III. Východiska speciální teorie relativity a Lorentzova transformace

III.1. Speciální princip relativity

V předešlé kapitole jsme viděli, že má-li éterová teorie vysvětlit výsledky pokusů, musí se doplnit o předpoklady, které se "podezřele" blíží některým důsledkům teorie relativity (kontrakce délek a dilatace času). Pro každou další zkoumanou oblast bychom ovšem v éterové teorii museli zavádět další předpoklady, aby nebyla ve sporu s výsledky pokusů.

Všimněme si třeba zpožďování chodu hodin pohybujících se vůči éteru. To bylo v Lorentzově teorii zavedeno pro všechny jevy z oblasti, která byla zkoumána - tj. pro všechny jevy elektromagnetické povahy. Stačilo to k vysvětlení Kennedyho-Thorndikeova pokusu. Nijak odtud ale neplyne, že třeba rozpad nestabilních elementárních částic by měl probíhat také pomaleji, pokud se vůči éteru pohybují. Tento proces je totiž dán silnou případně slabou, nikoli elektromagnetickou interakcí. V zásadě bychom si tedy mohli představit, že pohyb vůči éteru tyto procesy nijak neovlivní, nebo že je ovlivní jinak. To by dávalo možnost právě s jejich pomocí soustavu éteru nalézt.

Pokusy však ukazují, že tomu tak není a "rozpadové hodiny" jdou ve všech inerciálních systémech stejně rychle jako hodiny založené na elektromagnetických jevech. K udržení éterové teorie by tedy bylo nutno zavést nový předpoklad – předpoklad o chování rozpadových procesů při pohybu částic vůči éteru.

Podobně bychom další předpoklady museli zavádět v kvantové mechanice, kvantové teorii pole atd.

Takovéto vymýšlení dalších a dalších ***předpokladů ad hoc*** (případ od případu) jen proto, abychom znovu a znovu zachraňovali éterovou teorii, resp. přizpůsobili její důsledky výsledkům nových pokusů, nás asi nepřesvědčí, že éterová teorie je ta pravá pro vysvětlení zkoumaných jevů.

Spíše to posiluje podezření, že takto přicházíme o jakési základní vysvětlení.

Podezření, že lpět na představě éteru a uměle udržovat koncepci absolutní klidové soustavy nám zabraňuje vidět skutečnou souvislost všech zmiňovaných jevů a experimentálních fakt.

Uvedené úvahy se mohou zdát vágní a nepřesné. Některým čtenářům snad připadají i zbytečné. Fyzika ovšem není pouhým odvozováním důsledků z předem daných axiomů. Je snahou vyznat se v přírodních jevech, hledáním cest, jak je co nejlépe vystihnout a popsat společnými zákony a jako taková nepracuje jen podle exaktně definovaných formulek. Právě při hledání nových fyzikálních zákonů a budování nových teorií se nejvíce uplatňují i obecné kvalitativní úvahy a některé principy, které třeba nedávají pro další postup přesný návod, ale mohou naznačit vhodný směr.

Takovým obecně uznávaným, ale ne přesně formulovaným principem je konstatování, že

> Fyzikální zákony a teorie nejsou zbytečně komplikované
> a nepoužívají zbytečné pojmy.

(Rozumí se pojmy zbytečné pro popis a vystižení zkoumaných jevů.) Toto konstatování, resp. požadavek na fyzikální teorie bývá nazýván ***princip jednoduchosti***. Co to ovšem v konkrétních případech znamená "zbytečně komplikované" již princip jednoduchosti neříká.

Skutečně základní teorie opravdu v zásadě jednoduché jsou. (Obvykle to ovšem poznáme, až když se s nimi důkladně seznámíme.) Například základní zákon klasické mechaniky by jistě v nějakém hypotetickém světě mohl být podstatně komplikovanější než newtonovské $m\vec{a} = \vec{F}$. (Jednodušší zákon, třeba $m\vec{v} = \vec{F}$ by zase nedal bohatství jevů, které pozorujeme.)

Albert Einstein často mluvil o hledisku, které je principu jednoduchosti velmi blízké – o požadavku ***vnitřní krásy teorie***. Měl tím na mysli její konzistentnost, ale i to, že vystačí s minimem předpokladů a nových pojmů. Éterová teorie s řadou "přilepených" předpokladů z tohoto hlediska jistě příliš krásná není.

Poznamenejme, že princip jednoduchosti není vlastní jen fyzice, ale prakticky celému novověkému vědeckému myšlení. Již v hlubokém středověku jej formuloval anglický filozof William Occam. O požadavku "odřezávajícím" z teorie vše zbytečné se proto často mluví jako o ***Occamově břitvě***.

Vraťme se zpět k problematice éteru a éterové teorie. Bez obecných úvah se zde neobejdeme, neboť jsme nyní vlastně na rozcestí:

a) **Buď** budeme stále tvrdit, že absolutní klidová soustava (soustava éteru) existuje a zkracování předmětů a zpomalování hodin při pohybu vůči ní jsou absolutní. V jiných soustavách by tedy měření délek a času bylo zkreslené, světlo by se vůči nim ve skutečnosti nepohybovalo stejnou rychlostí atd.

Pak budeme ovšem muset teorii doplňovat stále novými předpoklady, abychom vysvětlili výsledky pokusů z nově zkoumaných oblastí. Výsledky těchto pokusů tedy ani nebudeme moci předem předpovědět. A bude nám naprostou záhadou, proč jsou fyzikální zákony zrovna takové, že znemožňují najít naši "milovanou" absolutní klidovou soustavu.

Otázkou je (vyhrotíme-li formulaci), k čemu nám taková teorie bude dobrá.

b) **Nebo** zkonstatujeme ve shodě s principem jednoduchosti, že zbytečné pojmy jsou zbytečné. A uvážíme, že když nelze soustavu éteru žádným způsobem určit, znamená to zřejmě, že

žádná soustava éteru v přírodě neexistuje.

Ostatně dnes víme, že světlo nepotřebuje žádné látkové prostředí, jehož vlněním by bylo. Světlo je elektromagnetické vlnění. A elektromagnetické pole má svébytnou existenci, na žádném látkovém nosiči nezávislou. Pojem éteru je zbytečný, v přírodě mu nic neodpovídá. Je tedy přirozené ho z fyziky vyškrtnout.

Optika – a obecně elektrodynamika – žádnou inerciální soustavu nepreferuje. To ukázaly již všechny výše zmíněné pokusy. Je tedy na místě prohlásit všechny inerciální soustavy z hlediska elektrodynamiky a optiky za rovnoprávné.

V předešlé kapitole jsme ale viděli, že totéž platí i v klasické mechanice. A zde nás může napadnout otázka: Proč by mělo být toto konstatování omezeno jen na mechaniku a elektrodynamiku s optikou? Fyzika, jako každá věda, ráda zobecňuje a činí předpovědi pro širší oblast jevů, než jaká byla experimentálně zatím prověřena. To je ostatně způsob, jakým se zejména teorie rozvíjí. Jinak bychom byli odkázáni jen na empirické a poloempirické vztahy a pravidla.

Zde máme k zobecnění krásnou příležitost: klasický princip relativity lze zobecnit a prohlásit všechny inerciální systémy za rovnoprávné z hlediska všech oblastí fyziky, tj. z hlediska všech fyzikálních zákonů, všech pokusů…

Toto tvrzení se nazývá **speciální princip relativity**. (Termínem *speciální* se zde míní skutečnost, že daný princip se týká jen inerciálních systémů.) Podobně jako klasický princip relativity jej můžeme formulovat různými způsoby:

S důrazem na experimenty:

Libovolný stejně připravený pokus dá ve všech inerciálních systémech stejný výsledek.

(Jinak řečeno: Libovolnými pokusy nelze od sebe jednotlivé inerciální systémy rozlišit.)

Klademe-li důraz *na fyzikální zákony*, můžeme dát přednost ekvivalentní formulaci:

Libovolné fyzikální zákony mají ve všech inerciálních systémech stejný tvar.

Speciální princip relativity lze samozřejmě rovněž shrnout do již výše naznačeného konstatování:

Všechny inerciální systémy jsou rovnoprávné.

Případně:

Žádný inerciální systém není privilegován.

(Ani z hlediska experimentů ani z hlediska fyzikálních zákonů.)

Speciální princip relativity je shrnutím výsledků experimentů, třeba těch, o kterých jsme se výše zmiňovali. Protože je však zároveň jejich *zobecněním*, tvrdí cosi i o výsledcích experimentů dosud neprovedených. Umožňuje tedy předpovídat výsledky experimentů. Tyto předpovědi lze pak prakticky ověřovat.

Je povzbuzující, že za více než sto let od vzniku speciální teorie relativity nebyl navzdory obrovskému rozvoji fyziky objeven ani jeden fakt, který by byl se speciálním principem relativity v rozporu. To naznačuje, že se jím zřejmě podařilo vystihnout podstatnou přírodní zákonitost.

Zároveň speciální princip relativity poskytuje i vodítko při hledání nových fyzikálních zákonů: Ze všech možných zákonů je nutno vybírat ty, které mají ve všech inerciálních systémech stejný tvar. Speciální princip relativity tedy má cenu při hledání nového, tj. ***heuristickou cenu***. Právě tato heuristická cena je to, co zcela chybí éterové teorii. A právě ona činí ze speciálního principu relativity mocný nástroj a jedno ze základních východisek speciální teorie relativity.

