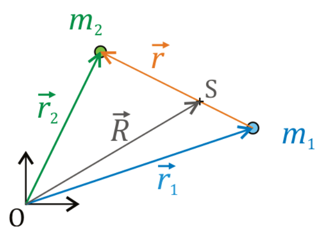
Pohyb v poli centrální síly

Pohyb hmotného bodu v poli centrální síly se řeší již v úvodním kurzu klasické mechaniky. (Tento problém bývá označován jako *Keplerova úloha*.) Vychází se přitom ze zákonů zachování momentu hybnosti a energie; řešení vede na integrál, jehož výpočet chvíli trvá. Zde si ukážeme, jak pomocí Lagrangeových rovnic dospět k tzv. Binetovu vzorci, jehož řešení už bude velmi jednoduché.

Znalost pohybu hmotného bodu v poli centrální síly umožňuje vyřešit i pohyb dvou hmotných bodů, které se přitahují (nebo odpuzují), tedy tzv. *problém dvou těles*. I ten už známe z úvodního kurzu. To, že pohyb dvou hmotných bodů lze převést na pohyb jednoho bodu v poli centrální síly, však jasně plyne i z Lagrangeových rovnic 2. druhu. A právě tím začneme.

Problém dvou těles

Uvažujme dva hmotné body o hmotnostech m_1, m_2, které se navzájem přitahují nebo odpuzují centrálními silami[1]. Polohy těchto bodů jsou určeny polohovými vektory $\vec{r}_1$, $\vec{r}_2$, viz obrázek.



Pro další odvození budeme potřebovat polohu hmotného středu těchto bodů

$$\vec{R} = \frac{m_1 \vec{r}_1 + m_2 \vec{r}_2}{m_1 + m_2} \tag{5.1}$$

a polohu vektoru, který oba body spojuje,

$$\vec{r} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 \ . \tag{5.2}$$

Z (5.1) a (5.2) můžeme zpětně vypočítat

$$\vec{r}_1 = \vec{R} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\vec{r} \ , \quad \vec{r}_2 = \vec{R} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\vec{r} \ . \tag{5.3}$$

Zderivujeme-li (5.3) podle času, dostaneme analogické vztahy pro rychlosti obou bodů:

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} - \frac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} \ , \quad \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} + \frac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{r}} \ . \tag{5.4}$$

Kinetická energie naší soustavy je

$$T = \tfrac{1}{2} m_1 \left|\dot{\vec{r}}_1\right|^2 + \tfrac{1}{2} m_2 \left|\dot{\vec{r}}_2\right|^2 \ , \tag{5.5}$$

což po dosazení (5.4) a úpravách[2] dá

$$T = \tfrac{1}{2}\left(m_1 + m_2\right)\left|\dot{\vec{R}}\right|^2 + \tfrac{1}{2}\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 \ . \tag{5.6}$$

Bývá zvykem označit

[1] Například se přitahují gravitačně. Může jít třeba o dvojhvězdu nebo o soustavu Země – Měsíc (když zanedbáme působení všech ostatních těles). Nebo může jít o elektrostatické síly, třeba mezi dvěma nabitými kuličkami. (V následující kapitole budeme řešit pohyb jádra hélia nalétajícího na jádro zlata, tedy tzv. Rutherfordův rozptyl.)

[2] Z (5.4) plyne $\left|\dot{\vec{r}}_1\right|^2 = \dot{\vec{r}}_1 \cdot \dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} - 2\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \left(\tfrac{m_2}{m_1+m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$ a $\left|\dot{\vec{r}}_2\right|^2 = \dot{\vec{r}}_2 \cdot \dot{\vec{r}}_2 = \dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{R}} + 2\tfrac{m_1}{m_1+m_2}\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}} + \left(\tfrac{m_1}{m_1+m_2}\right)^2 \dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}$,

členy obsahující $\dot{\vec{R}} \cdot \dot{\vec{r}}$ v součtu vypadnou, pak už je úprava snadná.

$$m_1 + m_2 = M\,, \quad \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = \mu\,. \tag{5.7}$$

M je celková hmotnost soustavy, μ je *redukovaná hmotnost*[3]. Výsledný vztah pro kinetickou energii,

$$T = \tfrac{1}{2} M \left|\dot{\vec{R}}\right|^2 + \tfrac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2\,, \tag{5.8}$$

vypadá, jako by šlo o pohyb dvou *jiných* hmotných bodů: jednoho s hmotností M, jehož polohu určuje vektor $\vec{R}$ a druhého s hmotností μ, jehož polohu určuje vektor $\vec{r}$.

