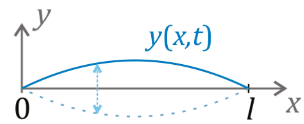
Spojitá prostředí: rovnice struny

Dosud jsme se zabývali pohybem soustav hmotných bodů nebo tuhého tělesa – ve všech případech tedy šlo o problémy s konečným počtem stupňů volnosti. Existují ovšem problémy, v nichž počet stupňů volnosti není konečný. Například chvění membrány bubnu: výchylka $z = z(x_1, x_2, t)$ závisí kromě času na dvou prostorových proměnných x_1, x_2. Jak řešit takovéto problémy? Dvourozměrné objekty (jako zmíněná membrána bubnu) či třírozměrné (například vzduch v místnosti, jehož části kmitají, když zní jakýkoli zvuk) jsou možná pro začátek zbytečně složité. Podíváme se proto na snad nejjednodušší problém podobného typu, a to na problém jednorozměrný: kmitající strunu. Ukážeme si, jak lze její pohyb řešit pomocí variačního principu, což je přístup, který jde lehce zobecnit na dvourozměrné nebo třírozměrné případy.[1] Uvedeme také řešení této rovnice ve formě postupných i stojatých vln.[2]

Úvod: formulace problému

Uvažujme strunu hmotnosti m, která je napnuta mezi dvěma body, jejichž vzdálenost je l. Struna je homogenní, elastická[3] a je napnuta silou F. Pro jednoduchost přidáme dva další předpoklady:



1. Části struny kmitají jen ve směru kolmém na spojnici krajních bodů.
2. Výchylky (resp. amplitudy kmitů) jsou malé.

První předpoklad znamená, že se části struny nepohybují doleva a doprava.[4] Druhý předpoklad říká, že sklon struny vzhledem ke spojnici krajních bodů je malý.[5] Výchylku struny popisuje funkce

$$y = y(x,t), \tag{10.1}$$

kde přitom, díky předpokladu 2,

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1 \ . \tag{10.2}$$

Úkolem je najít rovnici pro funkci $y = y(x,t)$ a poté najít alespoň některá její řešení.

Ještě poznámku k označení. Pro krátkost budeme často označovat parciální derivace y jako

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \ , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} \ . \tag{10.3}$$

[1] V tomto textu nebudeme vícerozměrné problémy řešit, omezíme se na pohyb struny. Ten se řešívá už na v závěru úvodního kurzu klasické mechaniky, budeme tedy moci porovnat odvození rovnice pomocí variačního počtu s odvozením vycházejícím z druhého Newtonova zákona.

[2] Pro toho, kdo tato řešení zná, to bude připomenutí, shrnutí a v něčem možná doplnění. Vzhledem k tomu, že analogické situace se popisují a řeší v optice, klasické elektrodynamice i v dalších partiích fyziky (a vlnění je také důležitou součástí středoškolské fyziky), není marné probrat si řešení tohoto problému dostatečně podrobně na názorném příkladu kmitající (resp. vlnící se) struny.

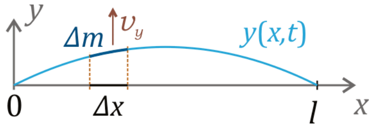
[3] Tj. prodlužuje se podle Hookova zákona. Strunu také považujeme za dokonale ohebnou, tedy síly spojené s ohýbáním struny budeme považovat za zanedbatelné. (Jde o strunu, ne o tyč, u ní by byly síly spojené s ohybem samozřejmě podstatné.)

[4] … a vystihuje skutečnost, že půjde o **příčné vlnění**.

[5] Obrázek výše výchylky struny pro názornost přehání. Ovšem reálně jste asi dosud neviděli napnutou strunu na kytaře kmitat s takovýmto rozkmitem.

