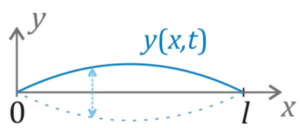
Spojitá prostředí: rovnice struny

Dosud jsme se zabývali pohybem soustav hmotných bodů nebo tuhého tělesa – ve všech případech tedy šlo o problémy s konečným počtem stupňů volnosti. Existují ovšem problémy, v nichž počet stupňů volnosti není konečný. Například chvění membrány bubnu: výchylka $z = z(x_1, x_2, t)$ závisí kromě času na dvou prostorových proměnných x_1, x_2. Jak řešit takovéto problémy? Dvourozměrné objekty (jako zmíněná membrána bubnu) či třírozměrné (například vzduch v místnosti, jehož části kmitají, když zní jakýkoli zvuk) jsou možná pro začátek zbytečně složité. Podíváme se proto na snad nejjednodušší problém podobného typu, a to na problém jednorozměrný: kmitající strunu. Ukážeme si, jak lze její pohyb řešit pomocí variačního principu, což je přístup, který jde lehce zobecnit na dvourozměrné nebo třírozměrné případy.[1] Uvedeme také řešení této rovnice ve formě postupných i stojatých vln.[2]

Úvod: formulace problému

Uvažujme strunu hmotnosti m, která je napnuta mezi dvěma body, jejichž vzdálenost je l. Struna je homogenní, elastická[3] a je napnuta silou F. Pro jednoduchost přidáme dva další předpoklady:



1. Části struny kmitají jen ve směru kolmém na spojnici krajních bodů.
2. Sklon částí struny vzhledem ke spojnici krajních bodů je malý.[4]

První předpoklad znamená, že se části struny nepohybují doleva a doprava.[5] Výchylku struny tedy popisuje funkce

$$y = y(x,t)\,, \tag{10.1}$$

kde přitom, díky předpokladu 2,

$$\left|\frac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1 \ . \tag{10.2}$$

Úkolem je najít rovnici pro funkci $y = y(x,t)$ a poté najít alespoň některá její řešení.

Ještě poznámku k označení. Pro krátkost budeme často označovat parciální derivace y jako

$$\frac{\partial y}{\partial x} = y' \ , \quad \frac{\partial y}{\partial t} = \dot{y} \ \ . \tag{10.3}$$

[1] V tomto textu nebudeme vícerozměrné problémy řešit, omezíme se na pohyb struny. Ten se řešívá už na v závěru úvodního kurzu klasické mechaniky, budeme tedy moci porovnat odvození rovnice pomocí variačního počtu s odvozením vycházejícím z druhého Newtonova zákona.

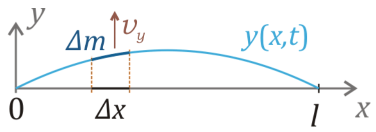
[2] Pro toho, kdo tato řešení zná, to bude připomenutí, shrnutí a v něčem možná doplnění. Vzhledem k tomu, že analogické situace se popisují a řeší v optice, klasické elektrodynamice i v dalších partiích fyziky (a vlnění je také důležitou součástí středoškolské fyziky), není marné probrat si řešení tohoto problému dostatečně podrobně na názorném příkladu kmitající (resp. vlnící se) struny.

[3] Tj. prodlužuje se podle Hookova zákona. Strunu také považujeme za dokonale ohebnou, tedy síly spojené s ohýbáním struny budeme považovat za zanedbatelné. (Jde o strunu, ne o tyč, u ní by byly síly spojené s ohybem samozřejmě podstatné.)

[4] To zčásti souvisí s tím, že výchylky struny bereme jako malé. (Obrázek výše výchylky struny pro názornost přehání. Ovšem reálně jste asi dosud neviděli napnutou strunu na kytaře kmitat s takovýmto rozkmitem.) Ovšem samotný fakt, že výchylky jsou malé, nemusí stačit. Kdyby vlny na struně měly velmi krátkou vlnovou délkou, mohla by být amplituda vln malá, ale sklon by mohl být velký. Obvykle takovýto „velmi krátkovlnný“ případ neuvažujeme; přesto je lépe předpoklad 2 formulovat právě tak, že sklon struny je malý.

[5] … a vystihuje skutečnost, že půjde o **příčné vlnění**.

Lagrangián kmitající struny



Lagrangián našeho problému je $L = T - V$, kde T je kinetická energie kmitající struny a V její potenciální energie. Kinetická energie kousku struny vyznačeného na ose x délkou Δx (viz obrázek) je $\Delta T = \frac{1}{2}\Delta m v_y^2$. Označíme-li délkovou hustotu struny jako $\eta = m/l$,[6] je hmotnost kousku struny

$$\Delta m = \eta\, \Delta x \ . \tag{10.4}$$

Rychlost ve směry osy y je

$$v_y = \frac{\partial y}{\partial t} \equiv \dot{y} \ . \tag{10.5}$$

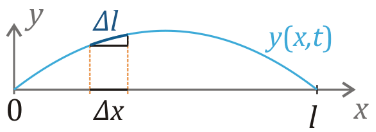
Kinetická energie kousku struny je tedy

$$\Delta T = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \Delta x \ .$$

Celkovou kinetickou energii kmitající struny dostaneme „sečtením přes všechny její kousky“, je tedy dána integrálem

$$T = \int_0^l \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx \ . \tag{10.6}$$

