IV. Relativistická kinematika

IV.1. Důsledky Lorentzovy transformace

Odvození Lorentzovy transformace a jejích vlastností jsme v minulé kapitole věnovali dost místa a energie. Máme tak však v rukou prostředek, s jehož pomocí teď můžeme rychle odvodit a přesněji rozebrat řadu důležitých výsledků speciální teorie relativity.

a) Skládání rychlostí

Nechť se částice nebo obecně nějaký signál pohybuje vůči systému *S* rychlostí $\vec{u}$ – její složky budeme značit u_x, u_y, u_z. Jaké budou složky její rychlosti u'_x, u'_y, u'_z vůči systému *S'*?

Zřejmě platí

$$u'_x = \frac{\Delta x'}{\Delta t'},\ u'_y = \frac{\Delta y'}{\Delta t'},\ u'_z = \frac{\Delta z'}{\Delta t'}\ , \qquad \text{(IV.1)}$$

respektive, pokud pohyb částice není rovnoměrný,

$$u'_x = \lim_{\Delta t' \to 0} \frac{\Delta x'}{\Delta t'}\ ,\ \ldots \qquad \text{(IV.2)}$$

Rychlost je totiž rovna přírůstku dráhy dělenému přírůstkem času (a podobně pro složku rychlosti) a pro okamžitou rychlost musíme limitovat časový interval k nule – podstatné zde ovšem je, že v systému *S'* musíme užívat právě časovou souřadnici tohoto systému (tedy $\Delta t'$) a žádnou jinou. Počítat např. s hodnotou $\frac{\Delta x'}{\Delta t}$ by vedlo jen ke zmatkům.

Z Lorentzovy transformace (III.3) pro rozdíly souřadnic již složky (1) lehce spočteme. Dělíme-li vyjádření $\Delta x'$ (tj. III.43.a) vyjádřením $\Delta t'$ (III.43.d), dostáváme

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - \upsilon \Delta t}{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta x}{\Delta t} - \upsilon}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}\ . \qquad \text{(IV.3)}$$

Uvědomíme-li si, že $\frac{\Delta x}{\Delta t} = u_x$ resp. že tato rovnost platí v limitě $\Delta t \to 0$ (a přitom $\Delta t' \to 0 \Leftrightarrow \Delta t \to 0$), můžeme v (3) limitu provést a s využitím (2) získat výsledek

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}} \qquad \text{(IV.4.a)}$$

Podobně ze vztahu $\Delta y' = \Delta y$ a vyjádření $\Delta t'$ je

$$\frac{\Delta y'}{\Delta t'} = \frac{\Delta y \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x} = \frac{\frac{\Delta y}{\Delta t}\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1 - \frac{\upsilon}{c^2}\frac{\Delta x}{\Delta t}}$$

a po limitování $\Delta t \to 0, \Delta t' \to 0$ pak

$$u'_y = \frac{u_y \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x \upsilon}{c^2}} \qquad \text{(IV.4.b)}$$

Stejně se transformuje složka u_z.

Poznamenejme, že v úvodních výkladech STR se často uvádí jen transformace rychlosti ve směru osy x, čímž se může navodit mylná představa, jako by se rychlost v kolmém směru neměnila – podobně jako se nemění vzdálenost. Změna rychlosti je tu ovšem dána změnou přírůstku času.

Inverzní transformace k transformacím (4) z nich samozřejmě získáme změnou znaménka υ (uvědomte si znovu proč!):

$$u_x = \frac{u'_x + \upsilon}{1+\frac{u'_x \upsilon}{c^2}} \qquad \text{(a)}$$

$$u_y = \frac{u'_y \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1+\frac{u'_x \upsilon}{c^2}} \qquad \text{(b)} \qquad \text{(IV.5)}$$

a analogicky pro u_z. Zejména vztah (5.a) bývá často v populárnější literatuře označován jako vzorec pro skládání rychlostí v teorii relativity. (Skládání rychlostí ovšem vlastně popisují všechny vztahy (4) a (5).) Připomeňme, že stejný vztah vyšel i při skládání dvou speciálních Lorentzových transformací (viz (III.35)); oba výsledky jsou tedy konzistentní.

Ze vztahů (4) a (5) pro transformaci rychlostí teď odvodíme tři důležité důsledky:

i) **rychlost světla je stejná ve všech inerciálních systémech**

To, že Lorentzovy transformace opravdu vyhovují principu konstantní rychlosti světla, jsme již ověřili výše. Teď se nabízí jiná metoda ověření:

Spočtěte hodnotu $(u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2$ víte-li, že $(u_x)^2 + (u_y)^2 + (u_z)^2 = c^2$.

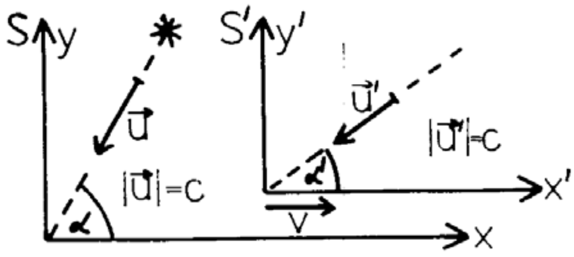
Jinou možností (pro světelný paprsek pohybující se v rovině xy) je vzít $u_x = c\cos\alpha$, $u_y = c\sin\alpha$ a spočítat $(u'_x)^2 + (u'_y)^2$.

Tyto krátké výpočty ponecháváme čtenáři jako malé cvičení – a stejně tak i to, aby si uvědomil jejich interpretaci.

ii) **aberace světla**

Soustava S nechť je spojena se zdrojem světla (hvězdou), soustava S' s pozorovatelem na Zemi. Je-li úhel, který v soustavě S svírá světelný paprsek se směrem rychlosti $\vec{\upsilon}$ (tedy i s osou x) roven α, viz obr.IV.1, je

$$u_y = -c\sin\alpha, \quad u'_y = -c\sin\alpha' . \qquad \text{(IV.6)}$$



Obr. IV.1. K odvození aberace světla

Pro úhel α', který paprsek svírá s osou $x' \equiv x$ v soustavě *S'*, platí $tg\ \alpha' = \dfrac{u'_y}{u'_x}$ a po využití (4) a dosazení (6) a úpravě pak konečně

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{\sin\alpha\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}}{\cos\alpha+\dfrac{v}{c}}\ , \tag{IV.7}$$

což je **přesný relativistický vztah pro aberaci světla**. Je z něj zřejmé, že pro $v > 0$ je $tg\ \alpha' < \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = tg\ \alpha$, čili $\alpha' < \alpha$, tj. objektiv dalekohledu se musí obecně vždy sklonit ve směru rychlosti pohybu *S'* vůči *S*.

Vidíme, že k vysvětlení aberace světla nepotřebujeme éterovou teorii. Pro malé rychlosti v (při pohybu Země kolem Slunce, tj. pro $\dfrac{v}{c} \approx 10^{-4}$) dával ovšem vztah (II.29) éterové teorie výsledek shodný s pozorováním. Je tedy na místě ověřit, zda pro tyto rychlosti vede i relativistický vztah (7) ke shodným výsledkům.

Pro $|v/c| << 1$ zřejmě můžeme v (7) zanedbat člen $\dfrac{v^2}{c^2}$ (oproti 1). Dále je jednodušší pracovat s $\mathrm{cotg}\,\alpha'$ než s $tg\ \alpha'$; ze (7) po zmíněném zanedbání plyne $\mathrm{cotg}\,\alpha' \doteq \dfrac{\cos\alpha + v/c}{\sin\alpha} =$ $= \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha} + \dfrac{v}{c\sin\alpha}$, z čehož

$$\mathrm{cotg}\,\alpha' - \mathrm{cotg}\,\alpha = \frac{v}{c\sin\alpha}\ . \tag{IV.8}$$

Pro $\left|\dfrac{v}{c}\right| << 1$ je ovšem α' blízké α, tj. $\Delta\alpha = \alpha' - \alpha$ je malé: $|\Delta\alpha| << 1$. Pak lze psát $\mathrm{cotg}\alpha' - \mathrm{cotg}\alpha \doteq \dfrac{d\,\mathrm{cotg}\alpha}{d\alpha}\cdot\Delta\alpha = -\dfrac{1}{\sin^2\alpha}\cdot\Delta\alpha$. Porovnání s (8) pak dává

$$\Delta\alpha \doteq -\frac{v}{c}\cdot\sin\alpha\ ,$$

tedy výsledek shodný se vztahem (II.29) éterové teorie – a tedy i výsledek potvrzený pozorováním.

iii) **„strhávání světla“**

V kapitole II. jsme uvedli ještě jeden pokus, jehož výsledek byl v souladu s předpovědí éterové teorie: Fizeaův pokus. (Jeho výsledek se v éterové teorii interpretoval jako částečné strhávání éteru.) Speciální teorie relativity musí samozřejmě výsledek pokusu také vysvětlit.

Připomeňme, že ve Fizeauově pokusu se kapalina o indexu lomu *n* pohybuje trubicí rychlostí v. Světlo se vůči kapalině pohybuje rychlostí c/n; v pokusu se pak měří rychlosti světla (ve směru proudění kapaliny) vůči přístroji.

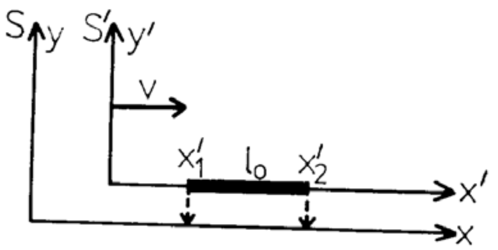
Speciální teorie relativity umožňuje tuto rychlost spočíst velmi jednoduše: nechť *S* je soustava spojená s přístrojem, *S’* s proudící kapalinou. V *S’* je $u'_x = c/n$. Rychlost vůči přístroji pak udává vztah (5.a). Po úpravě pro $|v/c| << 1$ z něj plyne:

$$u_x = \frac{\frac{c}{n}+v}{1+\frac{1}{n}\frac{v}{c}} \doteq \left(\frac{c}{n}+v\right)\left(1-\frac{1}{n}\frac{v}{c}\right) \doteq \frac{c}{n}+\left(1-\frac{1}{n^2}\right)v \ .$$

Při úpravě jsme zanedbávali členy řádu $\frac{v^2}{c^2}$ oproti 1, resp. $\frac{v^2}{c^2}$ oproti $\frac{c}{n}$. Vidíme, že pro malé rychlosti dává teorie relativity stejný výsledek jako éterová teorie. Navíc umožňuje bez dalších předpokladů odvodit hodnotu Fresnelova strhovacího koeficientu. Z hlediska teorie relativity je tedy „strhávání světla“ projevem relativistického skládání rychlostí a Fizeaův pokus jeho potvrzením.

b) Kontrakce délek

Uvažujme inerciální systém *S’* pohybující se rychlostí v vůči inerciálnímu systému *S* („standardním“ způsobem) a tyč délky l_0, která je v klidu vůči systému *S’* (a má směr osy *x’*, viz obr.IV.2). l_0 je délka měřená v soustavě *S’*.



Obr. IV.2. K odvození kontrakce délek: délka tyče v soustavě *S’*

Pro souřadnice x'_1 a x'_2 konců tyče v *S’* tedy platí

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 = l_0 \ . \qquad \text{(IV.9)}$$

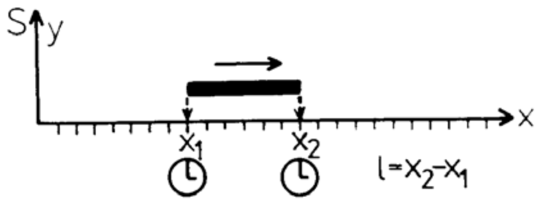
Jakou délku tyče naměří pozorovatelé v soustavě *S* ? K odpovědi na tuto otázku musíme nejprve určit, **jak měřit délky pohybujících se předmětů**.

U předmětů, které jsou vůči dané soustavě v klidu, je to jednoduché: přiložíme k nim měřítko, označíme na něm začátek předmětu (např. tyče) a jeho konec. Rozdíl údajů měřítka odpovídajících konci a začátku je délkou předmětu – ostatně takto vyjadřuje měření délky i vztah (9).

Jak ale určit délku předmětu, který se vůči měřítku pohybuje, „klouže“ podél měřítka? Zřejmě to jde naprosto stejně jako u stojícího předmětu, jen musíme dát pozor na to, **kdy** budeme na měřítku označovat začátek a konec předmětu: pokud bychom nejprve označili začátek, pak chvíli počkali a teprve potom označili konec, bude vyznačená délka záviset na tom, jak dlouho jsme s označením konce váhali a stěží bychom tedy takovéto měření mohli považovat za správné.

