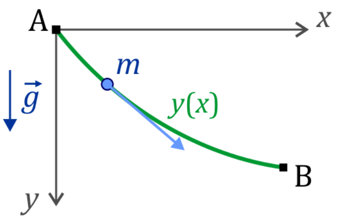
Variační principy

V této kapitole se podíváme na zcela jiné vyjádření zákonů, které určují pohyb soustavy hmotných bodů. Nebudou mít formu diferenciálních rovnic[1], ale budou vyjádřeny požadavkem, že jistý integrál má mít minimální (resp. obecně extrémní) hodnotu. To na první pohled vypadá velmi podivně. Ale ukazuje se, že podobné principy se uplatňují i v jiných oblastech fyziky – příkladem je *Fermatův princip*[2] v geometrické optice. Trochu metaforicky by se snad daly tyto principy vyjádřit tvrzením, že **příroda má ráda extrémy**. Co to znamená a jak se to konkrétně ukazuje v klasické mechanice, se pokusíme v dalším naznačit. Nejprve se ale podíváme na úlohu, která historicky byla jedním z problémů, jež vedly ke vzniku tzv. variačního počtu. Pojďme na skluzavku!

Úvod: co nejrychlejší skluzavka aneb úloha o brachistochroně

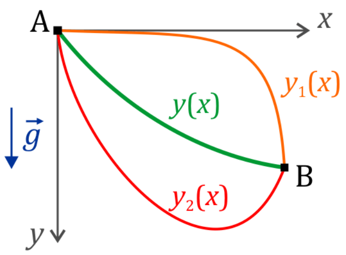
Základní problém je jednoduchý: Jaký tvar má mít skluzavka mezi dvěma pevně danými body, abychom se po ní sklouzli co nejrychleji, tedy za co nejkratší čas?



Problém poněkud zpřesníme: V homogenním gravitačním poli se hmotný bod pohybuje bez tření po křivce $y = y(x)$ mezi dvěma pevně zadanými body A a B, tj. platí $y(x_A) = y_A$, $y(x_B) = y_B$.[3]

Pro jednoduchost zvolíme soustavu souřadnic tak, že počátek bude v bodě A, jak to ukazuje obrázek; osa y směřuje dolů. V bodě A je počáteční rychlost hmotného bodu rovna nule. Otázkou je, jak zvolit křivku tak, aby čas, za který se hmotný bod *m* vlivem gravitace dostane do bodu B, byl co nejkratší.

Z historie je tento problém znám jako *úloha o brachistochroně*[4].



Že takováto křivka by měla existovat, je vcelku zřejmé. Pokud bychom naši skluzavku měli zpočátku jen velmi povlovnou (křivka $y_1(x)$), hmotný bod se bude zpočátku pohybovat velmi pomalu a čas klouzání bude dlouhý. Pokud by skluzavka vedla příliš dolů (viz $y_2(x)$), bude zbytečně dlouhá a výsledný čas se také prodlouží. V obou případech můžeme úpravou křivky čas klouzání zkrátit. Někde mezi krajními možnostmi tedy zřejmě existuje křivka $y(x)$, po níž je čas klouzání nejkratší. Jak ji ale najít? Přece nemůžeme zkoušet všechny křivky, těch je nekonečný počet!

Pojďme nejprve určit, jak dlouho trvá, než bod doklouže do bodu B. Když hmotný bod dojede do místa o souřadnicích $(x, y(x))$, je jeho kinetická energie $\frac{1}{2}mv^2 = mgy$.[5] Rychlost klouzání hmotného bodu je tedy

---

[1] Dosud jsme byli zvyklí, že pohybové rovnice jsou vždy rovnicemi diferenciálními. Vždyť i druhý Newtonův zákon $m\vec{a} = \vec{F}$ je diferenciální rovnicí $m\dfrac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \vec{F}$.

[2] Pokud jste se s ním dosud nesetkali, nemusíte se bát, pro pochopení této kapitoly nebude podstatný, i když si ho na příslušném místě krátce připomeneme.

[3] Můžete si představit třeba malý korálek klouzající po drátu se zanedbatelným třením.

[4] Slovní základ druhé části slova, *chronos*, nám říká, že v úloze jde o čas. *Brachys* znamená řecky „krátký“, třetí stupeň tohoto slova, tedy „nejkratší“ je *brachistos*. Proto *brachistochrona* píšeme s měkkým „i“.