Potenciální energii spočteme jako práci, kterou síla velikosti F, jíž je napínána struna, vykoná při prodloužení struny díky výchylce.[7]



Kousek struny, který má v klidu délku Δx, se při vychýlení struny protáhne na délku $\Delta l = \sqrt{1+(y')^2}\,\Delta x \approx \left(1+\frac{1}{2}(y')^2\right)\Delta x$.[8] Protažení daného kousku je tedy $\Delta l - \Delta x \approx \frac{1}{2}(y')^2\,\Delta x$. Potenciální energie daného kousku struny je proto

$$\Delta V \approx \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \Delta x \ ,$$ [9]

potenciální energie celé struny pak

$$V = \int_0^l \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx \ . \tag{10.7}$$

Lagrangián je tedy

$$L = T - V = \int_0^l \left[\frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2\right] dx \ . \tag{10.8}$$

---

[6] Je-li ρ hustota materiálu struny a S její průřez, je přirozeně $\eta = \rho S$. Struna je homogenní, takže $\eta = \text{konst.}$

[7] Tato úvaha se může zdát na první pohled zvláštní, ale funguje: Představte si, že byste vzali koncový bod struny a strunu natáhli o malý kousek délky d. Protože táhnete silou F, vykonáte práci $F \cdot d$. (Natažení pokládáme za malé, takže síla F, kterou je struna napnuta, se prakticky nezmění.) Stejnou práci ale vykonáme, jestliže strunu o kousek délky d protáhneme tím, že ji vychýlíme do strany. O tuto práci se zvýší potenciální energie struny.

[8] Δx považujeme za malé (resp. nakonec budeme brát limitu $\Delta x \to 0$) a využíváme toho, že $|y'|$ je malé, viz (10.2).

[9] °V limitě limitu $\Delta x \to 0$, která je fakticky skryta v následující integraci se přibližná rovnost ≈ změní v přesnou.

Vidíme, že obecně je lagrangián dán integrálem

$$L = \int_{x_A}^{x_B} \mathscr{L}\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, x, t \right) dx \, .^{10} \tag{10.9}$$

Veličinu $\mathscr{L}$ nazýváme **lagrangeovská hustota**.[11] V lagrangiánu (10.8) bylo konkrétně

$$\mathscr{L} = \frac{1}{2}\eta \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \, . \tag{10.10}$$

Variační princip v případě dvou nezávislých proměnných

V kapitole 8 jsme definovali akci jako[12]

$$S = \int_{t_0}^{t_1} L\left(q_j, \dot{q}_j, t\right) dt \, . \tag{10.11}$$

Dosadíme-li sem za lagrangián (10.9), dostaneme

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \int_{x_B}^{x_A} \mathscr{L}\left(y, \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial t}, x, t \right) dt \, dx \, . \tag{10.12}$$

V analogii s Hamiltonovým principem, který jsme poznali v kapitole 8, můžeme očekávat[13], že struna se bude pohybovat tak, že variace akce je nulová,

$$\delta S = 0 \, .^{14} \tag{10.13}$$

Jakou rovnici musí splňovat funkce $y = y(x, t)$, aby byl splněn variační princip (10.13)? Mohli bychom ji odvozovat podobně, jako jsme v kapitole 8 odvodili Eulerovu-Lagrangeovu rovnici. Může nám však pomoci analogie: Hamiltonův princip užívající akci (10.11), v níž se integruje podle času vedl na Lagrangeovy rovnice druhého druhu. Nyní se ve výrazu pro akci (10.12) integruje přes dvě proměnné, t a x. Obě tyto proměnné vystupují v integrálu zcela rovnocenně. Lze tedy očekávat, že budou vystupovat rovnocenně i v rovnicích pro funkci $y = y(x, t)$. Tedy, že rovnice budou mít tvar

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)} \right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)} \right) - \frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y} = 0 \, . \tag{10.14}$$

---

[10] V našem konkrétním případě $\mathscr{L}$ nezáviselo explicite na *y*, *x* ani *t*, ale v obecném případě by na těchto proměnných mohlo záviset. Meze jsme označili x_A a x_B, v našem konkrétním případě bylo $x_A = 0$ a $x_B = l$.

[11] Musíme ji integrovat přes *x*, abychom dostali lagrangián, podobně, jako třeba délkovou hustotu hmotnosti musíme integrovat přes *x*, abychom dostali celkovou hmotnost.

[12] Jen meze integrálu byly v osmé kapitole t_A, t_B, nyní je značíme t_0, t_1, aby se nám to nepletlo s indexy A a B u proměnné *x*.

[13] Netřeba asi dodávat, že naše očekávání je oprávněné, níže uvedený variační princip je opravdu správným pohybovým zákonem pro kmity struny.