Zřejmě nejlepší možný způsob je označit začátek a konec předmětu na měřítku **současně**. A protože čas závisí na soustavě souřadnic, musíme toto konstatování specifikovat ještě přesněji: **současně v soustavě spojené s měřítkem** – neboť to znamená současně pro nás pozorovatele, kteří měření provádíme a jsme vůči měřítku v klidu.

Teoreticky by šlo měření provést tak, že podél měřítka by byla řada pozorovatelů (stojících vůči měřítku), kteří by měli synchronizované hodiny a dohodli se, že např. přesně ve 3 hodiny ti dva z nich, které bude právě míjet začátek a konec předmětu, vyznačí tyto polohy na měřítku (viz obr.IV.3).



Obr. IV.3. K odvození kontrakce délek: měření délky tyče v ze soustavy *S*

Samozřejmě to předpokládá, aby rozestupy pozorovatelů byly menší než požadovaná přesnost měření; teoreticky si ovšem lze představit, že pozorovatelé mohou být rozmístěni libovolně hustě.

Výše popsaná metoda měření je jistě idealizovaná. Hodí se však velmi dobře k analýze situace a libovolnou realistickou metodu, např. fotografování tělesa pohybujícího se před měřítkem apod., s ní lze dobře porovnávat.

Především nám však říká, co vůbec máme chápat jako délku pohybujícího se předmětu. Všichni se jistě shodneme na tom, že současné (z hlediska měřítka) označení začátku a konce předmětu je z hlediska pozorovatelů stojících vůči měřítku nejlepším resp. nejrozumnějším možným vymezením délky předmětu.

Nyní již můžeme odvodit, jakou délku pozorovatelé v *S* naměří. Pro souřadnice začátku a konce délky tyče platí vztahy Lorentzovy transformace (viz (III.30))

$$x_1' = \frac{x_1 - v\,t_1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \quad x_2' = \frac{x_2 - v\,t_2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\,, \tag{IV.10}$$

kde t_1 a t_2 jsou časy vyznačení začátku a konce tyče (tato vyznačení jsou událostmi 1 a 2). Při měření v soustavě *S* je ovšem

$$t_1 = t_2\ ,$$

jak jsme zdůvodnili výše. Odečtením vztahů (10) je pak

$$x_2' - x_1' = \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad ,$$

což, uvážíme.li, že $\Delta x = x_2 - x_1 = l$ je délka měření v soustavě *S*, dává (s využitím (9)):

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \quad , \tag{IV.11}$$

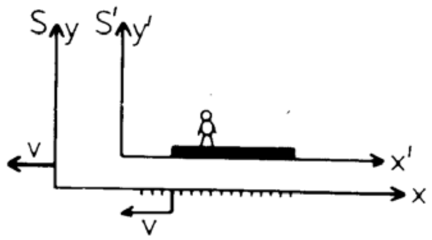
což je **relativistický vztah pro kontrakci délek** (ve směru pohybujícího se předmětu; ve směrech kolmých na směr pohybu samozřejmě k žádné kontrakci nedochází.)

Tento výsledek bude již zřejmě řada žáků a studentů znát z populární literatury a sám o sobě tedy pro ně nemusí být překvapující. Často jej ovšem mohou znát ve znění „pohybující se předměty se zkracují“ a chápat je v absolutním smyslu: že se zkracují předměty, které se pohybují vzhledem k nějaké absolutní klidové soustavě. Studenti si mohou tuto soustavu intuitivně spojovat se Zemí resp. naší Galaxií apod. Mohou se pak např. domnívat, že raketa pohybující se velkou rychlostí vůči Zemi, se z hlediska Země zkracuje, ale že z hlediska rakety by se „samozřejmě“ jevila Země a všechny předměty na ní protažené.

Ovšem letí-li raketa s vypnutými motory, je soustava s ní spojená inerciální. Vzhledem k této soustavě se Země pohybuje, a tedy pozorovatelé v raketě naměří Zemi rovněž zkrácenou v poměru $\sqrt{1 - v^2/c^2}$. To může žákům a studentům připadat paradoxní. Případné námitky tohoto typu by bylo možno „vypreparovat“ třeba do následující formulace:

Z hlediska pozorovatele v *S’* se pohybuje měřítko (které je v klidu vůči *S*) rychlostí v (viz obr.IV.4). Podle speciálního principu relativity jsou systémy *S* a *S’* rovnoprávné. Kontrakce délek, kterou jsme odvodili v systému *S* se tedy musí uplatňovat i v systému *S’*!

To znamená, že např. tyč, která je v klidu vůči *S* a má v *S’* délku 1 metr, naměří pozorovatelé v *S’* zkrácenou, dlouhou $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ metru. Ovšem „podle zdravého rozumu“ se těchto zkrácených tyčí musí do délky l_0 vejít víc než nezkrácených metrových tyčí (v klidu vůči *S’*), které užívají pozorovatelé v *S’*. „Podle zdravého rozumu“ by tedy z hlediska *S’* měli pozorovatelé v *S* naměřit tyč, která má v *S’* délku l_0 nikoli kratší, ale delší!



Obr. IV.4. Kontrakce délek z hlediska pozorovatele v *S’*

Zdánlivě je tedy z hlediska *S’* situace nepochopitelná. Problém lze vyhrotit do otázky, kterou by si mohl položit pozorovatel v *S’* :

Jak to, že pozorovatelé v *S* naměří zkráceným metrem moji tyč nikoli prodlouženou, ale zkrácenou?

Poznamenejme, že při diskusích s žáky a studenty by zřejmě bylo vhodné soustavy *S* a *S'* konkretizovat a podobně, jako to činil v populárnějších výkladech Einstein, mluvit třeba o vlaku (v soustavě *S'*), jedoucím rychlostí υ podél nádraží (soustavy *S*). Situace se tím stane názornější a ve větách se nebude pořád opakovat (a možná plést) *S* a *S'*.

To, že pozorovatelé v *S'* naměří měřítko stojící vůči *S* zkrácené, je zřejmé a lze to ostatně opět odvodit z Lorentzových transformací (tentokrát je výhodnější vyjít z (III.37.a)) – je jen třeba si uvědomit, že pozorovatelé v *S'* označí polohu začátku a konce předmětů ve stejném čase $t'\left(t_1'=t_2'\right)$. Čtenář si může odvození provést sám jako jednoduché cvičení.

To, co musíme udělat, je rozebrat měření, prováděná pozorovateli v *S* (pozorovateli na nádraží) z hlediska *S'* (z hlediska vlaku).

Klíčem k pochopení situace je skutečnost, že **události, které jsou současné v systému *S*, nejsou obecně současné v systému *S'***. Vyjdeme-li ze vztahu (III.37.d) inverzní Lorentzovy transformace

$$t_1 = \frac{t_1' + \dfrac{\upsilon}{c^2} x_1'}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \ , \quad t_2 = \frac{t_2' + \dfrac{\upsilon}{c^2} x_2'}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \ ,$$

pak pro $t_1 = t_2$ dostáváme $t_1' + \dfrac{\upsilon}{c^2} x_1' = t_2' + \dfrac{\upsilon}{c^2} x_2'$, čili

$$t_2' - t_1' = -\frac{\upsilon}{c^2}\left(x_2' - x_1'\right) = -\frac{\upsilon}{c^2} l_0 \ . \tag{IV.12}$$

Z hlediska soustavy *S'* tedy pozorovatelé, kteří provádí měření v *S*, **nejprve označí** na měřítku **polohu konce tyče** (neboť $t_2' < t_1'$) a teprve až za dobu danou (12) označí polohu jeho začátku.

Mezitím se ovšem měřítko vzhledem k *S'* posouvá (doleva, viz obr.IV.4) – i s vyznačeným koncem tyče. Než se označí i začátek, posune se o $\upsilon\left(t_1' - t_2'\right)$. Z hlediska *S'* tedy pozorovatelé v *S* vyznačí na měřítku ne délku l_0, ale

$$l_{\text{vyznač.}} = l_0 - \upsilon\left(t_1' - t_2'\right) = l_0 - \upsilon \frac{\upsilon}{c^2} l_0 = l_0\left(1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}\right) .$$

Tuto vyznačenou délku pak měří zkráceným (z hlediska *S'*) metrem zkráceným na délku $\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$. Naměří tedy

$$l_{\text{naměř.}} = \frac{l_{\text{vyznač.}}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = l_0 \sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \ ,$$

tedy přesně tolik, kolik udává vztah (11) pro kontrakci délek. Pouze popis měření, který byl z hlediska soustavy *S* jednoduchý, je z hlediska *S'* poněkud komplikovanější: to, co je z hlediska *S* nejlepším možným označením počátku a konce tyče, je z hlediska *S'* označením v různých časech; navíc je vyznačená délka měřena zkráceným metrem. Výsledek je ovšem tentýž.

Tato situace je v teorii relativity v řadě případů typická: popis daných jevů, měření apod. je v některé inerciální soustavě jednoduchý a názorný, zatímco v jiných může vypadat složitě. Ovšem při pečlivém a korektním rozboru situace nedochází samozřejmě k žádnému sporu či paradoxu. Ty jsou jen důsledkem nepřesných úvah.

Přesvědčení, že tomu tak opravdu je a že pokud docházíme ke vzájemně neslučitelným výsledkům, je chyba v nás resp. v našich úvahách, získá ovšem čtenář až tím, že si sám promyslí různé zdánlivě paradoxní situace. Právě toto přesvědčení je ovšem dosti důležité při diskusích s žáky a studenty, kteří mohou někdy vymyslet situace dosti zamotané. Proto jsme zde věnovali rozboru jednoho ze „zdánlivě nepochopitelných“ výsledků tolik místa.

c) Dilatace času

Zkoumejme chod ideálních hodin A, které jsou v klidu v systému *S'*, z hlediska systému *S*. (*S'* se pohybuje vzhledem k *S* rychlostí υ ve směru osy *x*, tak jak je to v našich rozborech obvyklé.) Pro tyto dané hodiny je

$$x' = \text{konst.} \tag{IV.13}$$

Vztah (III.37.d) inverzní Lorentzovy transformace dá pro čas t_1' (čas v soustavě *S'*, tj. čas, který ukazují i námi uvažované hodiny) hodnotu odpovídající časové souřadnice *t* v soustavě S :

$$t_1 = \frac{t_1' + \frac{\upsilon}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \ , \tag{IV.14}$$

pro čas t_2' pak

$$t_2 = \frac{t_2' + \frac{\upsilon}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \ , \tag{IV.15}$$

přičemž díky (13) je $x_1' = x_2'$. Odečtením (14) od (15) proto dostane výsledek

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \ , \tag{IV.16}$$

kde $\Delta t' = t_2' - t_1'$ je přírůstek času na hodinách A a Δt odpovídající přírůstek času v *S* (přírůstek času na hodinách soustavy *S*). Časový interval Δt v soustavě *S* je delší než v soustavě *S'*, v níž hodiny A stojí, proto o vztahu (16) říkáme, že popisuje **dilataci času**.

Čas udávaný ideálními hodinami bývá nazýván jejich **vlastním časem** a označován τ. O přírůstku času $\Delta t'$ na hodinách A tedy mluvíme jako o **přírůstku vlastního času** $\Delta\tau$ těchto hodin: $\Delta\tau = \Delta t'$. Vztah (16) pak obvykle přepisujeme do tvaru

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}} \cdot \Delta t \ , \tag{IV.17}$$

který samozřejmě rovněž vystihuje dilataci času.

Slovně se výsledek (17) často vyjadřuje formulací „pohybující se hodiny se zpomalují". Skutečně, jestliže v systému S uplyne 1 sekunda, vyplývá ze (17), že přírůstek času (resp. přírůstek údaje) na hodinách A bude jen $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$ sekund (tj. méně než 1 sekunda).

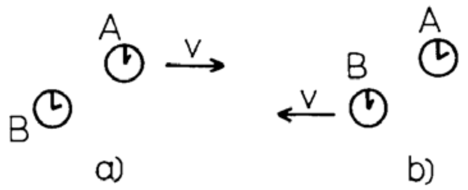
Uvedené slovní formulace není ovšem příliš přesná a může vést k falešným představám. Zčásti může třeba sugerovat dojem, že existují nějaké hodiny, které jdou správně a nezpožďují se – zřejmě to jsou nepohybující se hodiny, tedy **absolutně** se nepohybující hodiny; a už jsme zpět u absolutního prostoru.

