V. Relativistická dynamika

V.1. Dynamika a speciální princip relativity

Seznámili jsme se již s relativistickou kinematikou. Přirozeným krokem je přejít k dynamice – tj. k vyšetřování pohybu při daném silovém působení, srážek apod. a k diskusi pojmů v dané oblasti klíčových, jako jsou hmotnost, hybnost a energie. Budeme se přitom zabývat dynamikou částic.

Pokud jsou rychlosti částic malé, je jejich chování dobře vystiženo klasickou newtonovskou dynamikou. Již z jednoduchého příkladu je ovšem jasné, že obecně ji nelze použít: Z 2. Newtonova zákona $\frac{d}{dt}(m\vec{v})=\vec{F}$, kde hmotnost m je konstanta, plyne pro $\vec{F}=\text{konst.}$ a počáteční podmínku $\vec{v}(t=0)=0$ výsledek $\vec{v}=\frac{\vec{F}}{m}\cdot t$. Pro $t>mc\big/\left|\vec{F}\right|$ by se tedy podle klasické dynamiky měly částice pohybovat nadsvětelnou rychlostí – což je zjevně ve sporu se speciální teorií relativity.

Obecný důvod, proč je 2. Newtonův zákon neslučitelný s teorií relativity, tkví v tom, že

> 2. Newtonův zákon nevyhovuje speciálnímu principu relativity.

V kapitole III. jsme speciální princip relativity formulovali tak, že libovolný fyzikální zákon musí mít ve všech inerciálních systémech stejný tvar. To znamená, že máme-li fyzikální zákon vyjádřen jistým vztahem v inerciálním systému *S* a přejdeme-li od *S* k systému *S'*, tj. vyjádříme všechny veličiny pomocí veličin v *S'*, musí být výsledný tvar zákona tentýž, jako byl v *S*. Zákon tedy nesmí měnit tvar (resp. formu) při přechodu od *S* k *S'*. Ve speciální teorii relativity ovšem víme, jak přejít od *S* k *S'*: Lorentzovou transformací. **Speciální princip relativity** tedy můžeme vystihnout konstatováním, že libovolný fyzikální zákon nesmí změnit svůj tvar při Lorentzově transformaci, jinými slovy:

> **fyzikální zákony musí být invariantní vůči Lorentzově transformaci**.

2. Newtonův zákon je invariantní vůči Galileiho transformaci; jednoduchým výpočtem lze však ověřit, že není invariantní vůči transformaci Lorentzově. Ostatně kdyby vůči ní byl invariantní a tedy slučitelný se speciální teorií relativity, nemohl by vést k již zmíněnému urychlování částic do nadsvětelných rychlostí.

Vidíme tedy, že je nutno 2. Newtonův zákon modifikovat, resp. navrhnout pohybovou rovnici, která by ho nahrazovala a přitom vyhovovala speciálnímu principu relativity.

Speciálnímu principu relativity budou muset samozřejmě vyhovovat i další zákony dynamiky (např. zákon zachování hybnosti atd.). Jak uvidíme, vyžádá si to určité změny v pohledu na hmotnost, hybnost, energii a jejich vzájemné vztahy – ať už se to projeví novými vzorci nebo jejich interpretací.

Ještě poznámku k výuce relativistické dynamiky: ve středoškolské fyzice bývají vztahy relativistické dynamiky většinou pouze konstatovány s tím, že experiment je potvrzuje. My je zde budeme odvozovat, ovšem pokud možno co nejjednodušším způsobem, schůdným i pro zájemce z řad středoškoláků.

V.2. Relativistická hmotnost a hybnost

Při budování relativistické dynamiky, alespoň na úrovni, na níž se pohybujeme, není vhodné začít ihned modifikací 2. Newtonova zákona – už proto, že vlastně nevíme, jak na to. Účelnější bude vyjít ze zákonů, které mají velmi obecnou platnost a o nichž tedy můžeme předpokládat, že budou platit i ve speciální teorii relativity.

Takovýmito velmi důležitými zákony, jejichž platnost je ve fyzice znovu a znovu potvrzována, jsou **zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie**.

Jen velmi silné důvody a experimentální důkazy by nás mohly přimět k tomu, abychom se jich vzdali. Je tedy přirozené přijmout předpoklad, resp. postulát, že

zákony zachování hmotnosti, hybnosti a energie platí i v relativistické dynamice.

Z toho ovšem nevyplývá, že za hmotnost, hybnost atd. bychom do nich mohli jednoduše dosazovat klasické veličiny newtonovské mechaniky (např. $\vec{p} = m\vec{v}$, kde m je konstanta.)

Proč to nevyplývá? Protože vždy, když se rozšíří fyzikální teorie, rozšíří se a pozmění se i chápání veličin v ní obsažených. Například když k mechanice přidáme elektrodynamiku, musíme do celkové hybnosti kromě hybnosti částic zahrnout i hybnost elektromagnetického pole. Na další příklady může čtenář připadnout sám. Proto by třeba mohla být hybnost částice ve speciální teorii relativity dána obecnějším vztahem, který by v „klasické“ $\vec{p} = m\vec{v}$ přecházel pouze pro $v \ll c$.

a) Relativistická hybnost

Jaký tvar by mohl mít takovýto obecný vztah pro závislost hybnosti částice na její rychlosti?

Budeme předpokládat, že vektor hybnosti $\vec{p}$ částice skutečně závisí jen na její rychlosti $\vec{v}$ a ne na jejím zrychlení či vyšších derivacích rychlosti. (Vede nás přitom princip jednoduchosti. Teprve kdybychom se dostali do neřešitelných potíží, stálo by za to vymýšlet nějaké složité kombinace $\vec{v}$, $\vec{a}$ atd.) Směr vektoru $\vec{p}$ se v tom případě nemůže lišit od směru $\vec{v}$. Kdyby se měl vektor $\vec{p}$ „odklánět“ od směru $\vec{v}$, znamenalo by to, že v prostoru musí být nějaký preferovaný směr určující, **kam** se má $\vec{p}$ odklánět. Žádný takovýto preferovaný směr ovšem neexistuje, neboť prostor je izotropní.

Musí tedy být $\vec{p} = K\vec{v}$. Na čem může záviset koeficient K? Nesmí zřejmě záviset na směru $\vec{v}$, to by bylo opět ve sporu s izotropií prostoru. (Promyslete si situaci třeba v případě, kdy by bylo $K = M \cdot \left(1 + v_x/c\right)$.) Zbývá tedy možnost, že by K záviselo na velikosti rychlosti $v \equiv |\vec{v}|$:

$$\vec{p} = K(v)\vec{v} \,.$$

Pro malé rychlosti $v \ll c$ (přesně vzato, v limitě $v \to 0$) je koeficient K roven hmotnosti m částice tak, jak ji známe z klasické mechaniky. Je tedy přirozené nazývat ho hmotností i ve speciální teorii relativity. Vyjádření hybnosti má pak ve speciální teorii relativity formálně stejný tvar jako v klasické mechanice:

$$\vec{p} = m\vec{v} \ , \tag{V.1}$$

kde ovšem nyní obecně může hmotnost záviset na velikosti rychlosti částice:

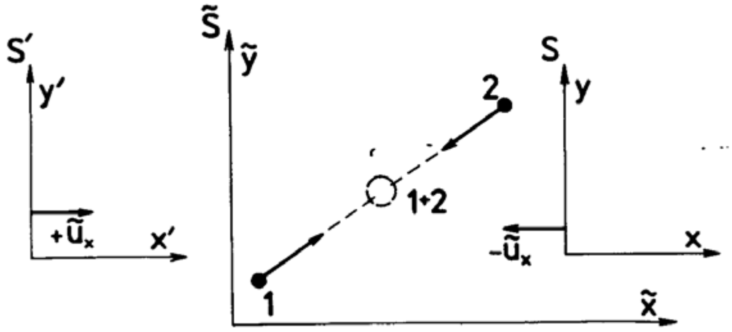
$$m = m(v) \ . \qquad \text{(V.2)}$$

(Pro rozlišení mluvíme někdy o **relativistické hmotnosti** částice.)

b) Odvození relativistické hmotnosti

Závislost (2) určíme z požadavku, aby zákon zachování hybnosti platil ve všech inerciálních systémech. Vyjdeme přitom z jednoduchého příkladu:

Uvažujme dvě **stejné** částice, pohybující se v inerciálním systému $\tilde{S}$ proti sobě rychlostmi $\vec{\tilde{u}}$ a $-\vec{\tilde{u}}$ (viz obr. V.1).