[14] Při této variaci musí být pevně dané polohy struny v počátečním a koncovém čase, tj. $y(x, t_0) = y_0(x)$ a $y(x, t_1) = y_1(x)$ a navíc musí být pevně držené okraje struny, tj. $y(x_A, t) = y(0, t) = 0$ a $y(x_B, t) = y(l, t) = 0$. Znamená to, že výchylky struny jsou pevně zadané na okrajích oblasti vymezené hodnotami (t_0, t_1) a (x_A, x_B)

A opravdu, tohle je správný tvar rovnic, který by nám vyšel i po podrobném odvození. V zápisu rovnice (10.14) nám může připadat nezvyklé derivovat podle parciálních derivací – možná přijatelněji a srozumitelněji rovnice vypadá, označíme-li parciální derivace symboly (10.3):

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}\right)-\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}=0 \tag{10.15}$$

Jasněji teď vidíme, že se tato rovnice opravdu podobá Lagrangeově rovnici druhého druhu

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)-\frac{\partial L}{\partial q}=0\ . \tag{10.16}$$ [15]

Rovnice struny – odvození z variačního principu

Když pomocí značení $\dot{y}$ a y' zapíšeme lagrangeovskou hustotu (10.10),

$$\mathscr{L}=\frac{1}{2}\eta\,(\dot{y})^2-\frac{1}{2}F\,(y')^2\ , \tag{10.17}$$

můžeme lehce spočíst její potřebné derivace[16] a dosazením do (10.15) získat rovnici pro kmity struny:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\eta\dot{y})-\frac{\partial}{\partial x}(F y')=0 \tag{10.18}$$

Můžeme ji upravit např. na tvar $F y''-\eta\ddot{y}=0$. Obvyklejší ale bývá vyjádření, v němž jsou parciální derivace zapsány explicite, např. ve tvaru[17]

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{(F/\eta)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0} \tag{10.19}$$

Rovnice struny – odvození z druhého Newtonova zákona

Pro kontrolu, zda jsme dospěli ke správné rovnici, může být užitečné připomenout si odvození rovnice struny z druhého Newtonova zákona.[18] Jde to docela přímočaře. Pro kousek struny o hmotnosti Δm dává druhý Newtonův zákon

$$\Delta m\frac{d\vec{v}}{dt}=\Delta\vec{F}\ . \tag{10.20}$$

[15] (10.15) a Lagrangeova rovnice (10.16) jsou opravdu analogické, jen místo souřadnice q, která závisí na čase, $q=q(t)$ máme v (10.15) funkci dvou proměnných $y=y(x,t)$. Obě tyto proměnné v rovnici (10.15) vystupují jako nezávisle proměnné a mají v ní členy analogické členu $\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}}\right)$ v Lagrangeových rovnicích 2. druhu. Jen nyní v (10.15) musíme místo totální derivace $\frac{d}{dt}$ psát parciální derivaci $\frac{\partial}{\partial t}$ a podobně pro proměnnou x.

[16] $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial \dot{y}}=\eta\,\dot{y}$, $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y'}=-F\,y'$ a $\frac{\partial \mathscr{L}}{\partial y}=0$.

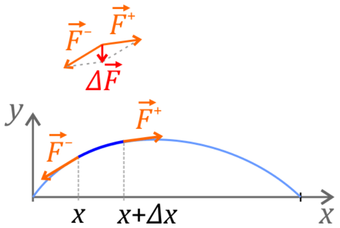
[17] Za chvíli uvidíme, proč v druhém členu píšeme výraz takto do jmenovatele.

[18] Variační princip v případě dvou proměnných a rovnice, které z něho plynou, jsme výše získali jen analogií s jednodušším případem probíraným v kapitole 8. Možná v nás tedy může hlodat červík nedůvěry, jestli jsou opravdu správně. Jsou – ale zatím jsme se museli spolehnout jen na autoritativní tvrzení, že tomu tak je, nebo si je zkontrolovat v učebnicích. Takže není od věci, ověřit si platnost rovnice (10.19) i zcela nezávislým odvozením.

Protože se kousek struny pohybuje jen ve směru osy y, stačí uvažovat jen y-ovou složku rovnice (10.20), tedy $\Delta m \dfrac{dv_y}{dt} = \Delta F_y$. Přitom $\upsilon_y = \dfrac{\partial y}{\partial t}$ a $\Delta m = \eta\,\Delta x$ (viz (10.4)), takže 2. Newtonův zákon dává[19]

$$\eta\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\Delta x = \Delta F_y\ . \tag{10.21}$$

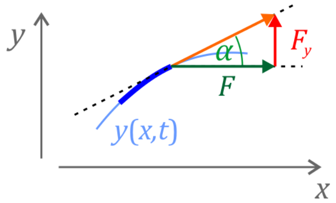
Síla $\Delta\vec{F}$ je součet sil, kterými na daný kousek struny působí části struny napravo a nalevo. (Na obrázku sílu zprava označujeme jako $\vec{F}^+$, sílu zleva jako $\vec{F}^-$.) Ve směry osy y je tedy



$$\Delta F_y = F_y^+ + F_y^- \tag{10.22}$$

Pokud se týče vodorovných, tedy x-ových složek síly, ty musí být zleva i zprava co do velikosti stejné a musí se tedy vyrovnávat, jinak by se daný kousek struny urychloval doprava nebo doleva. Fakticky můžeme říci, že velikost x-ové složky síly je rovna síle F, kterou je struna napnuta, když je v klidu.

Složka síly do směru y závisí na sklonu struny. Jak ukazuje obrázek, $F_y = F\ \mathrm{tg}\,\alpha = F\ y' = F\,\dfrac{\partial y}{\partial x}$. Derivaci ovšem musíme vzít vždy v příslušném bodě, takže $F_y^+ = F\,\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$ a $F_y^- = -F\,\left.\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}$.[20]



Dosazení do (10.22) dá[21]

$$\Delta F_y = F\cdot\left(\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x}\right) \approx F\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\Delta x = F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\Delta x \tag{10.23}$$

Teď už stačí dosadit (10.23) do (10.21):

$$\eta\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,\Delta x \approx F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\,\Delta x$$

a po zkrácení Δx a převedení na jednu stranu dostáváme [22]

$$F\,\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \eta\,\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0\ , \tag{10.24}$$

což už je fakticky rovnice (10.19).[23]

Rovnici struny tedy máme odvozenou. Jak je to s jejím řešením?