Lagrangián kmitající struny

Lagrangián našeho problému je $L = T - V$, kde T je kinetická energie kmitající struny a V její potenciální energie. Kinetická energie kousku struny vyznačeného na ose x délkou Δx (viz obrázek) je $\Delta T = \tfrac{1}{2}\Delta m\, v_y^2$. Označíme-li délkovou hustotu struny jako $\eta = m/l$,[6] je hmotnost kousku struny



$$\Delta m = \eta\, \Delta x \ . \tag{10.4}$$

Rychlost ve směry osy y je

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \equiv \dot{y} \ . \tag{10.5}$$

Kinetická energie kousku struny je tedy

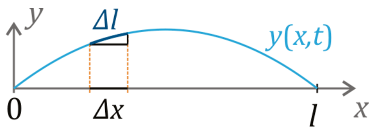
$$\Delta T = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Delta x \ .$$

Celkovou kinetickou energii kmitající struny dostaneme „sečtením přes všechny její kousky“, je tedy dána integrálem

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \ . \tag{10.6}$$

Potenciální energii spočteme jako práci, kterou síla velikosti F, jíž je napínána struna, vykoná při prodloužení struny díky výchylce.[7]

Kousek struny, který má v klidu délku Δx, se při vychýlení struny protáhne na délku $\Delta l = \sqrt{1 + (y')^2}\,\Delta x \doteq \left(1 + \tfrac{1}{2}(y')^2\right)\Delta x$.[8]



Protažení daného kousku je tedy $\Delta l - \Delta x \doteq \tfrac{1}{2}(y')^2\,\Delta x$. Potenciální energie daného kousku struny je proto

$$\Delta V = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x \ ,$$

potenciální energie celé struny pak

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \ . \tag{10.7}$$

Lagrangián je tedy

$$L = T - V = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx \ . \tag{10.8}$$

---

[6] Je-li ρ hustota materiálu struny a S její průřez, je přirozeně $\eta = \rho S$. Struna je homogenní, takže $\eta = \text{konst.}$

[7] Tato úvaha se může zdát na první pohled zvláštní, ale funguje: Představte si, že byste vzali koncový bod struny a strunu natáhli o malý kousek délky d. Protože táhnete silou F, vykonáte práci $F \cdot d$. (Natažení pokládáme za malé, takže síla F, kterou je struna napnuta, se prakticky nezmění.) Stejnou práci ale vykonáme, jestliže strunu o kousek délky d protáhneme tím, že ji vychýlíme do strany.

[8] Δx považujeme za malé (resp. nakonec budeme brát limitu $\Delta x \to 0$) a využíváme toho, že y' je malé, viz (10.2).

Vidíme, že obecně je lagrangián dán integrálem

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \mathscr{L}\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, x, t \right) dx \,.^{9} \tag{10.9}$$

Veličinu $\mathscr{L}$ nazýváme **lagrangeovská hustota**.[10] V lagrangiánu (10.8) bylo konkrétně

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 . \tag{10.10}$$

Variační princip v případě dvou nezávislých proměnných

V kapitole 8 jsme definovali akci jako[11]

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) dt \ . \tag{10.11}$$

Dosadíme-li za lagrangián (10.9), dostaneme

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_B}^{x_A} \mathscr{L}\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, x, t \right) dt\, dx \,. \tag{10.12}$$

V analogii s Hamiltonovým principem, který jsme poznali v kapitole 8, můžeme očekávat[12], že struna se bude pohybovat tak, že variace akce je nulová,

$$\delta S = 0 \,.^{13} \tag{10.13}$$

Jakou rovnici musí splňovat funkce $y = y(x,t)$, aby byl splněn variační princip (10.13)? Mohli bychom ji odvozovat podobně, jako jsme v kapitole 8 odvodili Eulerovu-Lagrangeovu rovnici. Může nám však pomoci analogie: Hamiltonův princip užívající akci (10.11), v níž se integruje podle času vedl na Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Nyní se ve výrazu pro akci (10.12) integruje přes dvě proměnné, t a x. Obě tyto proměnné vystupují v integrálu zcela rovnocenně. Lze tedy očekávat, že budou vystupovat rovnocenně i v rovnicích pro funkci $y = y(x,t)$. Tedy, že rovnice budou mít tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \ . \tag{10.14}$$

---

[9] V našem konkrétním případě $\mathscr{L}$ nezáviselo explicite na y, x ani t, ale v obecném případě by na těchto proměnných mohlo záviset. Meze jsme označili x_A a x_B, v našem konkrétním případě bylo $x_A = 0$ a $x_B = l$.

[10] Musíme ji integrovat přes x, abychom dostali lagrangián, podobně, jako třeba délkovou hustotu hmotnosti musíme integrovat přes x, abychom dostali celkovou hmotnost.

[11] Jen meze integrálu byly v osmé kapitole t_A, t_B, nyní je značíme t_0, t_1, aby se nám to nepletlo s indexy A a B u proměnné x.