Obr. V.1. Ideálně nepružná srážka dvou stejných částic z hlediska systému *S*

Protože jde o stejné částice pohybující se rychlostmi téže velikosti, budou z hlediska $\tilde{S}$ stejné i jejich hmotnosti $\tilde{m}_1 = \tilde{m}_2$. Celková hybnost soustavy těchto částic v $\tilde{S}$ je tedy

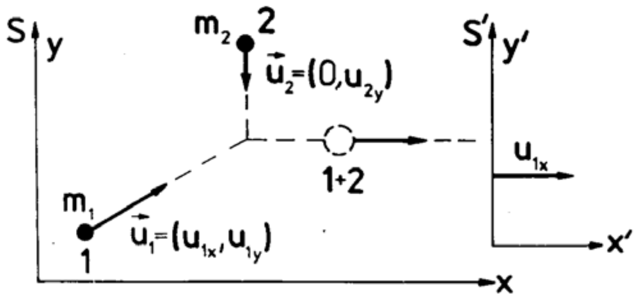
$$\vec{p}_{\text{před srážkou}} = \tilde{m}_1\vec{\tilde{u}} - \tilde{m}_2\vec{\tilde{u}} = 0 \ .$$

Uvažujme dále, že srážka částic, k níž dojde, je ideálně nepružná. Spojením částic vznikne nový objekt (částice) 1+2. Protože obě srážející se částice tvoří izolovanou soustavu, platí zákon zachování hybnosti a podle něj

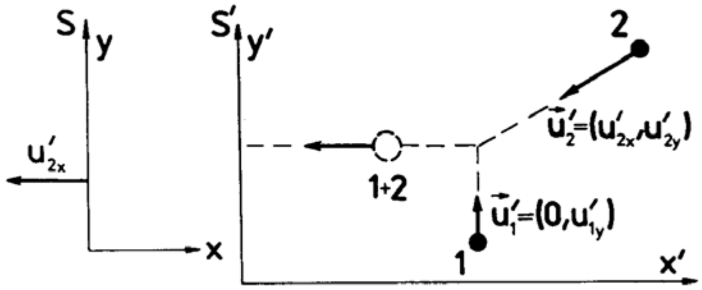
$$\vec{p}_{1+2} = 0$$

Vzniklá částice 1+2 bude tedy v $\tilde{S}$ v klidu.

Z hlediska $\tilde{S}$ je tedy popis srážky jasný. Jak vypadá situace z hlediska inerciálních systémů *S* a *S'*, které „jedou“ vůči $\tilde{S}$ tak, jak je to naznačeno na obr.V.1.? (Systém *S* sleduje pohyb částice 2 v x-ovém směru, *S'* sleduje podobně pohyb částice 1.)



Obr. V.2. a) Srážka z hlediska systému *S*



Obr. V.2. b) Srážka z hlediska systému *S'*

V systému *S* vypadá pohyb částice tak, jak to zachycuje obr.V.2.a, v systému *S'* tak, jako na obr.V.2.b. Vidíme, že z hlediska *S* a *S'* jde vlastně o tutéž situaci, jen role částic 1 a 2 jsou prohozeny. (Plyne to ze symetrie celé situace; viz znovu obr.V.1.) Zřejmě tedy

$$u_{2y} = -u'_{1y} \ . \tag{V.3}$$

(Pokud tomu čtenář nevěří, může si příslušné složky rychlostí vypočíst transformací z $\tilde{S}$.)

Systém *S'* se vůči systému *S* pohybuje rychlostí u_{1x}. V důsledku **transformace rychlostí** z *S* do *S'* je proto

$$u'_{1y} = \frac{u_{1y}\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}}{1-\dfrac{u_{1x}\cdot u_{1x}}{c^2}} = \frac{u_{1y}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}}$$

Dosazením do (3) dostáváme

$$u_{2y} = -\frac{u_{1y}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}} \ . \tag{V.4}$$

Nyní již můžeme v systému *S* zapsat zákon zachování hybnosti pro y-ové složky hybností. Před srážkou je

$$p_{y\,\text{před srážkou}} = m_1 u_{1y} - m_2 \frac{u_{1y}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}} \ . \tag{V.5}$$

Po srážce se vzniklá částice pohybuje ve směru osy *x* (uvědomte si, proč), je tedy

$$p_{y\ \text{po srážce}} = 0 \ . \tag{V.6}$$

Podle **zákona zachování hybnosti** plyne tedy z (5) a (6) vztah

$$m_1 u_{1y} - m_2 \frac{u_{1y}}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}} = 0 \ ,$$

z čehož

$$m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1-\left(\dfrac{u_{1x}}{c}\right)^2}} \tag{V.7}$$

Rychlost částice 2 můžeme ovšem volit velmi malou, resp. uvažovat limitu

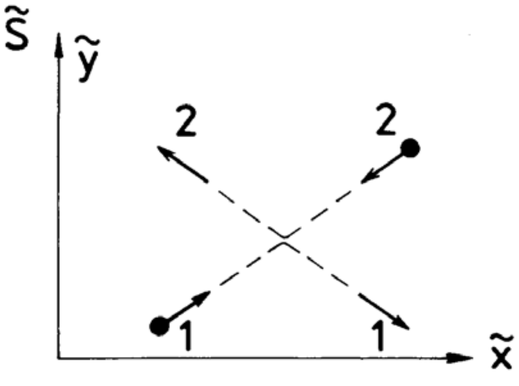
$$u_{2y} \to 0 \ . \tag{V.8}$$

m_2 je pak hmotnost částice v klidu, čili **klidová hmotnost** částice m_0 . Při (8) je i $u_{1y} \to 0$ (viz (4)) a rychlost *u* částice 1: $u_1 \to u_{1x}$. Z (7) pak dostáváme výsledek (místo m_1 píšeme *m* a místo u_1 u; m_0 je klidová hmotnost částice 2 a tedy i částice 1, protože jsou stejné):

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \tag{V.9}$$

Tento vztah vyjadřuje **závislost hmotnosti na rychlosti**. Částice (těleso), jež má v inerciální soustavě, v níž stojí, hmotnost m_0, má v inerciální soustavě, vůči níž se pohybuje rychlostí velikosti *u*, hmotnost *m*. (Pozn.: Odvození jsme provedli jen pro rovnoměrně se pohybující částice, je však přirozené předpokládat, že hmotnost částice je dána vztahem (8), i když se částice pohybuje zrychleně. Jak uvidíte dále, pokusy tento předpoklad potvrzují.)

K výše uvedenému odvození vztahu (8) by mohl nedůvěřivý čtenář namítnout, že jsme použili pouze *y*-ové složky hybnosti. Nevedla by práce s *x*-ovou složkou k jinému výsledku? Nevedla, jak se může čtenář sám výpočtem přesvědčit; výpočet by byl pouze o málo delší a je třeba využít i zákona zachování hmotnosti ($m_1 + m_2 = m_{12}$). Odvození nemusí být ani vázáno na srážku ideálně nepružnou – i z rozboru ideálně pružné srážky, která by vypadala tak, jak ukazuje obr.V.3., lze vztah (8) odvodit, a to v podstatě stejným postupem, jaký jsme použili výše.



Obr. V.3. Ideálně pružná srážka dvou stejných částic

Obecně platí, že platí-li (8) a (1), tj. hybnost částice (tělesa) pohybující se rychlostí $\vec{u}$ je dána vztahem

$$\vec{p} = \frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{V.10}$$

jsou **zákon zachování hybnosti spolu se zákonem zachování hmotnosti invariantní vůči Lorentzově transformaci** – tj. platí-li v jedné inerciální soustavě, platí ve všech. Vyhovují tedy speciálnímu principu relativity.

c) Transformace hybnosti

Ověřit to není ostatně nic obtížného. Uvažujme inerciální soustavy *S* a *S'*; *S'* nechť se pohybuje vzhledem k *S* ve směru osy *x* rychlostí υ. (Tj. jde o standardní situaci.) Ze vztahů (IV.4) pro transformaci rychlosti:

$$u'_x = \frac{u_x - \upsilon}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}, \qquad u'_y = \frac{u_y\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}{1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}}, \qquad u'_z = \ldots \tag{V.11}$$

můžeme vypočíst $(u')^2 = (u'_x)^2 + (u'_y)^2 + (u'_z)^2$ a po úpravách ověřit vztah (zkuste si to!)

$$\sqrt{1-\frac{(u')^2}{c^2}}\left(1-\frac{u_x\upsilon}{c^2}\right) = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}} \tag{V.12}$$

V soustavě *S* jsou hmotnost a hybnost částice dány vztahy (8) a (10); v *S'* bude samozřejmě

$$m' = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{(u')^2}{c^2}}} \quad \text{a} \quad \vec{p}' = m'\vec{u}' \;. \tag{V.13}$$

Pomocí (11) a (12) lze dosazením do (23) vyjádřit m' a $\vec{p}'$ pomocí m a $\vec{u}$, resp. m a $\vec{p}$, čili získat **transformační vztahy pro hybnost a hmotnost částice**:

$$\begin{aligned}
p'_x &= \frac{p_x - m\upsilon}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} && \text{(a)}\\
p'_y &= p_y && \text{(b)}\\
p'_z &= p_z && \text{(c)}\\
m' &= \frac{m - \frac{\upsilon}{c^2}p_x}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} && \text{(d)}
\end{aligned} \tag{V.14}$$

Tyto vztahy bychom také mohli nazvat **Lorentzovou transformací hybnosti a hmotnosti**. Porovnání s Lorentzovou transformací souřadnic (III.30) ostatně ukáže zajímavou skutečnost:

souřadnice hybnosti a hmotnosti: p_x, p_y, p_z a m se při Lorentzově transformaci transformují stejně jako x, y, z a t.

Proč tomu tak je, pochopíme lépe v kap.VIII.

Celková hybnost soustavy částic je dána součtem hybností jednotlivých částic a totéž platí i pro hmotnost. Sečteme-li vztahy (14) zapsané pro jednotlivé částice, získáme na levé straně celkovou hybnost a hmotnost soustavy částic v *S'* a na pravých stranách budou vystupovat celková hybnost a hmotnost v *S*.

Vztahy (14) tedy platí i pro celkovou hybnost a hmotnost soustavy částic.

(Čtenář si může předchozí úvahu podrobně rozepsat pro soustavu dvou částic, aby ověření bylo názornější.)

Nyní je jasné, že platí-li zákony zachování hybnosti a hmotnosti v *S* (tj. složky p_x, p_y, p_z, m se nemění), nemění se ani složky p'_x, p'_y, p'_z a m' – hybnost a hmotnost se tedy zachovává i v *S'*.