[5] O mgy klesla potenciální energie hmotného bodu, o stejnou hodnotu se tedy musí zvýšit kinetická energie; ta byla na začátku nulová.

$$\upsilon = \sqrt{2g\,y(x)} \ .$$

Čas Δt, za který hmotný bod urazí kousek dráhy Δl, je $\Delta t = \Delta l/\upsilon$. Délka kousku dráhy je $\Delta l = \sqrt{\left(1+(y')^2\right)}\,\Delta x$, kde $y' = \dfrac{dy}{dx}$.[6] [7] Čas, za který hmotný bod překoná kousek dráhy, je tedy

$$\Delta t = \frac{\Delta l}{\upsilon} = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,\Delta x \ .$$

Celkový čas dostaneme integrací[8]:

$$t = \int_0^{x_B} \sqrt{\frac{1+(y')^2}{2gy}}\,dx \ . \tag{8.1}$$

Jak ale určit křivku, pro níž je t nejmenší? V rámci výpočtů, které známe, to zatím neumíme. Musíme se proto seznámit s částí matematiky, která je pro nás nová, s *variačním počtem*[9]. Vztah (8.1) pro nás bude dobrým východiskem, nejprve si ale (jak bývá v matematice zvykem), náš problém trochu zobecníme.

Variační počet: formulace úlohy

Ve vztahu (8.1) je integrál z nějakého výrazu, který obsahuje funkci $y(x)$ a její derivaci $y'(x)$. Obecně takový integrál můžeme napsat jako

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F\left(y(x), y'(x), x\right) dx \ . \tag{8.2}$$

Přidali jsme sem ještě možnou explicitní závislost výrazu $F\left(y(x), y'(x), x\right)$ na x.[10] Úlohou je najít funkci $y(x)$ takovou, pro níž integrál (8.2) nabývá minima, resp. obecně extrému. Omezujeme se přitom na funkce, pro něž platí

$$\begin{aligned} y(x_A) &= y_A \ , \\ y(x_B) &= y_B \ , \end{aligned} \tag{8.3}$$

tj. jejichž hodnoty v koncových bodech intervalu jsou pevně dané.

---

[6] Pro konečné „kousky“ Δx a Δl toto samozřejmě platí přibližně, přesně až v limitě $\Delta x \to 0$ nebo tehdy, když místo konečných přírůstků píšeme diferenciály. Chcete-li, pište tedy $dt = dl/\upsilon$, $dl = \sqrt{\left(1+(y')^2\right)}\,dx$ apod. Pro názornost však zde i v dalších vzorcích často pracujeme s „konečnými kousky“, aniž bychom specielně vyznačovali, že v tomto případě vztahy neplatí úplně přesně.

[7] Pokud zapomeneme vztah pro délku kousku křivky, stačí si uvědomit, že vlastně jednoduše plyne z Pythagorovy věty: $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x)^2 + (y'\Delta x)^2 = \left(1+(y')^2\right)(\Delta x)^2$. (Přesně toto ovšem platí opět až v limitě „nekonečně malých kousků“.)

[8] Názorně řečeno: „sečtením všech kousků času“.

[9] Nebojte se, jen s jeho základy.

[10] V úloze o brachistochroně bylo $F\left(y(x), y'(x), x\right) = \sqrt{\left(1+(y')^2\right)\Big/(2gy)}$, tam daný výraz závisel jen na y a y', nikoli explicite na x.

Než se pustíme do řešení, přidejme dvě poznámky. Jedna bude terminologická: Pravá strana vztahu (8.2) je příkladem toho, čemu se v matematice říká ***funkcionál***. Jde o operaci, do níž vstupuje nějaká funkce (zde funkce $y(x)$ a její derivace) a výsledkem je číslo.[11]

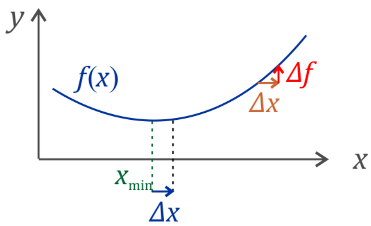
Druhá poznámka se týká zápisu. Dále již většinou nebudeme stále vypisovat závislost y a y' na x, pro stručnost tedy budeme např. (8.2) psát

$$I = \int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x)\, dx \ . \tag{8.4}$$

Jak hledat extrém pomocí variace funkce

Jak hledat extrém veličiny I? Kdyby závisela jen na několika proměnných, tak bychom použili známý postup: parciální derivace podle těchto proměnných bychom položili rovny nule. V (8.2) ale můžeme nastavovat nekonečný počet hodnot $y(x)$. Musíme tedy extrém hledat jinak.