[12] Netřeba asi dodávat, že naše očekávání je oprávněné, níže uvedený variační princip je opravdu správným pohybovým zákonem pro kmity struny.

[13] Při této variaci musí být pevně dané polohy struny v počátečním a koncovém čase, tj. $y(x,t_0) = y_0(x)$ a $y(x,t_1) = y_1(x)$ a navíc musí být pevně držené okraje struny, tj. $y(x_A,t) = y(0,t) = 0$ a $y(x_B,t) = y(l,t) = 0$. Znamená to, že výchylky struny jsou pevně zadané na okrajích oblasti vymezené hodnotami (t_0, t_1) a (x_A, x_B)

A opravdu, tohle je správný tvar rovnic, který by nám vyšel i po podrobném odvození. V zápisu rovnice (10.14) nám může připadat nezvyklé derivovat podle parciálních derivací – možná přijatelněji a srozumitelněji rovnice vypadá, označíme-li parciální derivace symboly (10.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}=0 \tag{10.15}$$

Jasněji teď vidíme, že se tato rovnice opravdu podobá Lagrangeově rovnici druhého druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0\ . \tag{10.16}$$ [14]

Rovnice struny – odvození z variačního principu

Když pomocí značení $\dot{y}$ a y' zapíšeme lagrangeovskou hustotu (10.10),

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\eta\,(\dot{y})^2-\frac{1}{2}F\,(y')^2\ , \tag{10.17}$$

můžeme lehce spočíst její potřebné derivace[15] a dosazením do (10.15) získat rovnici pro kmity struny:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta\,\dot{y})-\frac{\partial}{\partial x}(F\,y')=0 \tag{10.18}$$

Můžeme ji upravit např. na tvar $F\,y''-\eta\,\ddot{y}=0$, obvyklejší bývá vyjádření, v němž jsou parciální derivace zapsány explicite, např. ve tvaru[16]

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{(F/\eta)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0} \tag{10.19}$$

Rovnice struny – odvození z druhého Newtonova zákona

Pro kontrolu, zda jsme dospěli ke správné rovnici, může být užitečné připomenout si odvození rovnice struny z druhého Newtonova zákona.[17] Jde to docela přímočaře. Pro kousek struny o hmotnosti Δm dává druhý Newtonův zákon

$$\Delta m\frac{d\vec{v}}{dt}=\Delta\vec{F}\ . \tag{10.20}$$

[14] (10.15) a Lagrangeova rovnice (10.16) jsou opravdu analogické, jen místo souřadnice q, která závisí na čase, $q=q(t)$ máme v (10.15) funkci dvou proměnných $y=y(x,t)$. Obě tyto proměnné v rovnici (10.15) vystupují jako nezávisle proměnné a mají v ní členy analogické členu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ v Lagrangeových rovnicích 2. druhu. Jen nyní v (10.15) musíme místo totální derivace $\frac{d}{dt}$ psát parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial t}$ a podobně pro proměnnou *x*.

[15] $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}=\eta\,\dot{y}$, $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}=-F\,y'$ a $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}=0$.

[16] Za chvíli uvidíme, proč v druhém členu píšeme výraz takto do jmenovatele.

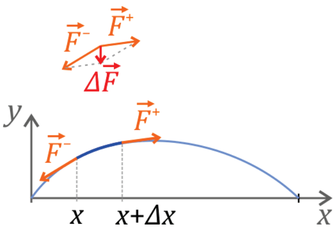
[17] Variační princip v případě dvou proměnných a rovnice, které z něho plynou, jsme výše získali jen analogií s jednodušším případem probíraným v kapitole 8. Možná v nás tedy může hlodat červík nedůvěry, jestli jsou opravdu správně. Jsou – ale zatím jsme se museli spolehnout jen na autoritativní tvrzení, že tomu tak je, nebo si je zkontrolovat v učebnicích. Takže není od věci, ověřit si platnost rovnice (10.19) i zcela nezávislým odvozením.

