, takže $\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial \dot{q}_k} = \delta_{jk}$.

²⁰ Při úpravách zaměňujeme pořadí derivování v druhých parciálních derivacích. (Předpokládáme, že patřičné podmínky jsou zde splněny.) Navíc využíváme toho, že $\frac{\partial x_i}{\partial q_k}$ je funkcí q_j a času t . Napišeme-li $\frac{\partial x_i}{\partial q_k} = f(q_j, t)$,

je totální derivace podle času $\frac{d}{dt} f(q_j, t) = \sum_{j=1}^r \frac{\partial f}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial f}{\partial t}$, což je přesně obrat na druhém řádku odvození.

²¹ Pozor, nemáme zde žádný člen s δt . Je to díky tomu, že virtuální posunutí bereme jako okamžitá, nemění se při nich čas.

²² Až na jejich velikost, výše jsme už zdůrazňovali, že virtuální posunutí bereme jako infinitesimální.

D'Alembertův princip a zobecněné souřadnice

Dosaďme do d'Alembertova principu (2.11) virtuální posunutí (2.18):

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(a)} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \delta x_i = \sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(a)} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \sum_{j=1}^r \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \cdot \delta q_j = \\ &= \sum_{j=1}^r \left\{ \sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(a)} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right\} \cdot \delta q_j \end{aligned} \quad (2.19)$$

Toto musí za pohybu platit pro *libovolná*²³ δq_j . Jediná možnost, jak toho dosáhnout, je, že všechny členy ve složených závorkách v (2.19) jsou rovny nule:

$$\sum_{i=1}^{3N} (F_i^{(a)} - m_i \ddot{x}_i) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = 0, \quad j = 1, \dots, r \quad (2.20)$$

Tenhle obrat byl hrozně důležitý – teď **máme právě tolik rovnic, kolik je stupňů volnosti!**²⁴

Zobecněné síly

Pro další úpravy dáme ve vztahu (2.20) na jednu stranu členy se zrychlením a na druhou síly:

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(a)} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (2.21)$$

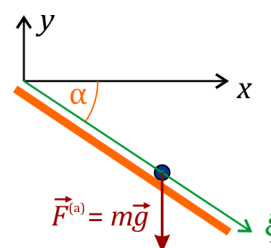
Výraz na pravé straně (2.21) vypadá jako bychom nějak převáděli síly z kartézských do zobecněných souřadnic. Jak za chvíli uvidíme na příkladech, ono to tak opravdu je! Pro pravou stranu (2.21) proto zavedeme speciální označení

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{(a)} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \quad (2.22)$$

a těmto členům budeme říkat **zobecněné síly**.

Podívejme se, co vyjde jako zobecněná síla v konkrétních příkladech diskutovaných výše. Pro bod na nakloněné rovině, podél níž měříme souřadnici ξ vychází²⁶:

$$Q_\xi = F_x^{(a)} \cdot \frac{\partial x}{\partial \xi} + F_y^{(a)} \cdot \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0 \cdot \cos \alpha + (-mg) \cdot (-\sin \alpha) = mg \sin \alpha.$$



Výsledné Q_ξ má rozměr síly – dokážete interpretovat, jaký má fyzikální význam?²⁷

²³ Sice infinitesimální, ale vzájemně zcela nezávislá.

²⁴ Kdybychom měli v kývající se tuhé tyči třeba 10^{25} hmotných bodů, tak napsat pohybové rovnice (druhé Newtonovy zákony) pro všechny body bychom nestihli do konce vesmíru. Kývá-li se tyč v jedné rovině, má jen jeden stupeň volnosti – a nyní máme pro její pohyb jen jedinou rovnici! Ještě ji budeme upravovat, ale už teď je vidět, jak je tento přístup výhodný.

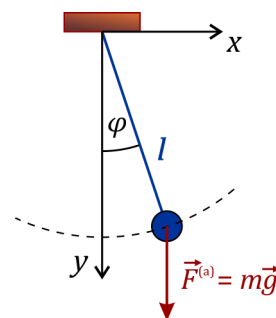
²⁵ Pro jednoduchost už zde explicitě nepíšeme, že vztah platí pro všechna $j = 1, \dots, r$.