Uvažujme ovšem hodiny B stojící v systému S. Vzhledem k S' se tyto hodiny pohybují rychlostí v. Protože systémy S a S' jsou rovnoprávné, musí se hodiny B zpožďovat vzhledem k času systému S'. (Tj. analogicky k (17) musí být $\Delta\tau_B = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\Delta t'$).

Jinak by byl porušen speciální princip relativity. **Zpomalování hodin je tedy relativní** – vždy vůči času systému, vzhledem k němuž se hodiny pohybují. (Ostatně právě tak tomu bylo s kontrakcí délek.)

Uvedená skutečnost může zpočátku žákům a studentům připadat nepochopitelná. Jejich námitky mohou vykrystalizovat třeba v následující argumentaci:

Nechť se hodiny A pohybují rovnoměrně přímočaře vůči hodinám B (viz obr.IV.5.a).



Obr. IV.5. K dilataci času

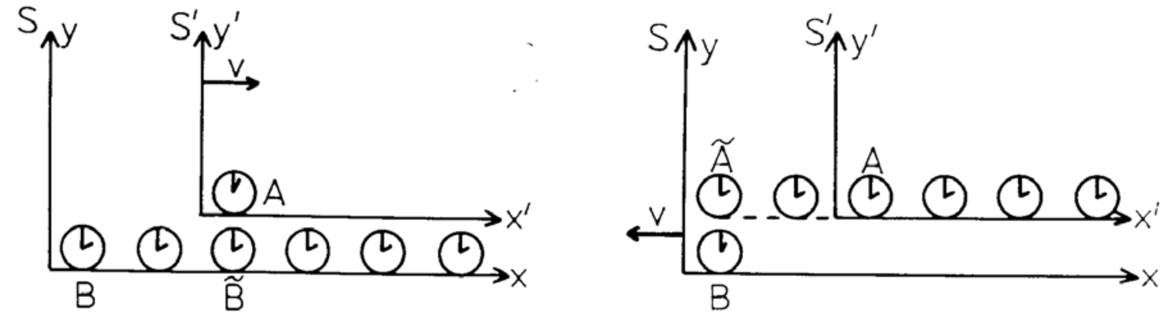
Podle teorie relativity se tedy hodiny A vůči hodinám B zpožďují. Ovšem z hlediska hodin A to jsou hodiny B, které se pohybují (viz obr.IV.5.b). Podle teorie relativity by se tedy měly B zpožďovat vůči A. Které hodiny se tedy vlastně zpožďují?

Z běžného života jsme zvyklí, že zpožďují-li se např. náramkové hodinky oproti budíku, budík se naopak proti hodinkám předbíhá. Chování pohybujících se hodin v teorii relativity se proto ve srovnání s běžnou zkušeností zdá paradoxní. Problém nelze odbýt pouhou poznámkou, že z hlediska pozorovatele spojeného s hodinami A se zpožďují hodiny B a z hlediska pozorovatele spojeného s B se zpožďují A. To je sice pravda, ale bez dalšího rozboru může toto konstatování navodit představu, že dilatace času je jen zdánlivý efekt – což již pravda není. (Viz dále v článku IV.5. experimentálně zjišťované důsledky dilatace času.)

Žák může argumentovat třeba tak, že A a B mohou být stopky, které se naráz spustí a naráz zastaví, pak oba pozorovatelé napíší čas zjištěný na svých hodinách na papír a oba výsledky se porovnají. Zřejmě není možné, aby z hlediska jednoho pozorovatele byl na papírku označeném A napsán čas 1 hodina a na papírku B čas půl hodiny a z hlediska druhého pozorovatele bylo naopak napsáno: „A: půl hodiny", „B: 1 hodina". (Oba pozorovatelé přece nahlížejí na tutéž realitu!) Takže které hodiny se ve skutečnosti zpozdí?

Řešení tkví samozřejmě v tom, že výše uvedená argumentace je nepřesná. (Ovšem právě takovou můžeme očekávat od žáků.) Je třeba si přesně uvědomit, jak z hlediska systému *S* měříme chod pohybujících se hodin (hodin A, které jsou v klidu vůči *S'*). Údaj hodin A můžeme porovnat s údajem daných hodin B (stojících v *S*) v okamžiku, kdy se tyto hodiny míjejí. Případně lze v tento okamžik spustit stopky A a B. Pak se ovšem hodiny A od hodin B vzdalují; chceme-li v nějakém dalším okamžiku porovnat údaj hodin A s časem v systému *S*, musíme jej porovnat s údajem hodin B_1 stojících v systému *S*, které hodiny A právě míjí. Hodiny B_1 musí být samozřejmě v systému *S* synchronizovány s hodinami B.

K tomu, abychom určili chod jedněch pohybujících se hodin A z hlediska systému *S*, potřebujeme tedy řadu hodin, které stojí v *S* a jsou v *S* synchronizovány. (Viz obr.IV.6.a) Při tomto porovnávání zjistíme, že hodiny A se vůči soustavě hodin v *S* zpomalují.



a) b)

Obr. IV.6. Měření chodu hodin z hlediska *S* a *S'*

Porovnáme-li naopak chod jedněch hodin B (ze soustavy *S*) s časem v soustavě *S'*, potřebujeme řadu hodin stojících v *S'* a synchronizovaných s A v *S'*. (Viz obr.IV.6.b, v tomto případě zjistíme zpožďování hodin B.) Nejde tedy o přímé porovnávání jedněch hodin A s jedněmi hodinami B! Samozřejmě – údaje hodin A a B bychom mohli porovnávat pomocí světelných signálů. Museli bychom ovšem vzít v úvahu dobu, kterou tyto signály potřebují k překonání vzdálenosti mezi hodinami a rozbor situace by proto byl o něco složitější. Výsledek by byl ovšem stejný. To je zřejmé už z toho, že synchronizaci soustavy hodin lze provádět právě světelnými signály.

Pokud se týče argumentu se spuštěním a zastavením stopek, chyba je v bezmyšlenkovitém použití slova „naráz“. Stopky A a B lze sice spustit „naráz“ (tj. současně), když se A a B míjejí. V dalších okamžicích jsou ovšem A a B již na různých místech; v tom případě ovšem **současně** z hlediska soustavy *S* (spjaté s A) znamená v **různých časech** z hlediska *S'* spjaté s B. A naopak.

Podobně jako jsme to učinili u kontrakce délek, mohli bychom se nyní ptát, jak bude pozorovatel v *S'* interpretovat fakt, že pozorovatelé v *S* naměří zpomalování jeho hodin A navzdory tomu, že z hlediska *S'* jsou to hodiny pozorovatelů v *S*, které se zpomalují.

Odpověď se opět zakládá na tom, že události současné v *S* (tj. např. odbíjení poledne hodinami v *S*) nejsou obecně současné z hlediska *S'*: „Hodiny, které jsou synchronizovány v *S*, se tedy z hlediska *S'* jeví synchronizovány špatně. Pozorovatel v *S'* tedy může prohlásit: Hodiny pozorovatelů v *S* se zpožďují, ale navíc jsou synchronizovány tak špatně, že tito pozorovatelé naměří zpožďování mých hodin A.“ Kvantitativní rozbor situace ponecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

Vztah (17) pro chod hodin nám umožňuje rychle ověřit, že hodiny v inerciální soustavě by bylo možno synchronizovat i nekonečně pomalým přenosem hodin. Chyba vzniklá při přenosu rychlostí υ je

$$\Delta\tau - \Delta t = \left(\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} - 1\right)\Delta t \doteq \left(1-\frac{\upsilon^2}{2c^2} - 1\right)\Delta t = \frac{\upsilon^2}{2c^2}\Delta t \ ,$$

kde jsme provedli aproximaci platnou pro $|\upsilon| << c$. Je-li vzdálenost, na níž hodiny přenášíme, rovna l, je $\Delta t = \frac{l}{\upsilon}$ a chyba v synchronizaci je tedy

$$\Delta\tau - \Delta t = \frac{\upsilon \cdot l}{2c^2} \to 0 \quad \text{pro} \quad \upsilon \to 0 \ .$$

Volbou dostatečně malé rychlosti přenosu lze tedy učinit chybu libovolně malou.

Zdůrazněme ještě jednu skutečnost:

Zpomalení chodu hodin dané dilatací času nezávisí na konstrukci hodin.

Může jít o obyčejné mechanické náramkové hodinky, „optické hodiny“ zmiňované v kap. 1, hodiny řízené krystalem atd.

Stejně tak **libovolný fyzikální jev probíhající v *S’* bude z hlediska *S* zpomalen.**

Libovolný pokus prováděný v raketě, letící rovnoměrně přímočaře vůči Zemi, bude z hlediska Země probíhat pomaleji v souladu se vztahem (17). Pozorovatel v raketě samozřejmě žádné zpomalení dějů v raketě nezaznamená; všechny probíhají stejně, jako by je pozoroval v laboratoři na Zemi. Tak tomu musí být, protože soustava Země i soustava rakety jsou dva rovnoprávné inerciální systémy. (Pro názornost zde mluvíme o Zemi, i když víme, že soustava s ní spojená je jen přibližně inerciální; jako ve všech ostatních případech nám ovšem jde o dva inerciální systémy.)

Právě skutečnost, že v raketě probíhají všechny děje stejně rychle, je příčinou, že zpomalení všech těchto dějů vzhledem k dějům na Zemi je stejné. Z téhož důvodu musí být pohybem rakety stejně zpomaleny i jiné děje než čistě fyzikální: např. chemické a biologické. Jestliže by třeba dělení buněk v dané kolonii bakterií nebylo z hlediska Země zpomaleno faktorem (17), znamenalo by to, že v raketě by se buňky vzhledem k rychlosti chodu hodin a jiných fyzikálních dějů dělily rychleji než na Zemi. Soustava rakety a soustava Země by pak nebyly rovnoprávné, speciální princip relativity by byl narušen a mohli bychom (pomocí biologických experimentů) hledat absolutní klidovou inerciální soustavu. Bylo by ovšem velmi podivné, že by se její existence neprojevila v žádném z velmi přesných fyzikálních pokusů; ve svém důsledku by to znamenalo, že by biologické systémy museli být založené ještě na nějaké další, fyzice dosud neznámé interakci (a ta že by preferovala určitý inerciální systém). Dosavadní vývoj molekulární biologie ani jiných odvětví nic takového nenaznačuje. Je tedy přirozené, že platnost speciálního principu relativity vztahujeme na všechny děje. Dilatace času se pak samozřejmě týká i stárnutí kosmonautů apod.

d) Relativita současnosti

Skutečnost, že dvě události současné v soustavě *S* nejsou obecně současné v jiné inerciální soustavě *S'*, jsme odvodili již myšlenkovým pokusem v kap. I a značně jsme ji využívali v již uvedených úvahách – ve skutečnosti právě relativita současnosti byla klíčem ke korektnímu rozboru kontrakce délek a dilatace času.

Připomeňme tedy jen její odvození z Lorentzových transformací. Zapíšeme-li vztah (III.30.d) Lorentzovy transformace pro události 1 a 2 (o *x*-ových a časových souřadnicích x_1 , t_1 a x_2 , t_2) a odečteme je od sebe, získáme vztah

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left[\left(t_2 - t_1\right) - \frac{v}{c^2}\left(x_2 - x_1\right)\right] \tag{IV.18}$$

(Viz též (II.43.d).) Události současné v soustavě *S* ($t_1 = t_2$) tedy ***nejsou současné*** v *S'* pokud je $x_1 \neq x_2$:

$$t_2' - t_1' = \frac{-v}{c^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}\left(x_2 - x_1\right) .$$

IV.2. Nadsvětelné rychlosti a kauzalita

Je známou skutečností, že teorie relativity nepřipouští rychlosti vyšší než rychlost světla. Méně je známo **proč** je nepřipouští. Často je totiž zákaz nadsvětelných rychlostí zdůvodňován nekorektně:

– Jeden z možných argumentů se opírá o Lorentzovy transformace. Rychlost v v nich nesmí být větší než rychlost světla *c*, jinak by vztahy neměly smysl. Pokud by se nějaká částice pohybovala rychlostí vyšší než *c*, bylo by s ní prý možno spojit inerciální systém – to však není možné, neboť jak jsme viděli, inerciální systémy se nadsvětelnými rychlostmi pohybovat nemohou. Z toho se uzavře, že se takto nemohou pohybovat ani částice.

Argument vypadá na první pohled přesvědčivě, ovšem vylučoval by i existenci fotonů: inerciální systémy se přece vůči sobě nemohou pohybovat ani rychlostí $v = c$. (Dělení nulou v Lorentzově transformaci). Fotony ovšem existují, pouze s nimi nelze spojit inerciální systém. S částicemi pohybujícími se nadsvětelnou rychlostí by samozřejmě rovněž nebylo možno spojit inerciální systém – což by ovšem nemuselo vylučovat jejich existenci.