[19] Derivaci podle času už píšeme jen jako parciální, i když v (10.20) byla totální derivace. Tam jsme ale brali kousek struny fakticky jako hmotný bod, zatímco v (10.21) funkce $y = y(x,t)$ závisí na dvou proměnných, a tak musíme časovou změnu zapisovat pomocí parciální derivace.

[20] U F_y^- je záporné znaménko, protože na levém kraji daného kousku struny působí síla opačně než na pravém.

[21] Využíváme toho, že rozdíl funkce ve dvou blízkých bodech je $f(x+\Delta x) - f(x) \approx \dfrac{df}{dx}\,\Delta x$, funkcí f je $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

[22] Po limitě $\Delta x \to 0$ díky níž se přibližná rovnost změní v přesnou.

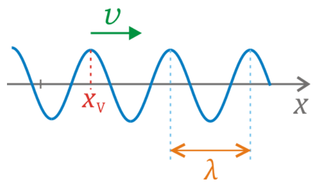
[23] Díky tomu, že nám i při zcela nezávislém odvození vyšla stejná rovnice, snad může stoupnout i naše důvěra ve variační princip použitý k řešení pohybu spojitých prostředí, jako je struna.

Řešení rovnice struny: postupné vlny

Vztah vystihující postupné vlnění[24] [25] se obvykle píše ve tvaru

$$\boxed{y = A\sin(kx - \omega t)\ .} \tag{10.25}$$

Jak víme, že jde o postupnou vlnu a jakou rychlostí taková vlna postupuje?



Obrázek ukazuje výchylky struny[26] v nějakém konkrétním čase t. Zvýrazněn je jeden „vrchol vlny“, jeho souřadnice je označena x_V. Jakou hodnotu musí mít argument funkce sinus v (10.25), aby šlo o vrchol vlny, tedy aby výchylka byla maximální? Pro maximální hodnotu se sinus musí rovnat 1. To znamená, že argument v závorce má hodnotu například $\pi/2$.[27] Pro vrchol je tedy např. $k x_V - \omega t = \pi/2$; odtud

$$x_V = \frac{\omega}{k}t + \frac{\pi}{2k}\ . \tag{10.26}$$

To je ale vztah pro rovnoměrný přímočarý pohyb, $x_V = \upsilon\, t + \mathrm{konst}$. Vidíme, že jde opravdu o postupné vlnění; vrcholy vln (i kterékoli jiné jejich části) postupují podél osy x rychlostí

$$\upsilon = \frac{\omega}{k}\ .^{28} \tag{10.27}$$

Ještě jsme ovšem neukázali, že (10.25) je řešením rovnice struny (10.19), případně za jakých podmínek je řešením. Pro dosazení do rovnice struny potřebujeme spočítat druhé derivace (10.25):

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial x} &= k A\cos(kx - \omega t)\,, & \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} &= -k^2 A\sin(kx - \omega t)\,, \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= -\omega A\cos(kx - \omega t)\,, & \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} &= -\omega^2 A\sin(kx - \omega t)\,. \end{aligned} \tag{10.28}$$

Dosazení do (10.19), tedy do $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \dfrac{1}{(F/\eta)}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2} = 0$ dá

$$-k^2 A\sin(kx - \omega t) + \frac{1}{(F/\eta)}\,\omega^2 A\sin(kx - \omega t) = 0\ ,$$

čili

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{(F/\eta)}\right) A\,\sin(kx - \omega t) = 0\ . \tag{10.29}$$

[24] Jde o postupné vlnění v jednorozměrném případě. Stejnou rovnici může mít postupná rovinná vlna.
[25] V našem případě jde o postupné vlnění *příčné*, výchylky jsou kolmé na směr šíření vlny.
[26] Výchylky jsou na obrázku velmi přehnané, výše jsme rovnici struny odvodili pro malé výchylky, zde nám jde o ilustraci vlnění obecně.
[27] … nebo $3\pi/2$, $5\pi/2$, zkrátka obecně $(2k+1)\pi/2$.
[28] Skutečnost, že jde o postupné vlnění, je také jasně vidět, když (10.25) přepíšeme jako $y = A\sin\big(k(x - \upsilon t)\big)$.

Tato rovnice musí být splněna pro všechna x a všechna t. Aby to bylo pravda, musí platit $-k^2+\dfrac{\omega^2}{(F/\eta)}=0$, čili $\dfrac{\omega^2}{k^2}=\dfrac{F}{\eta} \Rightarrow \dfrac{\omega}{k}=\sqrt{\dfrac{F}{\eta}}$. Porovnáním s (10.27) vidíme, že rychlost postupných vln na struně je

$$\boxed{\upsilon=\sqrt{\frac{F}{\eta}}\ .} \qquad (10.30)$$

Tím pádem můžeme rovnici struny (10.19) psát jako

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0\ .} \qquad (10.31)$$

Fakticky jde o jednorozměrný případ **vlnové rovnice.**[29]