III.2. Měření prostoru a času

Speciální princip relativity bývá také nazýván prvním postulátem speciální teorie relativity. Tento princip však již samozřejmě předpokládá platnost 1. Newtonova zákona ve formě uvedené v kapitole II.1, tj. předpokládá, že

existuje inerciální systém.

Poznámka: Stačí předpokládat, že existuje alespoň jeden. To, že inerciální systémy pohybující se vůči němu rovnoměrně přímočaře, jsou také inerciální, je vcelku zřejmé a lze to odvodit i formálně.

- **Měření prostoru**

Jak jsme se již zmínili výše, pojem inerciálního systému v sobě zahrnuje předpoklad, že prostor je euklidovský a že v něm tedy lze zavést kartézskou soustavu souřadnic. Uvedli jsme také, že tuto soustavu by bylo možno v principu realizovat pomocí měřicích tyčí. Nyní bychom měli pojem měřicí tyče a vůbec **měření délek** upřesnit.

V klasické mechanice lze předpokládat ideálně tuhé měřicí tyče. Jak ale uvidíme dále, speciální teorie relativity *nepřipouští* existenci absolutně tuhých těles. Naštěstí to nevadí, neboť na měřicí tyče, které jsou v nějakém inerciálním systému v klidu, nepůsobí žádné setrvačné síly, které by je mohly deformovat. Pokud se měřicí tyče před vlastním měřením pohybovaly zrychleně, musíme předpokládat, že nedošlo k jejich plastické deformaci nebo že ji umíme korigovat. Podstatné je vyloučit i všechny vnější vlivy, které by mohly měnit délku tyče – klasickým příkladem jsou změny teploty. Pro teoretické úvahy, myšlenkové pokusy apod. předpokládáme, že měřicí tyč žádným vnějším vlivům nepodléhá – tedy že jde o **ideální měřicí tyč**.

Invarová tyč s vyznačeným měřítkem se jistě představě ideální tyče značně blíží. V principu však není nezbytné hledat materiál, který by na vnější vlivy vůbec nereagoval. Stačí vnější vlivy ***odstínit*** – například umístit běžné měřítko do termostatu.

Druhou možností je využít faktu, že vnější vlivy působí na tyče z různých materiálů různě. Ocelové měřítko se roztahuje jinak než hliníkové. Známe-li koeficienty jejich teplotní roztažnosti, můžeme z měření dané délky oběma měřítky výpočtem určit přesnou hodnoty délky. Nebo lze ze dvou měřítek udělat teploměr, třetím měřit délku a ze zjištěné teploty vypočíst korekci. Podstatné je, že vnější vlivy lze výpočtem odkorigovat.

Problémy by mohl způsobit jedině vnější vliv, od něhož by nebylo možno měřítko izolovat a který by působil na všechny tyče stejně – tzv. *univerzální vliv*. Takovýto vnější vliv v rámci speciální teorie relativity neuvažujeme.

Ideální měřicí tyč resp. ideální měřítko tedy není jen pouhou teoretickou konstrukcí, kterou by nebylo možno s dostatečnou přesností realizovat.

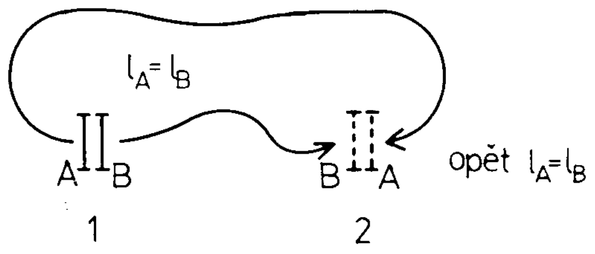
Zbývá ještě otázka:

Jak zajistit, aby všechny měřicí tyče byly stejně dlouhé?

To lze v principu dvojím způsobem.

Buď všechny měřicí tyče vyrobíme na jednom místě, vzájemně je zde porovnáme a okalibrujeme. Pak je potřeba tyče **roznést** v prostoru na místa, kde je budeme potřebovat.

Pokládáme přitom za samozřejmé, že pokud dvě tyče, jejichž délka byla při porovnávání stejná, přeneseme dvěma různými cestami do téhož místa, bude při novém porovnání jejich délka opět stejná. (Viz obr. III.1.) Říkáme, že **přenos délkové jednotky je integrabilní**. Ve světě, kde by tomu tak nebylo, bychom si asi připadali jako Alenka v říši divů – rozhodně by se nejednalo o euklidovský prostor.



Obr. III.1. Integrabilita přenosu délkové jednotky

Druhou možností je v každém potřebném místě měřicí tyč znovu vyrobit, tj. danou délku v každém místě znovu **reprodukovat**. Za jednotkovou délku lze třeba v každém místě vzít 1 650 763,73-násobek vlnové délky záření, které přísluší přechodu mezi hladinami $2p_{10}$ a $5d_5$ atomu kryptonu 86. (Tak byl v soustavě SI definován metr do roku 1983.) Díky homogenitě prostoru se můžeme spolehnout, že takto dostaneme tyče stejné délky (jak bychom zjistili jejich přenesením na stejné místo a porovnáním).

Máme-li k dispozici měřicí tyče, můžeme měřit délky a také úhly, vytvořit kartézskou soustavu souřadnic (spojenou s danou vztažnou soustavou) a určovat v této soustavě prostorové souřadnice bodů. Prostorová měření tak dostala jasný základ.

Zdůrazněme ještě, že každá inerciální vztažná soustava má svůj vlastní systém měřicích tyčí. K měření v dané soustavě používáme jen ty tyče, které jsou vůči ní v klidu.

- **Měření času**

Měření prostorových souřadnic ovšem nestačí. Fyzika potřebuje popsat pohyb, tj. obecně závislost souřadnic na čase. Podobně jako prostorová měření musíme tedy upřesnit i **měření času**.

Určovat čas v dané vztažné soustavě by v principu bylo možno pomocí jediných hodin. Bylo by to však značně komplikované. Vždy, když chceme změřit čas nějaké události, by bylo nutné poslat zprávu (signál) daným „ústředním“ hodinám, zjistit na nich čas, kdy zpráva došla a započítat dobu, po níž zpráva šla k hodinám. Nebo by „ústřední“ hodiny musely stále vysílat časové signály a v místě příjmu bychom k hlášenému času museli přičítat dobu šíření signálu.

Z hlediska obecných úvah je jednodušší představit si, že v každém místě, kde potřebujeme měřit čas, jsou k dispozici hodiny – že tedy existuje **soustava hodin**. Podobně jako u měřicích tyčí budeme i pro měření času v dané vztažné soustavě užívat pouze hodin, jež vůči ní stojí.

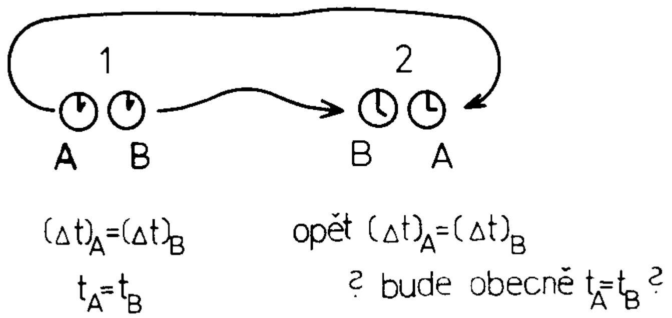
Nebylo by samozřejmě účelné měřit pomocí hodin, jejichž rychlost chodu by se různila. **Ideální hodiny** uvažované v teorii mají rychlost chodu nezávislou na vnějších vlivech – a tato rychlost je u všech kusů hodin stejná.

(Odstranění vnějších vlivů lze provést obdobně jako u měřicích tyčí; ani zde neuvažujeme univerzální vliv. V praxi se lze vlastnostem ideálních hodin přiblížit velice dobře. Při použití cesiových frekvenčních normálů lze dnes dosáhnout relativní chyby řádu 10^{-16}.)

Stejnou rychlost chodu hodin v dané vztažné soustavě lze docílit opět buď tím, že hodiny vyrobíme na jednom místě a pak **rozneseme** nebo tak, že je na každém potřebném místě vyrobíme znovu, **reprodukujeme**.

Jako samozřejmost opět bereme to, že *rychlost chodu hodin* přenesených na stejné místo různými způsoby (různými cestami, různou rychlostí apod.) *zůstává stejná*, že tedy sekunda na jedněch hodinách bude odpovídat sekundě na druhých. Tj. že „odborněji řečeno“ **přenos časové jednotky je integrabilní**. Viz obr. III.2.

Pokud by tomu tak nebylo, závisela by třeba rychlost rozpadových procesů v uranu na historii, kterou ten či onen kus uranu prodělal – nic takového v přírodě nepozorujeme.



Obr. III.2. K integrabilitě přenosu časové jednotky

- **Synchronizace hodin**

Rychlost chodu hodin lze tedy v celé soustavě zajistit stejnou. To ovšem nestačí. Hodiny je třeba také **synchronizovat**.