– Další uváděné důvody bývají dynamické. Jak známo (a jak uvidíme v další kapitole), blíží-li se rychlost částice rychlosti světla *c*, roste její hmotnost do nekonečna. Konečnou silou nelze proto za konečný čas urychlit částici ani na rychlost světla, tím spíše ne na rychlosti vyšší.

I tento argument však selhává v případě fotonu. Ten také není na rychlost světla urychlován z nějaké nižší rychlosti – prostě je už s touto rychlostí emitován z místa vzniku. Lze si tedy představit, že podobně by mohly být emitovány i částice, které by se pohybovaly nadsvětelnou rychlostí.

– Lze se setkat i s argumentem, že nadsvětelné rychlosti částic nepřicházejí v úvahu, neboť ve výrazech např. pro hybnost, energii a hmotnost se vyskytuje faktor $1\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ (Např. pro hmotnost $m = m_0\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$, kde m_0 je hmotnost měřená v soustavě, v níž částice stojí – viz následující kapitola.) Pro $\upsilon > c$ by tyto výrazy ztrácely smysl (faktor $1\big/\sqrt{1-\upsilon^2/c^2}$ by byl imaginární).

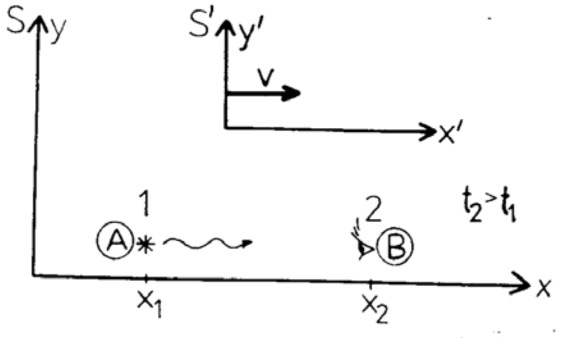
Ovšem částice, která by se pohybovala nadsvětelnou rychlostí vůči jednomu inerciálnímu systému, by se pohybovala nadsvětelnou rychlostí vůči všem inerciálním systémům! (Ze vztahů (4) pro transformaci rychlostí si to čtenář může odvodit jako užitečné cvičení; zároveň by si měl uvědomit – na základě jejich odvození – proč tyto vztahy platí i pro $u > c$.)

Neexistuje tedy inerciální systém, v němž by takováto částice stála a např. veličina m_0 tedy není nijak přímo měřitelná. Mohli bychom ji tedy formálně uvažovat jako ryze imaginární, výsledná hodnota m by pak vyšla reálná a problémy by odpadly. Stejně tak pro foton formálně bereme $m_0 = 0$ a nepovažujeme $\upsilon = c$ v kombinaci se vztahem pro m za důvod, proč by foton neměl existovat.

Pro částice, které by se pohybovaly rychleji než světlo, bylo dokonce navrženo i jméno: **tachyony**, z řeckého $\tau\alpha\chi\iota o\sigma$ = rychlý. (Částice pohybující se nadsvětelnou rychlostí se v daném kontextu někdy nazývají tardyony – z $\tau\alpha\rho\delta o\sigma$ = těžký – a částice pohybující se rychlostí světla – luxony). Tachyony jsou oblíbeným námětem v některých polopopulárních publikacích, narazit na ně ale můžeme i v seriózních teoretických článcích. Je ovšem nutno si uvědomit, že jde o částice pouze **hypotetické**, které nebyly nikdy detekovány a pro něž nejsou ani nepřímá experimentální svědectví.

Naproti tomu je tu vážný teoretický důvod proti jejich existenci. **Důvod, proč teorie relativity skutečně zakazuje nadsvětelné rychlosti**.

Uvažujme události 1 a 2. Událostí 1 nechť je vyslání nějakého signálu (třeba vyslání částice) a událostí 2 jeho příjem (zachycení částice). Orientujme inerciální systém souřadnic *S* tak, že je $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$ a $x_2 > x_1$ (viz obr.IV.7). Pozorovatele, který signál vysílá, označme jako A, pozorovatele, který jej přijímá, jako B.



Obr. IV.7. K rychlosti šíření signálů

Podle **principu kauzality** (příčinnosti) musí **příčina vždy předcházet následek**. (Nebo alespoň nesmí nastat později, než následek.) V našem případě to znamená, že vyslání signálu se musí uskutečnit dříve, než jeho přijetí: $t_1 < t_2$. Příjem signálu je totiž jistě následkem jeho vyslání: přijetí signálu závisí na tom, zda A jej vyšle nebo ne. (Připustit bychom mohli $t_1 = t_2$, signál by se však musel šířit nekonečně rychle.)

Je ostatně jasné, že příjem signálu nemůže nastat dříve, než byl signál vyslán – jinak by si to po příjmu signálu pozorovatelem B mohl pozorovatel A rozmyslet a žádný signál nevyslat. Byl by tedy přijat nikdy nevyslaný signál: to je ve sporu s veškerou zkušeností, kterou lidstvo má a jsme proto přesvědčeni, že něco takového není v přírodě možné.

Podívejme se nyní na situaci z hlediska systému *S'*, pohybujícího se ve směru osy *x* rychlostí υ. Podle (18) je

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left[\left(t_2-t_1\right)-\frac{\upsilon}{c^2}\left(x_2-x_1\right)\right] = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left[1-\frac{\upsilon}{c^2}\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}\right]\left(t_2-t_1\right)$$

ovšem $\frac{x_2-x_1}{t_2-t_1}$ je rychlost $u_{\text{sig.}}$ daného signálu vzhledem k *S*. Je tedy

$$t_2' - t_1' = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}\left(1-\frac{\upsilon\, u_{\text{sig.}}}{c^2}\right)\left(t_2-t_1\right) \ . \qquad \text{(IV.19)}$$

Vidíme, že pro

$$\frac{\upsilon\, u_{\text{sig.}}}{c^2} > 1 \qquad \text{(IV.20)}$$

dojde k **přehození časového sledu**: je $t_2 > t_1$, ale $t_2' < t_1'$!

V soustavě *S'* by příjem takovéhoto signálu nastal dříve než jeho vyslání!

Prozkoumejme, kdy by to bylo možné. Z (20) je

$$u_{\text{sig.}} > c\left(\frac{c}{\upsilon}\right) > c \ . \qquad \text{(IV.21)}$$

Muselo by tedy jít o signál, který by se vzhledem k *S* pohyboval nadsvětelnou rychlostí.

Platí to i obráceně: pokud $u_{\text{sig.}} > c$, existuje vždy taková rychlost $\upsilon < c$, pro níž je splněna podmínka (21) a tedy i (20) – tedy existuje inerciální systém *S'*, v němž dojde k přehození časového sledu.

Signál, který se vůči nějakému inerciálnímu systému pohybuje nadsvětelnou rychlostí, se vůči některým jiným inerciálním systémům pohybuje zpět v čase!

Samozřejmě, může-li se takový signál pohybovat zpět v čase v systému *S'*, může se takto pohybovat i v systému *S*. (Vždyť jde o systémy rovnoprávné.) Pozorovatel A by tak mohl poslat pozorovateli B signál, pro nějž by bylo $t_2 < t_1$ (tj. *t* přijetí u B < *t* vyslání u A). Pozorovatel B by mu mohl signál vrátit tak, že

$$t_{\text{přijetí u A}} < t_{\text{vyslání u B}} < t_{\text{vyslání původního signálu od A}}$$

Tak by si pozorovatel A mohl posílat zprávy do vlastní minulosti a případně ji ovlivňovat!

Jakmile připustíme ovlivňování minulosti, objeví se ovšem nesčíslná řada paradoxů, počínaje klasickou (ve sci-fi) možností zabránit, aby se jeho rodiče vůbec kdy poznali – pak by ovšem existoval, aniž by měl rodiče. Lze samozřejmě vymýšlet i varianty drastičtější a v extrémním případě ve věku třeba třiceti let zastřelit sám sebe v minulosti v útlém školním věku – pak by člověk existoval, i když v minulosti zemřel. A jestliže by neexistoval, pak kdo tedy střílel? Detektivní příběhy by obecně možnost střílet do minulosti značně zkomplikovala: co když padne oběť a vrah si to pak rozmyslí a nevystřelí?

Těchto a podobných příkladů lze využít k diskusi se žáky. Některé sice vypadají zbytečně drastické, ale jednak nelze předpokládat, že by žáci nečetli detektivky, a jednak v nich nejostřeji vystoupí paradoxnost situace. Je zřejmé, že jestliže by se v přírodě realizovala možnost působení do minulosti, museli bychom značně přebudovat logiku a vůbec celý náš pohled na svět. Podle všeho co dosud víme, tomu tak není. To ale znamená, že nejsou možné ani rychlosti signálů vyšší rychlost světla ve vakuu.

V důsledku principu kauzality se podle teorie relativity žádná částice ani rozruch pole, obecně libovolný signál nesoucí informaci, nemůže šířit rychlostí převyšující rychlost světla ve vakuu.

Tento fakt má důležitý a na první pohled překvapující důsledek:

Teorie relativity nepřipouští existenci absolutně tuhých těles.

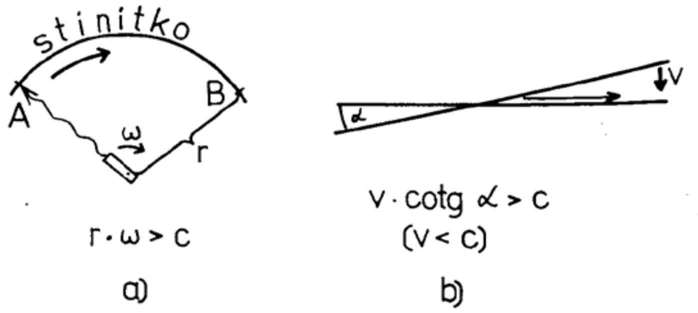
Absolutně tuhým tělesem by totiž bylo možno posílat signály nekonečnou rychlostí. Pokud bychom např. měli k dispozici absolutně tuhou tyč, sahající od Země k Proximě Centauri, mohli bychom posunováním konce tyče posílat zprávy třeba v Morseově abecedě. Celá tyč by se přitom musela pohybovat současně, jako jeden celek (protože deformovat by se nemohla); její konec u Proximy Centauri by tedy předávanou zprávu „vyťukával“ současně s tím, jak bychom počátkem tyče pohybovali na Zemi – navzdory tomu, že elektromagnetickým vlnám by přenos zprávy trval téměř čtyři roky…

Skutečné tyče nejsou absolutně tuhé. Pohneme-li koncem skutečné tyče, začne se jí šířit elastická vlna. Ta se šíří rychlostí zvuku a teprve až dospěje na konec tyče, pohne se i tento konec – signál je přenesen. Teorie relativity tady klade na vlastnosti reálných materiálů i kvantitativní omezení, spočívající v tom, že

rychlost zvuku nemůže převýšit rychlost světla ve vakuu.

Ještě poznámku k problému tachyonů: přesnější rozbor ukazuje, že jednoduchou argumentací s pomocí pouze dvou pozorovatelů A a B nelze ve skutečnosti existenci tachyonů vyloučit. Pohyb tachyonů zpět v čase od A k B lze totiž reinterpretovat jako pohyb antitachyonu od B k A (v čase vpřed). Ovšem lze navrhnout takové uspořádání čtveřice vzájemně se pohybujících pozorovatelů, kdy i v situaci, kdyby všichni vysílali tachyony ze svého hlediska v čase vpřed, by se tachyonový signál vrátil k výchozímu pozorovateli dříve, než byl původní signál vyslán. Proto, nemá-li být porušen princip kauzality, nemohou tachyony existovat. Resp. pokud by existovaly, nesmělo by být možno pomocí nich posílat signály; „obyčejné částice a pole“ by tedy s nimi neměly interagovat. Otázkou pak ovšem je, jak bychom se o jejich existenci mohli přesvědčit, resp. jaký fyzikální smysl by vůbec mělo tvrzení, že tachyony existují.