²⁶ Kartézské souřadnice jsou dány vztahy (2.13). Odvození si případně rozepište podrobněji, ať se opravdu vyznáte, jak se tady zobecněná síla počítá.

²⁷ Pro ověření vašich úvah: Q_ξ má rozměr síly a směřuje podél nakloněné roviny.

Pozor, zobecněná síla nemusí mít vždy rozměr síly! Například v případě matematického kyvadla vyjde

$$Q_\varphi = F_x^{(a)} \cdot \frac{\partial x}{\partial \varphi} + F_y^{(a)} \cdot \frac{\partial y}{\partial \varphi} = 0 \cdot l \cdot \cos \varphi + mg \cdot (-l \cdot \sin \varphi) = -mg l \cdot \sin \varphi$$



Opět vychází veličina, která má fyzikální význam²⁸.

V případě, že jde o **síly konzervativní**, můžeme zobecněné síly odvodit z potenciální energie V . Víme, že pro „normální“ (aktivní) síly platí $\vec{F} = -\text{grad}V$, ve složkách tedy²⁹

$$F_i = -\frac{\partial V}{\partial x_i} \quad (2.23)$$

Zobecněné síly určíme z (2.22), kam dosadíme (2.23):

$$Q_j = \sum_{i=1}^{3N} F_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \sum_{i=1}^{3N} -\frac{\partial V}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = -\frac{\partial V}{\partial q_j} \quad (2.24)$$

Zobecněné síly tedy z potenciální energie počítáme podobně, jako „normální“ síly (kartézské složky sil), jen místo podle kartézských derivujeme podle zobecněných souřadnic.

„Zlatý hřeb“: odvození Lagrangeových rovnic druhého druhu

Rovnice (2.21) odvozené z d'Alembertova principu můžeme s pomocí zobecněných sil zapsat jako

$$\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.25)$$

Zbývá nám upravit jejich levou stranu. V ní můžeme vyjádřit³⁰:

$$\ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt}(\dot{x}_i) \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right)$$

S použitím výše uvedených pomocných vztahů (2.17) pak postupně dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \cdot \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial x_i}{\partial q_j} \right) = \\ &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d}{dt} \left(\dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Platí ovšem (rozmyslete si, proč), že $\dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial \dot{q}_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} (\dot{x}_i^2)$ a analogicky $\dot{x}_i \cdot \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial q_j} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial q_j} (\dot{x}_i^2)$.

²⁸ Poznali jste, jaký? ἄλλοις ἢ ἑαυτοῖς ο ἄρρ

²⁹ Zde už speciálně v označení nezdůrazňujeme, že jde o aktivní síly.

³⁰ Jde o podobnou úpravu, která se užívá třeba při odvozování integrace per partes.

Po dosazení do (2.26) dostáváme

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} &= \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) \right) - \sum_{i=1}^{3N} m_i \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\frac{1}{2} \dot{x}_i^2 \right) = \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{q}_j} \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \right) - \frac{\partial}{\partial q_j} \left(\sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2 \right) \end{aligned} \quad (2.27)$$

Ovšem výraz ve vnitřní závorce není nic jiného, než celková kinetická energie soustavy hmotných bodů $T = \sum_{i=1}^{3N} \frac{1}{2} m_i \dot{x}_i^2$!!! To znamená, že (2.27) dává $\sum_{i=1}^{3N} m_i \ddot{x}_i \cdot \frac{\partial x_i}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j}$.

Výsledný tvar rovnic (2.25) odvozených z d'Alembertova principu tedy je:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = Q_j \quad (2.28)$$

Toto už fakticky jsou kýžené **Lagrangeovy rovnice druhého druhu**.