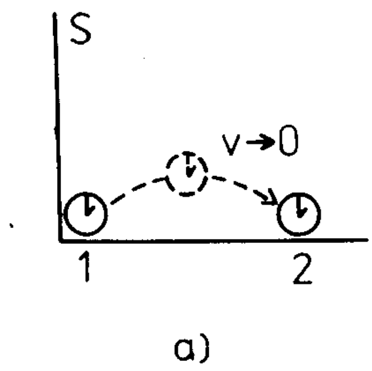
Synchronizaci lze provést různým způsobem.

1. Přenosem (nekonečně pomalým)

První způsob je zdánlivě přirozený při roznášení hodin v dané vztažné soustavě. Na hodinách se prostě nastaví stejný čas v místě výroby a pak se roznesou. Ovšem je zde **problém**: *Zachová se synchronizace při přenosu hodin různými způsoby?* Viz obr. III.2.a.

Zpomalování hodin v závislosti na rychlosti jejich pohybu, které jsme diskutovali již v souvislosti s éterovou teorií, dává tušit, že **obecně se synchronizace nezachová**. Roznášením hodin libovolným způsobem tedy nelze jejich synchronizaci zajistit.

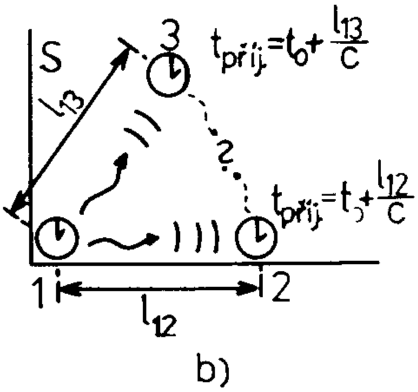
Z běžné zkušenosti ovšem víme, že při pohybu hodin malými rychlostmi se jejich synchronizace pozorovatelně neporuší. Můžeme tedy doufat, že pomalým přenosem by bylo možno synchronizaci provést. Abychom vliv rychlosti vyloučili, uvažujme teoreticky **nekonečně pomalý přenos hodin**. (Viz obr. III.3.a.) Jak si ověříme později, tímto způsobem lze skutečně v dané vztažné soustavě synchronizaci konsistentně provést.



Obr. III.3.a. Synchronizace hodin ve vztažné soustavě nekonečně pomalým přenosem

2. Světelnými signály

Druhý způsob využívá světelných signálů. Jedny hodiny vyšlou „časové znamení“ a časové údaje všech hodin se nastaví při příjmu signálu s tím, že se uvažuje doba šíření signálu. (Viz obr. III.3.b.) Vzdálenosti hodin se přitom měří pomocí měřicích tyčí. Danou synchronizaci nazýváme též **světelná synchronizace.**



Obr.III.3.b. Synchronizace hodin ve vztažné soustavě světelnými signály

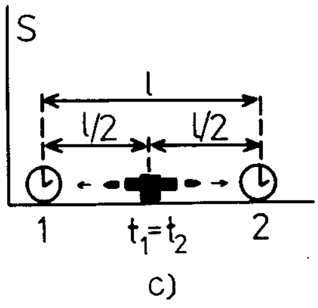
Pozorný čtenář může namítnout, že ve speciální teorii relativity se mluví o konstantnosti rychlosti světla a jejích závažných důsledcích. K měření rychlosti světla v jednom směru potřebujeme synchronizované hodiny. Při světelné synchronizaci ovšem při určování doby šíření signálu už počítáme s rychlostí světla rovnou *c*. Není pak konstantnost rychlosti světla jen prázdným tvrzením, pouhým automatickým důsledkem volby synchronizace?

Naštěstí tomu tak není. Při synchronizaci, v níž hodinami, vysílajícími „časové znamení“ byly hodiny 1, totiž můžeme měřit také rychlost světelných signálů ve směru od hodin 2 k hodinám 1, signálů šířících se mezi hodinami 2 a 3 apod. (Viz obr. III.3.b.) **Konstantnost rychlosti světla tedy není důsledkem světelné synchronizace**.

Naopak: Kdyby rychlost světla byla v různých směrech různá, nebyla by obecně světelná synchronizace konzistentní: při volbě hodin 2 místo hodin 1 pro vysílání „časového znamení“ by hodiny byly synchronizovány jinak.

3. Libovolnými „standardními signály“

Třetí způsob synchronizace hodin může využívat místo světelných signálů třeba i projektily z děla. Chceme-li synchronizovat hodiny 1 a 2 (viz obr. III.3.c), určíme pomocí měřicích tyčí bod uprostřed jejich spojnice a umístíme na tomto místě dvě stejná děla nabitá stejnými náboji. Jedno děl namíříme na hodiny 1, druhé na hodiny 2 a obě současně odpálíme.



Obr.III.3.c. Synchronizace hodin ve vztažné soustavě „standardními signály“

Když první projektil dolétne k hodinám 1, zaznamenáme čas t_1 , který ukazují. Totéž uděláme na hodinách 2 při průletu druhého projektilu (získáme čas t_2). Ze symetrie situace je zřejmé, že **oba projektily musely kolem hodin prolétnout současně**. Předpokládáme přitom, že na projektily nepůsobí vnější vlivy, že tedy jde o volné hmotné body. Rozdíl času t_2- t_1 proto dává korekci, o níž je třeba posunout (vzad) hodiny 2, aby byly synchronizovány s hodinami 1. Další dvojice hodin můžeme synchronizovat stejným způsobem.

Tento způsob je zřejmě nejjednodušší a nejpřístupnější názornému pohledu. Prakticky by byl ovšem náročný, ale to pro nás zde není rozhodující. Vystačíme při něm skutečně s minimem znalostí o situaci:

Nemusíme znát vzdálenost hodin, pouze fakt, že vzdálenosti od děl k oběma hodinám jsou stejné. Nemusíme znát rychlosti projektilů, jen to, že obě rychlosti jsou co do velikosti stejné. (To lze zajistit stejnými podmínkami výstřelu.) Mají-li mít homogenita a izotropie prostoru a homogenita času rozumný smysl, nelze si zřejmě představit žádný důvod, proč by tento způsob synchronizace mohl selhat resp. být nekonzistentní. Můžeme tedy pro naše úvahy právě tento způsob synchronizace považovat za základní.

Podstatné ovšem je, že **všechny uvedené způsoby synchronizace dávají v dané inerciální soustavě stejné výsledky**.

V dalším výkladu pochopíme blíže, proč. U prvního způsobu to můžeme chápat jako důsledek vlastností dilatace času, u druhého způsobu jako důsledek principu konstantní rychlosti světla.

Otázku měření času v dané vztažné soustavě tedy můžeme pokládat za vyřešenou.

Poznamenejme ještě, že pokud bychom užívali k měření času ve vztažné soustavě jen jedněch hodin, museli bychom opakovat při každém měření času to, co jinak provádíme pouze při synchronizaci hodin. Odpovídající rozbor měření by tedy byl v zásadě stejný.

- **Inerciální soustava – přesnější definice**

Definici inerciální soustavy uvedenou výše v kap. I. nyní můžeme zpřesnit:

Definice:

Vztažná soustava je inerciální, jestliže v ní lze pomocí ideálních měřicích tyčí vytvořit kartézskou soustavu souřadnic a čas měřit ideálními hodinami synchronizovanými výše uvedeným způsobem (nekonečně pomalým přenosem, světelnou synchronizací nebo pomocí „standardních signálů“) a jestliže v takto vytvořené soustavě souřadnic se libovolný volný hmotný bod pohybuje rovnoměrně přímočaře.

Soustavu souřadnic (tří prostorových a jedné časové) zkonstruovanou uvedeným způsobem nazýváme **inerciální soustava souřadnic**.

První Newtonův zákon tvrdí, že takováto soustava existuje. My budeme v dalším bez dokazování brát za samozřejmé i to, že **každá soustava, pohybující se vůči inerciální vztažné soustavě rovnoměrně přímočaře, je rovněž inerciální.**

(O tom jsme se zmínili již výše. Rovněž budeme bez formálního důkazu pokládat za zřejmé, že neexistují inerciální soustavy, které by se vůči jiným inerciálním soustavám pohybovaly jinak než rovnoměrně přímočaře.)

Poznámka:

Nemělo by zřejmě cenu učit se výše uvedené definice nazpaměť. Nepodáváme zde striktně axiomatický výklad speciální teorie relativity – a i ten by mohl vycházet z různých předpokladů. Je však třeba si uvědomit význam definic a fakt, že zpřesňování uvedených pojmů není samoúčelné. Je shrnutím a zobecněním experimentální zkušenosti. Přesněji vymezené pojmy a způsoby měření prostoru a času jsou pak dobrým nástrojem pro orientaci v situacích, kdy efekty teorie relativity nebude možno zanedbat.

III.3. Princip konstantní rychlosti světla

V kapitole II. jsme diskutovali Michelsonův pokus z hlediska éterové teorie. Podívejme se teď na něj z jiného zorného úhlu, bez zátěže představ o pohybu vůči éteru.