Protože se kousek struny pohybuje jen ve směru osy y, stačí uvažovat jen y-ovou složku rovnice (10.20), tedy $\Delta m \dfrac{dv_y}{dt} = \Delta F_y$. Přitom $v_y = \dfrac{\partial y}{\partial t}$ a $\Delta m = \eta\,\Delta x$ (viz (10.4)), takže 2. Newtonův zákon dává[18]

$$\eta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta x = \Delta F_y \ . \tag{10.21}$$

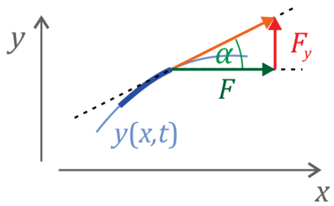
Síla $\Delta\vec{F}$ je součet sil, kterými na daný kousek struny působí části struny napravo a nalevo. (Na obrázku sílu zprava označujeme jako $\vec{F}^+$, sílu zleva jako $\vec{F}^-$.) Ve směry osy y je tedy

$$\Delta F_y = F_y^+ + F_y^- \tag{10.22}$$



Pokud se týče vodorovných, tedy x-ových složek síly, ty musí být zleva i zprava co do velikosti stejné a musí se tedy vyrovnávat, jinak by se daný kousek struny urychloval doprava nebo doleva. Fakticky můžeme říci, že velikost x-ové složky síly je rovna síle F, kterou je struna napnuta, když je v klidu.

Složka síly do směru y závisí na sklonu struny. Jak ukazuje obrázek, $F_y = F\ \mathrm{tg}\,\alpha = F\ y' = F\,\dfrac{\partial y}{\partial x}$. Derivaci ovšem musíme vzít vždy v příslušném bodě, takže $F_y^+ = F\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ a $F_y^- = -F\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}$.[19]



Dosazení do (10.22) dá[20]

$$\Delta F_y = F\cdot\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) \doteq F\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x \tag{10.23}$$

Teď už stačí dosadit (10.23) do (10.21):

$$\eta \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\Delta x = F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$$

a po zkrácení Δx a převedení na jednu stranu dostáváme

$$F\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\ , \tag{10.24}$$

což už je fakticky rovnice (10.19).[21]

Rovnici struny tedy máme odvozenou. Jak je to s jejím řešením?

[18] Derivaci podle času už píšeme jen jako parciální, i když v (10.20) byla totální derivace. Tam jsme ale brali kousek struny fakticky jako hmotný bod, zatímco v (10.21) funkce $y = y(x,t)$ závisí na dvou proměnných a tak musíme časovou změnu zapisovat pomocí parciální derivace.

[19] U F_y^- je záporné znaménko, protože na levém kraji daného kousku struny působí síla opačně, než na pravém.

[20] Využíváme toho, že rozdíl funkce ve dvou blízkých bodech je $f(x+\Delta x) - f(x) \doteq \dfrac{df}{dx}\Delta x$, funkcí f je $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

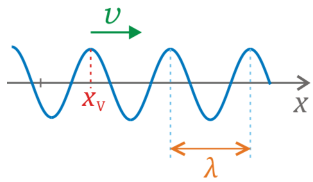
[21] Díky tomu, že nám i při zcela nezávislém odvození vyšla stejná rovnice, snad může stoupnout i naše důvěra ve variační princip použitý k řešení pohybu spojitých prostředí, jako je struna.

Řešení rovnice struny: postupné vlny

Vztah vystihující postupné vlnění[22] [23] se obvykle píše ve tvaru

$$\boxed{y = A\sin\left(kx - \omega t\right) .} \tag{10.25}$$

Jak víme, že jde o postupnou vlnu a jakou rychlostí taková vlna postupuje?



Obrázek ukazuje výchylky struny [24] v nějakém konkrétním čase t. Zvýrazněn je jeden „vrchol vlny", jeho souřadnice je označena x_V. Jakou hodnotu musí mít argument funkce sinus v (10.25), aby šlo o vrchol vlny, tedy aby výchylka byla maximální? Pro maximální hodnotu se sinus musí rovnat 1. To znamená, že argument v závorce má hodnotu například $\pi/2$.[25] Pro vrchol je tedy např. $kx_V - \omega t = \pi/2$; odtud

$$x_V = \frac{\omega}{k} t + \frac{\pi}{2k} . \tag{10.26}$$

To je ale vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb, $x_V = \upsilon\, t + \text{konst.}$ Vidíme, že jde opravdu o postupné vlnění; vrcholy vln (i kterékoli jiné jejich části) postupují podél osy x rychlostí

$$\upsilon = \frac{\omega}{k} .^{26} \tag{10.27}$$

Ještě jsme ovšem neukázali, že (10.25) je řešením rovnice struny (10.19), případně za jakých podmínek je řešením. Pro dosazení do rovnice struny potřebujeme spočítat druhé derivace (10.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= k A\cos\left(kx - \omega t\right), & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k^2 A\sin\left(kx - \omega t\right), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\omega A\cos\left(kx - \omega t\right), & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\sin\left(kx - \omega t\right). \end{aligned} \tag{10.28}$$