Pro případ **konzervativních sil** lze rovnice ještě upravit. Dosadíme za zobecněné síly Q_j ze vztahu

(2.24): $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j}$. Navíc můžeme napsat $Q_j = -\frac{\partial V}{\partial q_j} + \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right)$, protože druhý člen je nulový, neboť potenciální energie V na rychlostech \dot{q}_j nezávisí.³¹ Z rovnic (2.28) tedy dostáváme

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_j} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial V}{\partial q_j}, \text{ což můžeme přepsat jako } \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial (T-V)}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial (T-V)}{\partial q_j} = 0.$$

Ted' už se samo nabízí zavést veličinu

$$L = T - V \quad (2.29)$$

Nazýváme ji **Lagrangeova funkce** nebo jedním slovem **lagrangian**³².

Výsledné rovnice, které jsme odvodili, mají velmi jednoduchý tvar:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \quad (2.30)$$

A právě toto jsou **Lagrangeovy rovnice druhého druhu** pro případ konzervativních sil.

³¹ Poznámka „pro fajnšmekry“: Kupodivu, rovnice, které odvodíme, fungují i ve speciálním případě, kdy je výhodné zavést V , které na rychlosti závisí. Jde o pohyb nabitě částice v magnetickém poli.

³² Vyslovujeme „lagranžian“; lze se setkat i s takto počestěnou psanou podobou.

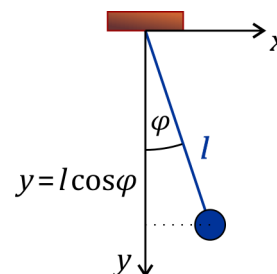
Příklady – aneb k čemu jsou nám Lagrangeovy rovnice dobré

Odvození na předchozích stránkách nebylo nejkratší – ale získali jsme rovnice velmi užitečné. Pojďme se podívat, jak se dají aplikovat na řešení příkladů.

Matematické kyvadlo

Naším cílem je vyřešit pohyb kyvadla s délkou závěsu l . Jako zobecněnou souřadnici zvolíme úhel φ (viz obrázek).

Nejprve musíme sestavit lagrangián. K tomu potřebujeme kinetickou a potenciální energii – a potřebujeme tyto energie vyjádřit pomocí zobecněné souřadnice φ a zobecněné rychlosti $\dot{\varphi}$.



Počítat kinetickou energii přes kartézské složky rychlosti \dot{x} a \dot{y} by bylo zbytečně složité. Půjdeme na to jednodušeji. Hmotný bod se pohybuje po kružnici, takže jeho rychlost je $v = l \cdot \omega = l \cdot \dot{\varphi}$. Kinetická energie je tedy $T = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2$.

Potenciální energii spočteme podle „klasického“ vzorce mgh , kde výška $h = -y = -l\cos\varphi$, takže $V = -mgl\cos\varphi$.

Lagrangián je tedy
$$L = T - V = \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 + mgl\cos\varphi$$

a jeho derivace

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = \frac{d}{d\dot{\varphi}}\left(\frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2\right) = ml^2\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \frac{d}{d\varphi}(mgl\cos\varphi) = -mgl\sin\varphi. \quad (2.31)$$

Lagrangeova rovnice (jen jedna, protože úloha má jen jeden stupeň volnosti) je obecně

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

a po dosazení (2.31) konkrétně:

$$\frac{d}{dt}(ml^2\dot{\varphi}) + mgl\sin\varphi = 0,$$

což po vydělení ml^2 dává

$$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0. \quad (2.32)$$

Tuto rovnici už řešíme známým způsobem: pro malé výchylky je $\sin\varphi \doteq \varphi$, rovnice je tedy $\ddot{\varphi} + \Omega^2\varphi = 0$, kde $\Omega = \sqrt{g/l}$; její řešení je $\varphi = \varphi_{\max} \cdot \cos(\Omega t + \phi)$. Vidíme, že lagrangeovský formalismus za nás rovnici nevyřeší – umožní ji však systematickým způsobem sestavit. Postup je jasný:

1. Zvolit vhodné zobecněné souřadnice
2. Vyjádřit kinetickou energii a potenciální energii pomocí zobecněných souřadnic a rychlostí
3. Sestavit lagrangián (a případně si „bokem“ vypočítat jeho potřebné derivace)
4. Sestavit Lagrangeovy rovnice

Takto budeme počítat i všechny další příklady.