Potenciální energie je závislá jen na vzdálenosti obou bodů $r = \left|\vec{r}\right|$, $V = V(r)$. Lagrangián je tedy

$$L = T - V = \tfrac{1}{2} M \left|\dot{\vec{R}}\right|^2 + \tfrac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - V(r). \tag{5.9}$$

Vidíme, že lagrangián se rozpadá na dvě nezávislé části – opravdu jako by šlo o pohyb dvou zcela nezávislých bodů o hmotnostech M, a μ.

Označíme-li složky vektoru hmotného středu $\vec{R} = (X, Y, Z)$, je první část lagrangiánu $L^{(S)} = \tfrac{1}{2} M\left(\dot{X}^2 + \dot{Y}^2 + \dot{Z}^2\right)$ a příslušné Lagrangeovy rovnice 2. druhu dají $\dot{X} = \text{konst.}$, $\dot{Y} = \text{konst.}, \ldots$ Jde tedy o pohyb rovnoměrný přímočarý a můžeme psát:

$$\vec{R} = \vec{R}_0 + \vec{v}_0\, t\,, \tag{5.10}$$

kde $\vec{R}_0$ a $\vec{v}_0$ jsou určeny počátečními podmínkami. Rozmyslete si, jaký má tento výsledek fyzikální význam.[4]

Polovinu problému máme tedy vyřešenou![5] Spočteme-li, jak se s časem vyvíjí vektor $\vec{r} = \vec{r}(t)$, pak pohyb původních dvou hmotných bodů už jednoduše určíme ze vztahů (5.3). Problém pohybu soustavy dvou hmotných bodů (tedy problém dvou těles) jsme převedli na problém pohybu hmotného středu (a ten je jednoduše dán vztahem (5.10)) a pohybu hmotného bodu o hmotnosti μ, který je charakterizován lagrangiánem (viz (5.9))

$$\tilde{L} = \tfrac{1}{2}\mu\left|\dot{\vec{r}}\right|^2 - V(r). \tag{5.11}$$

Tento lagrangián popisuje pohyb hmotného bodu o hmotnosti μ v poli centrální síly (kdy silové centrum je nehybné), přitom $V(r)$ je potenciální energie tohoto bodu v daném poli.

Poznamenejme, že v případě gravitačního přitahování je (viz (5.7))

$$V = -\kappa\frac{m_1 m_2}{r} = -\kappa\frac{M\mu}{r}\,.^{6} \tag{5.12}$$

V případě dvou nabitých bodů s náboji q a Q je

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r}\,. \tag{5.13}$$

---

[3] Stejně byla zavedena v úvodním kurzu klasické mechaniky.

[4] Jde o pohyb hmotného středu izolované soustavy hmotných bodů. Hmotný střed takové soustavy se musí pohybovat rovnoměrně přímočaře v důsledku zákona zachování hybnosti.

[5] Tu lehčí…

[6] Opravdu to tedy vypadá, jako by se jeden hmotný bod o hmotnosti μ pohyboval v gravitačním poli nehybného centra o hmotnosti M.

Hmotný bod v poli centrální síly: lagrangián ve sférických souřadnicích

Lagrangeovy rovnice pro lagrangián (5.11) budeme zapisovat ve sférických souřadnicích r, θ a φ [7]. Podstatné je rozepsat rychlost hmotného bodu pomocí zobecněných rychlostí $\dot{r}, \dot{\theta}$ a $\dot{\varphi}$. Nejjednodušší je rozložit vektor rychlosti $\vec{v} = \dot{\vec{r}}$ do kolmých směrů podél „souřadnicových čar“[8],

$$\vec{v} = \dot{r}\,\vec{e}_r + r\,\dot{\theta}\,\vec{e}_\theta + r\sin(\theta)\dot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi \,. \tag{5.14}$$

Velikost rychlosti na druhou odtud je[9]

$$v^2 = \dot{r}^2 + \left(r\,\dot{\theta}\right)^2 + \left(r\sin(\theta)\,\dot{\varphi}\right)^2. \tag{5.15}$$