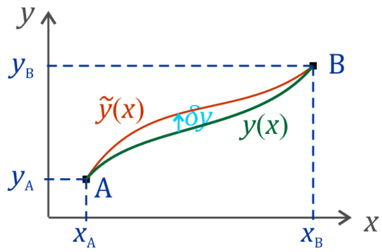
Základní nápad, jak to dělat, nám může objasnit jednoduchý příklad. Uvažujme funkci jedné proměnné, viz obrázek. Pokud se hodnota proměnné x změní o Δx, pak obecně, pokud jsme mimo extrém, se také změní hodnota funkce o $\Delta f \neq 0$. Jsme-li ale v bodu, který odpovídá extrému (na obrázku je to $x_{\min}$), pak posun o Δx funkční hodnotu prakticky nezmění.[12]



Hledat extrém veličiny I tedy můžeme tak, že budeme uvažovat malé změny funkce $y(x)$.
Jsme-li mimo extrém, pak se při změnách $y(x)$ mění i hodnota I.
Odpovídá-li $y(x)$ extrému, pak se při malých změnách funkce hodnota I prakticky nemění.

Tuto myšlenku může ilustrovat i příklad skluzavky v úvodu kapitoly. U „nevhodných“ skluzavek $y_1(x)$ a $y_2(x)$ stačí i malá změna tvaru skluzavky k tomu, aby se výrazně prodloužil nebo zkrátil čas, za nějž dojedeme do bodu B. V případě optimální skluzavky $y(x)$ malá změna tvaru skluzavky čas sklouznutí prakticky neovlivní.

Budeme tedy uvažovat funkci $y(x)$, která bude odpovídat extrému funkcionálu I, a funkce $\tilde{y}(x)$, které se od ní budou o málo lišit a v koncových bodech s ní budou splývat, tedy $\tilde{y}(x_A) = y(x_A) = y_A$ a $\tilde{y}(x_B) = y(x_B) = y_B$. Odchylky funkcí $\tilde{y}(x)$ od $y(x)$ budeme označovat jako



$$\delta y(x) = \tilde{y}(x) - y(x) \ . \tag{8.5}$$

Funkce $\delta y(x)$ nazýváme **variace funkce** $y(x)$. Považujeme je přitom za velmi malé – to znamená, že s nimi můžeme pracovat stejně, jako s diferenciály.

---

[11] Přesněji řečeno jde o zobrazení z nějakého prostoru funkcí do prostoru reálných nebo komplexních čísel; blíže zde tento pojem nebudeme precizovat.

[12] Přesněji řečeno, nezmění ji o člen prvního řádu v Δx : $f(x_{\min} + \Delta x) - f(x_{\min}) = o(\Delta x)$, zatímco mimo extrém $f(x + \Delta x) - f(x) = f'(x)\Delta x$, kde $f'(x) \neq 0$. Ve všech těchto a následujících úvahách a odvozeních přitom předpokládáme, že funkce, o něž nám jde, jsou spojité a mají první, případně druhé derivace.

Variací funkcionálu I nazveme rozdíl hodnot I odpovídající funkcím $\tilde{y}(x)$ a $y(x)$:[13]

$$\delta I = \int_{x_A}^{x_B} F(\tilde{y}, \tilde{y}', x)\, dx - \int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x)\, dx = \int_{x_A}^{x_B} F(y+\delta y,\, y'+\delta y', x)\, dx - \int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x)\, dx\,. \tag{8.6}$$

Z předchozích úvah plyne, že extrém I nastává v případě, kdy variace I je nulová:

$$\delta I = 0 \tag{8.7}$$

Přitom v koncových bodech mají funkce stále pevné hodnoty. To znamená, že variace funkce (8.5) musí být na koncích intervalu nulová:

$$\delta y(x_A) = 0\,, \quad \delta y(x_B) = 0\,. \tag{8.8}$$

Ze vztahů (8.6) – (8.8) už budeme moci extrém I najít.[14] [15]

Od variace funkcionálu k Eulerovým-Lagrangeovým rovnicím

Vztah (8.6) můžeme upravit na

$$\delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left[F(y+\delta y,\, y'+\delta y', x) - F(y, y', x) \right] dx\,.$$

V hranaté závorce je rozdíl výrazů F ve dvou blízkých bodech. Protože variace δy bereme jako velmi malé[16], můžeme psát

$$F(y+\delta y,\, y'+\delta y', x) - F(y, y', x) = \frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y'$$

Dostáváme tedy

$$\delta I = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\delta y' \right] dx\,. \tag{8.9}$$

„Malost“ variace δy vyjádříme explicite tak, že tuto variaci napíšeme jako

---

[13] Chcete-li, můžete označit $\tilde{I} = \int_{x_A}^{x_B} F(\tilde{y}, \tilde{y}', x)\, dx$, variace I pak je $\delta I = \tilde{I} - I$.