Dosazení do (10.19), tedy do $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{\left(F/\eta\right)} \dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ dá

$$-k^2 A\sin\left(kx - \omega t\right) + \frac{1}{\left(F/\eta\right)} \omega^2 A\sin\left(kx - \omega t\right) = 0 ,$$

čili

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{\left(F/\eta\right)}\right) A\ \sin\left(kx - \omega t\right) = 0 . \tag{10.29}$$

[22] Jde o postupné vlnění v jednorozměrném případě. Stejnou rovnici může mít postupná rovinná vlna.
[23] V našem případě jde o postupné vlnění *příčné*, výchylky jsou kolmé na směr šíření vlny.
[24] Výchylky jsou na obrázku velmi přehnané, výše jsme rovnici struny odvodili pro malé výchylky, zde nám jde o ilustraci vlnění obecně.
[25] … nebo $3\pi/2$, $5\pi/2$, zkrátka obecně $\left(2k+1\right)\pi/2$.
[26] Skutečnost, že jde o postupné vlnění, je také jasně vidět, když (10.25) přepíšeme jako $y = A\sin\left(k\left(x - \upsilon t\right)\right)$.

Tato rovnice musí být splněna pro všechna x a všechna t. Aby to bylo pravda, musí platit $-k^2+\dfrac{\omega^2}{(F/\eta)}=0$, čili $\dfrac{\omega^2}{k^2}=\dfrac{F}{\eta} \;\Rightarrow\; \dfrac{\omega}{k}=\sqrt{\dfrac{F}{\eta}}$. Porovnáním s (10.27) vidíme, že rychlost postupných vln na struně je

$$\boxed{\upsilon=\sqrt{\frac{F}{\eta}}\;.} \tag{10.30}$$

Tím pádem můžeme rovnici struny (10.19) psát jako

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\;.} \tag{10.31}$$

Fakticky jde o jednorozměrný případ **vlnové rovnice.**[27]

V případě výše uvedeného vlnění (10.25) jde o harmonickou vlnu[28]. Bylo by možno vyjádřit i vlnu zcela obecného profilu? Jde to, stačí pro libovolnou funkci $f=f(\xi)$[29] napsat

$$\boxed{y=f(x-\upsilon t)\;.} \tag{10.32}$$

Druhé derivace (10.32) jsou[30]

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{df}{d\xi}\;,\qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\,,$$

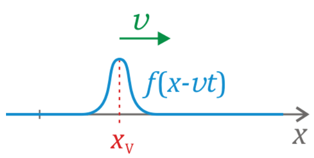
$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{df}{d\xi}\cdot(-\upsilon),\quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\,\upsilon^2\,.$$

Po dosazení do levé strany (10.31) dostaneme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\upsilon^2=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\left[1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon^2}\right]=0\;.$$

Vidíme tedy, že (10.32) opravdu *je* řešením rovnice struny. A skutečně jde o postupnou vlnu šířící se rychlostí υ: jestliže funkce $f(\xi)$ má maximum pro nějakou hodnotu ξ_m, je vrchol funkce na místě o souřadnici

$$x_V=\upsilon t+\xi_m\;.$$



Profil funkce *f* přitom zůstává stále stejný, jen se pohybuje podél osy x.

[27] Ve třírozměrném případě vlnová rovnice, např. pro zvukové vlny, má tvar $\Delta p-\dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$. Zde p je tlak vzduchu, a Δ je Laplaceův operátor, $\Delta p=\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2}$.

[28] Prostě, ve vztahu je sinus nebo kosinus argumentu.

[29] Spojitou a derivovatelnou do druhého řádu.

[30] Rozmyslete si, že tohle je pravda. (Stačí použít pravidlo pro derivaci složené funkce, takže např. $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{df}{d\xi}\dfrac{\partial\xi}{\partial t}$, kde $\xi=x-\upsilon t$.)