Po dosazení do (5.11) dostáváme lagrangián[10] ve tvaru

$$\boxed{L = \tfrac{1}{2}\,\mu\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2\right) - V(r)} \tag{5.16}$$

Lagrangeovy rovnice a jejich řešení

Pohyb hmotného bodu je dán soustavou tří Lagrangeových rovnic

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}\right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \theta} = 0$$
$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}}\right) - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0$$

Po dosazení příslušných derivací[11] dostaneme konkrétní podobu rovnic:

---

[7] Mohli bychom je samozřejmě zapsat i v kartézských souřadnicích, ale pak bychom s jejich řešením zcela jistě „nehnuli“. Šlo by totiž o soustavu tří provázaných diferenciálních rovnic; stačí si uvědomit, že v každé z rovnic by se objevily derivace členu $V(r) = V\left(\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)$. Sférické souřadnice nám situaci výrazně zjednoduší.

V Lagrangeových rovnicích druhého druhu jsme ostatně zvyklí pracovat se zobecněnými souřadnicemi – teď prostě za zobecněné souřadnice vezmeme r, θ a φ.

[8] Dobře se to dá představit na zeměkouli nebo na globusu: $\vec{e}_r$ je jednotkový vektor kolmý k povrchu Země (tj. vektor v radiálním směru), $\vec{e}_\theta$ jednotkový vektor ve směru poledníku, $\vec{e}_\varphi$ jednotkový vektor ve směru rovnoběžky. Rychlost v radiálním směru je $\dot{r}$ (je rovna časové změně souřadnice r), rychlost ve směru poledníku je $r\,\dot{\theta}$ (jde o pohyb po kružnici poloměru r, úhlová rychlost je $\dot{\theta}$), rychlost ve směru rovnoběžky je $r\sin(\theta)\dot{\varphi}$ (opět jde o pohyb po kružnici, tentokrát poloměru $r\sin\theta$, úhlová rychlost je $\dot{\varphi}$).

[9] Stejný výsledek bychom dostali, kdybychom derivovali podle času vztahy pro přepočet sférických souřadnic na kartézské ($x = r\sin\theta\cos\varphi$ apod.) a sečetli $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$. Jednou za život by si člověk měl tento výpočet zkusit, je to ale poněkud zdlouhavé… Rozklad do směrů, v nichž rostou souřadnice r, θ a φ je opravdu podstatně jednodušší a když si ho člověk rozmyslí, dá se udělat v podstatě „z hlavy“.

[10] Symbol vlnky nad L, který jsme psali v (5.11), si už odpustíme.

[11] Z (5.16) je $\partial L/\partial\dot{r} = \mu\dot{r}$, $\partial L/\partial r = \mu\left(r\,\dot{\theta}^2 + r\,\sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2\right) - dV/dr$, $\partial L/\partial\dot{\theta} = \mu r^2\dot{\theta}$, $\partial L/\partial\theta = \mu\, r^2\sin\theta\cos\theta\ \dot{\varphi}^2$, $\partial L/\partial\dot{\varphi} = \mu\, r^2\sin^2\theta\ \dot{\varphi}$ a $\partial L/\partial\varphi = 0$.

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r}\right) - \mu r\dot{\theta}^2 - \mu r \sin^2\theta\ \dot{\varphi}^2 + \frac{dV}{dr} = 0\ , \tag{5.17}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2\dot{\theta}\right) - \mu r^2 \sin\theta \cos\theta\ \dot{\varphi}^2 = 0\ , \tag{5.18}$$

$$\frac{d}{dt}\left(\mu r^2 \sin^2\theta\ \dot{\varphi}\right) = 0\ . \tag{5.19}$$

■ Nejjednodušší je poslední rovnice, (5.19). Z ní okamžitě plyne

$$\mu r^2 \sin^2\theta\ \dot{\varphi} = \text{ konst. } \overset{\text{ozn.}}{=} l\ , \tag{5.20}$$

čili

$$\boxed{\dot{\varphi} = \frac{l}{\mu r^2 \sin^2\theta}} \tag{5.21}$$

Poznamenejme, že (5.20) má i jasný fyzikální význam – zkuste si rozmyslet, jaký.[12]