[14] Ještě jednu poznámku: Ve vztahu (8.6) vystupuje také variace derivace funkce, $\delta y'$. Co to je? Variací rozumíme rozdíly oproti původní funkci; variací derivace je tedy zřejmě $\delta y'(x) = \tilde{y}'(x) - y'(x)$. Derivujeme-li ale vztah (8.5), dostaneme $\frac{d}{dx}(\delta y) = \frac{d\tilde{y}}{dx} - \frac{dy}{dx} = \tilde{y}'(x) - y'(x) = \delta y'$. Je tedy vidět, že derivace variace funkce se rovná variaci derivace funkce. Jednoduše řečeno, nezáleží na tom, zda nejdříve vezmeme variaci funkce a tu zderivujeme nebo zda nejdřív funkci derivujeme a pak vezmeme její variaci.

[15] A ještě jednu poznámku k označení a terminologii. Pro variaci funkce, jak jsme ji zavedli vztahem (8.5), se z historických důvodů používá označení δ (tedy malé delta). Přitom funkční hodnoty $y(x)$ a $\tilde{y}(x)$ bereme ve **stejném** bodě x. (V souvislosti s tím, že v úlohách je nezávisle proměnnou často čas, mluvíme ve fyzice o těchto variacích jako o **isochronních**.) V učebnicích teoretické mechaniky můžete narazit i na další typ variací, kdy se porovnávají funkční hodnoty funkcí ve dvou blízkých, ale různých bodech, tedy $y(x)$ a $\tilde{y}(x+\Delta x)$. Tyto variace bývá zvykem označovat symbolem Δ; v našem textu se jimi dále nebudeme zabývat a omezíme se jen na variace isochronní.

[16] Respektive „nekonečně malé“, jak jsme už uvedli, pracujeme s nimi jako s diferenciály.

$$\delta y = \eta(x)\,\delta\alpha\ ,$$

kde $\eta(x)$ je libovolná funkce[17] splňující

$$\eta(x_A) = 0\,,\quad \eta(x_B) = 0 \tag{8.10}$$

a

$$|\delta\alpha| \ll 1\ .$$ [18]

Z (8.9) pak dostaneme

$$\delta I = \left\{ \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta' \right] dx \right\} \delta\alpha\ . \tag{8.11}$$

Aby nastal extrém, musí platit (8.7), tedy $\delta I = 0$. Protože $\delta\alpha \neq 0$ [19], plyne z (8.11)

$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta' \right] dx \ = 0\ . \tag{8.12}$$

Pravá strana (8.12) je tedy podmínkou, aby nastal extrém. Můžeme ji ještě upravit[20], abychom se v ní zbavili derivace η':

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta' \right] dx \ = \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta + \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta \right] dx \ = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y}\,\eta - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right)\eta \right] dx \ + \int_{x_A}^{x_B} \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta\right) dx \ = \\ &= \int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta(x)\,dx \ + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta \right]_{x_A}^{x_B} \end{aligned} \tag{8.13}$$

Poslední člen v (8.13) je ale roven nule. Je totiž $\left[\frac{\partial F}{\partial y'}\,\eta \right]_{x_A}^{x_B} = \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_B} \eta(x_B) - \left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_{x_A} \eta(x_A) = 0$, protože platí (8.10). Podmínku na extrém tedy můžeme vyjádřit ve tvaru

$$\int_{x_A}^{x_B} \left[\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) \right] \eta(x)\,dx \ = 0\ . \tag{8.14}$$

Tato podmínka musí přitom platit pro libovolnou funkci $\eta(x)$ (spojitou, derivovatelnou a splňující (8.10)).

---

[17] Pozor, termín „libovolná“ je nutno poněkud omezit. Musí jít o funkci spojitou, která má první derivaci.

[18] Pro zpřesnění: Ve všech výrazech, kde se vyskytuje $\delta\alpha$, budeme ponechávat jen členy prvního řádu; všechny členy $(\delta\alpha)^2$ a vyšších řádů budeme zanedbávat.

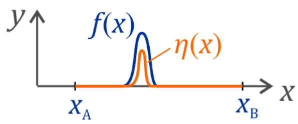
[19] $\delta\alpha$ je sice „nekonečně malé“, ale různé od nuly!

[20] Používáme přitom obrat typu $f\frac{dg}{dx} = \frac{d}{dx}(f\,g) - \frac{df}{dx}g$, kde $f = \frac{\partial F}{\partial y'}$ a $g = \eta$.