Řešení rovnice struny: stojaté vlny

Harmonická stojatá vlna je popsána vztahem[31]

$$\boxed{y = A\sin(kx)\sin(\omega t)\ ,} \tag{10.33}$$

kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence vlnění a $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo.[32] Dokázat, že (10.33) je řešením rovnice struny znamená spočítat druhé derivace

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= kA\cos(kx)\sin(\omega t), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx)\sin(\omega t), \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \omega A\sin(kx)\cos(\omega t), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{10.34}$$

a dosadit je do levé strany (10.31):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) + \frac{1}{\upsilon^2}\omega^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\right)A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

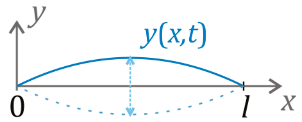
Rovnice struny tedy bude splněna, pokud pro všechna x a t bude platit

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\right)A\sin(kx)\sin(\omega t) = 0\ . \tag{10.35}$$

Nutnou a postačující podmínkou pro to je $-k^2 + \dfrac{\omega^2}{\upsilon^2} = 0$, čili $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$, což je stejný vztah, jako v případě postupné harmonické vlny (viz (10.27)).

Jde-li o stojaté vlny na struně konečné délky, musí být splněny **okrajové podmínky**

$$y(0,t) = 0\ , \quad y(l,t) = 0\ .\text{[33]} \tag{10.36}$$



První podmínka je splněna již volbou řešení (10.33).[34] Aby byla splněna druhá podmínka, musí platit

$$\sin(kl) = 0 \ \Rightarrow\ kl = n\pi\ \text{, kde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.37}$$

Protože $k = 2\pi/\lambda$, plyne z (10.37), že $\lambda = 2l/n$, tedy, že na délku struny připadne celý počet půlvln.[35] Na druhou stranu mezi k a ω platí vztah $\omega = k\cdot\upsilon$ (viz (10.27)), takže

$$2\pi f = \omega = k\cdot\upsilon = (n\pi/l)\,\upsilon\ ,$$

---

[31] Toto není obecný tvar stojaté vlny. V obou argumentech funkcí sinus by mohly být ještě fázové konstanty, případně bychom mohli uvažovat kombinace sinů a kosinů. Vztah (10.33) však bude vyhovovat situaci, kterou budeme dále popisovat.

[32] Přitom f je frekvence vlnění a λ vlnová délka. Rozmyslete si, že vztah (10.33) opravdu popisuje vlnění s touto frekvencí a vlnovou délkou. A rozmyslete si, jak byste to vysvětlili středoškolákům – tento popis je na úrovni středoškolské fyziky. (Stejně tak musíme umět vysvětlit význam příslušných parametrů v případě harmonické postupné vlny, tedy ve vztahu (10.25).)

[33] Na začátku a na konci je struna upevněna a nemůže se tam hýbat.

[34] Protože $\sin(k\cdot 0) = 0$.

[35] Což je logické. (Rozmyslete si proč.)

čili (po dosazení (10.30))

$$f = n\frac{v}{2l} = n\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\eta}}\ , \quad n = 1, 2, 3, \ldots \qquad (10.38)$$

Struna tedy může kmitat základní frekvencí $f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\eta}}$ a jejími násobky.[36] [37] Složitější případy stojatého vlnění dostaneme složením stojatých vln těchto základních frekvencí.

Závěrečná poznámka

Přestože jsme se v závěrečných částech kapitoly věnovali konkrétním řešením rovnice struny, neměli bychom zapomenout na základní poznatek, s nímž jsme se seznámili: variační princip lze z případu soustavy hmotných bodů dobře zobecnit i na soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti, tedy na spojitá prostředí.

[36] Mluvíme o tzv. vyšších harmonických. Obecně, když drnkneme třeba na strunu kytary, zní současně základní tón i vyšší harmonické, našemu uchu to zní libozvučně. (Uvádí se, že s výjimkou sedmé harmonické.)

[37] Kvalitativně můžeme zkontrolovat, že se vztah pro frekvenci základního tónu chová rozumně: napneme-li strunu větší silou F, frekvence roste (výška tónu vzrůstá), naopak hmotnější struna (s vyšší délkovou hustotou hmotnosti η) kmitá s nižší frekvencí, tedy zní hlubším tónem.