Válec valící se po nakloněné rovině

Kinetickou energii valícího se homogenního válce určíme například pomocí Königovy věty³³ jako $T = \frac{3}{4}mv^2 = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2$. Potenciální energie je $V = mgh$, tedy $V = -mg\xi \sin\alpha$. Lagrangián je

$$L = T - V = \frac{3}{4}m\dot{\xi}^2 + mg\xi \sin\alpha.$$

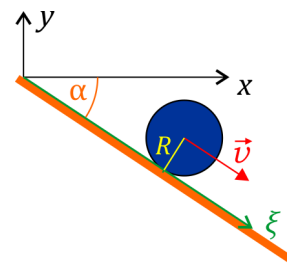
Potřebné parciální derivace jsou $\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}} = \frac{3}{2}m\dot{\xi}$, $\frac{\partial L}{\partial \xi} = mg \sin\alpha$. Lagrangeova rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\xi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \xi} = 0$$

po dosazení dá $\frac{d}{dt}\left(\frac{3}{2}m\dot{\xi}\right) - mg \sin\alpha = 0$, z čehož

$$\ddot{\xi} = \frac{2}{3}g \sin\alpha.$$

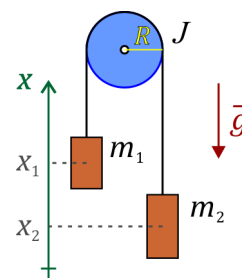
Vyšlo nám zrychlení válce podél nakloněné roviny. Opět stačilo vyjádřit kinetickou energii, potenciální energii, sestavit lagrangián a napsat Lagrangeovy rovnice.



Dvě závaží na kladce

Opět půjde o problém známý už z úvodního kurzu mechaniky. Na pevné kladce s momentem setrvačnosti J a poloměrem R visí na lanku (zanedbatelné hmotnosti) dvě závaží, nalevo hmotnosti m_1 , napravo hmotnosti m_2 . Jak se budou závaží pohybovat?³⁴

Pro souřadnice obou závaží platí $x_2 = -x_1 + \text{konst.}$ ³⁵, místo x_1 budeme dále psát prostě x . Rychlosti obou závaží jsou co do velikosti stejné, $v_1 = v_2 = |\dot{x}|$. Úhlová rychlost kladky je $\omega = \dot{x}/R$. Celková kinetická energie je tedy



$$T = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}J\omega^2 = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + (J/R^2))\dot{x}^2.$$

Potenciální energie je $V = m_1gx_1 + m_2gx_2 = (m_1 - m_2)gx + \text{konst.}$ Lagrangián je

$$L = T - V = \frac{1}{2}(m_1 + m_2 + (J/R^2))\dot{x}^2 - (m_1 - m_2)gx$$

Lagrangeovy rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) - \frac{\partial L}{\partial x} = 0$$

tedy dají

³³ Prosíme laskavého čtenáře, aby si z úvodního kurzu mechaniky připomněl, jak kinetickou energii při valení spočítat.

³⁴ Uvažujeme jen pohyb závaží nahoru a dolů, ne případné kývání do stran. Tento přístroj je znám pod názvem Atwoodův padostroj, používal se k měření tíhového zrychlení.

³⁵ O co první závaží stoupne, o to druhé klesne. Hodnota konstanty závisí na délce lanka, ale vlastně nás nezajímá, protože potenciální energie, níž budeme x_1 a x_2 potřebovat, je určena až na konstantu; v Lagrangeových rovnicích se L derivuje, takže jakákoli aditivní konstanta vypadne.

$$\frac{d}{dt} \left((m_1 + m_1 + (J/R^2)) \dot{x} \right) + (m_1 - m_2)g = 0.$$

Odtud dostaneme pro zrychlení závaží výsledek

$$\ddot{x} = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_1 + (J/R^2)} g.$$

Vidíme, že oproti řešení tohoto problému pomocí druhého Newtonova zákona a druhé věty impulsové (jak se to dělalo v úvodním kurzu klasické mechaniky) je řešení pomocí Lagrangeových rovnic výrazně jednodušší. Nemusíme uvažovat tahy v lanku nalevo a napravo a místo tří rovnic máme rovnou rovnici jedinou.

