Lagrangeovy rovnice prvního druhu

Jestliže existují Lagrangeovy rovnice *druhého druhu*, budí to silné podezření, že zřejmě existují i Lagrangeovy rovnice *prvního druhu*. Seznámíme se s nimi jen stručně a spíše pro úplnost. Někdy se však i tyto rovnice hodí – zejména v případě, kdy potřebujeme určit vazbové síly. V Lagrangeových rovnicích prvního druhu totiž vazbové síly explicite vystupují.

Vazbové podmínky a síly v kartézských souřadnicích – jedna vazba

Potřebujeme napsat rovnice pro pohyb soustavy N hmotných bodů podrobených vazbám. Budeme uvažovat vazby holonomní skleronomní.

Polohu hmotných bodů popisuje 3 N kartézských souřadnic x_i, $i = 1, \dots 3N$. Uvažujme nejprve jen jednu vazbu. Její rovnici budeme psát:

$$G(x_1, \dots, x_{3N}) = 0 \quad ^1 \qquad (3.1)$$

Hmotné body se mohou pohybovat do takových směrů, že podmínka (3.1) zůstává zachována. I pro polohy bodů po posunutí tedy musí platit $G(x_1 + \mathrm{d}x_1, \dots, x_{3N} + \mathrm{d}x_{3N}) = 0$. Kombinací s (3.1) dostaneme vztah, který musí platit pro všechna posunutí $\mathrm{d}x_i$ slučitelná s vazbami[2]:

$$G(x_1 + \mathrm{d}x_1, \dots, x_{3N} + \mathrm{d}x_{3N}) - G(x_1, \dots, x_{3N}) = \mathrm{d}G(x_i) = \sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0 \,. \qquad (3.2)$$

Pro vazbové síly $F_i^{(\mathrm{v})}$ platí (také pro libovolná posunutí $\mathrm{d}x_i$ slučitelná s vazbami)[3] :

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\mathrm{v})} \cdot \mathrm{d}x_i = 0 \,. \qquad (3.3)$$

Vztah (3.3) určuje směr vazbových sil. [4] Porovnáním s (3.2) vidíme, že podmínka (3.3) na směr vazbových sil je určitě splněna, když

$$F_i^{(\mathrm{v})} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \,. \qquad (3.4)$$

Faktor λ zde ovlivňuje velikost síly, nikoli její směr. [5]

Celková síla působící na jednotlivé hmotné body je dána součtem aktivních sil F_i a vazbových sil (3.4). Druhý Newtonův zákon, čili pohybovou rovnici pro pohyb bodů soustavy, tedy můžeme zapsat jako:

$$m_i \, \ddot{x}_i = F_i + \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \,, \quad i = 1, \dots, 3N \,. \qquad (3.5)$$

Rovnice (3.5) spolu s rovnicí (3.1) již jsou Lagrangeovými rovnicemi prvního druhu pro soustavu hmotných bodů (s jednou vazbou).

---

[1] Příkladem pro pohyb matematického kyvadla je rovnice $x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

[2] Posunutí $\mathrm{d}x_i$ zde bereme jako nekonečně malá, pracujeme s nimi proto jako s diferenciály.

[3] Viz odvození zobecněného principu virtuální práce v kapitole 1.

[4] V jednoduchých situacích, např. když je hmotný bod vázán na plochu, to jednoduše znamená, že vazbová síla je kolmá na danou plochu.

[5] Zvídavý čtenář by mohl namítat, že jsme zatím dokázali jen to, že (3.4) splňuje podmínku (3.3) – nemůže ale této podmínce vyhovovat i nějaká jiná vazbová síla? Jinak řečeno, dokázali jsme, že (3.4) je pro (3.3) podmínkou postačující. Je ale i podmínkou nutnou? Je tomu opravdu tak – důkaz můžete najít v Dodatku A.

Více vazeb

Jak je tomu pro více vazeb? Místo jediné rovnice (3.1) máme s rovnic $G_k(x_1, \dots, x_{3N}) = 0,\ k = 1, \dots, s$. [6]

Vazbové síly jsou součtem sil od všech vazeb, takže $F_i^{(v)} = \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_i}$. Druhý Newtonův zákon pak dá

$$\boxed{m_i \ddot{x}_i = F_i + \sum_{k=1}^{s} \lambda_k \frac{\partial G_k}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, 3N} \tag{3.6}$$

Máme tedy $3N$ rovnic pro $3N+s$ neznámých $x_i(t), \lambda_k(t)$. Potřebujeme tedy ještě s rovnic. To jsou právě rovnice vazeb

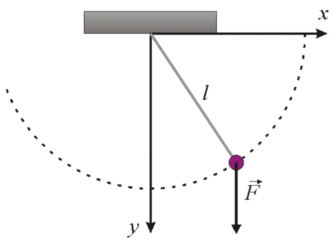
$$\boxed{G_k(x_1, \dots, x_{3N}) = 0, \quad k = 1, \dots, s} \tag{3.7}$$

Rovnice (3.6) a (3.7) jsou kýžené ***Lagrangeovy rovnice prvního druhu***.