■ Co s rovnicí (5.18)? Vypadá složitě a složité by zřejmě bylo i její obecné řešení. Naštěstí rovnici není nutno řešit ve zcela obecném případě. Je jasné, že pohyb bude ***rovinný***.[13] A tuto rovinu si můžeme zvolit. V našem případě bude nejjednodušší říci, že bod obíhá v „rovníkové rovině“, tedy v rovině[14]

$$\boxed{\theta = \frac{\pi}{2}.} \tag{5.22}$$

V tomto případě je $\sin\theta = 1$, $\cos\theta = 0$ a $\dot{\theta} = 0$, takže rovnice (5.18) je splněna identicky.[15]

■ Zbývá nám vyřešit už jen rovnici (5.17). Po dosazení (5.21) a (5.22) z ní dostáváme

$$\frac{d}{dt}\left(\mu\dot{r}\right) - \mu r\left(\frac{l}{\mu r^2}\right)^2 + \frac{dV}{dr} = 0\ . \tag{5.23}$$

Jde už o obyčejnou diferenciální rovnici, nezávisle proměnnou je čas. [16] Kdybychom tuto rovnici uměli vyřešit, dosadili bychom výsledné $r(t)$ do (5.21) a integrací určili $\varphi(t)$. Bohužel, rovnici (5.23) jednoduše analyticky řešit neumíme.

Můžeme ale něco jiného: spočítat **tvar trajektorie**.

---

[12] Pokud jsou r a θ konstantní, jde o pohyb po kružnici s poloměrem $r \sin\theta$, rychlost pohybu je $r\sin\theta\dot{\varphi}$.
Z toho je vidět, že l je rovno momentu hybnosti (rozmyslete si, že to je pravda) – a z úvodního kurzu klasické mechaniky už víme, že v centrálním silovém poli se moment hybnosti zachovává. Obecně je l z-ovou složkou momentu hybnosti.

[13] Plyne to ze sférické symetrie problému. (Jednoduše řečeno, obíhající hmotný bod „nemá žádný důvod“, aby uhnul z roviny oběhu.) Tento výsledek také známe z úvodního kurzu klasické mechaniky, kde se dokazuje ze zákona zachování momentu hybnosti.

[14] Můžeme to říci i obráceně: Soustavu souřadnic natočíme tak, aby rovina $\theta = \pi/2$ splývala s rovinou oběhu. Z tohoto vyjádření je vidět, že naše volba je „bez újmy na obecnosti“.

[15] Hurá!

[16] Derivaci dV/dr v konkrétních případech před řešením rovnice prostě vypočteme z $V = V(r)$, např. z (5.12) nebo (5.13).

Od časové závislosti k tvaru trajektorie

Tvar trajektorie je dán závislostí $r = r(\varphi)$. Abychom z (5.23) dostali rovnici pro tvar trajektorie, vyjádříme derivaci podle času pomocí derivace podle φ. Platí $\frac{d}{dt} = \frac{d\varphi}{dt}\frac{d}{d\varphi}$, tedy s využitím (5.21) a (5.22):

$$\frac{d}{dt} = \dot{\varphi}\frac{d}{d\varphi} = \frac{l}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi} . \tag{5.24}$$

Rovnici (5.23) nejprve upravíme na

$$\mu\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr} .$$

Když nyní do levé strany dosadíme za časové derivace (5.24), dostaneme rovnici pro tvar trajektorie:

$$\frac{l^2}{\mu r^2}\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{r^2}\frac{dr}{d\varphi}\right) - \frac{l^2}{\mu r^3} = -\frac{dV}{dr} . \tag{5.25}$$ [17]

Binetův vzorec

Teď nám pomůže překvapivý obrat: Místo závisle proměnné *r* budeme užívat proměnnou

$$u = \frac{1}{r} . \tag{5.26}$$

Je tedy $r = \frac{1}{u}$, odtud $\frac{dr}{d\varphi} = \frac{d}{d\varphi}\left(\frac{1}{u}\right) = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\varphi} = -r^2\frac{du}{d\varphi}$. Navíc $\frac{dV}{dr} = \frac{du}{dr}\frac{dV}{du} = -\frac{1}{r^2}\frac{dV}{du}$. Po dosazení do (5.25) dostáváme

$$-\frac{l^2}{\mu r^2}\left(\frac{d}{d\varphi}\left(\frac{du}{d\varphi}\right) + \frac{1}{r}\right) = \frac{1}{r^2}\frac{dV}{du}$$

a odtud po úpravě konečně

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{dV}{du}.} \tag{5.27}$$

Tento vztah se nazývá ***Binetův vzorec***.[18]