Připojme ještě poznámku, týkající se významu **hmotnosti**. Vztah (5) jasně ukazuje, jak nesprávná by byla naivní představa, že hmotnost částice je dána množstvím látky či nějaké substance „nalité“ do částice. Urychlíme-li částice, její hmotnost vzroste, přestože jsme do ní nic „nepřilévali“; navíc v různých soustavách souřadnic je hmotnost téže částice (do níž by podle uvedené naivní představy bylo „nalito“ dané množství substance) různá.

Opatrný čtenář může namítnout, že výše řečené se týká relativistické hmotnosti částic. Nemohla by být mírou „množství substance v částici“ její klidová hmotnost? Ta je přece ve všech soustavách stejná a při urychlování se nemění!

Mění se ovšem při srážkách – resp. přesněji při nepružných srážkách se nezachovává součet klidových hmotností částic. Příklad uvedeme dále u čl.V.5.

V učebnicích fyziky se samozřejmě výše uvedené pojetí hmotnosti neobjevuje. Může však možná přetrvávat v „názorných“ představách studentů. Snad by bylo i užitečné, kdyby se příroda řídila pouze newtonovskou mechanikou; tak tomu ovšem není.

V.3. Pohybová rovnice a její důsledky

a) Pohybová rovnice

Relativistická pohybová rovnice částice musí splňovat dva základní požadavky:

– musí vyhovovat speciálnímu principu relativity a

– pro malé rychlosti částice musí přecházet v 2. Newtonův zákon.

Přitom samozřejmě musí dát možnost vypočítat pohyb dané částice (s daným m_0) je-li zadáno silové působení na částici (síla $\vec{F}$).

Výše jsme již odvodili vztah pro hybnost částice $\vec{p}$ platný ve speciální teorii relativity (vztah (10)). Zobecnění 2. Newtonova zákona je pak nasnadě: v rovnici

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F} \tag{V.15}$$

prostě za $\vec{p}$ dosadíme relativistickou hybnost (10):

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\,\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} \tag{V.16}$$

Vztah (15) resp. (16) je tedy relativistická pohybová rovnice částice.

To, že pro $|\vec{u}| << c$ přechází (16) v „klasický“ 2. Newtonův zákon $m_0\dfrac{d\vec{u}}{dt} = \vec{F}$, je celkem zřejmé, resp. lze to jednoduše dokázat. Dosud jsme však nedokázali, že (16) vyhovuje speciálnímu principu relativity. Názorněji to uvidíme v kap.VIII. Můžeme ovšem vyjít z transformace hybnosti (14) a ověřit, že je-li $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ v soustavě *S*, je též $d\vec{p}\,'/dt' = \vec{F}\,'$ v soustavě *S'*. Přesněji řečeno, zjistíme tím vyjádření $\vec{F}\,'$ pomocí $\vec{F}$ – tedy **transformaci síly**. (Při Galileiho transformaci je $\vec{F}\,' = \vec{F}$. Na to se ovšem můžeme spolehnout jen při malých rychlostech. Je-li hmotnost částice z hlediska různých inerciálních systémů různá, proč by tomu tak nemohlo být i se silou?)

b) Práce síly na částici: cesta k $E = m\,c^2$

Nejprve ovšem odvodíme z pohybové rovnice důležitý **důsledek**. Bude se týkat energie částice, resp. práce, kterou síla $\vec{F}$ vykoná na pohybující se částici. Za čas Δt vykoná síla práci

$$\Delta A = \vec{F}\cdot\Delta\vec{r} = \left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)\Delta t \ ,$$

kde $\Delta\vec{r}$ je posunutí částice za čas Δt. (Všechny přírůstky pokládáme za malé; nakonec provedeme limitu $\Delta t \to 0$.) Práce ΔA samozřejmě zvýší energii *E* částice o

$$\Delta E = \Delta A = \left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)\Delta t \ , \tag{V.17}$$

jinak by byl narušen zákon zachování energie. Ze (17) po vydělení Δt a limitě $\Delta t \to 0$ plyne

$$\frac{dE}{dt} = \vec{F}\cdot\vec{u} \ . \tag{V.18}$$

Do pravé strany (18) dosadíme $\vec{F}$ z (16). Po vcelku přímočarých úpravách dostaneme

$$\frac{dE}{dt} = \vec{u}\cdot\vec{F} = \vec{u}\cdot\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = m_0\vec{u}\,\frac{\frac{d\vec{u}}{dt}\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)+\frac{\vec{u}}{c^2}\left(\vec{u}\cdot\frac{d\vec{u}}{dt}\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m_0\,\frac{\vec{u}\,\frac{d\vec{u}}{dt}}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} = m_0\,\frac{\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(u^2\right)}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}} =$$

$$= \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right)$$

Změna energie částice s časem je tedy

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) \tag{V.19}$$

a odtud integrací

$$E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} + K = mc^2 + K \tag{V.20}$$

kde K je zatím neznámá konstanta, která samozřejmě není vztahem (19) určena. V klasické fyzice je obecně energie vždy určena až na konstantu; v následujícím článku si ale ukážeme, že ve speciální teorii relativity je přirozené volit $K = 0$. Energie částice pak vyjde přímo úměrná její hmotnosti. Prozatím můžeme z (20) pouze konstatovat, že

přírůstek energie částice je úměrný přírůstku její hmotnosti,

$$\Delta E = \Delta m\, c^2 \tag{V.21}$$

c) Transformace síly

Vraťme se nyní k invariantnosti pohybové rovnice a transformaci síly. Rovnici

$$\frac{d\vec{p}'}{dt'} = \vec{F}' ,$$

která má platit v *S'*, přepíšeme do tvaru

$$\frac{dt}{dt'}\frac{d}{dt}\left(\vec{p}'\right) = \vec{F}' \tag{V.22}$$

Ze vztahu pro Lorentzovu transformaci t, $t = \dfrac{t' + \frac{\upsilon}{c}x'}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}$, získáváme derivací

$$\frac{dt}{dt'} = \frac{1+\dfrac{\upsilon \cdot u'_x}{c^2}}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} = \frac{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \,, \tag{V.23}$$

kde jsme využili vztahu podobného vztahu (12). Po dosazení (23) do (22) získáme

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}\vec{F}' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\vec{p}'\right) \tag{V.24}$$

p'_x nyní vyjádříme pomocí $\vec{p}$ a m (viz vztah (14.a)). Pro x-ovou složku je z (24):

$$\frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}F'_x = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{p_x - m\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\dfrac{dp_x}{dt} - \dfrac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\dfrac{dm}{dt}\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{V.25}$$

Ovšem $\dfrac{dp_x}{dt} = F_x$ a z (20) a (18) plyne

$$\frac{dm}{dt} = \frac{1}{c^2}\vec{F}\cdot\vec{u} \tag{V.26}$$

Z (25) po dosazení plyne

$$\frac{F'_x}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}} = \frac{\dfrac{F_x}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} - \dfrac{1}{c^2}\left(\dfrac{\vec{F}\cdot\vec{u}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\right)\upsilon}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

Výraz $\vec{F}\cdot\vec{u}$ má jasnou interpretaci: je to **výkon** síly $\vec{F}$ působící na částici (viz (18)). Dále ho budeme značit P:

$$\vec{F}\cdot\vec{u} \overset{ozn}{=} P \quad .$$

Navíc vidíme, že místo s $\vec{F}, P$ a $\vec{F}'$ (a $P' = \vec{F}'\cdot\vec{u}'$) bude výhodné pracovat s veličinami

$$\tilde{\vec{F}} = \frac{\vec{F}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad \tilde{P} = \frac{P}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}, \quad \tilde{\vec{F}}' = \frac{\vec{F}'}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}, \quad \tilde{P}' = \frac{P'}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}} \tag{V.27}$$

Transformace x-ové složky síly pak dostane jednoduchý tvar

$$\tilde{F}'_x = \frac{\tilde{F}_x - \upsilon\left(\dfrac{\tilde{P}}{c^2}\right)}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{V.28.a}$$

silně připomínající Lorentzovu transformaci souřadnice *x*. Není to náhodné. Pro *y*-ovou a *z*-ovou složku síly dá (24) (po dosazení (14) a využití (27)) výsledek

$$\tilde{F}'_y = \tilde{F}_y \tag{V.28.b}$$

$$\tilde{F}'_z = \tilde{F}_z \tag{V.28.c}$$

Čtenáře by teď mohlo napadnout, zda se $\left(\dfrac{\tilde{P}}{c^2}\right)$ „náhodou" také netransformuje stejně jako souřadnice *t*. Přímočarý výpočet využívající (26) (a analogického vztahu pro $\dfrac{dm'}{dt}$), (23), (14.d) a vztahu $dp_x/dt = F_x$ to potvrdí:

$$\tilde{P}' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}\vec{F}'\cdot\vec{u}' = \frac{1}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}c^2\frac{dm'}{dt'} = \frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}\frac{dt}{dt'}\cdot\frac{dm'}{dt} =$$

$$= \frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}\frac{\sqrt{1-\dfrac{u'^2}{c^2}}}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\frac{d}{dt}\left(\frac{m-\dfrac{\upsilon}{c^2}p_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}\right) = \frac{c^2}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}}\frac{\dfrac{1}{c^2}\left(\vec{F}\cdot\vec{u}\right)-\dfrac{\upsilon}{c^2}F_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}}$$

čili (viz označení (27)):

$$\tilde{P}' = \frac{\tilde{P}-\upsilon\tilde{F}_x}{\sqrt{1-\dfrac{\upsilon^2}{c^2}}} \tag{V.28.d}$$

Proč se $\tilde{\vec{F}}$ a $\tilde{P}$ transformují právě tak a jaký je jejich význam si ukážeme v kap.VIII. Již teď nám snad ale vztahy (28) mohou připadat velmi „rozumné" a přirozené. Vždyť co bychom vlastně mohli čekat jednoduššího než vztahy, které se prakticky neliší od Lorentzovy transformace. (A které pro $\upsilon \to 0$ samozřejmě přecházejí v $\vec{F}' = \vec{F}$ a $P' = P - \vec{F}\cdot\vec{\upsilon}$.)