Oproti Lagrangeovým rovnicím druhého druhu je jich výrazně víc ($3N+s$), ale zato z nich můžeme určit vazbové síly.

Příklad

Lagrangeovy rovnice prvního druhu pro matematické kyvadlo



Vazba je vyjádřena podmínkou $G(x, y) = x^2 + y^2 - l^2 = 0$.

Derivace G podle x a y jsou: $\frac{\partial G}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial G}{\partial y} = 2y$. Aktivní síla (tíhová) působící na kyvadlo, má složky $F_x = 0,\quad F_y = mg$. Lagrangeovy rovnice 1. druhu pro kyvadlo tedy mají tvar

$$m\ddot{x} = \lambda\, 2x\,, \tag{3.8}$$

$$m\ddot{y} = \lambda\, 2y + mg\,, \tag{3.9}$$

$$x^2 + y^2 - l^2 = 0\,. \tag{3.10}$$

Jak z nich vypočítat vazbovou sílu? Stačí určit hodnotu λ. Ukážeme zde (ne úplně krátký) postup, jak z rovnic (3.8), (3.9) a (3.10) hodnotu λ určit.

Když derivujeme (3.10) podle t, získáme $2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$. Derivujeme-li tento vztah ještě jednou, dostaneme (po zkrácení 2) $\dot{x}^2 + x\ddot{x} + \dot{y}^2 + y\ddot{y} = 0$. Odtud je

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} = -(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)\,. \tag{3.11}$$

Když (3.8) násobíme x a (3.9) y a výsledné vztahy sečteme, dostaneme

$$m(x\ddot{x} + y\ddot{y}) = \lambda\, 2(x^2 + y^2) + mgy = \lambda\, 2l^2 + mgy\,.$$ [7]

---

[6] V předchozí kapitole jsme hodně užívali počet stupňů volnosti r. Je-li počet vazeb roven s, platí $s + r = 3N$.

[7] Vypočteme-li odsud λ a z něj pak složky vazbových sil, lze ukázat, že velikost vazbové síly – tedy tahu ve vlákně závěsu – je rovna součtu průmětu tíhové síly do směru vlákna a dostředivé síle, která zakřivuje pohyb hmotného bodu.

Dosazením ze vztahu (3.11) pak je

$$-m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=\lambda\, 2l^2+mgy\,. \tag{3.12}$$

Násobíme-li (3.8) $\dot{x}$ a (3.9) $\dot{y}$ a výsledné vztahy sečteme, dostáváme po úpravách (s využitím toho, že $x^2+y^2=l^2=\text{konst.}$):

$$m\left(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}\right)=\lambda\, 2(x\dot{x}+y\dot{y})+mg\dot{y}=\lambda\frac{d(x^2+y^2)}{dt}+mg\dot{y}=mg\frac{dy}{dt}\,. \tag{3.13}$$

Levou stranu (3.13) lze upravit jako $m\left(\dot{x}\ddot{x}+\dot{y}\ddot{y}\right)=\frac{1}{2}m\frac{d(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{dt}$, takže z (3.13) plyne

$$\tfrac{1}{2}m\frac{d(\dot{x}^2+\dot{y}^2)}{dt}=mg\frac{dy}{dt}\;\Rightarrow\;\frac{d}{dt}\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2-2gy\right)=0\;\Rightarrow\;\dot{x}^2+\dot{y}^2=2gy+C\,, \tag{3.14}$$

kde C je konstanta, kterou můžeme určit z počátečních podmínek. (Uvědomte si, že (3.14) vlastně vyjadřuje zákon zachování energie.)

Kombinací výsledku (3.14) a (3.12) nakonec dostáváme

$$\lambda\, 2l^2+mgy=-m\left(\dot{x}^2+\dot{y}^2\right)=-2mgy-mC$$

a odtud

$$\lambda=-\frac{3}{2}\frac{mgy}{l^2}-\frac{mC}{2l^2}\,. \tag{3.15}$$

Vektor vazbové síly pak je

$$\vec{F}^{(\text{v})}=\left(2\lambda x\,,2\lambda y\right).$$ [8]

Poznamenejme ještě, že pokud bychom chtěli pomocí Lagrangeových rovnic 1. druhu *řešit* pohyb matematického kyvadla, museli bychom (3.15) dosadit do (3.8) a (3.9) a tyto rovnice pak řešit.

Závěrečná poznámka

Vidíme, že celý postup je poměrně zdlouhavý, takže pokud nepotřebujeme určovat vazbové síly, dáme zřejmě přednost řešit pohyb pomocí Lagrangeových rovnic *druhého* druhu.