Z hlediska inerciálního systému, vůči němuž Michelsonův interferometr stojí, ověřuje tento pokus vlastně fakt, že **rychlost světla nezávisí na směru jeho šíření**. Označme rychlost světla v prvním rameni c_1 a v druhém, kolmém, rameni c_2 . Je-li délka obou ramen rovna l, pak časový rozdíl paprsků v ramenech je

$$t_1 - t_2 = l \left(\frac{1}{c_1} - \frac{1}{c_2} \right) = \frac{l}{c_1 c_2} \left(c_2 - c_1 \right) \qquad \text{(III.1)}$$

Po otočení přístroje o 90° by časový rozdíl změnil znaménko. Protože k posunu interferenčních proužků nedochází, je $t_1 = t_2$. Z (1) pak plyne, že

$$c_1 = c_2 \qquad \text{(III.2)}$$

Přesnost, s níž je tato rovnost určena, dosahuje u moderních experimentů desetiny m/s !

Poznámka: Výše diskutované rychlosti c_1 a c_2 jsou přesně vzato průměrné rychlosti při šíření světla v ramenech tam a zpět. Různé rychlosti světla při pohybu tam a zpět bychom ale mohli dostat jen při nevhodné synchronizaci hodin, která by jednu orientaci preferovala. Při synchronizaci „standardními signály“ (či „standardními projektily“) jsou však obě orientace zjevně zcela rovnoprávné a není tedy důvodu předpokládat, že by se rychlosti tam a zpět mohly lišit. U světelné synchronizace je situace ještě názornější: Definujeme-li rychlost šíření světelného „časového znamení“ ve směru „tam“ rovnou $c_1 = c_2 = c$ a synchronizujeme-li podle toho hodiny, musí při šíření světla „zpět“ vyjít opět rychlost c.

V Kennedyho-Thorndikeovu pokusu závisí časový rozdíl paprsků nejen na rozdílu rychlostí v kolmých směrech, ale přímo na velikosti rychlosti:

$$t_1 - t_2 = \frac{l_1}{c_1} - \frac{l_2}{c_2} = \frac{l_1 - l_2}{c} \qquad \text{(III.3)}$$

kde jsme, s využitím (2), označili $c = c_1 = c_2$. Díky pohybu Slunce v Galaxii a pohybu Země kolem Slunce se ovšem rychlost pohybu Země vůči inerciálnímu systému s počátkem ve středu Galaxie stále mění. Interferometr spolu se Zemí je tedy v klidu postupně v různých inerciálních systémech. Jestliže se při pokusu nepozorovalo posunutí interferenčních proužků, znamená to tedy, že **rychlost světla je v** těchto **různých inerciálních systémech stejná**. (Přesnost pokusů typu Kennedyho-Thordikeova to umožňuje tvrdit s maximální relativní chybou 10^{-9}.)

Poznámka: Zde jsme se dotkli faktu, že přístroje jsou při pokusech spjaty se Zemí, tj. se systémem, který není přesně inerciální. Příslušné zrychlení je však malé a odpovídající deformace měřicích tyčí jsou proto minimální, resp. lze je korigovat. Totéž platí o vlivu zrychlení na hodiny. V řadě případů lze proto po krátkou dobu považovat systém spojený s přístrojem za inerciální.

Skutečnost, že rychlost světla nezávisí na směru ani na volbě inerciálního systému, lze podpořit i dalším argumentem. Světlo je elektromagnetické vlnění. Spolehlivě ověřenými zákony určujícími chování elektromagnetického pole (na klasické úrovni) jsou Maxwellovy rovnice. Z nich vyplývá, že elektromagnetické vlny se ve vakuu šíří všemi směry stejnou rychlostí c (nezávisle na rychlosti jejich zdroje). Podle speciálního principu relativity musí mít Maxwellovy rovnice ve všech inerciálních systémech stejný tvar (se stejnými hodnotami ε_0 a μ_0 vedoucími tedy i ke stejné hodnotě c). Proto se světlo musí šířit rychlostí c ve všech inerciálních systémech.

Uvedené výsledky přesvědčivě potvrzují **princip konstantní rychlosti světla**:

V inerciálních systémech se světlo ve vakuu šíří rovnoměrně přímočaře konstantní rychlostí c nezávislou na směru šíření, volbě inerciálního systému ani na pohybu jeho zdroje.

Opět nejde o tvrzení, které by bylo nutno umět zpaměti přesně v uvedené formulaci. Spíše je potřeba si uvědomit jednotlivé aspekty tohoto principu.

Nezávislost na pohybu zdroje znamená, názorně řečeno, že „světlo nepředběhne světlo". Vyšlu-li současně z daného místa světelný signál stojícím reflektorem a reflektorem, s nímž utíkám vpřed, „neuteče" druhý signál prvnímu. Oba se budou pohybovat toutéž rychlostí.

Z nezávislosti rychlosti šíření světla na směru vyplývá, že užíváme-li k synchronizaci hodin světelných signálů, nezáleží na tom, které hodiny zvolíme za výchozí. Například od hodin 2 k hodinám 3 (viz výše obr. III.3.b) dorazí světelný signál za čas l_{23}/c - tj. za stejný čas, jaký bychom uvažovali, kdybychom při synchronizaci vyšli od hodin 2.

Nezávislost rychlosti světla na volbě inerciálního systému je ve shodě se speciálním principem relativity, jak již bylo uvedeno výše.

Poznamenejme ještě, že rychlost světla ve vakuu samozřejmě nezávisí ani na tom, kde ji měříme – v souladu s homogenitou prostoru.

Konstantnost rychlosti světla je v současné době brána jako spolehlivě ověřený fakt. Projevilo se to i v nové definici metru, platné od roku 1983:

Metr je délka dráhy, kterou urazí světlo ve vakuu za dobu 1/299792458 sekundy.

Nová definice byla zavedena proto, že umožňuje délkový etalon realizovat přesněji než definice předchozí, založená na vlnové délce záření, vysílaného při přechodu mezi určitými energetickými hladinami atomu kryptonu 86.

Rychlost světla tím nepřestala být základní fyzikální konstantou. Má teď ovšem naprosto přesnou hodnotu

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s} \qquad \text{(III.4)}$$

Ve smyslu této definice metru tedy již další měření šíření světla neupřesňují hodnotu c, ale velikost délkového etalonu.

Poznámka resp. úvaha poněkud pedagogická: Se zmíněnou novou definicí metru se konstantnost rychlosti světla může zdát jako zcela samozřejmý fakt. Pokud by toto někomu způsobovalo „psychologické potíže" při diskusi různých výkladů Michelsonova pokusu apod., měl by si uvědomit, že kdyby rychlost světla byla různá v různých směrech, znamenalo by to podle nové definice metru, že metr je různý v různých směrech – a to by se v Michelsonově pokusu projevilo.

Poznamenejme ještě, že díky konstantnosti rychlosti světla by se bylo možno při budování speciální teorie relativity zcela obejít bez měřicích tyčí. Vzdálenost by bylo možno měřit radarovým způsobem pomocí hodin a světelných signálů. Náznak tohoto postupu je uveden v dodatku F.

III.4. Odvození speciální Lorentzovy transformace

Výše jsme poměrně podrobně diskutovali principy, z nichž speciální teorie relativity vychází:

- **1. Newtonův zákon**, tedy konstatování, že existuje inerciální systém. Tento princip většinou nebývá ani explicite zmiňován a je brán jako samozřejmé východisko.
- **Speciální princip relativity**, nazývaný také první postulát speciální teorie relativity.
- **Princip konstantní rychlosti světla**, nazývaný též druhý postulát STR.

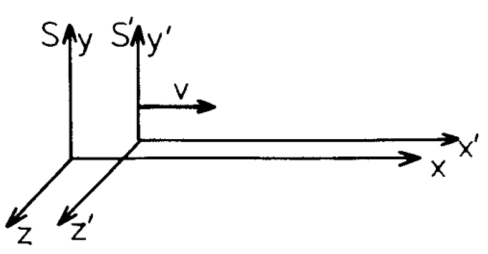
V kapitole I. jsme si ukázali, že již přímo z těchto principů lze pomocí myšlenkových pokusů odvodit řadu efektů speciální teorie relativity. Pro přesnější rozbor těchto efektů je ovšem nutno popsat daný jev či pokus z hlediska různých inerciálních soustav.

Potřebujeme tedy umět převádět prostorové a časové souřadnice z jednoho inerciálního systému do druhého.

Galileiho transformace, probíraná v kapitole II, se k tomu zřejmě nehodí, neboť z ní plyne, že rychlosti se sčítají algebraicky, což je v rozporu s principem konstantní rychlosti světla. Musíme tedy najít novou transformaci - takovou, která by výše uvedeným výchozím principům STR vyhovovala.

Podobně jako při Galileiho transformaci budeme vyšetřovat případ, kdy inerciální soustavy souřadnic S a S' mají vůči sobě speciální orientaci:

osy x a x' splývají, osy y a y' , z a z' jsou rovnoběžné, v čase t=0 počátky obou soustav splývaly a hodiny v počátku S' ukazovaly rovněž t'=0 a soustava S' se pohybuje vzhledem k S ve směru osy x rovnoměrně rychlostí v , tak jak to ukazuje obrázek III.4.



Obr.III.4. Orientace inerciálních soustav souřadnic spojených speciální Lorentzovou transformací. (Poznámka: Osy z a z' v dalším nebudeme kreslit. Osy x a x' splývají, pro přehlednost se však často kreslí odděleně jako na tomto obrázku.)