Pozn.: Pozorný čtenář se na tomto místě může zeptat: „Splňuje třeba Lorentzova síla $\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{u}x\vec{B}\right)$ působící na nabitou částici v elektromagnetickém poli skutečně transformační vztahy (28)? To jsme přece dosud neověřili!"

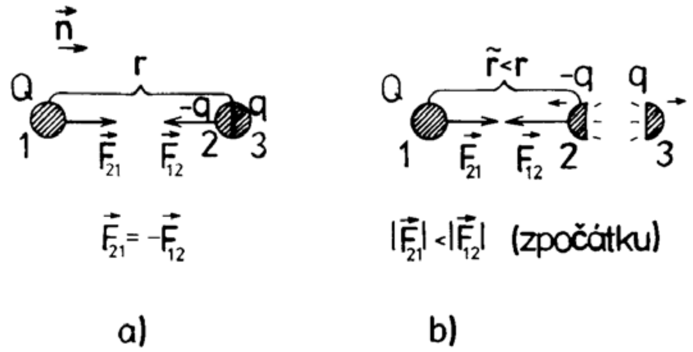
Námitka je oprávněná – doposud jsme pouze ukázali, že síla se **musí** transformovat podle vztahů (28), aby byla pohybová rovnice invariantní vůči Lorentzově transformaci. Pro každé uvažované silové působení ovšem musíme ověřit, že je tomu opravdu tak. Omezíme se zde na elektromagnetické působení dané Lorentzovou silou. (Gravitační působení ve speciální teorii relativity neuvažujeme, silná a slabá interakce by nás zavedla do relativistické kvantové teorie pole.) Že se Lorentzova síla skutečně transformuje podle (28) budeme moci ověřit, jakmile v následující kapitole odvodíme transformační vztahy $\vec{E}$ a $\vec{B}$, vhodnější ovšem bude s ověřením počkat do kap.VIII, kde bude díky použitému formalismu velmi jednoduché.

První Newtonův zákon patří k pilířům speciální teorie relativity. 2. Newtonův zákon je zobecněn v relativistickou pohybovou rovnici.

Jak je tomu s platností **3. Newtonova zákona** v rámci speciální teorie relativity?

Jednoduchá úvaha nám ukáže, že pokud částice, které na sebe působí, nejsou na tomtéž místě (tj. nejde-li o srážku), 3. Newtonův zákon obecně platit nemůže.

Uvažujme částici 1 nabitou nábojem Q (> 0) stojící v inerciální soustavě S a ve vzdálenosti r od ní dvě spojené částice 2 a 3 s náboji $-q$ a q ($q > 0$) rovněž stojící v S – viz obr.V.4.a.



Obr. V.4. K neplatnosti 3. Newtonova zákona ve speciální teorii relativity

Předpokládejme, že všechny částice jsou v klidu dostatečně dlouho. Pak je pole, které budí ve svém okolí, elektrostatické, a síly, jimiž na sebe částice působí, lze určit z Coulombova zákona. Síla, kterou částice 1 působí na částici 2 je $\vec{F}_{12(a)} = \frac{-1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{r}$; síla, kterou 2 působí na 1 je $\vec{F}_{21(a)} = +\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qQ}{r^2}\vec{r} = -\vec{F}_{12}$.

Nechť se ale v určitém okamžiku, řekněme $t = 0$, částice 2 a 3 rozletí tak, jak to ukazuje obr.V.4.b. Mezi částicemi mohla být třeba stlačená pružina, držená v stlačené poloze nití. V daném okamžiku se nit přetrhla. Částice 2 se blíží k částici 1 a dostává se tak do míst, kde je intenzita pole buzeného 1. částicí vyšší. Proto bude síla, jíž částice 1 (přesněji pole buzené částicí 1) působí na 2 vyšší než dříve (pro $t < 0$):

$$\left|\vec{F}_{12}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{qQ}{\tilde{r}^2}$$

K částici 1 může ovšem jakýkoliv rozruch elektromagnetického pole, informující o tom, že poloha a rychlost částic 2 a 3 se změnily, dojít nejdříve až za dobu r/c. Do té doby se proto síla, jíž na 1 působí pole buzené částicí 2, nezmění:

$$\left|\vec{F}_{21}\right| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2} \quad \left(\text{pro}\, t < r/c\right) .$$

Je tedy $\left|\vec{F}_{21}\right| < \left|\vec{F}_{12}\right|$, **princip akce a reakce neplatí**.

Podobně je tomu i mezi částicemi 1 a 3. Dokonce i součet sil, jimiž částice 2 a 3 působí na 1 (jenž je samozřejmě $\vec{F}_{21} + \vec{F}_{31} = 0$ pro $t < r/c$) není roven (-1) krát součet sil, jimiž 1 působí na 2 a 3, jak může čtenář snadno ověřit.

Ostatně, už sama formulace principu akce a reakce je z hlediska speciální relativity nekorektní jde-li o částice, které nejsou na témže místě. Tvrdí totiž, že síla, kterou částice 1 působí na částici 2, je stejně velká a opačného směru jako síla, kterou ve **stejném okamžiku** působí částice 2 na částici 1. „Stejný okamžik“ v jedné inerciální soustavě znamená ovšem obecně „v různých časech“ v jiné inerciální soustavě…

Princip akce a reakce tedy můžeme „rozumně“ formulovat jen pro částice, které jsou v daném okamžiku na témže místě – např. při srážce částic. V tom případě, stejně jako v newtonovské mechanice, vede spolu s pohybovou rovnicí k zákonu zachování hybnosti. (Rozepište si dané odvození podrobně, abyste si ho z klasické mechaniky připomněli.)

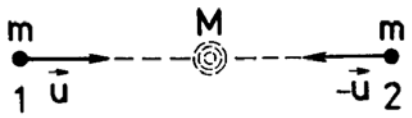
Předchozí úvaha nám naznačila, který zákon musíme ve speciální teorii relativity uvažovat namísto principu akce a reakce – je to **zákon zachování hybnosti**, jehož platnost jsme ostatně již diskutovali a postulovali výše. Ovšem nesmíme uvažovat pouze hybnosti částic: ve výše uvedeném příkladu je pro $t < 0$ celková hybnost částic nulová (všechny částice stojí), zatímco pro $0 < t < r/c$ je hybnost částice 1 stále rovna nule, ale $\vec{p}_2 + \vec{p}_3 \neq 0$ a má směr spojnice částice 2 s částicí 1. (Příslušnou úvahu zanecháváme čtenáři. Stačí si uvědomit velikost sil působících na 2 a 3.) Příčina je ovšem jasná:

Částice interagují s elektromagnetickým polem a to, co se zachovává, je **součet hybností částic a hybnosti elektromagnetického pole**. V dané situaci pole přenáší hybnost od částic 2 a 3 k částici 1.

V.4. Ekvivalence hmotnosti a energie

V předchozím článku jsme ukázali, jak přírůstek energie souvisí s přírůstkem hmotnosti částic – jinými slovy, jak energie částic přispívá k její hmotnosti (viz (21)). Odvození bylo provedeno pro pohybující se částice a čtenář by si proto mohl myslet, že k hmotnosti částice přispívá jen **kinetická energie**. Ovšem kinetickou energii lze přeměnit na jiné formy energie. Má-li se přitom zachovávat hmotnost i energie (což samozřejmě musí), musí i jiné formy energie přispívat k hmotnosti.

Ilustrovat to lze na příkladu nepružné srážky dvou stejných částic. Uvažujme dvě stejné částice o klidových hmotnostech m_0, které se pohybují rychlostmi u proti sobě (viz obr.V.5.). Jejich hmotnosti jsou tedy $m = m_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$. Ideálně nepružnou srážkou vznikne těleso hmotnosti M. Protože stojí, je jeho klidová hmotnost $M_0 = M$.



Obr. V.5. Ideálně nepružná srážka dvou stejných částic

Díky zákonu zachování hmotnosti je

$$M_0 = M = 2m = \frac{2m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} . \qquad \text{(V.29)}$$

K hmotnosti částic před srážkou přispívala jejich kinetická energie. (Mohli jsme je např. urychlit z klidu až na rychlosti $\vec{u}$ a $-\vec{u}$). Těleso vzniklé srážkou je v dané soustavě v klidu, takže jeho kinetická energie je nulová. Energie samozřejmě nezmizela (platí zákon zachování energie), jen se přeměnila v jiné formy. Částice, tvořící těleso se mohly rozkmitat, atomy excitovat nebo ionizovat, mohly proběhnout chemické reakce a část energie je energií chemickou atd. – jde prostě o různé formy vnitřní energie tělesa.

Vzniklé těleso má hmotnost shodnou se součtem hmotností částic před srážkou a energii shodnou se součtem energií částic před srážkou – vnitřní energie tělesa nezávisle na její formě tedy přispívá k jeho hmotnosti stejně jako k hmotnosti částic přispívala jejich kinetická energie: podle vztahu:

$$\Delta m = \frac{\Delta E}{c^2} .$$

Vztah (20):

$$E = mc^2 + K \qquad \text{(V.30)}$$

(kde K je zatím neurčená konstanta) tedy udává **celkovou energii** daného tělesa.