V případě výše uvedeného vlnění (10.25) jde o harmonickou vlnu[30]. Bylo by možno vyjádřit i vlnu zcela obecného profilu? Jde to, stačí pro libovolnou funkci $f=f(\xi)$[31] napsat

$$\boxed{y=f(x-\upsilon t)\ .} \qquad (10.32)$$

Druhé derivace (10.32) jsou[32]

$$\frac{\partial y}{\partial x}=\frac{df}{d\xi}\ , \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\,,$$

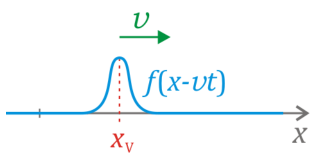
$$\frac{\partial y}{\partial t}=\frac{df}{d\xi}\cdot(-\upsilon), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\,\upsilon^2\ .$$

Po dosazení do levé strany (10.31) dostaneme

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=\frac{d^2 f}{d\xi^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{d^2 f}{d\xi^2}\upsilon^2=\frac{d^2 f}{d\xi^2}\left[1-\frac{\upsilon^2}{\upsilon^2}\right]=0\ .$$

Vidíme tedy, že (10.32) opravdu *je* řešením rovnice struny. A skutečně jde o postupnou vlnu šířící se rychlostí υ: jestliže funkce $f(\xi)$ má maximum pro nějakou hodnotu ξ_V, je vrchol funkce na místě o souřadnici

$$x_V=\upsilon t+\xi_V\ .$$



Profil funkce *f* přitom zůstává stále stejný, jen se pohybuje podél osy x.[33]

---

[29] Ve třírozměrném případě vlnová rovnice, např. pro zvukové vlny, má tvar $\Delta p-\dfrac{1}{\upsilon^2}\dfrac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$. Zde p je tlak vzduchu, a Δ je Laplaceův operátor, $\Delta p=\dfrac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\dfrac{\partial^2 p}{\partial z^2}$.

[30] Prostě, ve vztahu je sinus nebo kosinus argumentu.

[31] Spojitou a derivovatelnou do druhého řádu.

[32] Rozmyslete si, že tohle je pravda. (Stačí použít pravidlo pro derivaci složené funkce, takže např. $\dfrac{\partial f}{\partial t}=\dfrac{df}{d\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial t}$, kde $\xi=x-\upsilon t$.)

[33] Poznamenejme, že na obrázku profilu vlny na této stránce (a na dalších podobných obrázcích na dalších stránkách) je pro názornost **velice přehnána** amplituda vlny. Takováto vlna by neodpovídala podmínce (10.2), kterou jsme použili při odvozování vlnové rovnice, tedy tomu, že sklon struny musí být velmi malý.

Řešení rovnice struny: stojaté vlny

Harmonická stojatá vlna je popsána vztahem[34]

$$\boxed{y = A\sin(kx)\sin(\omega t)\;,} \tag{10.33}$$

kde $\omega = 2\pi f$ je úhlová frekvence vlnění a $k = 2\pi/\lambda$ je vlnové číslo.[35] Dokázat, že (10.33) je řešením rovnice struny znamená spočítat druhé derivace

$$\begin{aligned} &\frac{\partial y}{\partial x} = k\,A\cos(kx)\sin(\omega t), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 A\sin(kx)\sin(\omega t), \\ &\frac{\partial y}{\partial t} = \omega A\sin(kx)\cos(\omega t), \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) \end{aligned} \tag{10.34}$$

a dosadit je do levé strany (10.31):

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -k^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) + \frac{1}{\upsilon^2}\omega^2 A\sin(kx)\sin(\omega t) = \left(-k^2 + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\right)A\sin(kx)\sin(\omega t)$$

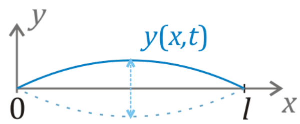
Rovnice struny tedy bude splněna, pokud pro všechna x a t bude platit

$$\left(-k^2 + \frac{\omega^2}{\upsilon^2}\right)A\,\sin(kx)\,\sin(\omega t) = 0\;. \tag{10.35}$$

Nutnou a postačující podmínkou pro to je $-k^2 + \dfrac{\omega^2}{\upsilon^2} = 0$, čili $\upsilon = \dfrac{\omega}{k}$, což je stejný vztah, jako v případě postupné harmonické vlny (viz (10.27)).

Jde-li o stojaté vlny na struně konečné délky, musí být splněny **okrajové podmínky**

$$y(0,t) = 0\,, \quad y(l,t) = 0\;.^{36} \tag{10.36}$$



První podmínka je splněna již volbou řešení (10.33).[37] Aby byla splněna druhá podmínka, musí platit

$$\sin(kl) = 0 \quad\Rightarrow\quad k\,l = n\,\pi \text{ , kde } n = 1, 2, 3, \ldots \tag{10.37}$$

Protože $k = 2\pi/\lambda$, plyne z (10.37), že $\lambda = 2l/n$, tedy, že na délku struny připadne celý počet půlvln.[38] Na druhou stranu mezi k a ω platí vztah $\omega = k\cdot\upsilon$ (viz (10.27)), takže

$$2\pi f = \omega = k\cdot\upsilon = (n\pi/l)\,\upsilon\;, \tag{10.38}$$

---

[34] Toto není obecný tvar stojaté vlny. V obou argumentech funkcí sinus by mohly být ještě fázové konstanty, případně bychom mohli uvažovat kombinace sinů a kosinů. Vztah (10.33) však bude vyhovovat situaci, kterou budeme dále popisovat.