Transformaci, kterou pro tento případ odvodíme, nazýváme **speciální Lorentzova transformace**.

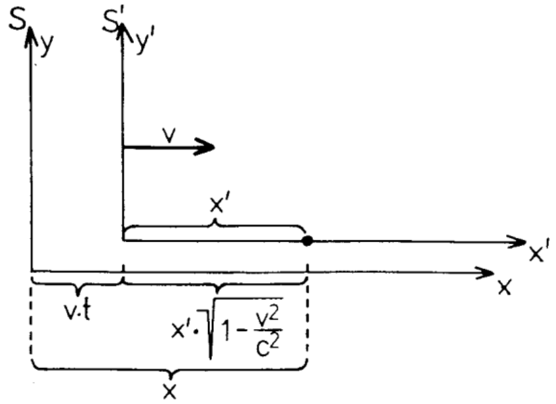
Obecná Lorentzova transformace zahrnuje navíc pootočení a případně i posun soustav souřadnic v S i S'. Její vzorce jsou složitější a zbytečně by nám komplikovaly pohled na fyzikální stránku situace. (Vrátíme se k nim v kapitole VIII. po vybudování vhodného formalismu.) K diskusi všech podstatných fyzikálních otázek nám speciální Lorentzova transformace postačí.

a) Jednoduché odvození

Ve středoškolské učebnicové literatuře lze najít následující odvození, vycházející z kontrakce délek a principu konstantní rychlosti světla:

V čase t je vzdálenost počátku S' od počátku S rovna $v\,t$ (viz obrázek III.5.). Uvažujme bod, ležící na ose x'. Měřeno v S', je jeho vzdálenost od počátku S' rovna x'. Měřeno v S, je tato vzdálenost díky kontrakci délek rovna $x' \cdot \sqrt{1-v^2/c^2}$. V S je tedy

$$x = v \cdot t + x' \cdot \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \ .$$



Obr.III.5. K jednoduchému odvození Lorentzovy transformace

Z toho lze již rovnou vyjádřit x':

$$x' = \frac{x - v \cdot t}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \tag{III.5}$$

Kontrakce délek, kterou jsme zde uvažovali, je předtím odvozena z myšlenkových pokusů tak, jak jsme to ukázali v kapitole I.

Pokud se dalších souřadnic týká, pokládá se obvykle za zřejmé, že $y' = y$ a $z' = z$. Vztah pro časovou souřadnici t' se odvodí z výchozího předpokladu, že v S i S' se světlo šíří rychlostí c.

Pro světelný signál, vypuštěný v čase t=0 z bodu x=0 (tj. x'=0) ve směru osy x tedy platí

$$x = c \cdot t \tag{III.6}$$

$$x' = c \cdot t' \tag{III.7}$$

Dosazením (6) a (7) do (5) dostáváme

$$ct' = \frac{ct - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{ct - \frac{\upsilon}{c}x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{III.8}$$

kde jsme při úpravě zpětně vyjádřili t pomocí x (ze vztahu (6)). Dělením c pak konečně dostaneme

$$t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2}x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{III.9}$$

Toto odvození asi připadá většině čtenářů jako „kouzlení" a opravdu není příliš korektní. Pokud bychom totiž v (8) nedosadili za druhé t v čitateli (a nikde se neříká, proč bychom to byli nuceni udělat), mohli bychom místo (9) stejně dobře odvodit vztah $t' = \frac{(1-\upsilon/c)t}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$, který ale obecně neplatí.

Korektní odvození vztahu (9) by přitom mohlo vycházet z (5) a ze speciálního principu relativity. Stačí si uvědomit, že pohybuje-li se S' vůči S rychlostí υ, pohybuje se také S vůči S' rychlostí υ, pouze opačným směrem. Pokud bychom zopakovali úvahy, uvedené výše před vztahem (5) (*zkuste si to!*), dostali bychom

$$x = \frac{x' + \upsilon \cdot t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{III.10}$$

Opačné znaménko u υ je dáno opačným směrem pohybu; rovnice pohybu počátku S vůči S' je $x' = -\upsilon t'$. Vyloučíme-li x' z (5) a (10), dostaneme přímo vztah (9).

K odvození vztahu (9) lze využít i jiných myšlenkových pokusů. My však budeme spíše využívat Lorentzovy transformace k diskusi a rozborům myšlenkových pokusů. Bude tedy vhodné odvodit ji nezávisle na nich, přímo z výchozích postulátů speciální teorie relativity. Při tomto postupu také nejlépe uvidíme, na jakých předpokladech odvození závisí.

b) Odvození z výchozích postulátů STR

Máme najít vyjádření souřadnic *x*', *y*', *z*', *t*' (tj. souřadnic v S') libovolné události v závislosti na souřadnicích *x, y, z, t* v inerciálním systému S.

1.

Prvním předpokladem, který se obvykle činí, je konstatování, že hledaná transformace musí být lineární. Často se to považuje za samozřejmé resp. za zřejmý důsledek požadavku, že rovnoměrný přímočarý pohyb vůči S je též rovnoměrný přímočarý vůči S'. Tak samozřejmé to není, ovšem z výchozích postulátů lze linearitu odvodit; jedno z možných odvození viz dodatek G.

Nejobecnější lineární transformace z S do S' má tvar:

$$\begin{aligned}
x' &= a_1\,x + b_1\,y + c_1\,z + d_1\,t + e_1 && \text{(a)}\\
y' &= a_2\,x + b_2\,y + c_2\,z + d_2\,t + e_2 && \text{(b)}\\
z' &= a_3\,x + b_3\,y + c_3\,z + d_3\,t + e_3 && \text{(c)}\\
t' &= a_4\,x + b_4\,y + c_4\,z + d_4\,t + e_4 && \text{(d)}
\end{aligned} \qquad \text{(III.11)}$$

kde a_1, a_2, … e_3, e_4 jsou konstanty. Mohou ovšem samozřejmě záviset na rychlosti v. Výchozí postuláty speciální teorie relativity spolu s výše uvedenými předpoklady o orientaci a vzájemném pohybu S a S' nám umožní určit jejich hodnoty.

2.

Z předpokladu, že v čase $t = 0$ splývají počátky S (tj. $x = y = z = 0$) a S' ($x' = y' = z' = 0$) a je v tomto bodě $t' = 0$, plyne po dosazení uvedených hodnot do (11) výsledek

$$e_1 = 0,\ e_2 = 0,\ e_3 = 0,\ e_4 = 0 \quad . \qquad \text{(III.12)}$$

3.

Osa x systému S (tvořená body, pro něž $y = 0$ a $z = 0$ má splývat s osou x' systému S' (tj. pro dané body musí být $y' = 0$, $z' = 0$). Po dosazení do (11) z toho plyne, že musí být

$$a_2 = 0,\ a_3 = 0, \quad d_2 = 0,\ d_3 = 0 \quad . \qquad \text{(III.13)}$$

4.

V čase $t = 0$ splývaly osy y a y' a osy z a z' (protože systémy S a S' nejsou vůči sobě pootočeny kolem osy x). To znamená, že pro $t = 0$ a $x = 0$ musí $z = 0$ dát $z' = 0$ a $y = 0$ => $y' = 0$. Z (11) pak plyne, že

$$b_3 = 0,\ c_2 = 0 \ . \qquad \text{(III.14)}$$

5.

Osy y a z jsou rovnoprávné: Vzhledem k izotropii prostoru můžeme soustavy S a S' pootočit kolem osy x tak, že osa y bude mít směr původní osy z - a totéž pro osy y' a z'. Transformace (11b) a (11c): $y' = b_2\,y$ a $z' = c_3\,z$ nesmí tedy odlišovat osu z od osy y (a z' od y'). Musí proto být

$$b_2 = c_3 \ . \qquad \text{(III.15)}$$

V dalším tyto konstanty označíme prostě jako b .

6.

Z izotropie prostoru, konkrétně z toho, že kladný směr osy y je rovnoprávný se záporným směrem osy y (a podobně pro osu z), plyne dále, že

$$b_1 = 0,\ c_1 = 0 \ . \qquad \text{(III.16)}$$

Jinak by rovina $y'z'$ byla nakloněna vůči rovině yz . A kterým směrem by měla být nakloněna, když jsou všechny směry kolmé na osu x rovnoprávné? (Směr osy x samozřejmě pro transformaci privilegované postavení má, neboť je to směr pohybu S' vůči S .)

Ze stejného důvodu musí být

$$b_4 = 0,\ c_4 = 0 \quad , \qquad \text{(III.17)}$$

jinak by synchronizace hodin v S' opět musela preferovat nějaký směr kolmý na osu x' .

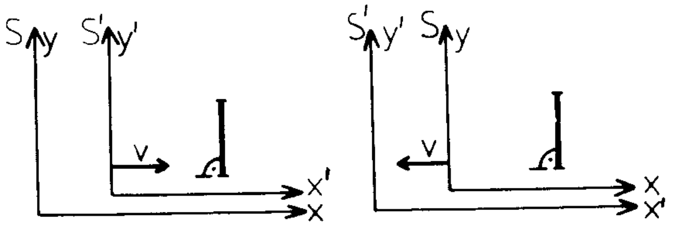
S využitím vztahů (12) – (17) má již transformace (11) podstatně jednodušší tvar:

$$
\begin{aligned}
x' &= a_1\, x + d_1\, t && \text{(a)}\\
y' &= b\, y && \text{(b)}\\
z' &= b\, z && \text{(c)}\\
t' &= a_4\, x + d_4\, t && \text{(d)}
\end{aligned}
\qquad \text{(III.18)}
$$

7.