Co musí platit, aby bylo splněno (8.14)? Ukážeme, že je nezbytné, aby hranatá závorka v integrálu v (8.14) byla na celém intervalu (x_A, x_B) rovna nule. Jde totiž o spojitou funkci. Pokud bychom ji označili jako $f(x)$, bude (8.14)

$$\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,\eta(x)\,dx = 0 \; . \tag{8.15}$$

Důkaz provedeme sporem. Pokud by $f(x)$ bylo různé od nuly, třeba kladné, v nějakém bodě x_0, musí být (v důsledku spojitosti) kladné i v určitém okolí tohoto bodu, viz obrázek. Funkci $\eta(x)$ pak můžeme zvolit



v tomto okolí také kladnou a všude jinde nulovou. Je zřejmé, že integrál $\int_{x_A}^{x_B} f(x)\,\eta(x)\,dx$ by pak musel být také kladný, což je spor s (8.15). To znamená, že platí-li (8.15) pak $f(x)$ musí být na celém intervalu (x_A, x_B) rovno nule.[21]

K čemu jsme tedy dospěli? Platí

$$\delta I = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \; , \tag{8.16}$$

jinými slovy:

Jestliže funkcionál $I = \int_{x_A}^{x_B} F(y, y', x)\,dx$ **nabývá extrému, pak funkce** $y(x)$ **splňuje rovnici**

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \; .} \tag{8.17}$$

Rovnice (8.17) se nazývá **Eulerova-Lagrangeova rovnice.**[22] Problém nalezení extrému funkcionálu jsme tedy převedli na řešení diferenciální rovnice.

Poznamenejme, že podobně lze hledat i extrém funkcionálu, který závisí na více funkcích $y_1(x)$, $y_2(x)$, …, tedy $I = \int_{x_A}^{x_B} F\left(y_j, y_j', x\right) dx$. Místo jediné diferenciální rovnice pak dostáváme systém **Eulerových-Lagrangeových rovnic**

$$\boxed{\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y_j'}\right) = 0 \; .} \tag{8.18}$$

---

[21] Toto tvrzení bývá někdy označováno jako *základní lemma variačního počtu*.

[22] Upřesňující poznámka: Eulerova-Lagrangeova rovnice je nutnou podmínkou, aby pro danou funkci $y(x)$ byl funkcionál extrémní. Striktně vzato to však není podmínkou postačující. Může totiž nastat případ, kdy $\delta I = 0$, ale přesto nejde o extrém. Analogií v případě funkce jedné proměnné je chování funkce $y = x^3$ v bodě $x = 0$: Při posunu o malý kousek doleva nebo doprava se hodnota funkce prakticky nemění (protože její první derivace v daném bodě je rovna nule), přesto však nejde o minimum ani o maximum. Chceme-li zahrnout i tyto případy, říkáme obecně, že funkcionál má *stacionární hodnotu.* Podmínka $\delta I = 0$ a tedy i rovnice (8.17) je tedy ekvivalentní tomu, že funkcionál I má stacionární hodnotu.

Hamiltonův princip

Přejděme zpět k dynamice soustav hmotných bodů. Podívejme se pozorněji na Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (8.18). Nepřipomínají nám něco? Jistě, vypadají prakticky stejně jako Lagrangeovy rovnice druhého druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_j} = 0 \ , \tag{8.19}$$

jen místo nezávisle proměnné x v Eulerových-Lagrangeových rovnicích je v (8.19) čas t, místo funkcí $y_j(x)$ funkce $q_j(t)$ a místo F lagrangián L.[23]

Výše jsme odvodili, že podmínka $\delta I = 0$ je ekvivalentní Eulerovým-Lagrangeovým rovnicím[24]. Díky analogii můžeme naopak říci, že Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou ekvivalentní podmínce

$$\delta S = 0 \ , \tag{8.20}$$

kde

$$S = \int_{t_A}^{t_B} L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) dt \tag{8.21}$$

a při variaci (8.20) mají zobecněné souřadnice q_j pevné hodnoty:

$$\begin{aligned} q_j(t_A) &= q_j^{(A)} , \\ q_j(t_B) &= q_j^{(B)} . \end{aligned} \tag{8.22}$$

Veličina S daná vztahem (8.21) se nazývá **akce**.[25]

Protože Lagrangeovy rovnice druhého druhu jsou **pohybovými rovnicemi** soustavy hmotných bodů a protože, jak vidíme, jsou ekvivalentní podmínce (8.20), můžeme říci, že

> Soustava hmotných bodů, která v čase t_A je v pevně dané počáteční poloze a v čase t_B v pevně dané koncové poloze, se mezi těmito časy pohybuje tak, že variace akce je rovna nule (tedy že akce je stacionární[26]).