[35] Přitom f je frekvence vlnění a λ vlnová délka. Rozmyslete si, že vztah (10.33) opravdu popisuje vlnění s touto frekvencí a vlnovou délkou. A rozmyslete si, jak byste to vysvětlili středoškolákům – tento popis je na úrovni středoškolské fyziky. (Stejně tak musíme umět vysvětlit význam příslušných parametrů v případě harmonické postupné vlny, tedy ve vztahu (10.25).)

[36] Na začátku a na konci je struna upevněna a nemůže se tam hýbat.

[37] Protože $\sin(k\cdot 0) = 0$.

[38] Což je logické. (Rozmyslete si proč.)

čili (po dosazení (10.30))

$$f = n\frac{\upsilon}{2l} = n\frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\eta}}\;, \quad n = 1,2,3,\ldots \tag{10.39}$$

Struna tedy může kmitat základní frekvencí $f_1 = \frac{1}{2l}\sqrt{\frac{F}{\eta}}$ a jejími násobky.[39] [40]

Složitější případy stojatého vlnění dostaneme složením stojatých vln těchto základních frekvencí. Vlnová rovnice (10.31) je totiž lineární[41], takže součet řešení je opět řešením. Kmitání struny držené pevně na koncích x=0 a x=l je tedy obecně

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\sin(\omega_n t + \varphi_n)\,, \tag{10.40}$$ [42]

kde (viz (10.37))

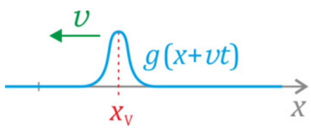
$$k_n = n\frac{\pi}{l}, \quad \omega_n = n\frac{\pi}{l}\upsilon\;. \tag{10.41}$$

Hodnoty amplitud A_n a fázových posunutí φ_n určíme z počáteční podmínky v čase t=0, tedy z výchylky v čase 0 a z rychlosti v tomto čase.[43]

Zpět k postupným vlnám

Vztah (10.32) popisuje vlnu libovolného tvaru pohybující se doprava, tedy v kladném směru osy x (pro υ >0). Vlnu pohybující se doleva popíšeme podobně:

$$y = g(x + \upsilon t)\;. \tag{10.42}$$



Že vztah (10.42) je řešením vlnové rovnice (10.31), dokážeme stejně, jako výše.
Protože vlnová rovnice je lineární[44], je jejím řešením i součet řešení (10.32) a (10.42):

$$\boxed{y = f(x - \upsilon t) + g(x + \upsilon t)\;.} \tag{10.43}$$

Vlna pohybující se doprava a vlna pohybující se doleva se nijak neovlivňují.[45]
Řešení (10.43) využijeme, abychom popsali odraz vlnění na pevném a volném konci.

---

[39] Mluvíme o tzv. vyšších harmonických. Obecně, když drnkneme třeba na strunu kytary, zní současně základní tón i vyšší harmonické, našemu uchu to zní libozvučně. (Uvádí se, že s výjimkou sedmé harmonické.)

[40] Kvalitativně můžeme zkontrolovat, že se vztah pro frekvenci základního tónu chová rozumně: napneme-li strunu větší silou F, frekvence roste (výška tónu vzrůstá), naopak hmotnější struna (s vyšší délkovou hustotou hmotnosti η) kmitá s nižší frekvencí, tedy zní hlubším tónem.

[41] A na pravé straně má nulu.

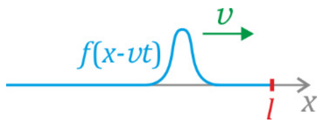
[42] Zde jsme již k argumentu $\omega_n t$ přidali fázové posunutí φ_n, abychom vystihli obecnou situaci. Alternativní vyjádření obecného řešení je $y = \sum_{n=1}^{\infty}\sin(k_n x)\left[A_n\sin(\omega_n t) + B_n\cos(\omega_n t)\right]$.

[43] $y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(k_n x)\sin(\varphi_n)$, $\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n)A_n \sin(k_n x)\cos(\varphi_n)$. V případě alternativního řešení (viz předchozí poznámku): $y(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cos(k_n x)$, $\dot{y}(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\omega_n)A_n \sin(k_n x)$.
Matematicky jde v tomto případě o rozvoj funkce $y(x,0)$ (a $\dot{y}(x,0)$) do *Fourierovy řady*. Zájemce odkazujeme na příslušnou partii matematiky; jednoduše lze říci, že vztahem (10.40) popíšeme libovolné kmitání struny délky l uchycené pevně na koncích.

[44] A má nulovou pravou stranu.

[45] Názorně řečeno, „mohou sebou volně projít“.