Až dosud jsme nevyužili ani speciální princip relativity ani princip konstantní rychlosti světla. Speciální princip relativity nyní užijeme k určení konstanty b .

Stačí si uvědomit, že vztahy (18.b) a (18.c) vypovídají o transformaci vzdáleností ve směrech **kolmých** na osu x . Z hlediska těchto směrů není ale žádný rozdíl mezi přechodem od S k S' a přechodem od S' k S . Vždy se jeden systém pohybuje vůči druhému rychlostí v , a to ve směru, který je kolmý na námi uvažovaný směr. Lépe než poněkud krkolomné slovní vyjádření to ukazuje obrázek.



Obr.III.6. K odvození transformace ve směrech kolmých osu x

Pro přechod od S' k S tedy musí být

$$y = b\,y', \quad z = b\,z' \quad , \qquad \text{(III.19)}$$

kde konstanta b je stejná jako v (18.b), (18.c). Kombinací (18.b), (18.c) a (19) dostáváme $b^2 = 1$. Protože $b = -1$ můžeme vyloučit (šlo by jen o otočení S' kolem osy x), je

$$b = 1 \ . \qquad \text{(III.20)}$$

Názorně, i když snad poněkud méně přesně bychom mohli říci, že není možné, aby pohyb na jednu stranu vzdálenosti v kolmém směru zkracoval a pohyb na druhou stranu je prodlužoval. Takovéto zkrácení či prodloužení by přitom bylo jednoznačně zjistitelné, neboť jestliže pozorovatelé v S a S' umístí počátky svých měřicích tyčí na osy $x \equiv x'$, mohou jednoznačně pozorovat, zda konec jedné tyče přečnívá konec druhé či ne. (U relativistické kontrakce délek je to složitější.)

8.

Až dosud jsme vůbec nevyužili faktu, že systém S' se pohybuje vůči S rychlostí v . Počátek systému S' má samozřejmě hodnotu souřadnice $x' = 0$. V systému S je jeho pohyb popsán vztahem $x = v\,t$. Dosazení do (18.a) dá $0 = \left(a_1\, v + d_1\right) t$, z čehož

$$d_1 = -\upsilon \cdot a_1 \quad . \tag{III.21}$$

9.

Vzhledem k systému S' se naopak systém S pohybuje v záporném směru osy *x*' rychlostí, jejíž velikost je rovněž υ. (Zde opět používáme speciální princip relativity: jsou-li oba systémy rovnoprávné, musí být rychlost jejich vzájemného pohybu stejná, ať ji měříme v kterémkoli z nich. Poznamenejme, že jsme vlastně tento výsledek použili již výše při odvozování vztahu (20).)

Pro počátek systému S (pro nějž $x = 0$) je z (18.a) a (18.d):

$$x' = d_1 t \qquad \text{a} \qquad t' = d_4 t \ ,$$

z čehož

$$x' = \frac{d_1}{d_4} t' \quad . \tag{III.22}$$

Pro počátek S ovšem musí platit $x' = -\upsilon \cdot t'$. Porovnání s (22) pak okamžitě dá

$$d_1 = -\upsilon \cdot d_4$$

a s využitím (21) dostáváme výsledek

$$d_4 = a_1 \tag{III.23}$$

Označíme-li pro jednoduchost $a_1 = A,\ a_4 = A \cdot B$, budou mít vztahy (18.a) a (18.d) tvar

$$\begin{aligned} x' &= A \cdot (x - \upsilon \cdot t) \qquad &\text{(a)} \\ t' &= A \cdot (B \cdot x + t) \qquad &\text{(b)} \end{aligned} \tag{III.24}$$

K odvození Lorentzovy transformace zbývá určit konstanty *A* a *B*.

10.

Systémy S a S' jsou rovnoprávné. Přechod od S' k S se tedy od přechodu od S k S' liší jen směrem pohybu. To lze vystihnout záměnou *x* za -*x* a *x*' za -*x*', tj. změnou orientace os *x* a *x*', jak to ukazuje obrázek III.7. (Chceme-li zachovat pravotočivost systémů S a S', musíme změnit orientaci ještě jedné osy, např. *z* a *z*', to však momentálně není podstatné.)

Vztahy pro přechod od S' k S můžeme tedy zřejmě získat změnou znamének u *x* a *x*' a záměnou čárkovaných veličin za nečárkované a naopak, tj. záměnou

$$x \to -x',\ x' \to -x, \quad t \to t',\ t' \to t \quad .$$

Z (24.a) tak dostáváme

$$x = A \cdot (x' + \upsilon \cdot t') \tag{III.25}$$

Výše uvedené odvození se opíralo o speciální princip relativity. Ze vztahů (24.a), (24.b) lze však *x* vypočítat přímo: vyloučíme-li z nich *t*, dostaneme

$$x = \frac{1}{A(1 + \upsilon B)} (x' + \upsilon t') \quad . \tag{III.26}$$

Vztahy (25) a (26) musí být totožné, to znamená, že musí být $A = \dfrac{1}{A(1+\upsilon B)}$. Odtud plyne

$$A = \frac{1}{\sqrt{1+\upsilon B}} \tag{III.27}$$

(Řešení $A < 0$ je nefyzikální.)

11.

Zbývá tedy určit již jen konstantu *B*. Dosud jsme v odvození vůbec nepoužili princip konstantní rychlosti světla. Můžeme tak učinit nyní. Uvažujme světelný signál vyslaný v čase $t = 0$ z počátku systému S v kladném směru osy x. Pro něj je

$$x = c \cdot t \tag{III.28}$$

$$x' = c \cdot t' \tag{III.29}$$

Dosazením (28) a (29) do (24) dostáváme

$$c\,t' = A \cdot (c - \upsilon) \cdot t$$
$$t' = A \cdot (B \cdot c + 1) \cdot t$$

a kombinací těchto rovnic (vydělením první rovnice druhou a následnou úpravou) pak $Bc^2 + c = c - \upsilon$, čili

$$B = -\frac{\upsilon}{c^2} \ .$$

Dosazení do (27) pak dá pro A známou hodnotu $\dfrac{1}{\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}}$.

Všechny konstanty jsou tedy určeny a pro transformaci splňující výchozí postuláty speciální teorie relativity jednoznačně dostáváme vztahy **speciální Lorentzovy transformace**:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \frac{t - \dfrac{\upsilon}{c^2} x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \end{aligned} \tag{III.30}$$

Zajímavé je, že princip konstantní rychlosti světla jsme v odvození použili až v samém závěru! Bylo by se mu možno vyhnout vůbec a i k určení konstanty B použít úvahu založenou na speciálním principu relativity.

Vztahy, které bychom dostali, by vypadaly naprosto stejně jako vztahy (30), pouze místo rychlosti světla c by v nich figurovala nějaká obecná rychlost c_0. (Viz dodatek G, kde je odvození provedeno.) Pro volbu c_0 bychom měli v podstatě jen dvě možnosti:

- buď by bylo $c_0 = \infty$ a transformace by se pak stala Galileiho transformací (viz ještě dále),
- nebo by bylo c_0 konečné – pak by se jednalo o Lorentzovu transformaci. V příslušné teorii by pak rychlost c_0 hrála tu roli, kterou v STR hraje rychlost světla. Taková teorie by se ovšem od STR v zásadě nijak nelišila.

Přijmeme-li platnost speciálního principu relativity, musíme tedy za správnou fyzikální teorii přijmout buď klasickou mechaniku (v níž platí Galileiho transformace) nebo speciální teorii relativity. A pokud pokusy ukazují, že klasická mechanika je neudržitelná (např. v předpovědích šíření rychlosti světla z různých zdrojů a v různých inerciálních systémech), musí být správnou transformací mezi inerciálními systémy transformace Lorentzova a teorií nahrazující klasickou mechaniku právě speciální teorie relativity.

III.5. Vlastnosti Lorentzovy transformace

Všimněme si teď vlastností Lorentzovy transformace. Budeme je diskutovat na případu speciální Lorentzovy transformace dané vztahy (30). Vždy však půjde o vlastnosti, které má i obecná Lorentzova transformace; na případné rozdíly vždy explicite upozorníme.

a) Složení dvou Lorentzových transformací

Uvažujme inerciální systém S a inerciální systém S', pohybující se vůči němu rovnoměrně přímočaře rychlostí υ. Navíc uvažujme inerciální systém S'', pohybující se vůči S' rychlostí u'. Situaci ukazuje obrázek III.8. Orientaci soustav souřadnic apod. volíme samozřejmě „standardní“, tj. takovou, jako výše při odvozování Lorentzovy transformace. (Tak tomu bude i nadále, aniž to budeme zvlášť zdůrazňovat.)