Tento výsledek je znám pod názvem **Hamiltonův princip**.

Hamiltonův princip většinou na první pohled připadá zvláštní a překvapující. Jsme totiž zvyklí formulovat zákony pro pohyb částic a těles (tedy pohybové rovnice) v čase „lokálně". Příkladem je druhý Newtonův zákon: V daném čase působí na hmotný bod celková síla $\vec{F}$, ta působí zrychlení $\vec{a} = \vec{F}/m$ a díky tomu se za malý časový interval Δt změní rychlost na $\vec{v}(t+\Delta t) = \vec{v}(t) + \vec{a}\,\Delta t$. Vše se děje v čase t resp. v jeho „těsném okolí". Například při šikmém vrhu síla postupně mění směr rychlosti a výsledkem těchto postupných změn je nakonec celková trajektorie, v daném případě parabola. Zápis pomocí diferenciální rovnice je jen jiným vyjádřením toho, jak se rychlost a poloha mění „krok po kroku".

---

[23] Navíc mají rovnice opačné znaménko, ale na něm nezáleží, vynásobení faktorem -1 rovnice nezmění.
[24] Tedy, odvodili jsme to v případě jediné funkce $y(x)$, odvození pro více funkcí by bylo obdobné.
[25] Pozor, nemá nic společného s principem akce a reakce, jde jen o „shodu jmen". Lze se také setkat s názvy *Hamiltonova principiální funkce* nebo *Hamiltonova akční funkce*.
[26] Většinou jde o extrém, ale raději zde uvádíme obecnou formulaci, viz výše poznámku [22].

Hamiltonův princip nám předkládá úplně jiný obrázek. Mezi zadaným počátečním bodem (tedy bodem, z něhož v počátečním čase t_A házíme) a zadaným koncovým bodem (do něhož hmotný bod v pevném koncovém čase t_B dopadne) se hmotný bod pohybuje tak, aby jakási veličina, kterou spočteme integrálem přes všechen čas pohybu (akce S) byla minimální[27].

Naprosto přirozeně se vtírá otázka: Jak ten hmotný bod ví, jaký bude integrál (8.21)? A to nějak za letu porovnává různé možnosti, jak letět, a výsledné hodnoty akce?

Hmotný bod samozřejmě nic neví a nepočítá integrály – stejně jako neřeší diferenciální rovnice, když jeho pohyb popisujeme pomocí nich. Bod se prostě pohybuje podle zákonů klasické mechaniky. A jak jsme ukázali, tyto zákony lze vyjádřit nejen pomocí diferenciálních rovnic, ale také pomocí integrálního principu (8.20) (resp. (8.20) – (8.22)). Je to nezvyklé, ale je to tak.

Variační principy nejen v klasické mechanice…

Variačních principů (resp. integrálních principů) bylo v teoretické mechanice formulováno více.[28] Co je však ještě zajímavější: variační principy se významně uplatňují i mimo oblast klasické mechaniky. Ukazuje se, že formulovat fyzikální zákony pomocí variačních principů je velmi obecný, hluboký a přínosný přístup – minimálně stejně přínosný, jako jejich formulace pomocí diferenciálních rovnic.

Příkladem je **Fermatův princip** v geometrické optice: světlo se mezi dvěma pevnými body šíří po takové trajektorii, po níž to stihne (v porovnání s blízkými trajektoriemi) za nejkratší čas[29].

Podobný princip se uplatňuje i v kvantové elektrodynamice, tedy v oblasti hodně vzdálené od názorných objektů klasické mechaniky.[30] Variační principy se uplatňují také ve speciální a obecné relativitě a dalších oblastech teoretické fyziky.

Nejde však vždy jen o „výšiny teoretické fyziky“, pro řadu lidí vzdálené čemukoli praktickému[31]. Variační počet se užívá i v technických aplikacích. Ve strojnických a stavebních konstrukcích bývá potřeba spočíst rozložení mechanických napětí.[32] Tento problém popisuje soustava parciálních diferenciálních rovnic. Ukázalo se, že výhodnější, než řešit přímo tyto rovnice, je přeformulovat celý problém na variační úlohu, tedy sestrojit příslušný funkcionál a hledat jeho minimum. Ne samozřejmě „fitováním“ hodnot v nekonečně mnoha bodech, ale ve vhodně zvolených „kouscích“. Tohle je principem tzv. *metody konečných prvků*, která se dnes používá i pro řešení řady dalších parciálních diferenciálních rovnic.

[27] Obecně: stacionární.

[28] Zájemce odkazujeme na učebnice teoretické mechaniky, my se k trochu obecnější formulaci dostaneme ještě v kapitole 10. Zároveň je vhodné připomenout, že například teorém Noetherové, který jsme zmínili v kapitole 7, bývá odvozován právě z variačního principu.