Čemu se rovná konstanta K?

Zdánlivě nejjednodušší by bylo volit ji rovnou $-m_0c^2$, takže pak by energie byla $E=(m-m_0)c^2$. Pro těleso v klidu je $m=m_0$ a energie by tedy pro $u=0$ byla rovna nule, tak, jak to známe z klasické kinetické energie; tím by nám mohl být daný výraz blízký.

Ovšem pozor! Při dané volbě K by se energie **nezachovávala**! Nezachovává se totiž klidová hmotnost (resp. součet klidových hmotností) – viz např. (29). Zmíněný výraz představuje totiž pouze **kinetickou energii částice** (obvykle označovanou T):

$$T = (m-m_0)c^2 \qquad \text{(V.31)}$$

ta se nezachovává, neboť může přecházet v jiné formy energie.

Konstanta K v (30) tedy obecně nemůže obsahovat m_0; mohla by obsahovat jen ty charakteristiky částice, které se zachovávají. Takové charakteristiky existují – jsou to např. náboj, baryonové číslo atd. Ovšem žádná experimentální fakta ani teoretické úvahy nesvědčí pro to, že by v energii částic měl být člen úměrný jejímu náboji, baryonovému číslu apod. (Pak by se při stejné energii musela např. lišit hmotnost částice a antičástice, což se nepozoruje.) Nelze ani jednoduše odečíst pro každou částici třeba půl joulu – vždyť počet částic se při srážkách mění.

Zbývá tedy nejpřirozenější předpoklad: $K=0$

a tedy

$$E = mc^2 \qquad \text{(V.32)}$$

celková energie částice resp. tělesa je přímo úměrná její hmotnosti.

Další úvahy potvrzují „rozumnost“ tohoto předpokladu. Z (14) a (32) plyne pro **transformaci hybnosti a energie** částice při speciální Lorentzově transformaci

$$p'_x = \frac{p_x - \frac{v}{c}\cdot\left(\frac{E}{c}\right)}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(a)}$$

$$p'_y = p_y \qquad \text{(b)} \qquad\qquad \text{(V.33)}$$

$$p'_z = p_z \qquad \text{(c)}$$

$$\left(\frac{E'}{c}\right) = \frac{\left(\frac{E}{c}\right) - \frac{v}{c}\cdot p_x}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} \qquad \text{(d)}$$

takže $\left(p_x, p_y, p_z, \frac{E}{c}\right)$ se transformuje stejně jako (x, y, z, ct).

Později uvidíme, že stejně se transformuje i hybnost a energie elektromagnetické vlny – a to je silný argument na podporu (32).

Ze vztahů $m = m_0 / \sqrt{1-u^2/c^2}$, $\vec{p} = m\vec{u}$ a (32) plyne vztah mezi energií a hybností částice (zkuste si odvodit):

$$\frac{E^2}{c^2} = p^2 + m_0{}^2c^2 \qquad \text{(V.34)}$$

velmi užitečný ve fyzice vysokých energií. I tento vztah by byl složitější, kdyby v (30) bylo $K = 0$. Navíc i vztah (34) platí i pro elektromagnetické záření, resp. pro fotony – je pouze nutno dosadit $m_0 = 0$. (Víceméně formálně proto říkáme, že **klidová hmotnost fotonů je nulová**; formálně proto, že neexistuje inerciální soustava, v níž by byl foton v klidu.)

V klasické newtonovské mechanice byla energie určena až na konstantu. Výše jsme uvedli několik teoretických argumentů pro to, že ve speciální teorii relativity je přirozené energii fixovat a přiřadit jí hodnotu $E = mc^2$. Jaksi mlčky s tím souvisí představa, že celou hodnotu této energie lze přeměnit v jiné její formy. (Kdyby byla jakákoli část energie z částice v principu „nedobytná“, nemělo by smyslu ji zařazovat do energetické bilance a tedy s ní fakticky počítat jako s energií.) Tedy speciálně předpokládáme, že lze v jiné formy přeměnit i **klidovou energii**

$$E_0 = m_0c^2 \qquad \text{(V.35)}$$

Je tento předpoklad potvrzen experimentem?

Z jaderné fyziky víme, že je. Při štěpení uranu nebo termojaderné syntéze hélia se uvolňuje (mění v jiné formy) část klidové energie jader – o něco méně než jedno procento. Nejpřesvědčivějším dokladem je však **anihilace páru částice-antičástice** (např. elektron-pozitron nebo proton-antiproton), při níž se **uvolní veškerá klidová energie částic**. Vzniknou totiž pouze fotony záření gama, které mají klidovou hmotnost nulovou. Naopak při **kreaci** páru částice-antičástice se energie (resp. část energie) původních fotonů gama přemění v klidovou energii vznikajících částic. (Zbytek energie se přemění v jejich kinetickou energii.)

V klasické newtonovské mechanice byla energie určena až na konstantu proto, že až na konstantu byla určena **potenciální energie** (částice ve vnějším poli). To nás může přivést k otázce:

Jak je tomu s potenciální energií ve speciální teorii relativity? Jak to, že její nejednoznačnost neznamená nejednoznačnost celkové energie resp. vztahu (32)?

Důvod je jednoduchý:

Potenciální energie ve speciální teorii relativity k celkové energii částice vůbec nepřispívá; nepřispívá proto ani k hmotnosti částice!

Potenciální energie totiž vůbec není energie částice. Je to energie pole, které s danou částicí interaguje, resp. přesněji energie interakce vnějšího pole s polem buzeným danou částicí. Příkladem může být energie soustavy dvou nabitých částic (s náboji Q_1, Q_2). Jsou-li částice v klidu v dané inerciální soustavě *S*, je energie jejich interakce

$$E_{\text{int.}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r}$$

kde *r* je jejich vzdálenost. O této energii často mluvíme jako o potenciální energii náboje Q_2 v poli náboje Q_1; právě tak však o ní můžeme mluvit jako o energii náboje Q_1 v poli náboje Q_2. Je-li poloha některého z nábojů v soustavě *S* pevně fixována, může takovýto přístup pomoci při řešení příkladů. Při obecně se pohybujících nábojích však selhává: náboje mohou vyzařovat elektromagnetické vlny a do celkové energetické bilance musíme nutně počítat energii elektromagnetického pole, tj. energii, rozloženou (ve vakuu) s hustotou

$$w = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_0 E^2 + \mu_0 H^2\right) \tag{V.36}$$

Počítat s energií pole obecně, ale ve speciálním případě elektrostatického pole říci, že tato energie nepřísluší poli, ale náboji (zvláště když v případě dvou stojících nábojů ani nevíme, kterému z nich energii přiřadit), by bylo zřejmě nepříliš konzistentní. (Představte si, že pro $t < 0$ by byly náboje v klidu a pak bychom s nimi začali pohybovat.)

Je proto přirozené připsat energii interakce nikoli částicím, ale elektromagnetickému poli, jehož prostřednictvím částice interagují. Elektromagnetické pole je i nositelem odpovídající hmotnosti $E_{\text{int.}} / c^2$.

Jaký je význam vztahu $E = mc^2$?

Rozhodně **není pravda**, že by vyjadřoval **přeměnu** hmotnosti v energii nebo naopak. Při anihilaci elektronu a protonu nezmizí hmotnost, aby se přeměnila v „čistou energii“ záření (resp. fotonů). Vzniklé fotony mají dohromady tutéž hmotnost, jako měly (dohromady) elektron a proton. Anihilací ovšem vznikly částice s nenulovou **klidovou** hmotností. Ale o té není ve vztahu $E = mc^2$ ani zmínka.

Vztah $E = mc^2$ prostě znamená, že jakýkoli objekt (těleso, soustava částic, pole v určité oblasti…), který má hmotnost *m*, má i odpovídající energii *E* a naopak.

Energie s hmotností spolu souvisí tak těsně, že rozdíl mezi nimi je vlastně jen ve volbě jednotek. Historicky se ovšem k pojmům hmotnost a energie dospělo různými cestami: Hmotnost byla zavedena jako charakteristika setrvačných vlastností těles (odporu vůči urychlování) a samozřejmě účinků gravitačních; energie byla chápána jako veličina, jejíž změny odpovídají vykonané práci, (mechanická energie) a pak se obsah tohoto pojmu rozšiřoval a zahrnoval i další formy energie. Speciální teorie relativity nás přivedla k poznání, že

hmotnost a energie vystihují v zásadě tutéž charakteristiku částice (tělesa).

Pomineme-li konstantní faktor c^2 (daný jen volbou jednotek, existují soustavy jednotek, v nichž je $c = 1$), mohli bychom dokonce říci, že:

z hlediska teorie relativity hmotnost a energie jsou jedno a totéž. Z tohoto hlediska je samozřejmé, že zákon zachování hmotnosti a zákon zachování energie je jeden a tentýž zákon.

V běžném životě, technické praxi a i řadě odvětví fyziky má ovšem význam energii a hmotnost rozlišovat. (Prakticky vždy, když změny energie jsou malé oproti klidové energii těles. Jistě nebudeme nakupovat chleba na miliardy miliard joulů.) Právě tak tomu bude i ve výuce na školách, kdy se žáci a studenti s fyzikou a s pojmy hmotnost a energie teprve seznamují. Není ale důvodu, proč by se středoškolák v závěru studia při seznamování se speciální teorií relativity nemohl dopracovat k pochopení faktu, že podobně jako nahlížíme jednotně na optické a elektromagnetické jevy (i když optika je samostatnou součástí fyziky), můžeme jednotně pohlédnout i na hmotnost a energii.