Tím, že teorie relativity zakazuje nadsvětelné rychlosti šíření **signálů**, nezakazuje jakékoli nadsvětelné rychlosti vůbec. Dva příklady za všechny možné ukazuje obr. IV.8.:



Obr. IV.8. Příklady možných nadsvětelných rychlostí: a) „prasátko“, b) průsečík tyčí

a) Světelná skvrna, vytvořená paprskem otáčejícího se reflektoru nebo laseru na vzdáleném stínítku, může přeběhnout po stínítku libovolně velkou rychlostí. Nelze po ní ovšem poslat signál: pozorovatel A se může sebevíc snažit obarvit světelnou skvrnu; na její barvu u pozorovatele B to nebude mít vliv. (To, co se zde skutečně šíří a nese informaci, jsou fotony šířící se od reflektoru ke stínítku. Ty se ovšem samozřejmě pohybují rychlostí c.)

b) Průsečík dvou tyčí, které svírají malý úhel, se může pohybovat nadsvětelnou rychlostí, přestože tyče samy se pohybují rychlostmi < c. Průsečík je ovšem jen myšlený bod, nelze po něm poslat signál (obarvit jej, sdělit po něm byť jen volbu 0 – 1 apod.).

Čtenář by snad mohl namítnout, že mezi tyče by bylo možno vložit „zarážku“ resp. „kolík“, který by se musel pohybovat spolu s průsečíkem tyčí (kousek před ním). Na tento kolík by již bylo možno zprávu napsat. Ovšem v tomto případě by nebylo možno ani libovolně velkou silou urychlit kolík na rychlost rovnou či přesahující rychlost světla, neboť hmotnost kolíku by pro $v_{\text{kolíku}} \to c$ rostla do nekonečna. Princip kauzality tedy není ani v tomto případě porušen.

IV.3. „Paradoxy“ relativistické kinematiky

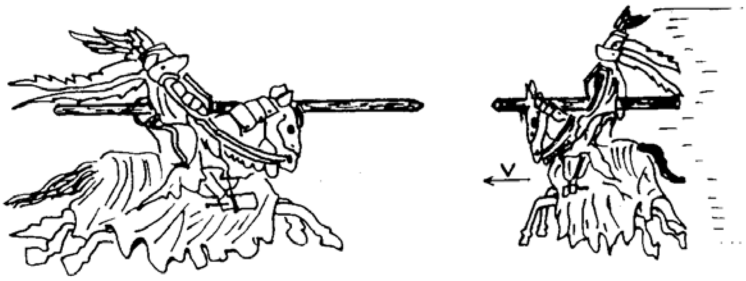
Nepřesné úvahy a nekorektní argumentace mohou vést k tomu, že popis určité situace vypadá z hlediska některého inerciálního systému paradoxně. Zdánlivě mohou být třeba v rozporu předpovědi výsledků daného děje.

V dalším si uvedeme několik typických příkladů, kdy je tomu tak. Slovo „paradoxy“ používané k jejich označení si ovšem zaslouží být v uvozovkách. Rozpor či nekonzistence zde totiž opravdu není v teorii relativity, ale jen v její nepřesné aplikaci. A proč se o paradoxech vůbec zmiňujeme? Vždyť posláním teorie relativity není ani konstruovat, ani řešit takovéto hříčky. S podobnými úvahami mohou ovšem vyrukovat žáci – a na druhé straně nám právě tyto na první pohled paradoxní situace umožní si relativistickou kinematiku lépe promyslet.

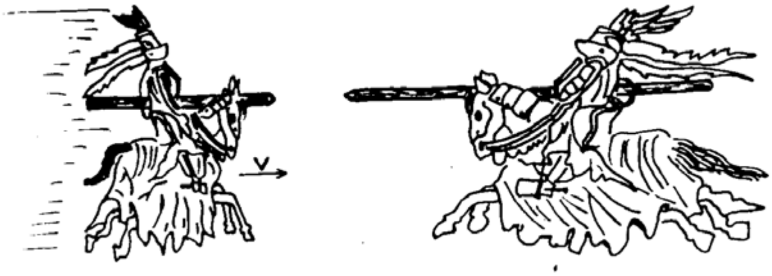
a) Relativističtí rytíři

Problém je jednoduchý: Dva rytíři, kteří mají stejně dlouhé kopí, se proti sobě řítí vysokou rychlostí – tak vysokou, že efekty kontrakce délek jsou již velmi výrazné. První rytíř uvažuje následovně: „Můj soupeř se vůči mně pohybuje rychlostí blízkou rychlosti světla a jeho kopí je proto zkráceno. Mé kopí zkráceno není – já ho tedy propíchnu, on mne ne.“ (Viz obr.II.9.a).

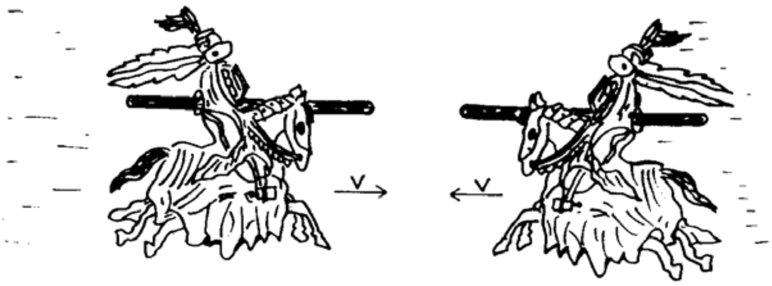
Stejně ovšem uvažuje i druhý rytíř (viz obr.IV.9.b). Princezna, vůči níž se oba rytíři pohybují stejnou rychlostí, si říká: „Oba mají kopí zkrácena stejně, propíchnou se oba.“ (Viz obr.IV.9.c).



Obr. IV.9. Souboj relativistických rytířů: a) z hlediska prvního rytíře,



b) z hlediska druhého rytíře



c) z hlediska princezny

Kdo má pravdu? A proč?

Pravdu má samozřejmě princezna. V soustavě souřadnic s ní spojené se oba rytíři probodnou současně. Jen o něco složitější je výklad z hlediska soustavy spojené s prvním rytířem: To, co je současné pro princeznu, není současné pro rytíře. V soustavě spojené s rytířem nejprve on svým kopím probodne svého protivníka a až pak je sám probodnut. Probodnutí svého soupeře ani neuvidí – signál, který by vyslala špička jeho kopí při dotyku protivníka, který by měl přijít k rytíři dříve, než je on sám zasažen kopím soupeře, by se musel šířit nadsvětelnou rychlostí. (Uvědomte si proč! Není-li vám to jasné, vraťte se k předchozímu článku.) Z hlediska druhého rytíře je situace přesně stejná.

Lze samozřejmě promýšlet různé varianty souboje. Pokud se při vzájemném napíchnutí soupeři zastaví, přestává hrát roli kontrakce délek a soupeřovo kopí se opět prodlouží. Rytíř by si také samozřejmě mohl vypočíst, kdy již jeho kopí zasáhlo protivníka a uhnout stranou – pak by se zachránil. Totéž by ovšem mohl udělat i druhý soupeř a oba soupeři by se pak minuli. Atd. atd.…

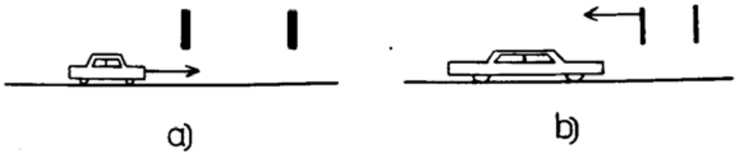
Při některých způsobech souboje by pro výklad mohl být podstatný i fakt, že kopí nemůže být absolutně tuhé. Podobná skutečnost bude hrát roli i v dalších paradoxech.

b) Šílený závorář

Šílený závorář si upravil závory po obou stranách trati tak, že se spouštějí velmi rychle, a jeho oblíbenou zábavou je lapat mezi ně projíždějící auta. K přejezdu se právě blíží automobil, který by se, kdyby stál, právě vešel mezi závory. Nedbá ovšem na dopravní předpisy a jede rychlostí blízkou rychlosti světla.

Šílený závorář si říká: „Automobil je zkrácen díky kontrakci délek, chytím ho bez potíží.“ (Viz obr.IV.10.a.) Řidič je naopak přesvědčen: „Díky kontrakci délek je pro mě vzdálenost závor menší než délka automobilu. Závory mohou spadnout maximálně na kapotu a ta to vydrží. Projedu.“ (Viz obr.IV.10.b.)

Kdo z nich má pravdu? A proč?



Obr. IV.10. K paradoxu šíleného závoráře:
a) situace z hlediska závoráře b) situace z hlediska řidiče

Pokud jsou závory dostatečně pevné a závorář je spustí ze svého hlediska současně, má pravdu on; automobil se chytí. Z hlediska soustavy souřadnic spojené se závorami je to jednoduché: chytil se zkrácený automobil.

Z hlediska soustavy souřadnic, v níž automobil stojí (při přibližování k závorám) je vysvětlení opět o něco složitější. Zde nejprve spadne vzdálenější závora. Čelo automobilu do ní narazí (resp. ona do něj) a automobil se začíná deformovat. Musí, není absolutně tuhý. Stlačuje se, a teprve až je celý mezi závorami, spadne i levá závora. Záď automobilu ještě do té chvíle nemůže být odražena ven mimo závoru. Žádný signál vyslaný od koncové závory v okamžiku jejího pádu totiž ještě nemohl dospět k levé závoře – k tomu by se musel pohybovat rychleji než světlo.

Uvědomte si proč!

Tedy ani vlna elastické deformace nemohla ještě dospět k zádi automobilu; obrazně řečeno, záď ještě neví, že přední část automobilu je již deformována.

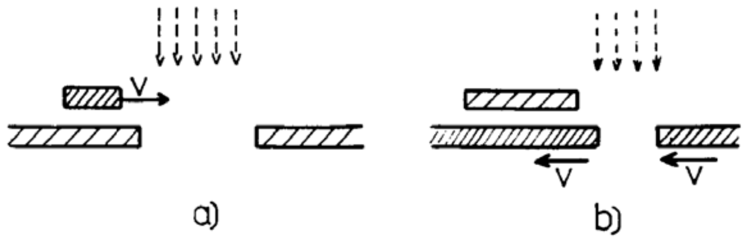
Také tento paradox by bylo možno obměňovat. Automobil by mohl být v klidu i delší než je vzdálenost závor; dokonce by bylo možno lapit libovolně dlouhý automobil – stačí, aby přijížděl dostatečnou rychlostí…

Analogický paradox bývá někdy popsán jako způsob, jak dostat delší auto do kratší garáže. Stačí jet tak rychle, že se projeví kontrakce délek a velmi rychle zavřít dveře. (Ale ve skutečnosti to samozřejmě nezkoušejte. ☺)

c) Deska nad otvorem

Může pohybující se předmět propadnout otvorem díky tomu, že vzhledem ke kontrakci délek je kratší než je délka otvoru?

Pro rozbor budeme uvažovat idealizovanou situaci. Tuhá deska klouže rychlostí v po rovině, v níž je otvor (viz obr.IV.11.a).



Obr. IV.11. Deska nad otvorem:
a) situace z hlediska roviny s otvorem, b) situace z hlediska desky

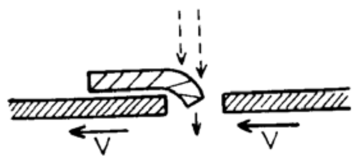
Délka desky je taková, že by v klidu otvorem neprošla, ale šířka desky je menší než šířka otvoru. Z hlediska soustavy spojené s rovinou je deska zkrácena tak, že je kratší než otvor. Zapůsobíme-li na ni v okamžiku, kdy je celá nad otvorem, silou, vtahující ji do otvoru, může otvorem propadnout. Abychom situaci nekomplikovali zaváděním gravitačního pole, můžeme předpokládat, že prostě do všech bodů desky shora současně strčíme. (Je též možno uvažovat rovnoměrně nabitou a v okamžiku, kdy je nad otvorem, nad ním zapnout homogenní elektrické pole apod.) Z daného pohledu je tedy zřejmé, že deska otvorem propadne.

Z hlediska desky se ovšem pohybuje rovina s otvorem a je to tedy otvor, kdo je zkrácen. (Viz obr.IV.11.b.)

Jak může propadnout delší deska kratším otvorem? Vysvětlení poskytne opět relativita současnosti.

V soustavě spojené s rovinou začnou síly působit na celou desku současně a celá deska také začíná současně padat. V soustavě spojené s deskou ovšem začnou síly působit nejdříve na přední konce desky. Ta, protože není absolutně tuhá, se ohýbá, přední konec začíná padat. Zbytek desky zatím není ovlivněn – informace o tom, že se přední konec ohýbá, tam dosud nestačila dospět. (Proč?)

Ohyb pak samozřejmě postupuje dál. Z hlediska inerciální soustavy, v níž byla deska v klidu (a vůči níž pak padá kolmo dolů) tedy deska otvorem „proklouzne“. (Viz obr.IV.12.)