Odraz postupné vlny na pevném konci



Uvažujme případ, kdy se postupná vlna pohybuje doprava ke konci v místě $x=l$, v němž strunu pevně držíme. Pro její výchylku v daném místě (v libovolném čase t) tedy platí

$$y(l,t)=0 \ . \tag{10.44}$$

Samotné řešení (10.32), tedy vlna pohybující se doprava, tuto podmínku nemůže splnit. V kombinaci s vlnou pohybující se doleva už to půjde. Řešení (10.43) dá pro $x = l$:

$$y(l,t) = f(l-vt)+g(l+vt) \ , \tag{10.45}$$

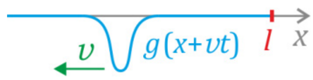
takže okrajovou podmínku (10.44) splníme, když je

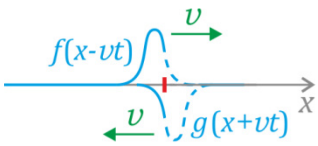
$$f(l-vt)+g(l+vt) = 0 \ . \tag{10.46}$$

Odtud $g(l+vt)=-f(l-vt)$, což můžeme zapsat jako

$$g(\xi)=-f(2l-\xi) . \tag{10.47}$$

Vlna $y=f(x-vt)$ je vlna ***„dopadající“*** na konec struny, vlna $y=g(x-vt)$ je vlna ***odražená*** od tohoto konce. Vidíme, že výchylka odražené vlny je na opačnou stranu, než byla výchylka dopadající vlny.[46]





Jak vypadá situace v průběhu odrazu vlny, ukazuje obrázek vlevo. Skutečný tvar vlny by byl součtem výchylek vlny dopadající a odražené.[47] Z obrázku je vidět, že na konci struny je součet výchylek nulový

Vlna na struně odrážející se na pevném konci struny je tedy popsána vztahem (10.43), kde platí (10.47). Ovšem – samozřejmě – toto platí jen pro $x < l$. [48] Správně bychom tedy **pro odraz na pevném konci** měli psát

$$y(x,t) = f(x-vt)+g(x+vt) \quad \text{pro } x\le l \ , \quad g(\xi)=-f(2l-\xi) \ . \tag{10.48}$$ [49]

Poznamenejme, že nejnázorněji vypadá vztah mezi dopadající a odraženou vlnou v případě, když koncový bod struny vezmeme za počátek osy x, tedy když bude $l = 0$. Pak je prostě

$$g(\xi)=-f(-\xi) \ . \tag{10.49}$$ [50]

Analogicky jako výše můžeme popsat situaci, kdy vlna šířící se doleva narazí na pevný konec a odražená vlna se pak pohybuje doprava.

Dodejme ještě, že podobně se na pevném konci odráží podélná vlna šířící se například na pružině; odražená vlna má opět „opačnou fázi“, tedy výchylku opačným směrem než vlna dopadající.

---

[46] V této souvislosti se říká, že odraz na pevném konci ***obrací fázi*** vlny, resp. že odražená vlna má *opačnou fázi* než vlna dopadající. (O fázi má ovšem smysl mluvit spíše u harmonických vln. Někdy se proto lze setkat s formulací, že odražená vlna má opačnou *polaritu*.)

[47] Na obrázku už není zakreslen, to už by tam bylo křivek až příliš – pokud by vám tam skutečný tvar chyběl, dokreslete si ho prosím sami…

[48] Struna končí v bodě $x=l$, do části $x>l$ už struna pokračovat nemusí. Na obrázku jsou proto části vln pro $x>l$ kresleny jen čárkovaně, v této oblasti už žádná vlna není.

[49] Případně po dosazení za g: $y(x,t) = f(x-vt)-f(2l-(x+vt))$ pro $x\le l$.

[50] A tedy $y(x,t) = f(x-vt)-f(-(x+vt))$ pro $x\le l$.

Odraz postupné vlny na volném konci

Volný konec se snáze realizuje na pružině, na níž se šíří podélná vlna. Ale i na struně můžeme volný konec alespoň přibližně realizovat.[51]

Na volném konci se může struna vychylovat ve směru osy y – ale ve směru osy y na konec struny nepůsobí žádná vnější síla.[52] To znamená, že struna musí být na tomto konci rovnoběžná s osou x,[53] tady, že v bodě $x = l$ platí

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_l = 0 \ . \tag{10.50}$$

Řešení (10.43), tedy kombinace dopadající a odražené vlny, musí splňovat tuto podmínku, tj.

$$\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_l = \left.\frac{\partial}{\partial x}\right|_l \big(f(x-\upsilon t) + g(x+\upsilon t) \big) = 0 \ . \tag{10.51}$$

Tuto podmínku lze upravit na[54]

$$\left.\frac{d}{d\xi}\right|_{l-\upsilon t} f(\xi) \ + \left.\frac{d}{d\xi}\right|_{l+\upsilon t} g(\xi) = 0 \ . \tag{10.52}$$

Označíme-li derivaci podle ξ čárkou, má (10.52) tvar

$$f'(l-\upsilon t) + g'(l+\upsilon t) = 0 \ , \tag{10.53}$$

a když označíme $l+\upsilon t = \xi$:

$$f'(2l-\xi) + g'(\xi) = 0 \ . \tag{10.54}$$

Integrací (10.54) podle ξ získáme

$$\underbrace{\int f'(2l-\xi)d\xi}_{-f(2l-\xi)+C_1} + \underbrace{\int g'(\xi)d\xi}_{g(\xi)+C_2} = C_3 \ , \tag{10.55}$$

čili[55]

$$-f(2l-\xi) + g(\xi) = C \quad \Rightarrow \quad g(\xi) = f(2l-\xi) + C \ . \tag{10.56}$$

Jednoduchou úvahou lze ukázat, že integrační konstanta C je rovna nule: Výchylka struny je dána řešením (10.43), tedy $y = f(x-\upsilon t) + g(x+\upsilon t)$. Když dopadající vlna $f(x-\upsilon t)$ ještě nedospěla ke koncovému bodu, je před ní struna rovná a nevychýlená, je zde tedy $y = 0$. Část řešení $g(x+\upsilon t)$ přitom dle (10.56) dává pro danou část struny $y = C$, musí tedy být $C = 0$.[56]

---

[51] Potřebujeme konec struny táhnout ve směru osy x (aby byla struna napínána silou F), ale přitom na strunu nepůsobit silou ve směru osy y. To se dá (byť ne ideálně) udělat tak, že konec struny táhneme nějakou velmi lehkou „nití". V případě ocelové struny by onou „nití" mohla být mnohem tenčí struna. Když vlnění na struně demonstrujeme pomocí dlouhého gumového vlákna (hodí se guma prodávaná v galanterii jako guma do bund), lze na konec gumy opravdu přivázat tenkou pevnou nit a tu držet dostatečně daleko a tahem za ni gumu napínat.