Z uvedených příkladů je snad vidět, že aplikace Lagrangeových rovnic není nijak složitá a opravdu může řešení úloh dosti zjednodušit. Další řešené příklady lze najít v elektronické sbírce fyzikálních úloh³⁶. Uvedeme proto už jen jeden příklad, na němž ukážeme řešení problému s více stupni volnosti.

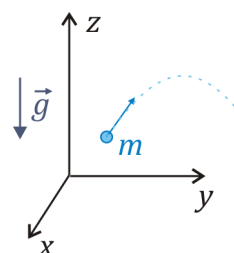
Šikmý vrh

V obou výše uvedených příkladech šlo o pohyby s jediným stupněm volnosti, dostávali jsme tedy jedinou Lagrangeovu rovnici. Pro ukázkou případu s více stupni volnosti, spočteme Lagrangeovy rovnice pro šikmý vrh v homogenním tíhovém poli. Půjde tedy o příklad velmi jednoduchý, jehož výsledek samozřejmě známe³⁷.

Za zobecněné souřadnice zvolíme v tomto případě kartézské souřadnice x, y, z , viz obrázek. Složky rychlosti jsou $\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}$, kinetická energie je tedy

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2).$$

Potenciální energii určíme podle známého vztahu mgh , tedy $V = mgz$, čili lagrangián je



$$L = T - V = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - mgz. \quad (2.33)$$

Lagrangeovy rovnice jsou obecně³⁸

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0, \\ \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} \right) - \frac{\partial L}{\partial z} &= 0. \end{aligned} \quad (2.34)$$

³⁶ <http://fyzikalniulohy.cz/index.php?predmet=14>

³⁷ Z úvodního kurzu mechaniky nebo už ze střední školy ho umíme vyřešit elementárně. Uvidíme, že Lagrangeovy rovnice přirozeně dají stejný výsledek.

³⁸ Úloha má tři stupně volnosti, máme tedy tři rovnice.

Derivace lagrangiánu (2.33) jsou $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x}$, $\frac{\partial L}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m\dot{y}$, $\frac{\partial L}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m\dot{z}$, $\frac{\partial L}{\partial z} = -mg$.

Rovnice (2.34) dají po dosazení

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(m\dot{x}) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{y}) &= 0, \\ \frac{d}{dt}(m\dot{z}) + mg &= 0,\end{aligned}$$

čili

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= 0, \\ \ddot{y} &= 0, \\ \ddot{z} &= -g.\end{aligned}\tag{2.35}$$

Fyzikální význam získaných vztahů je jasný: zrychlení ve vodorovných směrech je nulové, svislá složka zrychlení má velikost g a míří dolů (proti směru osy z). Řešit už rovnice (2.35) musíme sami, to za nás formalismus neudělá³⁹.

Poznamenejme, že řešit šikmý vrh Lagrangeovými rovnicemi je opravdu jako jít „s kanónem na vrabce“. Šlo opravdu jen o ilustraci a reálně by nikdo Lagrangeovy rovnice pro takto jednoduchý příklad nepoužil.⁴⁰ Lagrangeovy rovnice nám výhodně poslouží ve složitějších situacích, kde by výpočet užívající sil a druhého Newtonova zákona byl výrazně komplikovanější.

³⁹ Řešení je ovšem jednoduché: $x = v_{0x}t + x_0$, $y = v_{0y}t + y_0$, $z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t + z_0$; opravdu vyjdou známé vztahy pro šikmý vrh.

⁴⁰ Souhlasím, výpočet přímo z druhého Newtonova zákona je jednodušší a kratší.