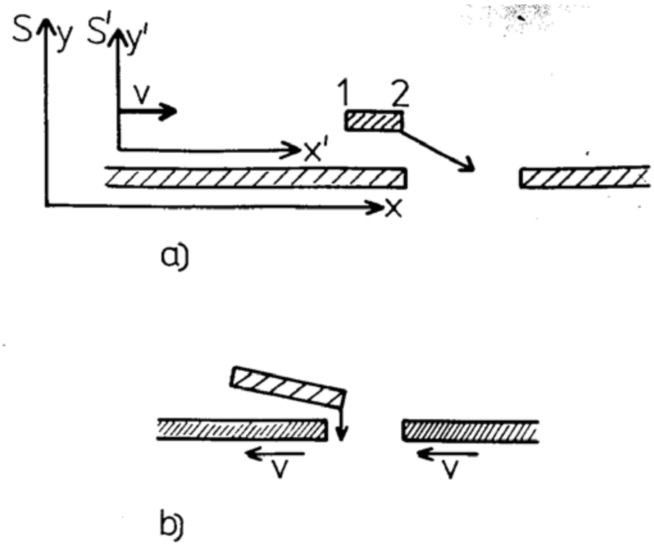
Obr.IV.12. Propadnutí desky otvorem z hlediska inerciální soustavy, v níž byla deska v klidu

---

Situaci lze ovšem zaranžovat tak, že žádné síly nemusí působit a k ohybu desky tedy nemůže dojít. Stačí, když se v soustavě spojené s rovinou blíží deska k otvoru poněkud šikmo. (Viz obr.IV.13.a.)

Abychom nekomplikovali výklad transformací s obecným směrem rychlosti, zeptejme se jen, jak průchod tyče otvorem vysvětlit v soustavě *S'*, která klouže podél roviny tak, že deska se v ní pohybuje shora dolů (kolmo na osu *x'*).

Odpověď může být pro čtenáře překvapující: **deska bude vůči otvoru natočena!** (Viz obr.IV.13.b.) Zdůvodnění pomocí Lorentzovy transformace je jednoduché.



Obr. IV.13. Druhý způsob jak může deska projít otvorem
a) z hlediska roviny s otvorem,   b) z hlediska *S'*, v níž se deska pohybuje kolmo dolů

V soustavě *S* (viz obr.IV.13.a) jsou *y*-ové souřadnice zadního a předního konce desky stejné:

$$y_1 = y_2 = y_0 + \upsilon_y t \ .$$

Přitom $\upsilon_y < 0$. V *S'* je (v daném čase *t'*)

$$y_1' = y_1 = y_0 + \upsilon_y \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2} x_1'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} , \quad y_2' = y_2 = y_0 + \upsilon_y \frac{t' + \frac{\upsilon}{c^2} x_2'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \ . \tag{IV.22}$$

Odečtením vztahů (22) získáme

$$y_2' - y_1' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \frac{\upsilon_y \upsilon}{c^2} \left(x_2' - x_1' \right) \ ,$$

z čehož pro úhel α' mezi deskou a osou *x'* dostaneme

$$\mathrm{tg}\,\alpha' = \frac{y_2' - y_1'}{x_2' - x_1'} = \frac{\upsilon_y \upsilon}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{IV.23}$$

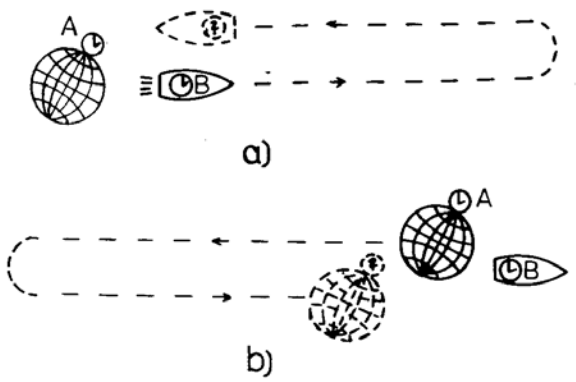
Vzhledem k tomu, že $\upsilon_y < 0$ je $\alpha' < 0$ a deska je tedy skloněna tak, jak je to znázorněno na obr. IV.13.b. Čtenář si může i kvantitativním rozborem ověřit, že deska skloněná o úhel α' daný (23) projde z hlediska *S'* otvorem (jsou-li parametry takové, že deska projde z hlediska *S*).

d) Paradox dvojčat

Paradox dvojčat je snad nejznámějším z „paradoxů“ speciální teorie relativity. V minulosti byl občas i mylně vykládán a někdy používán i jako argument proti teorii relativity. Podstata je jednoduchá:

Raketa odstartuje od Země a rychlostí blízkou rychlosti světla letí ke vzdálenému cíli. Tam se obrátí a opět se velkou rychlostí vrátí k Zemi. Před startem rakety ukazovaly palubní hodiny rakety stejný čas, jako hodiny na Zemi. Jaký čas budou v porovnání s pozemskými hodinami ukazovat po návratu? Místo hodin se obvykle v populárních výkladech uvažuje dvojice bratrů – dvojčat, z nichž jeden zůstane na Zemi a druhý letí raketou. Otázka pak zní, které z dvojčat bude po návratu starší.

Z hlediska Země je situace jasná (viz obr.14.a). Raketa se pohybuje vysokou rychlostí, při pohybu rychlostí v se tedy v důsledku dilatace času zpomalují všechny procesy na raketě (chod hodin, stárnutí atd.) vzhledem k času na Zemi, resp. vzhledem k času v soustavě spojené se Zemí. Kosmonaut letící raketou tedy zestárne méně než jeho bratr na Zemi, palubní hodiny ukáží po návratu menší čas než pozemské. To zatím není paradox, jen důsledek dilatace času.



Obr.IV.14. K paradoxu dvojčat.
a) Z hlediska Země, b) Z hlediska rakety.

Paradoxní se situace jeví až z hlediska rakety. Vzhledem k raketě je to totiž Země, která se pohybuje. (Viz obr.14.b.) Lze tedy argumentovat tak, že vzhledem k času rakety jsou to děje na Zemi, které jsou zpomaleny. Mladší by tedy po návratu měl být bratr na Zemi, nižší údaj pozemských hodin. Takže:

Který z bratrů je po návratu mladší?

Zde samozřejmě nemůžeme odpovědět „z hlediska Země první bratr, z hlediska rakety druhý“. Porovnání údajů pozemských a palubních hodin tedy musí dát jednoznačný výsledek. Problém nelze vyřešit ani jednoduchým poukazem na relativitu současnosti, jak jsme to učinili výše při rozboru dilatace času: po návratu se totiž porovnávají na tomtéž místě jediné hodiny A s jedinými hodinami B.

Některá z úvah vedoucích k paradoxu musí být nesprávná, Z hlediska Země je argumentace korektní. Soustava spojená se Zemí je inerciální. (Čtenáři, kterým vadí, že ve skutečnosti je inerciální jen přibližně, mohou uvažovat soustavu heliocentrickou.) Chod hodin, které se vůči této soustavě pohybují, je pomalejší podle vztahu (17) – palubní hodiny ukáží po návratu méně než pozemské.

Stejnou úvahu ovšem **nelze udělat z hlediska rakety**. Raketa sice může dlouhou dobu letět rovnoměrně přímočaře a být tak inerciální vztažnou soustavou. Ovšem u cíle letu musí brzdit a pak se zase zrychlovat ve směru k Zemi, aby se mohla vrátit. **Při akceleraci** s ní ovšem **není možno spojit inerciální systém** a tedy ani užívat vztahu (17).

Tím je paradox dvojčat rozřešen. Následující vysvětlení ho již jen z různých hledisek doplňují. Raketa samozřejmě musí zrychlovat i brzdit i v blízkosti Země, což ovšem není pro výsledek podstatné: raketa mohla totiž nejprve „couvnout" a pak míjet Zem již v plné rychlosti a přitom synchronizovat své palubní hodiny s pozemskými. Podstatná je akcelerace u cíle cesty. Při celém rovnoměrném přímočarém letu „tam" se totiž opravdu vzhledem k času soustavy spjaté s raketou hodiny na Zemi zpomalují (viz výše výklad dilatace času). Otázka „kdy toto zpomalení doženou?", kterou mohou studenti klást, je sice sugestivní, ale může v sobě skrývat i přežívající představu o absolutní současnosti událostí.

Odpověď totiž závisí na volbě soustavy souřadnic. V soustavě, která s raketou letěla „tam" (a pokračuje v rovnoměrném přímočarém pohybu) se raketa při pohybu zpět pohybuje vyšší rychlostí než Země a proto jdou v této soustavě palubní hodiny ještě pomaleji než pozemské; zpomalení se dožene na zpáteční cestě. V inerciálním systému, v němž je raketa v klidu na cestě zpět, je to naopak cesta „tam", při níž se zpoždění „nadežene".

Spojit triviálně obě inerciální soustavy (pro cestu tam i zpět) a ztotožnit jejich časové souřadnice ovšem nelze. Pokud by ale posádka rakety používala prvou soustavu pro cestu tam a druhou pro cestu zpět, došla by k závěru, že hodiny na Zemi své zpoždění doženou a „nadeženou" ve fázi akcelerace rakety, ať je jakkoli krátká. Z hlediska soustavy spojené se Zemí samozřejmě není co dohánět.

Uvedené úvahy jen znovu demonstrují relativitu současnosti: Řekne-li kapitán rakety u cíle cesty „Co teď asi dělají na Zemi?" pak toto „teď" může na Zemi reprezentovat značně různé časové okamžiky.

Pozorný čtenář by mohl namítnout, že i v naší argumentaci z hlediska Země je ještě mezera. Vztah (17) pro dilataci času jsme totiž výše odvodili jen pro hodiny pohybující se rovnoměrně přímočaře (vzhledem k danému inerciálnímu systému). Palubní hodiny se však spolu s raketou pohybují během obrátky se zrychlením.

Jaká je rychlost chodu hodin, které se pohybují zrychleně?

Při úvahách o měření času jsme v článku III.2 zavedli pojem **ideální hodiny**, jejichž chod není ovlivňován vnějšími vlivy. Mezi vnější vlivy můžeme počítat i zrychlení – chod ideálních hodin by tedy zrychlením neměl být ovlivněn. Samozřejmě: hodiny pohybující se zrychleně se pohybují proměnnou rychlostí a jejich chod se proto mění v důsledku dilatace času. Tento vliv ovšem nemáme na mysli. (Ostatně jde o vliv rychlosti, ne zrychlení.)

Vliv zrychlení na chod hodin bychom mohli zjišťovat tak, že bychom v laboratoři zrychlovali hodiny z klidu do nepříliš vysokých rychlostí a přitom sledovali jejich chod. Chod kyvadlových hodin samozřejmě takovéto urychlování ovlivní, ovšem hodiny řízené krystalem můžeme podrobit i značnému zrychlení aniž by se rychlost chodu změnila. Je tedy přirozené přijmout předpoklad, že

chod ideálních hodin nezávisí na zrychlení.

Tento předpoklad bývá nazýván **hypotéza hodin**. Mluvit o hypotéze je ovšem poněkud skromné. Pro poločas rozpadu elementárních částic (konkrétně mionů) je totiž hypotéza hodin experimentálně ověřena i pro zrychlení řádu 10^{20} m/s^2 !

Nezávisí-li chod hodin H na zrychlení při malých rychlostech, nezávisí na něm ani při rychlostech libovolně velkých (< c). Vždy totiž můžeme uvažovat inerciální soustavu $\tilde{S}$, v níž hodiny H v daný okamžik právě stojí. (Vedle rakety letící zrychleně může letět druhá raketa s vypnutými motory tak, že jejich rychlosti jsou v daném okamžiku stejné.) Zrychlení neovlivňuje chod hodin H vzhledem k hodinám soustavy $\tilde{S}$:

$$\Delta\tau_H = \Delta\tau_{\tilde{S}} \tag{IV.24}$$

($\Delta\tau$ ovšem musí být malé, aby se rychlost hodin H příliš nezměnila; matematicky zcela přesně bychom mohli (24) formovat tak, že $\lim\limits_{\Delta\tau_{\tilde{S}}\to 0} \dfrac{\Delta\tau_H}{\Delta\tau_{\tilde{S}}} = 1$.)