Tím jsme se dostali k otázce co říci o ekvivalenci hmotnosti a energie na středoškolské úrovni. Jistě zde nebudeme upravovat pohybovou rovnici apod. Lze však ukázat, že pro malé rychlosti částice $|u| << c$ je její hmotnost

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\dfrac{u^2}{c^2}}} \doteq \frac{m_0}{1-\dfrac{1}{2}\dfrac{u^2}{c^2}} \doteq m_0\left(1+\frac{1}{2}\frac{u^2}{c^2}\right) = m_0 + \frac{\frac{1}{2}m_0u^2}{c^2} = m_0 + \frac{E_{\text{kin. newt.}}}{c^2} \qquad \text{(V.37)}$$

takže kinetická energie studentům dobře známá z newtonovské mechaniky přispívá k hmotnosti částice (s faktorem $\dfrac{1}{c^2}$). (Pozn.: Potřebné vztahy pro úpravy: $\sqrt{1+\varepsilon} \doteq 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$ a $(1-\varepsilon)^{-1} \doteq 1+\varepsilon$ platné pro $|\varepsilon| << 1$ lze studentům přiblížit různými způsoby – první třeba umocněním na druhou a druhý pomocí součtu geometrické řady; z obou způsobů je zřejmé, co se zanedbává. Navíc dnes ve věku kalkulaček lze důvěru studentů v tyto vzorce posílit i tím, že zkusmo spočtou jejich levou i pravou stranu např. pro $\varepsilon = 10^{-2}, 10^{-3}$ atd.)

Pak lze na příkladu hmotnostního defektu jader ukázat, že i klidová hmotnost m_0 souvisí s energií (změně Δm_0 odpovídá změna energie $\Delta m_0 c^2$). Přirozeným zobecněním těchto úvah je pak vztah $E = mc^2$. Anihilace částic je pak zřejmě nejpádnějším argumentem potvrzujícím tento výsledek.

Pokud by vztah $E = mc^2$ byl spíše postulován, je vhodné postupem analogickým (37) přiblížit studentům pojem celkové energie v případě malých rychlostí pohybu částice ($|u| << c$):

$$E \doteq m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 u^2 \ ,$$

tj. spojit jim celkovou energii E se známou kinetickou energií newtonovské mechaniky. Samozřejmě je třeba upozornit, že změny energie, kterých dosahujeme v běžné praxi, jsou zanedbatelně malé v porovnání s klidovou energií. A že právě to je důvod, proč běžně nepozorujeme, že by se se změnou energie měnila i hmotnost objektů a v nerelativistické fyzice uvažujeme zvlášť zákon zachování hmotnosti a zákon zachování energie. I při štěpení jader a termojaderné syntéze se klidová hmotnost mění jen o necelé jedno procento. Při chemických reakcích je to více než o šest řádů méně. Ve fyzice vysokých energií ovšem může celková energie částic mnohonásobně převýšit jejich energii klidovou; vztah $E = mc^2$ je pak nezbytný. Je podstatný i v řadě partií astrofyziky a konečně i v již zmíněné jaderné fyzice.

V.5. Pohyb částic v jednoduchých případech

Důsledky relativistické dynamiky teď budeme ilustrovat na několika jednoduchých příkladech.

a) Nabitá částice v homogenním elektrickém poli

Síla působící na částici s nábojem q v homogenním elektrickém poli o intenzitě $\vec{E}$ je $\vec{F} = q \cdot \vec{E}$. (Platí obecně i v STR, jak si ověříme v kap.VIII.) Pohybová rovnice v tomto případě je

$$\frac{d}{dt}\left(m_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \right) = q\vec{E} \ . \tag{V.38}$$

Její integrací podle času t dostaneme

$$m_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = q\vec{E}t + K \ , \tag{V.39}$$

kde K je konstanta.

Pro jednoduchost se omezíme na případ částice pohybující se přímočaře ve směru $\vec{E}$. Bez újmy na obecnosti pak můžeme předpokládat, že částice v čase $t = 0$ stála (tj. bylo $\vec{u} = 0$);

v (39) pak $K = 0$. Zvolme osu *x* ve směru $\vec{E}$. Pak zřejmě $\vec{u} = (u_x, 0, 0)$; místo u_x budeme psát prostě *u* a podobně *E* místo E_x. X-ová složka rovnice (39) je pak

$$\frac{u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \frac{qE}{m_0} t \ ,$$

z čehož můžeme po úpravách (proveďte je!) vyjádřit *u* jako

$$u = \frac{\frac{qE}{m_0} t}{\sqrt{1+\left(\frac{qEt}{m_0 c}\right)^2}} \tag{V.40}$$

Vidíme, že pro malé hodnoty *t* vzrůstá rychlost lineárně s časem (jako klasický rovnoměrně zrychlený pohyb), zatímco pro $t \to \infty$ je $u \to c$. To připomíná hyperbolický pohyb – a skutečně, porovnáním (40) se vztahem (IV.33) vidíme, že jsou totožné, přičemž zrychlení částice v soustavě, v níž momentálně stojí, je

$$A = \frac{qE}{m_0} \ . \tag{V.41}$$

(Nebude nás to nijak překvapovat, až v příští kapitole odvodíme, že při speciální Lorentzově transformaci je $E'_x = E_x$.)

Závislost souřadnice *x* částice na čase teď již můžeme vypočíst podobně jako v případě hyperbolického pohybu, resp. užít přímo vzorce (IV.34) s výsledkem

$$x = \frac{m_0 c^2}{qE} \cdot \sqrt{1+\left(\frac{qE}{m_0 c} t\right)^2} \ . \tag{V.42}$$

Charakter pohybu jsme již v článku IV.4. podrobně rozebrali. Nyní vidíme, že hyperbolický pohyb není jen uměle vymyšleným příkladem, neboť vystihuje pohyb nabité částice v homogenním elektrickém poli – např. v poli lineárního urychlovače.

Energii částice můžeme určit tak, že z (40) vypočteme $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$:

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{qEt}{m_0 c}\right)^2}}$$

a dosadíme do vztahu $W = m_0 c^2 \Big/ \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$:

$$W = m_0 c^2 \sqrt{1+\left(\frac{qE}{m_0 c} t\right)^2} \tag{V.43}$$

(Energii zde výjimečně značíme *W*, neboť *E* tu označuje $\left|\vec{E}\right|$.) Pro $t \to \infty$ tedy $W \to \infty$ (a samozřejmě $m \to \infty$); pro $t = 0$ (kdy $u = 0$) je $W = m_0 c^2$.

Porovnáním (42) a (43) zjistíme, že $W = qE \cdot x = F \cdot x$. To je ale přirozené, neboť (viz (42))

$$W - W\left(t=0\right) = W - m_0 c^2 = F \cdot x - m_0 c^2 = F\left(x - x\left(t=0\right)\right) \; ;$$

přírůstek energie částice je roven práci konstantní síly *F* po dráze $x - x(t = 0)$.

b) Nabitá částice v homogenním magnetickém poli

Lorentzova síla působící na částici s nábojem *q*, které se pohybuje rychlostí $\vec{u}$ v homogenním magnetickém poli o indukci $\vec{B}$, je $\vec{F} = q\vec{u} \times \vec{B}$; pohybová rovnice pro tento případ je tedy

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\vec{u}\right) = q\vec{u} \times \vec{B} \qquad \text{(V.44)}$$

Pro Lorentzovu sílu $\vec{F}$ platí v daném případě $\vec{F} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \left(\vec{u} \times \vec{B}\right) = 0$. Ze vztahů (18) a (19) pak plyne, že

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = 0$$

tj. daná Lorentzova síla na částici **nekoná práci**, takže energie částice (ani její hmotnost) se při pohybu v homogenním magnetickém poli nemění:

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \text{konst.} \qquad \text{(V.45)}$$

Pohybovou rovnici (44) můžeme tedy zjednodušit („vytknutím“ z derivace) na

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{q}{m}\vec{u} \times \vec{B} \;\check{}. \qquad \text{(V.46)}$$

Další postup už je vlastně stejný, jako v klasické mechanice. Osu z zvolíme ve směru $\vec{B} : \vec{B} = (0{,}0, B)$ a rozepíšeme (46) do složek:

$$\frac{du_x}{dt} = \frac{qB}{m}u_y \qquad \text{(a)}$$

$$\frac{du_y}{dt} = -\frac{qB}{m}u_x \qquad \text{(b)} \qquad \text{(V.47)}$$

$$\frac{du_z}{dt} = 0 \qquad \text{(c)}$$

Ze (47.c) plyne $u_z = konst.$ Více nás zajímá pohyb v rovině *xy*. K jeho určení zderivujeme (47.a) podle času a do pravé strany dosadíme (47.b). Dostaneme

$$\ddot{u}_x + \omega^2 u_x = 0 \ , \tag{V.48}$$

kde jsme označili

$$\omega = \frac{qB}{m} = \frac{qB}{m_0} \cdot \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}} \ . \tag{V.49}$$

Řešením rovnice (48) je samozřejmě

$$u_x = U \cos\left(\omega t + \phi_0\right) \ , \tag{V.50.a}$$

kde U a φ_0 jsou konstanty dané počátečními podmínkami. u_x teď můžeme dosadit do (47.a) a vyjádřit u_y:

$$u_y = -U \sin\left(\omega t + \phi_0\right) \ . \tag{V.50.b}$$

Z (50) můžeme ověřit, že

$$u^2 = u_x^2 + u_y^2 = U^2 = \text{konst.} \tag{V.51}$$

Integrací vztahů $dx/dt = u_x$ a $dy/dt = u_y$ pak z (50) získáme *x* a *y*:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{U}{\omega}\sin\left(\omega t + \phi_0\right) + x_0 = -\frac{mu}{qB}\sin\left(\omega t + \phi_0\right) + x_0 \\ y &= -\frac{U}{\omega}\cos\left(\omega t + \phi_0\right) + y_0 = -\frac{mu}{qB}\cos\left(\omega t + \phi_0\right) + y_0 \end{aligned} \tag{V.52}$$