[52] Konec struny je tažen jen ve směru osy x, viz předchozí poznámku.

[53] Kdyby zda struna byla šikmá, táhla by „kousek struny na konci" ve směru osy y nějakou silou. (Velikost této síly by byla $F \cdot \mathrm{tg}\alpha$, kde F je síla napínající strunu a α úhel, který struna svírá s osou x.) Ale daný kousek struny můžeme zvolit libovolně malý, může tedy mít libovolně malou hmotnost. Takže pro $\alpha \neq 0$ by měl libovolně velké (v limitě tedy nekonečné) zrychlení v y-ovém směru. A to se neděje, proto musí být α=0.

[54] Protože $\frac{\partial}{\partial x} f(\xi(x)) = \frac{df}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{df}{d\xi}$, neboť $\frac{d\xi}{dx} = 1$ (protože $\xi = x - \upsilon t$), podobně pro derivaci g.

[55] Integrační konstanty zde sloučíme do jediné.

[56] Podrobněji: Nechť např. funkce $f(\xi)$ je nenulová jen na intervalu (-0,1 m, 0,1 m) a je υ=1 m/s a l=1 m. V čase t=0 s je před dopadající vlnou $y = f(x-\upsilon t)$ rovný úsek struny 0,1 m < x ≤ 1 m. Odražená vlna $y = g(x+\upsilon t)$ je dle (10.56) rovna $y = f(2l-x-\upsilon t)+C$, v čase t=0 s je tedy $y = f(2l-x)+C$, což pro $x<l$ dává právě hodnotu C.

Je tedy vidět, že pro odraz na volném konci platí pro odraženou vlnu $y=g\left(x-\upsilon t\right)$:

$$g\left(\xi\right)=f\left(2l-\xi\right) \ . \tag{10.57}$$

Celkově je tedy **pro odraz na volném konci** postupná vlna popsána vztahem

$$y\left(x,t\right) = f\left(x-\upsilon t\right)+g\left(x+\upsilon t\right) \ \text{ pro } x\le l \ , \quad g\left(\xi\right)=+f\left(2l-\xi\right) \ .^{57} \tag{10.58}$$

Zatímco na pevném konci měla odražená vlna „opačnou fázi“ (resp. „opačnou *polaritu*“) než vlna dopadající, na volném konci je její „fáze“ (resp. „polarita“) stejná jako u vlny dopadající.[58]

Opět lze poznamenat, že názorněji vypadá vztah mezi dopadající a odraženou vlnou v případě, když koncový bod struny vezmeme za počátek osy x, tedy když bude l = 0. Pak je pro odraženou vlnu

$$g\left(\xi\right)=f\left(-\xi\right) \ . \tag{10.59}$$

Situace, kdyby volný byl levý konec struny a odražená vlna by se pohybovala doprava, by byla analogická.

Závěrečná poznámka

Přestože jsme se v závěrečných částech kapitoly věnovali konkrétním řešením rovnice struny, neměli bychom zapomenout na základní poznatek, s nímž jsme se seznámili: variační princip lze z případu soustavy hmotných bodů dobře zobecnit i na soustavy s nekonečným počtem stupňů volnosti, tedy na spojitá prostředí.

Několik příkladů:

Analogicky k příčným vlnám na struně lze popsat podélné vlny například na pružině.

Podobně lze popsat a řešit další případy mechanických vlnění, ve dvourozměrném případě například vlny membrány bubnu. Vlnová rovnice v tomto případě je

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=0 \ , \tag{10.60}$$

zde souřadnice x a y jsou tečné k rovině membrány, souřadnice z je na ni kolmá.
Ve třírozměrném případě může vlnová rovnice vystihovat například akustické vlny (postupné nebo stojaté). Má pak tvar

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 p}{\partial z^2}-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0 \ .^{59} \tag{10.61}$$

Veličina $p = p(x,t)$ je *akustický tlak*, tedy rozdíl tlaku vzduchu na daném místě v daném čase a atmosférického tlaku (tedy tlaku na daném místě, když by zde nebyl zvuk), υ je rychlost zvuku.

Asi není nutno připomínat, že se s vlnovou rovnicí se setkáme i jinde, třeba při popisu elektromagnetických vln – ale to už jsme mimo oblast mechaniky…

---

[57] Po dosazení dostáváme $y\left(x,t\right) = f\left(x-\upsilon t\right)+f\left(2l-(x+\upsilon t)\right)$ pro $x\le l$.

[58] Srovnejte (10.58) a (10.48).

[59] Tedy $\Delta p-\frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 p}{\partial t^2}=0$, kde Δ je Laplaceův operátor.