[29] Přesněji řečeno, za čas, který je extremální resp. stacionární v porovnání s časy po blízkých trajektoriích.

[30] Velmi pěkný polopopulární úvod do těchto myšlenek podává kniha R. Feynmana „Podivuhodná teorie světla a látky“.

[31] Tomuhle názoru by se mimochodem dalo úspěšně oponovat, ale to teď necháme stranou.

[32] Nechceme přece, aby nějaký nosník praskl, protože napětí překročilo mez pevnosti. Na druhou stranu, zbytečně předimenzovat konstrukci by bylo neekonomické.

První integrál Eulerovy-Lagrangeovy rovnice – a zpět ke brachistochroně

Celou kapitolu jsme začali úlohou o brachistochroně. Můžeme ji nyní vyřešit?

Rozhodně můžeme sestavit příslušnou diferenciální rovnici. Porovnáním (8.1) s obecným funkcionálem (8.2) vidíme, že

$$F = \sqrt{\frac{1+\left(y'\right)^2}{2gy}} \; . \tag{8.23}$$

Dosazením do Eulerovy-Lagrangeovy rovnice (8.17), tedy do

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) = 0 \tag{8.24}$$

pak získáme konkrétní rovnici, jejímž řešením by vyšla hledaná „nejrychlejší skluzavka", tedy brachistochrona. Potíž je v tom, že vyjde rovnice příliš složitá, kterou neumíme řešit.

Naštěstí však v případě, kdy výraz F explicite nezávisí na proměnné x, tj. když platí

$$\frac{\partial F}{\partial x} = 0 \; , \tag{8.25}$$

lze najít tzv. *první integrál* rovnice (8.24), pomocí něhož lze často dospět k řešení. A v případě úlohy o brachistochroně opravdu (8.23) na x explicite nezávisí!

Pojďme se podívat, jak onen první integrál najít. Když vynásobíme rovnici (8.24) y', můžeme výsledek postupně upravit na

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) y' = \frac{\partial F}{\partial y} y' - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} = \\ &= \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = \\ &= \frac{dF}{dx} - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) - \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) - \frac{\partial F}{\partial x} \end{aligned} \tag{8.26}$$

Při úpravách jsme použili často využívaný obrat využívající derivaci součinu funkcí[33], přičetli a odečetli jsme člen $\partial F / \partial x$ a navíc využili vztah pro derivaci výrazu F podle x.[34]

Pokud F nezávisí explicite na x, tedy platí (8.25), plyne z (8.26) $\frac{d}{dx}\left(F - \frac{\partial F}{\partial y'} y'\right) = 0$, to znamená, že

$$\boxed{F - \frac{\partial F}{\partial y'} y' = \text{konst.}} \tag{8.27}$$

Výraz na levé straně (8.27) je kýžený první integrál rovnice (8.24). (Získali jsme ho integrací této rovnice.)

---

[33] Šlo o úpravu $\frac{df}{dx} g = \frac{d}{dx}(fg) - f\frac{dg}{dx}$, kde $f = \frac{\partial F}{\partial y'}$ a $g = y'$.

[34] Nikoli pro parciální derivaci! Je $\frac{d}{dx} F\left(y(x),\, y'(x),\, x\right) = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx} + \frac{\partial F}{\partial y'}\frac{dy'}{dx} + \frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F}{\partial y} y' + \frac{\partial F}{\partial y'} y'' + \frac{\partial F}{\partial x}$.

Brachistochrona: řešení

Pro nalezení brachistochrony nejprve v (8.23) vypustíme člen $2g$ ve jmenovateli.[35] Vezmeme tedy

$$F = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} \text{ , odtud také určíme } \frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{y'}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)y}} \ .$$

Po dosazení do (8.27) dostaneme

$$\text{konst.} = F - \frac{\partial F}{\partial y'}\,y' = \sqrt{\frac{1+(y')^2}{y}} - \frac{(y')^2}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)y}} = \frac{1+(y')^2-(y')^2}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)y}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1+(y')^2\right)y}} \ .$$

Výsledný zlomek roven konstantě, takže konstantě musí být roven i výraz pod odmocninou ve jmenovateli:

$$\left(1+(y')^2\right)y = 2C \,, \tag{8.28}$$

kde C je konstanta[36].