(Při úpravě jsme užili (49) a faktu, že $U = u$. x_0 a y_0 jsou konstanty.) Vidíme, že jde o kruhový pohyb s poloměrem trajektorie

$$R = \frac{mu}{qB} = \frac{m_0 u}{qB\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}} \tag{V.53}$$

s úhlovou frekvencí danou (49). Výsledky lze aplikovat na pohyb částic v cyklotronech a dalších kruhových urychlovačích.

c) Poznámky ke vztahu relativistické a klasické dynamiky

Relativistické vztahy (49) a (53) se liší od odpovídajících klasických vztahů jen tím, že je v nich klidová hmotnost m_0 nahrazena relativistickou hmotností *m*. Totéž platí i pro vztah hybnosti ve speciální teorii relativity a newtonovské mechanice. Snadno by mohl vzniknout dojem, že záměna m_0 za m je klíčem ke změně vztahů klasické mechaniky na vztahy speciálně relativistické.

Že tomu tak není, nás samozřejmě přesvědčuje třeba vztah pro energii částice. Ovšem položíme-li otázku:

Částice o klidové hmotnosti m_0 se pohybuje rychlostí $\vec{u}$ a působí na ni síla $\vec{F}$. Jaké je její zrychlení $\vec{a}$?, můžeme se často setkat s odpovědí „Samozřejmě $\vec{F}/m$, kde $m = m_0 / \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$“. Představa, že síla je přímo úměrná hmotnosti, je v nás z klasické mechaniky silně zakořeněna a snad i spojena s představou či definicí typu „hmotnost je míra setrvačnosti částice“. Situace ovšem není tak jednoduchá.

Je-li síla **kolmá k rychlosti částice**, $\vec{F} \perp \vec{u}$, nekoná na částici práci a energie a tedy i hmotnost *m* částice se nemění, takže $\frac{d}{dt}(m\vec{u}) = m\frac{d\vec{u}}{dt} = m\vec{a}$. (Viz předchozí článek.) V tomto případě tedy opravdu $\vec{F} = m\vec{a}$.

Je-li ovšem síla **rovnoběžná s rychlostí částice**, $\vec{F} \| \vec{u}$, hmotnost částice se s časem mění (viz (43)) a nelze ji prostě z derivace $\frac{d}{dt}$ „vytknout“. Pohybovou rovnici (resp. její složku do směru rychlosti)

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \vec{F}$$

lze upravit provedením derivace na levé straně (za předpokladu $m_0 = \text{konst.}$) na

$$\frac{m_0}{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}}}\;\frac{du}{dt} = F \;,$$

vztah mezi silou a zrychlením je tedy v tomto případě

$$\tilde{m}\vec{a} = \vec{F}, \;\text{ kde }\; \tilde{m} = \frac{m_0}{\sqrt{\left(1-\frac{u^2}{c^2}\right)^3}} \;.$$

Takový je vztah mezi zrychlením a silou v lineárním urychlovači. „Mírou setrvačnosti částice“ bychom tedy v daném případě měli nazývat spíše $\tilde{m}$ než *m*. (Pozn.: Pro $\tilde{m}$ se někdy zavádí název longitudinální hmotnost a pro *m* transverzální hmotnost. My zde dál tohoto označení používat nebudeme.)

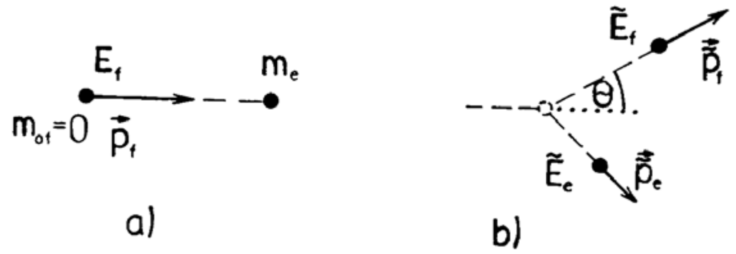
Pro **obecný směr síly** $\vec{F}$ (vzhledem k $\vec{u}$) není zrychlení rovnoběžné se silou $\vec{F}$ (!).

Čtenář si může tento výsledek odvodit sám jako užitečné cvičení; naznačují ho ostatně už předchozí dva speciální případy.

d) Pružné srážky: Comptonův jev

Za **ideálně pružnou** označíme srážku, při níž se částice, které se srážky zúčastní, nijak nezmění – speciálně **nezmění** své **klidové hmotnosti** m_{0i}.

Příkladem pružné srážky je Comptonův jev: foton s počáteční hybností $\vec{p}_f$ a energií E_f se srazí s elektronem (o klidové hmotnosti m_e), který byl před srážkou v klidu, tj. jeho hybnost byla $\vec{p}_e = 0$. Po srážce je hybnost fotonu $\tilde{\vec{p}}_f$ a energie $\tilde{E}_f$, hybnost elektronu $\tilde{\vec{p}}_e$ a jeho energie $\tilde{E}_e$; žádné další částice srážkou nevznikají. (Viz. obr.V.6.)



Obr. V.6. Comptonův jev. a) Situace před srážkou, b) Situace po srážce

Energie fotonu se srážkou změní. Odvození vztahu pro tuto změnu již čtenář zřejmě zná z atomové fyziky, a proto ho jen rychle připomeneme.

Vychází se ze zákona zachování energie a ze zákona zachování hybnosti:

$$E_f + E_e = \tilde{E}_f + \tilde{E}_e \tag{V.54}$$

$$\vec{p}_f + \vec{p}_e = \tilde{\vec{p}}_f + \tilde{\vec{p}}_e \tag{V.55}$$

Pro foton platí (viz (34)):

$$E_f = c\left|\vec{p}_f\right| \ , \quad \tilde{E}_f = c\left|\tilde{\vec{p}}_f\right| \tag{V.56}$$

a pro elektron před srážkou

$$\vec{p}_e = 0 \ , \quad E_e = m_e c^2 \tag{V.57}$$

po srážce pak obecně

$$\tilde{E}_e^2 = c^2 \tilde{p}_e^2 + m_e^2 c^4 \tag{V.58}$$

S využitím (58) lze (54) upravit na

$$E_f - \tilde{E}_f + m_e c^2 = \tilde{E}_e$$

$$\vec{p}_f - \tilde{\vec{p}}_f = \tilde{\vec{p}}_e$$

a ty pak umocněním na druhou (a využitím (58) a toho, že $\vec{p}_f \tilde{\vec{p}}_f = p_f \tilde{p}_f \cos\vartheta$ - viz obr.V.6) na

$$E_f^2 + \tilde{E}_f^2 + m_e^2 c^4 - 2E_f \tilde{E}_f + 2m_e c^2 \left(E_f - \tilde{E}_f\right) = c^2 \tilde{p}_e^2 + m_e^2 c^4 \tag{V.59}$$

$$p_f^2 + \tilde{p}_f^2 - 2 p_f \tilde{p}_f \cos\vartheta = \tilde{p}_e^2 \tag{V.60}$$

Násobením (60) c^2, odečtením těchto vztahů a dosazením (56) dostaneme

$$2E_f \tilde{E}_f \left(1-\cos\vartheta\right) - 2m_e c^2 \left(E_f - \tilde{E}_f\right) = 0$$

z čehož

$$\frac{1}{\tilde{E}_f} - \frac{1}{E_f} = \frac{E_f - \tilde{E}_f}{E_f \cdot \tilde{E}_f} = \frac{1-\cos\vartheta}{m_e c^2} = \frac{2\sin^2\frac{\vartheta}{2}}{m_e c^2} \qquad \text{(V.61)}$$

Pro fotony je $E = h\nu = hc/\lambda$, čili $1/E = \lambda / hc$. Označíme-li λ vlnovou délku fotonu před srážkou a $\tilde{\lambda}$ totéž po srážce, plyne z (61) známý výsledný vztah

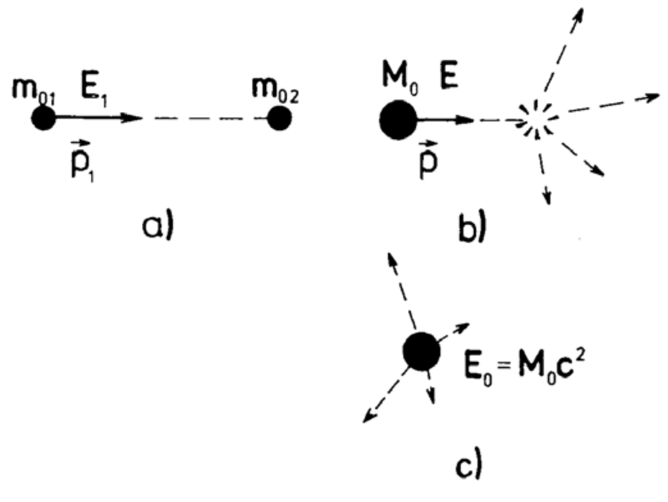
$$\tilde{\lambda} - \lambda = \frac{2h}{m_e c}\sin^2\frac{\vartheta}{2} \qquad \text{(V.62)}$$

Podobně jako $\tilde{E}_f$ lze ze známého ϑ vypočíst i energii odlétajícího elektronu a úhel mezi $\tilde{\vec{p}}_e$ a $\vec{p}_f$.