Souřadnice S a S' a souřadnice S' a S'' musí být spjaty Lorentzovými transformacemi

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad \text{(a)}$$

$$y' = y \qquad \text{(b)}$$

$$z' = z \qquad \text{(c)} \qquad \text{(III.31)}$$

$$t' = \frac{t - \frac{\upsilon}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad \text{(d)}$$

$$\begin{aligned}
x'' &= \frac{x' - u' t'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} && \text{(a)} \\
y'' &= y' && \text{(b)} \\
z'' &= z' && \text{(c)} \\
t'' &= \frac{t' - \frac{u'}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{III.32}$$

Dosazením (31) do (32.a) dostaneme

$$x'' = \frac{x - \dfrac{\upsilon + u'}{1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}} t}{\sqrt{\dfrac{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{u'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}\right)^2}}} \tag{III.33}$$

Je ovšem zřejmé, že S'' se vůči S pohybuje rovněž rovnoměrně přímočaře. Souřadnice S'' musí být se souřadnicemi S spjaty rovněž Lorentzovou transformací:

$$\begin{aligned}
x'' &= \frac{x - u t}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} && \text{(a)} \\
y'' &= y && \text{(b)} \\
z'' &= z && \text{(c)} \\
t'' &= \frac{t - \frac{u}{c^2} x}{\sqrt{1 - \frac{u'^2}{c^2}}} && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{III.34}$$

kde zatím neznáme hodnotu rychlosti u pohybu S'' vůči S. (Je nám pouze jasné, že obecně ***nebude platit*** $u = u' + \upsilon$ jako při Galileiho transformaci.)

U vztahů (34.b,c) je situace jasná. Porovnáním (34.a) s (33) dostáváme hodnotu rychlosti u :

$$u = \frac{\upsilon + u'}{1 + \frac{\upsilon u'}{c^2}} \tag{III.35}$$

Jednoduchým výpočtem lze ověřit, že pro hodnotu u danou (35) platí

$$1 - \frac{u^2}{c^2} = \frac{\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right)\left(1 + \frac{u'^2}{c^2}\right)}{\left(1 + \frac{u'\upsilon}{c^2}\right)^2} \tag{III.36}$$

takže (33) je opravdu totožné s (34.a). Dosazení (31) do (32.d) a využití (35) a (36) nás potom přesvědčí, že pro t'' platí opravdu vztah (34.d).

Složením dvou speciálních Lorentzových transformací s rychlostmi, které mají stejný směr, vznikne tedy opět speciální Lorentzova transformace (s parametrem rychlosti, daným vztahem (35)).

Totéž platí i pro obecné Lorentzovy transformace, byť to zatím z našich úvah není zřejmé. Nemají-li ovšem rychlosti $\vec{\upsilon}$ a $\vec{u}$ stejný směr, neplatí pro rychlost u systému S” vůči S jednoduchý vztah (35).

b) Inverzní Lorentzova transformace

Inverzní transformace k transformaci (30), jak již z názvu zřejmo, je transformace pro přechod od souřadnic soustavy S’ k souřadnicím soustavy S. Výpočtem x a t z (30) si čtenář může lehce ověřit, že je

$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{(a)}$$

$$y = y' \quad \text{(b)}$$

$$z = z' \quad \text{(c)} \qquad \text{(III.37)}$$

$$t = \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2} x'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad \text{(d)}$$

Inverzní Lorentzova transformace je tedy opět Lorentzova (*víte, co se tím míní?*) a získáme ji z původní speciální Lorentzovy transformace záměnou $\upsilon \to -\upsilon$.

V Lorentzově transformaci (30) samozřejmě může být υ kladné i záporné, byť jsme většinu úvah prováděli pro $\upsilon > 0$. $\upsilon < 0$ prostě odpovídá pohybu S’ vůči S v záporném směru osy x ; υ je totiž obecně složka a ne velikost rychlosti. Z tohoto pohledu lze říci, že S’ se pohybuje vůči S ve směru osy x rychlostí υ a naopak S vůči S’ rychlostí $-\upsilon$.

Výsledek odpovídá tomu, co jsme očekávali. Již při odvozování speciální Lorentzovy transformace jsme ostatně požadovali, aby vyjádření x pomocí x’ a t’ mělo odpovídající tvar. Nyní jsme ověřili, že tomu odpovídá celá inverzní transformace.

Obecná Lorentzova transformace vnikne ze speciální Lorentzovy transformace složením s otočením v S a S’. Jednoduchou úvahou pak můžeme odvodit, že i

> inverzní transformace k obecné Lorentzově transformaci je opět Lorentzova transformace.

Jakýkoli jiný výsledek by byl ostatně ve sporu se speciálním principem relativity.

Poznámka: Transformace, kde k obecné Lorentzově transformaci přidáme ještě posuny počátku souřadnic a počátku času, bývá nazývána Poincarého transformace.

c) Grupa Lorentzových transformací

- Již výše jsme uvedli, že složením dvou Lorentzových transformací vznikne opět transformace Lorentzova.
- Kdybychom uvažovali složení tří Lorentzových transformací (tj. k úvahám uvedeným výše přidali ještě inerciální systém S''' pohybující se vůči S'' rychlostí w''), zjistili bychom, že výsledná Lorentzova transformace nezávisí na tom, složíme-li nejprve transformaci z S do S' s transformací z S' do S'' a pak k nim přidáme transformaci S'' do S''' nebo složíme-li nejdříve transformace z S' do S'' a z S'' do S''' a teprve potom výsledek složíme s transformací z Sdo S'. Skládání Lorentzových transformací je tedy asociativní.
- Pro $\upsilon = 0$ je Lorentzova transformace identickou transformací: složíme-li ji s jinou Lorentzovou transformací, pak se tato nemění.
- Jak jsme ukázali výše, ke každé Lorentzově transformaci existuje inverzní transformace, která je opět Lorentzova.

Uvedená konstatování patrně již čtenáři připomněla axiomy grupy. Skutečně díky tomu, že jsou splněna, můžeme říci, že **množina Lorentzových transformací tvoří grupu**.

Prvky grupy jsou Lorentzovy transformace, grupovou operací je skládání transformací. Pro speciální Lorentzovy transformace může čtenář všechny axiomy ověřit sám. Možná si přitom povšimne, že grupa speciálních Lorentzových transformací je komutativní. Grupa obecných Lorentzových transformací ovšem komutativní není. (To plyne již z toho, že obsahuje pootočení.)

Skutečnost, že Lorentzovy transformace tvoří grupu, je velmi důležitá např. při hledání možných tvarů fyzikálních zákonů v teoriích pole apod. V našem seznamování s teorií relativity s ní ovšem dále prakticky nebudeme pracovat. Pokud jste se tedy s pojmem grupa setkali jen zběžně (případně vůbec ne), nemusíte se dalšího výkladu bát.

d) Galileiho transformace jako limitní případ Lorentzovy transformace

Někdy se poněkud nepřesně tvrdí, že pro malé rychlosti přechází Lorentzova transformace v transformaci Galileiho. Podívejme se na situaci poněkud podrobněji.

Pro $\upsilon \to 0$ je limitou vztahů (30) identická transformace:

$$x' = x,\ \ y' = y,\ \ z' = z,\ \ t' = t \quad .$$

To je ovšem dosti triviální výsledek. Vidíme tedy, že nás vlastně nezajímá přesná limita vztahů (30) pro $\upsilon \to 0$, ale jejich rozvoj pro malé hodnoty rychlosti. „Malá hodnota“ zde přirozeně znamená malá v porovnání s rychlostí světla. Nechť je tedy υ/c řádu nějaké malé veličiny ε:

$$\left|\frac{\upsilon}{c}\right| \approx \varepsilon << 1 \qquad \text{(III.38)}$$

Při rozvoji vztahů podle malého parametru ε zanedbáváme členy obsahující ε^2 (a $\varepsilon^3, \varepsilon^4$ …), tj. v našem případě členy řádu $(\upsilon/c)^2$ a vyššího. Lorentzova transformace (30) pak přejde na tvar

$$\begin{aligned} x' &= x - \frac{\upsilon}{c}\cdot ct = x - \upsilon\cdot t && \text{(a)} \\ y' &= y && \text{(b)} \\ z' &= z && \text{(c)} \\ t' &= t - \frac{\upsilon}{c^2}\cdot x && \text{(d)} \end{aligned} \qquad \text{(III.39)}$$

Vztahy (39.a-c) jsou totožné se vztahy (II.5) Galileiho transformace. V klasické mechanice ovšem Galileiho transformace samozřejmě doplňuje vztah

$$t' = t \qquad \text{(III.40)}$$

(absolutní čas nezávisí na prostorových souřadnicích).