Výsledná rovnice stále ještě nevypadá jako jednoduše řešitelná – ale matematika nás poučí, že rovnice tohoto typu lze řešit vhodnou substitucí za y'. Dokonce poradí i substituci, která bude fungovat[37]:

$$y' = \operatorname{cotg}\left(\frac{\varphi}{2}\right) \tag{8.29}$$

Z (8.28) po dosazení (8.29) dostáváme[38]

$$y = \frac{2C}{1+y'^2} = C\,2\sin^2(\varphi/2) = C\left(1-\cos\varphi\right) \ . \tag{8.30}$$

Známe tedy y v závislosti na parametru φ. Potřebujeme zjistit, jak na tomto parametru závisí x. Derivaci x podle φ můžeme zapsat jako

$$\frac{dx}{d\varphi} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{d\varphi} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}\frac{d}{d\varphi}\left[C\left(1-\cos\varphi\right)\right] = \frac{1}{y'}C\sin\varphi =$$

$$= \operatorname{tg}(\varphi/2)\,C\,2\sin(\varphi/2)\cos(\varphi/2) = C\,2\sin^2(\varphi/2) = C\left(1-\cos\varphi\right)$$

Odtud už

$$x = C\int\left(1-\cos\varphi\right)d\varphi = C\left(\varphi-\sin\varphi\right) \ .^{39} \tag{8.31}$$

---

[35] Výrazem $1/\sqrt{2g}$ se pouze násobí celkový čas. Má-li být nejkratší, je jistě nejkratší i libovolný jeho násobek. Jiným argumentem je skutečnost, že na levé straně (8.27) můžeme F násobit libovolnou konstantou a daná rovnost se nezmění. (Zkuste si sami rozmyslet, že vypuštěním členu $2g$ skutečně nepácháme žádnou nepřístojnost.)

[36] Na pravé straně (8.28) jsme napsali její dvojnásobek, protože faktor 2 se v dalších úpravách výhodně zkrátí.

[37] Přiznejme, sami bychom ji asi nevymysleli.

[38] Při úpravách využíváme vztahy $1+\operatorname{cotg}^2(\varphi/2) = \frac{\sin^2(\varphi/2)+\cos^2(\varphi/2)}{\sin^2(\varphi/2)} = \frac{1}{\sin^2(\varphi/2)}$ a $\sin(\varphi/2) = \sqrt{\frac{1-\cos\varphi}{2}}$.

Výsledná parametrická rovnice brachistochrony je tedy

$$\begin{aligned} x &= C\left(\varphi - \sin\varphi\right) \\ y &= C\left(1 - \cos\varphi\right) \end{aligned} . \qquad (8.32)$$

Jde o rovnici cykloidy[40]. Křivkou, po níž hmotný bod klouže k cíli za nejkratší čas, je tedy **cykloida**.

Pro $\varphi = 0$ je hmotný bod v počátečním bodě A (počátku souřadnic), pro nějakou hodnotu φ_B je v koncovém bodě B o souřadnicích $\left(x_B, y_B\right)$; hodnotu φ_B a konstantu C určíme právě ze souřadnic x_B a y_B.[41]

Závěrečné poznámky

Úlohu o brachistochroně bychom zřejmě bez variačního počtu nedokázali vyřešit. Není to samozřejmě jediný zajímavý problém, kde je variační počet užitečný. S jeho pomocí můžeme například najít tvar *řetězovky*. To je tvar, který zaujme řetěz pověšený mezi dvěma body.[42] Je jasné, že řetěz se zřejmě prověsí tak, že jeho potenciální energie bude minimální.[43] Tato úloha je však poněkud složitější, protože při hledání minima potenciální energie musíme respektovat podmínku, že se řetěz neprotáhne, tedy že má pevnou délku. Proto zde v základním textu kapitoly řešení tohoto problému neuvádíme.

Zásadním sdělením této kapitoly byl ale Hamiltonův princip, resp. obecně zjištění, že pohybové zákony nemusí mít jen tvar diferenciálních rovnic, ale také integrálních principů – a že obě tato vyjádření jsou rovnocenná. Navíc jsou tyto principy velmi užitečné i mimo oblast mechaniky. V poněkud volnější formulaci tedy opravdu můžeme říci, že „příroda má ráda extrémy".

[39] Integrační konstantu volíme rovnu nule; odpovídá to počátečnímu bodu v počátku souřadnic ($x_A = 0, x_B = 0$ pro $\varphi = 0$).

[40] Asi ji znáte, ale pro připomenutí: Cykloida je křivka, kterou opíše bod na obvodu kola valícího se po rovině.

[41] Aby se cykloida „strefila" do koncového bodu.

[42] Řetěz je homogenní, považujeme jej za nekonečně ohebný a je v homogenním gravitačním poli.

[43] Nebo si snad umíte představit, že by byl prověšen směrem vzhůru? ☺