Pro chod hodin v $\tilde{S}$ (rovnoměrně přímočaře se pohybujících vůči inerciální soustavě S) ovšem platí vztah (17). Díky (24) pak tentýž vztah platí i pro přírůstek vlastního času hodin pohybujících se zrychleně. Matematicky korektně to můžeme zapsat vztahem

$$\frac{d\tau}{dt} \equiv \lim_{\Delta t\to 0} \frac{\Delta\tau}{\Delta t} = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} \tag{IV.25}$$

Celkový vlastní čas, který uplyne na libovolně se pohybujících hodinách od okamžiku t_1 do t_2 (časy v S) pak získáme sečtením příspěvků $\Delta\tau$, resp. integrací

$$\tau_2 - \tau_1 = \int_{t_1}^{t_2} \frac{d\tau}{dt}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{1-\frac{v^2(t)}{c^2}}\, dt \tag{IV.26}$$

Na závěr snad již jen formální připomínka: v literatuře se často vztah (25) zapisuje pomocí diferenciálů ve tvaru

$$d\tau = \sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}\, dt \tag{IV.27}$$

analogickém vztahu (17). Tvar (27) se proto dobře hodí k zapamatování; na střední školy jej však přesto raději nebudeme zavádět.

IV.4. Hyperbolický pohyb

Nabitá částice v homogenním elektrickém poli, těleso, na nějž působí konstantní síla, raketa, jejíž motory vyvíjejí konstantní tah – všechny tyto objekty se podle klasické mechaniky pohybují rovnoměrně zrychleně. (Neuvažujeme zde ubývání paliva rakety.)

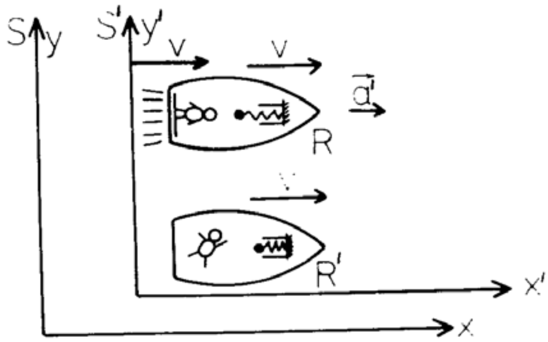
Rovnoměrně zrychlený pohyb ovšem není podle speciální teorie relativity dlouhodobě možný – lineárně vzrůstající rychlost by totiž po určité době musela překročit rychlost světla.

Můžeme si ovšem položit otázku, jak by se tedy pohybovala raketa, jejíž motory by pracovaly tak, aby přístroje uvnitř rakety ukazovaly konstantní zrychlení.

Jaké přístroje? Stačí obyčejný siloměr se závažím. Je-li zrychlení rakety a, setrvačná síla působící na závaží m je $F = ma$ a tuto sílu siloměr ukáže. Právě tak pocítí zrychlení díky setrvačné síle i kosmonauti v raketě.

Uvedené úvahy ovšem známe z klasické mechaniky. Jejich platností si tedy můžeme být jisti, jen pokud je rychlost rakety malá. Pro další odvození to však stačí.

Uvažujme inerciální systém *S'*, vůči němuž v určitém okamžiku raketa stojí. (Další úvahy se budou vztahovat právě k tomuto okamžiku nebo jeho těsné blízkosti.) Názorně si můžeme systém *S'* představit jako spojený s raketou R' letící s vypnutými motory; v daný okamžik se rakety míjejí a jejich vzájemná rychlost je nulová. Viz obr.IV.15.



Obr. IV.15. K okamžité klidové inerciální soustavě.

Soustavu *S'* můžeme přirozeně nazvat **okamžitou klidovou inerciální soustavou**. Zrychlení rakety R, o němž jsme mluvili výše, je zřejmě zrychlením vůči soustavě *S'*, resp. vůči raketě R'. (Vůči R' je totiž raketa R ve stejné situaci jako by byla vůči Zemi v okamžiku, kdy by z ní právě startovala.) Označme toto zrychlení a'_x.

Jaké je zrychlení rakety R s ohledem k inerciální soustavě *S*, vůči níž se R (a tedy i *S'* a R') pohybuje v daný okamžik rychlostí υ?

To musíme vědět dříve, než se pustíme do dalších úvah; potřebujeme tedy najít vztah pro **transformaci zrychlení**. Bude nám stačit vztah pro transformaci x-ových složek zrychlení.

Vyjdeme ze vztahu (4a) pro transformaci rychlosti: Přírůstek složky u'_x z něj (při $\upsilon = \text{const}$) dostaneme po úpravách jako

$$\Delta u'_x \doteq \frac{d}{du_x}\left(\frac{u_x - \upsilon}{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}\right)\Delta u_x = \ldots = \frac{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}\right)^2}\Delta u_x \ . \tag{IV.28}$$

Využijeme ještě vztahu (III.43.d) Lorentzovy transformace pro intervaly souřadnic přepsaného do tvaru

$$\Delta t' = \frac{\Delta t - \frac{\upsilon}{c^2}\Delta x}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{1 - \frac{u_x \upsilon}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \cdot \Delta t \ . \tag{IV.29}$$

Dělením (28) a (29) dostáváme

$$a'_x = \frac{\Delta u'_x}{\Delta t'} = \left(\frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{u_x v}{c^2}} \right)^3 a_x \tag{IV.30}$$

tj. hledaný vztah pro **transformaci x-ových složek zrychlení**. Čtenář by si měl výše uvedené úpravy podrobněji promyslet, uvědomit si smysl vztahů i úprav, a to, že korektní se vlastně stávají až v limitě $\Delta t' \to 0$, $\Delta t \to 0$.

Vztah (30) tedy platí pro částici (těleso, raketu) pohybující se obecnou rychlostí u_x. **Pokud částice v daný okamžik vůči *S'* stojí**, je $u_x = v$ a tedy

$$a'_x = \left(1 - \frac{u_x^2}{c^2} \right)^{-\frac{3}{2}} a_x \; . \tag{IV.31}$$

Nyní se můžeme vrátit k původní otázce: jaký bude pohyb rakety, jejíž přístroje budou ukazovat stále stejné zrychlení. Z výše uvedené diskuse je nyní jasné vůči čemu bude zrychlení rakety stejné: vždy vůči té inerciální soustavě, vůči níž raketa právě stojí.

Pochopení takto chápané „konstantnosti“ zrychlení činí někdy zpočátku potíže. Čtenář si však může představit třeba řadu raket R’, R’’, R’’’… letících s vypnutými motory stejným směrem, ale různými rychlostmi. Raketa R bude čas od času v klidu vůči některé z raket R’’’…. Změříme-li z této rakety zrychlení rakety R a dostaneme vždy tutéž hodnotu *A*, půjde o námi uvažovaný případ pohybu. Takovýto pohyb je zřejmě také **nejpřirozenějším zobecněním rovnoměrně zrychleného pohybu ve speciální teorii relativity**.

Vztah mezi rychlostí u_x a zrychlením a_x uvažované rakety (tělesa, částice) v systému *S* získáme zřejmě z (31), položíme-li zde

$$a'_x = A = \text{konst.} \tag{IV.32}$$

(Uvědomte si proč!) Odvození pohybu dané částice je teď už jen matematickou záležitostí. Z (31) a (32) je

$$\frac{du_x}{dt} = a_x = \sqrt{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2} \right)^3} A$$

a odtud separací proměnných

$$\int \frac{du_x}{\left(1 - \frac{u_x^2}{c^2} \right)^{\frac{3}{2}}} = A \int dt$$

Integrál na levé straně je řešitelný např. substitucí $u_x = c \cos\varphi$. Položíte-li počáteční podmínku

$$u_x = 0 \text{ pro } t = 0 ,$$

dostaneme integrací

$$\frac{u_x}{\sqrt{1-\frac{u_x^2}{c^2}}} = A \cdot t \ ,$$

z čehož

$$u_x = \frac{A \cdot t}{\sqrt{1+\frac{(At)^2}{c^2}}} \tag{IV.33}$$

Závislost souřadnice x na čase můžeme určit integrací rychlosti (33):

$$x = \int u_x dt = \int \frac{At}{\sqrt{1+\frac{(At)^2}{c^2}}} dt \ ,$$

z čehož po integraci substitucí a položení integrační konstanty rovné nule

$$x = \frac{c^2}{A}\sqrt{1+\left(\frac{At}{c}\right)^2} \tag{IV.34}$$

Jak fyzikálně interpretovat výsledky (33) a (34)? Pro $t = 0$ je $u_x = 0$, pohyb tedy začíná z klidu (vzhledem k dané soustavě *S*). Prozkoumejme proto nejprve, jak vypadá pohyb pro malé hodnoty času *t*.

Z (33) vidíme, že pro časy *t*, pro něž platí

$$\left(\frac{At}{c}\right) << 1 \tag{IV.35}$$

je přibližně

$$u_x \doteq A \cdot t \ ,$$

částice se tedy v podstatě pohybuje „klasickým" pohybem rovnoměrně zrychleným. To ostatně potvrdí i aproximace vztahu (34), kde ovšem již nesmíme zanedbat $(At/c)^2$ oproti 1, jinak bychom dostali $x = \text{konst.}$, tedy příliš hrubou aproximaci; je třeba využít vztahu $\sqrt{1+\varepsilon} \doteq 1+\frac{\varepsilon}{2}$ platného pro $|\varepsilon| << 1$:

$$x = \frac{c^2}{A}\sqrt{1+\left(\frac{At}{c}\right)^2} \doteq \frac{c^2}{A}\left(1+\frac{1}{2}\frac{A^2t^2}{c^2}\right) = \frac{c^2}{A}+\frac{1}{2}At^2 \ .$$

S rostoucím časem již ovšem dále rychlost nevzrůstá lineárně (přestane platit podmínka (35)). Přepíšeme-li (33) pro $t > 0$ na tvar

$$u_x = \frac{At}{\sqrt{1+\left(\frac{At}{c}\right)^2}} = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{c}{At}\right)^2+1}} \tag{IV.36}$$

vidíme, že vždy je $|u_x| < c$ a že funkce $u_x(t)$ je rostoucí pro všechna $t > 0$. Pro $t \to \infty$ pak

$$u_x = \frac{c}{\sqrt{\left(\frac{c}{At}\right)^2 + 1}} \xrightarrow{t\to\infty} c \ .$$

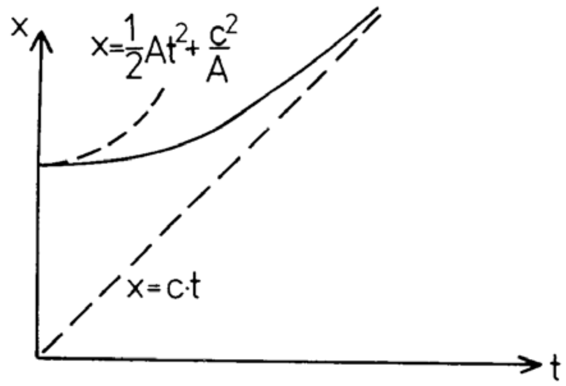
Částice se tedy stále pohybuje podsvětelnou rychlostí, ovšem s časem t rostoucím nade všechny meze se její rychlost rychlosti světla neomezeně blíží.

Pro x-ovou souřadnici lze pro vysoké hodnoty času t zanedbat v (34) 1 oproti $\left(\frac{At}{c}\right)^2$:

$$x = \frac{c^2}{A}\sqrt{1+\left(\frac{At}{c}\right)^2} \doteq \frac{c^2}{A}\cdot\frac{At}{c} = c\cdot t \ ,$$

což potvrzuje, že se částice pohybuje téměř rychlostí světla.

Graf závislosti souřadnice x na čase tedy pro malá t, tj. při malých rychlostech, v podstatě splývá s parabolou $x = \frac{1}{2}At^2 + const.$, pro velké časy se rychlost blíží c a graf se tedy blíží přímce. (Viz obr.IV.16; poznamenejme ovšem, že ve speciální teorii relativity se v podobných grafech většinou osa x orientuje vodorovně a osa t svisle – na tuto osu se přitom obvykle nanášejí hodnoty $c \cdot t$. Tak to budeme činit i my dále v kap. VII.)



Obr. IV.16. Závislost souřadnice na čase pro hyperbolický pohyb

Jaká křivka je grafem daného pohybu? Z (34) můžeme odvodit vztah

$$\frac{x^2}{\left(c^2/A\right)^2} - \frac{t^2}{\left(c/A\right)^2} = 1$$

z čehož je zřejmé, že daná křivka je **hyperbola**. V souřadnicích x a ct by se dokonce jednalo o rovnoosou hyperbolu. To je důvod, proč se daný pohyb nazývá **hyperbolickým pohybem**.