Na druhou stranu, v případě Lagrangeových rovnic prvního druhu nemusíme uvažovat, jak vhodně zvolit zobecněné souřadnice (užíváme jen kartézské), takže tento postup může být vhodný pro výpočet pohybu soustav hmotných bodů s vazbami pomocí počítače.[9]

[8] Můžeme si zkontrolovat, že v případě kyvadla, které nekývá a visí kolmo dolů, plyne z (3.14) $C=-2gy$, z čehož po dosazení do (3.15) je $\lambda=-\frac{1}{2}\frac{mgy}{l^2}$ a protože v daném případě $y=l$, vyjde pro y-ovou složku vazbové síly $F_y^{(\text{v})}=2\lambda y=-mgy^2/l^2=-mg$, což je očekávaný výsledek.

[9] Poznamenejme ovšem, že numerický výpočet soustavy rovnic, z nichž některé jsou diferenciální a některé algebraické (vazbové podmínky, např. (3.10)) také není úplně jednoduchou záležitostí.

Dodatek A. Poznámka pro zvídavé: Jednoznačnost určení vazbových sil.

Zabývejme se pro jednoduchost opět jen případem jedné vazby $G(x_1, \dots, x_{3N}) = 0$. Výše jsme odvodili, že vazbové síly definované vztahem (3.4):

$$F_i^{(\mathrm{v})} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \tag{3.16}$$

vyhovují podmínce (3.3), tj.

$$\sum_{i=1}^{3N} F_i^{(\mathrm{v})} \cdot \mathrm{d}x_i = 0 \ , \tag{3.17}$$

kde dx_i jsou libovolná posunutí slučitelná s vazbami.

Zvídavý čtenář či čtenářka by ale mohli namítat, že jsme dosud nedokázali ***jednoznačnost*** směru vazbových sil.[10] Nemohla by podmínce (3.17) vyhovovat i nějaká jiná vazbová síla, tj. síla mířící poněkud jiným směrem?

Jiná síla – ta, která by byla odlišná od (3.16) – by musela mít tvar

$$\tilde{F}_i^{(\mathrm{v})} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} + F_i^{\perp} \ , \tag{3.18}$$

kde $F_i^{\perp}$ je síla kolmá na směr daný (3.16)[11]. Kolmost znamená, že jejich skalární součin je roven nule:

$$\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot F_i^{\perp} = 0 \ . \tag{3.19}$$

Zvolme nyní posunutí dx_i právě ve směru $F_i^{\perp}$,

$$\mathrm{d}x_i = k F_i^{\perp} \ , \tag{3.20}$$

kde k je nějaká nenulová konstanta[12]. Snadno lze ověřit[13], že tato posunutí splňují (3.2), tj. $\sum_{i=1}^{3N} \frac{\partial G}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i = 0$.

To znamená, že posunutí (3.20) jsou slučitelná s vazbami.

Mají-li $\tilde{F}_i^{(\mathrm{v})}$ být vazbovými silami, musí splňovat(3.17), tj. musí platit

$$\sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i^{(\mathrm{v})} \cdot \mathrm{d}x_i = 0 \ . \tag{3.21}$$

Dosadíme-li sem (3.18) a (3.20), dostaneme

$$0 = \sum_{i=1}^{3N} \tilde{F}_i^{(\mathrm{v})} \cdot \mathrm{d}x_i = \lambda \sum_{i=1}^{3N} \left(\frac{\partial G}{\partial x_i} + F_i^{\perp} \right) \cdot \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{3N} \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i} \cdot \mathrm{d}x_i + \sum_{i=1}^{3N} F_i^{\perp} \cdot \mathrm{d}x_i = \sum_{i=1}^{3N} F_i^{\perp} \cdot \left(k F_i^{\perp} \right) = k \sum_{i=1}^{3N} \left(F_i^{\perp} \right)^2 \ . \tag{3.22}$$

Odtud plyne, že musí být $F_i^{\perp} = 0$ (pro všechna i), takže $\tilde{F}_i^{(\mathrm{v})} = F_i^{(\mathrm{v})} = \lambda \frac{\partial G}{\partial x_i}$, tudíž vztah (3.16) (tj. (3.4)) určuje směr vazbových sil opravdu jednoznačně. Jediné, co pak pro jednoznačné určení vazbových sil potřebujeme určit, je multiplikativní konstanta λ.

---

[10] V určení vazbové síly je samozřejmě nejednoznačnost daná neznámou konstantou λ; ta má ale vliv na velikost vazbové síly, ne na její směr.

[11] Rozmyslete si, že je tomu opravdu tak. (Aby síla byla jiná, musíme k (3.16) přičíst člen lineárně nezávislý na (3.16) – a ten lze rozložit na část ve směru (3.16) a na část ve směru kolmém.)

[12] Aby dx_i bylo infinitesimální, je k samozřejmě také infinitesimální, ale to nijak neovlivní další úvahy.

[13] Dosaďte (3.20) do (3.2) a využijte (3.19).