Vztahy (39) budou tedy skutečně Galileiho transformací jen v případě, že v (39.d) bude možno zanedbat člen $(\upsilon/c)\, x/c$ oproti t, tj. když tento člen bude řádu $\varepsilon^2\cdot t$. Protože $|\upsilon/c| \approx \varepsilon$, je třeba, aby bylo

$$\left|\frac{x}{c}\right| \approx \varepsilon\cdot t\,, \quad \text{tj.} \quad \left|\frac{x}{c\cdot t}\right| \approx \varepsilon << 1 \qquad \text{(III.41)}$$

I pro malé rychlosti υ (pro něž $|\upsilon/c| << 1$) tedy Galileiho transformace správně aproximuje Lorentzovu transformaci jen v rozsahu souřadnic daném vztahem (41). Jak ještě uvidíme dále, přesněji bychom měli klást podmínku

$$\frac{\left|\dfrac{\Delta x}{\Delta t}\right|}{c} << 1\,, \qquad \text{(III.42)}$$

kde Δx a Δt jsou rozdíly prostorových a časových souřadnic událostí, které mají v dané situaci význam. $\dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ ovšem můžeme chápat jako rychlost šíření signálu, který by dané události spojoval. (Může jít třeba o pohyb částice. První událost je její vyslání, druhá její přijetí.) Z toho vidíme názorněji **mez použitelnosti Galileiho transformace a tedy i klasické mechaniky**:

Nejen vzájemné rychlosti inerciálních systémů, ale veškeré rychlosti v dané situaci se vyskytující musí být malé ve srovnání s rychlostí světla.

Uvažovat o událostech (dvou či více, k jejichž spojení by byl potřeba signál s rychlostí srovnatelnou s rychlostí světla (nebo dokonce vyšší), znamená jít za rámec platnosti klasické mechaniky.

Existuje ovšem způsob, jak dostat Galileiho transformaci jako limitu transformace Lorentzovy: Je nutno uvažovat limitu

$$c \to \infty\ .$$

Jak se může čtenář snadno přesvědčit, vztahy (30) pak okamžitě dají (II.5) a (40).

Čtenáři možná činí potíže představa, že základní fyzikální konstantu by bylo možno limitovat do nekonečna. Zde máme ovšem na mysli Lorentzovy transformace, v nichž roli rychlosti světla hraje nějaká obecná mezní rychlost c_0, tak jak jsme to diskutovali na konci předchozího článku.

Limita $c \to \infty$ není jen formální záležitostí, neboť nám připomíná a znovu osvětluje vztah klasické mechaniky k teorii relativity:

Jak uvidíme dále, rychlost c má ve speciální teorii relativity význam mezní, maximální možné rychlosti. V klasické mechanice jsou přípustné rychlosti libovolně velké. Proto je též možno nekonečně rychlým signálem synchronizovat naráz všechny hodiny (v celém prostoru a ve všech inerciálních soustavách). Tak lze zavést „absolutní čas" a proto přirozeně platí vztah (40). Teorie relativity klade na rychlost šíření signálů omezení, absolutní čas nelze zavést a vztah (40) je nahrazen vztahem Lorentzovy transformace.

e) Lorentzova transformace rozdílů souřadnic

Uvažujme dvě události 1 a 2. Jejich souřadnice v soustavě S označíme $x_{(1)}$, $y_{(1)}$, $z_{(1)}$, $t_{(1)}$ a $x_{(2)}$, $y_{(2)}$, $z_{(2)}$, $t_{(2)}$. Analogicky označíme jejich souřadnice v S'. Označme rozdíly souřadnic událostí

$$\Delta x = x_{(2)} - x_{(1)}\,,\ \Delta y = y_{(2)} - y_{(1)}\,,\ \Delta z = z_{(2)} - z_{(1)}\,,\ \Delta t = t_{(2)} - t_{(1)}$$

$$\Delta x' = x'_{(2)} - x'_{(1)}\,,\ \Delta y' = y'_{(2)} - y'_{(1)}\,,\ \Delta z' = z'_{(2)} - z'_{(1)}\,,\ \Delta t' = t'_{(2)} - t'_{(1)}$$

Zapíšeme-li Lorentzovy transformace pro souřadnice událostí 1 a 2:

$$x'_{(1)} = \frac{x_{(1)} - \upsilon\, t_{(1)}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad , \qquad x'_{(2)} = \frac{x_{(2)} - \upsilon\, t_{(2)}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

(a analogicky pro další souřadnice) a odečteme-li je od sebe, získáme transformaci rozdílů souřadnic:

$$\begin{aligned}
\Delta x' &= \frac{\Delta x - \upsilon\,\Delta t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} && \text{(a)}\\
\Delta y' &= \Delta y && \text{(b)}\\
\Delta z' &= \Delta z && \text{(c)}\\
\Delta t' &= \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} && \text{(d)}
\end{aligned} \qquad \text{(III.43)}$$

Díky linearitě jsou to samozřejmě transformace stejné jako transformace souřadnic samotných.

Poznamenejme, že i transformace (43) by se měly v limitě malých rychlostí blížit Galileiho transformacím rozdílů souřadnic. Z požadavku, aby vztah (43.d) přešel v $\Delta t' \doteq \Delta t$ plyne doplňující podmínka (42) uvažovaná výše.

f) Invariance čtyřintervalu

Veličinu

$$\left(\Delta s\right)^2 = \left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2 - c^2 \left(\Delta t\right)^2 \tag{III.44}$$

nazýváme **čtyřintervalem** (událostí 1 a 2). Přesněji řečeno, čtyřintervalem nazýváme Δs, ovšem obvykle se pracuje s jeho druhou mocninou $\left(\Delta s\right)^2$.

Čtyřinterval je velmi důležitou veličinou, jak poznáme ještě dále v kapitole VIII. Zatím si všimneme jen toho, jak se čtyřinterval mění při Lorentzově transformaci.

Vztah (44) udává čtyřinterval v systému S. V S' je

$$\left(\Delta s'\right)^2 = \left(\Delta x'\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2 + \left(\Delta z'\right)^2 - c^2 \left(\Delta t'\right)^2 \tag{III.45}$$

Dosazením (43) do (45) ale zjistíme, že platí

$$\left(\Delta x'\right)^2 + \left(\Delta y'\right)^2 + \left(\Delta z'\right)^2 - c^2 \left(\Delta t'\right)^2 = \left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2 - c^2 \left(\Delta t\right)^2$$

čili

$$\left(\Delta s'\right)^2 = \left(\Delta s\right)^2 \ , \tag{III.46}$$

tedy, že

> čtyřinterval dvou daných událostí je stejný ve všech inerciálních systémech, nemění se při Lorentzově transformaci.

Jinými slovy to vyjadřujeme tvrzením

> **Čtyřinterval je invariantní vůči Lorentzově transformaci**
> (jinak řečeno, je invariantem Lorentzovy transformace).

Všimněme si jedné důležité aplikace tohoto výsledku. Nechť událost 1 je vysláním světelného signálu a událost 2 jeho přijetím. Veličina

$$\Delta l = \sqrt{\left(\Delta x\right)^2 + \left(\Delta y\right)^2 + \left(\Delta z\right)^2} \tag{III.47}$$

je vzdálenost místa vyslání a přijetí signálu v soustavě S. (Nejde vlastně o nic jiného, než o Pythagorovu větu.) Pomocí (47) lze vztah (44) pro čtyřinterval zapsat jako

$$\left(\Delta s\right)^2 = \left(\Delta l\right)^2 - c^2 \left(\Delta t\right)^2 \tag{III.48}$$

Protože jde o signál šířící se rychlostí světla, je

$$\Delta l = c \cdot \Delta t$$

Ze (48) pak plyne

$$\Delta s = 0 \tag{III.49}$$

> **- interval událostí spojených světelným signálem je nulový**.

Díky invarianci čtyřintervalu (vztahu (46)) je ovšem také $\Delta s' = 0$, neboli $\Delta l' = c \cdot \Delta t'$, kde $\Delta l'$ je vzdálenost míst vyslání a příjmu signálu v S' a $\Delta t'$ je doba, kterou signál potřeboval v S' k překonání této vzdálenosti. Z (50) tedy vidíme, že rychlost signálu v S' je rovněž c .

Ověřili jsme tedy, že je-li rychlost šíření světla v jednom inerciálním systému ve všech směrech rovna *c*, platí totéž i ve všech ostatních inerciálních systémech.

Čtenář může namítnout, že toto jsme požadovali již při odvozování Lorentzovy transformace. Ovšem v odvození jsme tohoto požadavku použili jen pro světelný signál vyslaný v $t = 0$ z počátku systému S v kladném směru osy x. Nyní jsme ověřili, že totéž platí pro všechny signály vyslané z libovolných míst v libovolném čase do libovolného směru.

Poznamenejme ještě, že čtyřinterval je invariantní i vůči obecným Lorentzovým transformacím. Ve skutečnosti právě tato vlastnost bude pro nás klíčem k těmto transformacím.

g) Vzájemná rychlost inerciálních systémů je menší než rychlost světla

K uvedené vlastnosti není třeba mnoho dodávat. Už pouhý pohled na vztahy Lorentzovy transformace nás přesvědčí, že pro $v = c$ ani pro $v > c$ nemají smysl. (Buď by šlo o dělení nulou, nebo o odmocňování záporného čísla.)

Připojme ještě jednu poznámku týkající se symboliky. Velmi často se zavádí **označení**

$$\frac{v}{c} = \beta \qquad \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma \tag{III.50}$$

Zápis speciální Lorentzovy transformace má pak tvar

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\left(x - \beta ct\right) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ ct' &= \gamma\left(ct - \beta x\right) \end{aligned} \tag{III.51}$$

kde místo transformace *t* jsme napsali transformaci kombinace *ct*, s níž vztahy vypadají symetričtěji.