Použití Binetova vzorce v případě $V = k/r$

Ve velmi důležitém případě, kdy potenciální energie je nepřímo úměrná vzdálenosti[19],

$$V = \frac{k}{r}, \tag{5.28}$$

je řešení (5.27) překvapivě jednoduché. Je totiž $\frac{dV}{du} = \frac{d}{du}\left(\frac{k}{r}\right) = \frac{d}{du}(ku) = k$, takže (5.27) dá

[17] Tohle vypadá snad ještě složitěji než (5.23), že? Neděste se, za malou chvíli se to výrazně zjednoduší.
[18] Někdy se též při jeho zápisu používá čárka jako symbol derivace podle φ, takže Binetův vzorec má pak tvar $u'' + u = -\frac{\mu}{l^2}\frac{dV}{du}$.
[19] Viz vztahy (5.12) a (5.13) pro gravitační přitahování a elektrostatickou interakci.

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = -\frac{\mu}{l^2}k\,.} \tag{5.29}$$

Konkrétně pro případ gravitačního přitahování, viz (5.12), je

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = \frac{\kappa M \mu^2}{l^2} \tag{5.30}$$

Jak tuto rovnici řešit? Velmi jednoduše! Jde o lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty. Její obecné řešení dostaneme jako součet rovnice s nulovou pravou stranou, tedy rovnice

$$\frac{d^2u}{d\varphi^2} + u = 0 \tag{5.31}$$

a partikulárního řešení. To ale můžeme velmi jednoduše vzít ve tvaru $u = \kappa M \mu^2 / l^2$.

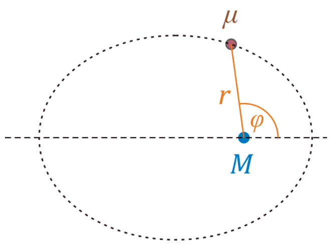
Navíc, rovnice (5.31) nám jistě něco připomíná. Má tvar rovnice pro lineární harmonický oscilátor![20] Její řešení můžeme rovnou psát ve tvaru $u = A\cos(\varphi - \varphi_0)$.[21] Obecné řešení rovnice (5.30) je tedy[22]

$$u = \frac{\kappa M \mu^2}{l^2} + A\cos\varphi\,. \tag{5.32}$$

Tento vztah už fakticky určuje tvar trajektorie. Dosadíme-li do něj $u = 1/r$ a označíme $\frac{\kappa M \mu^2}{l^2} = \frac{1}{p}$ a navíc $A = \frac{\varepsilon}{p}$ [23], plyne z (5.32)

$$r = \frac{p}{1+\varepsilon\cos\varphi}\,. \tag{5.33}$$

Toto je již ***rovnice kuželosečky v polárním tvaru***, jak ji známe z geometrie a také z úvodního kurzu klasické mechaniky.[24]



Závěrečná poznámka

Binetův vzorec lze použít i v případě, že se potenciál liší od závislosti 1/*r*.[25] Zde do složitějších problémů nepůjdeme – ale v příští kapitole budeme získané výsledky aplikovat na historicky důležitý Rutherfordův experiment.

[20] $\frac{d^2x}{dt^2} + x = 0$, jen místo času t zde máme jako nezávisle proměnnou φ a místo x máme u.

[21] Bez újmy na obecnosti budeme dále brát $\varphi_0 = 0$. Volba této konstanty znamená jen volbu natočení kolem osy z. Konstanta A může být libovolná.

[22] Zkuste si ho do (5.30) dosadit a přesvědčit se, že je opravdu řešením.

[23] A byla libovolná konstanta, takže nám nic nebrání vyjádřit ji jako součin $1/p$ a jiné libovolné konstanty ε.

[24] Pro $0 \le \varepsilon < 1$ jde o elipsu (pro $\varepsilon = 0$ speciálně o kružnici), pro $\varepsilon = 1$ je trajektorií parabola, pro $\varepsilon > 1$ hyperbola.

[25] Například v obecné teorii relativity vyjde pro pohyb planety v gravitačním poli Slunce vztah analogický Binetovu vzorci; z něj lze spočíst posuv perihélia Merkura.