Poznamenejme ještě, že bychom mohli spočíst i vlastní čas τ, který uplyne na raketě pohybující se hyperbolickým pohybem od okamžiku startu. Mohli bychom třeba zjistit, o kolik zestárne kosmonaut, má-li dosáhnout vzdálené hvězdy. Diskusi takovéhoto „relativistického výletu“ je věnován dodatek H.

IV.5. Experimentální ověření a aplikace relativistické kinematiky

Pomocí myšlenkových pokusů lze odvodit a rozebrat řadu důsledků speciální teorie relativity. Čtenáře však jistě zajímá, nakolik jsou tyto důsledky ověřeny experimentálně.

Efekty teorie relativity jsou ovšem navzájem svázány, jak jsme již uvedli výše – např. relativita současnosti se projevuje v interpretaci kontrakce délek i dilatace času. Relativistická kinematika navíc není odtrženou částí teorie – projevuje se často v optických i dalších jevech. Z tohoto hlediska je tedy třeba vidět i ověřování jejích důsledků.

O některých pokusech jsme se již zmínili výše v souvislosti s éterovou teorií a později jsme podali jejich relativistickou interpretaci. Ty v dalším jen stručně připomeneme.

a) Skládání rychlostí

Dokladem relativistického skládání rychlostí je již **Fizeaův pokus** (viz článek IV.1.a) a další pokusy tohoto typu. Podstatné je, že zde dokáže speciální teorie relativity hodnotu strhovacího koeficientu správně **předpovědět**, zatímco v éterové teorii byla jeho hodnota jen „narafičena“ tak, aby se vysvětlily výsledky experimentů.

Dalším dokladem skládání rychlostí je i **aberace světla**. Čtenáři se může zdát odchylka 20’’, daná oběhem Země kolem Slunce, malá a snad by mohl pochybovat, zda je možno ověřit relativistický vztah (7) i pro hodnoty v blízké c. Makroskopického pozorovatele ovšem do těchto rychlostí (alespoň zatím) urychlit nemůžeme. Relativistická kinematika ovšem souvisí i s ostatními oblastmi fyziky a tak se aberace světla může promítnout i do dalších, složitějších jevů. Příkladem může být vyzařování nabitých částic pohybujících se po zakřivené dráze v magnetickém poli urychlovačů (**synchrotronové záření**). V inerciální soustavě, v níž v daný okamžik stojí, není právě vyzařované záření výrazněji směrováno. V soustavě spojené s urychlovačem je ale (pokud se v blíží c) záření směrováno do úzkého kužele ve směru pohybu částice. To právě odpovídá aberaci světla. (Rozmyslete si za pomoci vztahu (7) danou situaci!) Aberace světla je zde ovšem kombinována s Dopplerovým jevem a celý efekt také nelze jednoduše chápat jako pohyb všesměrově zářícího zdroje. Záření dané nabité částice lze ovšem v rámci speciální teorie relativity spočítat; to, že vlastnosti synchrotronového záření zjištěné v experimentech odpovídají teoretické předpovědi, můžeme chápat jako ověřování nejen elektrodynamiky, ale i relativistické kinematiky.

Pro úplnost bychom snad měli připomenout, že i **nezávislost rychlosti světla na rychlosti jeho zdroje** souvisí s relativistickým skládáním rychlostí. Tato nezávislost byla experimentálně ověřována pro nejrůznější rychlosti zdrojů až do v zdroje = 0,9997 c. Zdrojem záření byly rozpadající se elementární částice; přesnost ověření v daném případě dosáhla 10^{-4}.

b) Dilatace času

– Klasickým pozorováním potvrzujícím dilataci času je **registrace mionů** vznikajících ve velkých výškách (asi 30 km) srážkami kosmických paprsků s atmosférou Země. Z laboratorních měření je známa doba života mionů, které jsou v klidu vůči laboratoři – činí asi $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6}\,s$. (Za tuto dobu počet mionů klesne $e\times$, za čas *t*, tedy na $e^{-(t/\tau_0)}$ počtu v

$t = 0$.) Kdyby nebyla dilatace času, urazily by miony za dobu života dráhu maximálně $c \cdot \tau_0 \doteq 700m$ a po několika kilometrech by se tedy prakticky všechny rozpadly. Ve skutečnosti jsou ovšem ve značném počtu registrovány ještě u hladiny moře! Mohou k ní dolétnout jen proto, že díky dilataci času plyne jejich vlastní čas podstatně pomaleji než čas v soustavě spojené se Zemí. Jinými slovy můžeme říci, že v soustavě s nimi spojené mají miony stále dobu života pouze $2{,}2 \cdot 10^{-6} s$; v soustavě spojené se Zemí jí odpovídá doba podstatně delší.

– Tento fakt je možno potvrdit měřením doby života mionů v urychlovačích, v nichž se rovněž pohybují vysokými rychlostmi. V pokusech provedených v CERN byla hodnota $\gamma \doteq 12$ a vztah (7) byl ověřen s přesností vyšší než 1%. Podobné pokusy byly prováděny i s dalšími druhy elementárních částic – s výsledky vždy potvrzujícími předpovědi teorie relativity.

– Velmi přesné ověření dilatace času bylo provedeno v r. 1984 a využívalo laseru s pohybujícím se aktivním prostředím. Předpověď speciální teorie relativity zde byla ověřena s přesností 1:25000. (!)

– Čtenáře možná napadne, že nejnázornějším a pro laiky i žáky nejsrozumitelnějším ověřením dilatace času by bylo vzít přesné hodiny, naložit je do letadla, odletět s nimi určitou trasu a po návratu porovnat jejich údaj s druhými přesnými hodinami, které byly ponechány na letišti. Pro rychlost letadla zhruba $\upsilon = 300\ \mathrm{m\,s^{-1}}$ je ovšem

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \doteq 1-\frac{\upsilon^2}{2c^2} = 1-0{,}5\cdot 10^{-12}$$

tedy relativistický efekt řádu 10^{-12}. Stejné resp. vyšší přesnosti musí dosáhnout hodiny, má-li být efekt změřen. Hodiny využívající molekulárních kmitů již naštěstí této přesnosti dosáhly a tak zmíněný pokus mohl být r. 1971 proveden. Dvoje cesiové hodiny přitom oblétaly Zemi v opačném směru. (Rychlost letadla se zde skládá s obvodovou rychlostí rotace Země, proto dají oba lety různý výsledek.) Třetí hodiny zůstaly na výchozím letišti. Naměřené časové rozdíly (řádu pouhých stovek nanosekund) souhlasily s přesností zhruba 10% s předpovědí speciální teorie relativity.

c) Kontrakce délek

Pro makroskopická tělesa nebyla dosud kontrakce délek přímo ověřena. Jejím důkazem je ovšem již výše zmíněná registrace mionů u hladiny moře. Z hlediska soustavy spojené s mionem je totiž jeho doba života stále jen $\tau_0 = 2{,}2 \cdot 10^{-6} s$. Za tuto dobu se k němu Země stačila přiblížit nanejvýš o $c \cdot \tau_0 = 700m$. Zmínili jsme se však již, že miony vznikají ve výšce 30 km nad povrchem Země.

Jak z hlediska mionu vysvětlit, že povrch Země k němu stačí dolétnout dřív než se rozpadne?

Kontrakcí délek: v soustavě spojené s miony není délka od místa vzniku k povrchu Země rovna 30 km, ale

$$\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \cdot 30\ \mathrm{km}$$

což pro υ blízké c může být podstatně méně.

Vidíme zde znovu, jak jsou jednotlivé efekty relativistické kinematiky vzájemně propojeny. To, co je z hlediska jednoho inerciálního systému projevem dilatace času, je z hlediska druhého projevem kontrakce délek. Aby vysvětlení souhlasilo i kvantitativně, musí přitom u kontrakce délek vystupovat právě faktor $\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}$.

d) Aplikace

Mají vztahy relativistické kinematiky konkrétní aplikace? Takhle položená otázka je ovšem příliš úzká. Relativistická kinematika souvisí s ostatní fyzikou, je východiskem relativistické dynamiky, je propojena s elektrodynamikou, optikou, fyzikou vysokých energií… Bez vztahů relativistické kinematiky a dynamiky bychom neuměli správně propočítat pohyb částic v urychlovačích a děje při srážkách elementárních částic. Obecně kdykoli aplikujeme jakýkoli fyzikální děj, v němž hrají roli relativistické efekty, aplikujeme vlastně i relativistickou kinematiku.

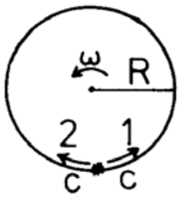
Významným výsledkem relativistické kinematiky je zjištění, že žádný signál se nemůže šířit vyšší rychlostí než je rychlost světla. Jak jsme se již zmínili, klade to omezení na vlastnosti látek (rychlost zvuku nesmí převýšit c). V běžné praxi se toto omezení samozřejmě nijak neprojeví, v astrofyzice však může sloužit k vymezení např. maximální možné hmotnosti neutronových hvězd.

Konstantnost rychlosti světla, která je východiskem teorie relativity, se dnes využívá v metrologii při definici metru, jak jsme se o tom již rovněž zmínili (v kap. III). I to lze vlastně považovat za aplikaci relativistické kinematiky.

Připomeňme ovšem, že **princip konstantní rychlosti světla platí jen v inerciálních soustavách**. V neinerciálních soustavách se může světlo šířit v různých směrech různou rychlostí. Lze to ukázat na příkladu, který sice přesně vzato nespadá do relativistické kinematiky (lze ho řešit úvahou na ní nezávislou), ale upozorní nás, abychom výsledky relativistické kinematiky bezmyšlenkovitě nepřenášeli na neinerciální systémy. Zajímavá je i jeho aplikace.

e) Sagnacův pokus a jeho aplikace

Uvažujme zrcadla sestavená do kruhu. Světelný paprsek téměř tečně se od nich odrážející se tedy šíří v podstatě po kruhové dráze (viz obr.IV.17).



Obr. IV.17. Sagnacův pokus (idealizovaná verze).

(V pokusu provedeném Sagnacem v r. 1913 bylo užito jen čtyř zrcadel; námi vyšetřovaná idealizovaná verze je pro rozbor jednodušší.) Ze zdroje na obvodu vyšleme současně světelné signály v obou směrech a budeme měřit čas jejich oběhu kolem kruhu zpět do bodu vyslání. (Rozdíl těchto časů můžeme zjišťovat interferometricky.)

Pokud celý přístroj stojí vůči nějakému inerciálnímu systému, jsou časy oběhů obou paprsků samozřejmě stejné. Jak tomu bude, roztočíme-li celý přístroj úhlovou rychlostí ω kolem osy kruhu?

Nejjednodušší je analyzovat situaci z hlediska inerciálního systému. Zdroj signálů, který je zároveň detektorem, se za čas t posune po obvodu kruhu o $R\omega\, t$. Je-li doba oběhu prvního signálu t_1 (doba, než signál „dožene" detektor), musí signál urazit dráhu $2\pi R + R\omega\, t_1$. V inerciální soustavě, v níž problém řešíme, je rychlost signálu rovna c. Je tedy

$$2\pi R + R\omega\, t_1 = ct_1 \,, \text{ z čehož } \; t_1 = \frac{2\pi R}{c - R\omega} \;.$$

Pro druhý signál je analogicky

$$2\pi R - R\omega\, t_2 = ct_2 \,, \text{ z čehož } \; t_2 = \frac{2\pi R}{c + R\omega} \;.$$

Odečtením pak

$$t_1 - t_2 \;=\; 2\pi R \,\frac{2R\omega}{c^2 - R^2\omega^2} \;=\; \frac{4\pi R^2\omega}{c^2} \,\frac{1}{1 - \left(\dfrac{R\omega}{c}\right)^2}$$

Efekt není zanedbatelný ani pro malé rychlosti otáčení $(R\omega << c)$:

$$t_1 - t_2 \;\doteq\; 4\frac{\pi R^2}{c^2}\omega \;. \tag{IV.37}$$

Z hlediska soustavy spojené s přístrojem jsou dráhy obou signálů stejné. To znamená, že v neinerciální soustavě se uvažované světelné signály pohybují různou rychlostí.

Je zajímavé, že s využitím moderní laserové techniky našel i tento jev svou aplikaci. Dráha ze zrcadel je při ní nahrazena světlovodem a časový rozdíl (37) se (interferometrickou metodou) detekuje a vyhodnocuje automaticky. Výsledkem je hodnota ω. Přístroj tak pracuje jako měřič rychlosti otáčení resp. gyroskop, a to bez jakýchkoli setrvačníků či jiných pohyblivých mechanických součástí. V současnosti lze touto technikou měřit rychlosti otáčení od pouhých zlomků úhlového stupně za hodinu.