Poznamenejme ještě, že Comptonův efekt (resp. jeho experimentální ověření) je chápán jako jeden z důkazů kvantové povahy světla. Ovšem změna energie nalétávající částice s nulovou klidovou hmotností – vztah (61) – vyplývá přímo ze speciální teorie relativity a platí obecně, na kvantové teorii nijak nezávisí. (Vztah kvantové teorie jsme použili až při úpravě (61) na (62).) Experimentální ověření platnosti (62) je pak ilustrací toho, že vztahy speciální teorie relativity platí i v oblasti mikrosvěta, tj. že platnost speciální teorie relativity není omezena jen na nekvantovou fyziku.

e) Nepružné srážky: prahová energie

Uvažujme situaci, kdy se částice 1 o klidové hmotnosti m_{01}, hybnosti $\vec{p}_1$ a energii E_1 srazí se stojící částicí 2 o klidové hmotnosti m_{02}. (Viz obr.V.7.a; soustava, v níž srážku takto popisujeme, nazveme **laboratorní soustavou**.) Srážku budeme považovat za **ideálně nepružnou**, tj. vznikne jí nové těleso o klidové hmotnosti M_0, jehož hybnost bude $\vec{P}$ a energie *E*. (Viz obr.V.7.b.)



Obr. V.7. Ideálně nepružná srážka dvou částic:
a) situace před srážkou (v laboratorní soustavě)
b) situace po srážce (v laboratorní soustavě; vzniklé těleso se může rozpadat)
c) situace po srážce z hlediska soustavy, v níž vzniklé těleso stojí

K čemu je takováto modelová situace dobrá?

Ze vzniklého tělesa může rozpadem vzniknout řada jiných částic – příklady známe z fyziky elementárních částic, viz též další článek. Může vzniknout – ovšem je-li k dispozici dostatek energie.

Situace je nejnázornější z hlediska soustavy, v níž je těleso vzniklé srážkou v klidu. Viz obr.V.7.c. (V této soustavě je celková hybnost všech zúčastněných částic nulová; nazýváme ji proto **těžišťovou soustavou**.)

Mají-li rozpadem tělesa vzniknout částice 3,4,…,n, je k tomu zřejmě potřebná energie nejmenší, pokud se vzniklé částice nebudou vůbec pohybovat (jinak by se část energie „vyplýtvala“ na jejich kinetické energie). Potřebná energie je tedy dána součtem jejich klidových energií

$$\left(m_{03} + m_{04} + \ldots + m_{0n}\right)c^2$$

Jediná energie, která je v těžišťové soustavě k dispozici, je klidová energie tělesa $E_0 = M_0 c^2$.

Velikost E_0 je tedy podstatná pro určení, zda určitá reakce (vznik dalších částic…) může proběhnout nebo ne. Minimální velikosti E_0, při níž reakce proběhne, odpovídá jistá energie nalétávající částice v laboratorním systému. Tuto energii nazýváme **prahová energie reakce**.

Je ovšem $E_0 < E = E_1 + m_{02}c^2$. Proč není pro vznik reakce podstatná celková energie soustavy částic E?

Odpověď je již čtenáři asi jasná: V laboratorní soustavě nemohou být všechny vzniklé částice v klidu (hybnost se musí zachovat) a část energie E se tedy musí přeměnit v jejich kinetickou energii.

Klíčové je tedy určení klidové energie E_0 tělesa vzniklého srážkou. Problém budeme řešit v laboratorní soustavě, v níž známe parametry částic před srážkou. Vyjdeme opět ze zákona zachování hybnosti a ze zákona zachování energie:

$$\vec{p}_1 = \vec{P} \tag{V.63}$$

$$E_1 + m_{02}c^2 = E \tag{V.64}$$

Umocněním (64) na druhou a využitím (34) dostaneme

$$E_1^2 + 2m_{02}c^2E_1 + m_{02}^2c^4 \;=\; E^2 \;=\; P^2c^2 + M_0^2c^4$$

z čehož dále

$$m_{01}^2c^4 + p_1^2c^2 + 2m_{02}c^2E_1 + m_{02}^2c^4 \;=\; P^2c^2 + M_0^2c^4 \tag{V.65}$$

Z (63) ovšem plyne $p_1^2c^2 = P^2c^2$. (65) tedy po úpravě dá

$$E_0 \;=\; M_0c^2 \;=\; \sqrt{m_{01}^2c^4 + m_{02}^2c^4 + 2m_{02}c^2E_1} \tag{V.66}$$

(Pozn.: Tentýž výsledek bychom dostali ze vztahu $M_0 = M \cdot \sqrt{1-U^2/c^2}$, kdy U je rychlost vzniklého tělesa, $U = \dfrac{P}{M}$ a M je jeho hmotnost $\left(E/c^2\right)$, pro niž platí $M = m_1 + m_2$, kde $m_1 = E_1/c^2$ a $m_2 = m_{20}$. Zkuste si jako užitečné cvičení i tento způsob odvození (66).)

Získaný vztah (66) by bylo možno dále upravovat. Lze např. vyjádřit E_1 pomocí kinetické energie 1. částice, vypočíst rychlost 1. částice u_1 nezbytnou k tomu, aby E_0 dosáhla dané hodnoty (velmi lehce lze vyjádřit $\gamma(u_1) = 1/\sqrt{1-u_1^2/c^2}$) atd. Zde se omezíme na případ, kdy energie E_1 nalétávající částice je podstatně větší, než klidová energie obou částic:

$$E_1 >> m_{01}c^2\ , \quad E_1 >> m_{02}c^2\ .$$

Pak lze v (66) zanedbat pod odmocninou všechny členy kromě posledního a

$$E_0 \doteq \sqrt{2}\sqrt{m_{02}c^2}\sqrt{E_1} \tag{V.67}$$

Tento vztah jasně ukazuje nedostatek společný všem urychlovačům, v nichž se proudem částic ostřeluje nehybný terčík: Má-li se energie využitelná pro vznik nových částic či obecně reakce elementárních částic zvýšit 2x, je třeba energii nalétávajících částic zvýšit 4x. Proto jsou tak výhodné urychlovače s tzv. **vstřícnými svazky**, v nichž se urychlují dva svazky částic o téže klidové hmotnosti a nakonec se vyšlou proti sobě. Rychlosti (i hybnosti) částic jsou pak co do velikosti stejné ovšem opačného směru; těžišťová soustava tedy splývá s laboratorní a pro další reakce se využije vždy celé energie obou nalétávajících částic, tj. je zde

$$E_0 = E_1 + E_2 = 2E_1$$

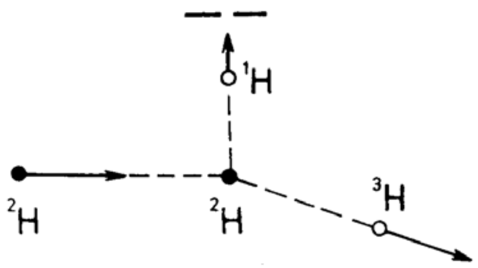
V.6. Experimentální ověření a aplikace relativistické dynamiky

K ověření relativistické dynamiky je možné podotknout totéž, co k ověřování kinematiky: jednotlivé efekty jsou vzájemně propojeny. Například měřením rychlosti elektronů urychlených daným elektrickým polem ověřujeme relativistickou pohybovou rovnici, ale tím současně i závislost hmotnosti na rychlosti. Zároveň tím vlastně ověřujeme i závislost energie na rychlosti a souvislost hmotnosti a energie (viz (43) a následující diskusi). Ověřováním Comptonova jevu potvrzujeme výsledek, který závisí na platnosti jak zákonů zachování energie a hybnosti, tak relativistického vztahu mezi energií, hybností a klidovou hmotností částice.

Relativistickou dynamiku lze v pravém slova smyslu označit za prověřenou nejen několika experimenty, ale i rozsáhlou praxí. Snad nejpřesvědčivějším argumentem v její prospěch je existence velkých **urychlovačů částic** a to, že fungují tak, jak byly vyprojektovány podle výpočtů vycházejících z relativistické dynamiky. Relativistické efekty zde přitom zdaleka nejsou nějakými opravami k newtonovským vztahům: faktor $\gamma = 1/\sqrt{1-u^2/c^2}$ je často >>1. Největší současný urychlovač (LHC) produkoval protony s energií řádu 3500 GeV; přitom klidová energie protonu ne zhruba 1 GeV, takže $\gamma \approx 3500$. U elektronů činí dosahovaná energie asi 30 GeV a $E_0 \doteq 0.5\,\mathrm{MeV}$, takže γ dosahuje až $6 \cdot 10^4$(!!!). Kdyby vztahy relativistické dynamiky byly nesprávné, urychlovače by prostě nefungovaly, nevylétla by z nich ani jediná částice s požadovanou energií…

Vztahy relativistické dynamiky se s úspěchem používají i při rozboru srážek urychlených částic s částicemi terčíku, při interpretaci produktů srážky atd. V obrovském množství experimentů každoročně prováděných ve fyzice elementárních částic nebylo zjištěno, že by tyto vztahy byly narušeny.

Pro ilustraci můžeme uvést experiment, při němž dochází ke srážce dvou deuteronů (jader deuteria, ${}^{2}\mathrm{H}$). Jeden deuteron před srážkou stál, druhý se pohyboval se známou kinetickou energií. Srážkou vzniká proton (jádro vodíku, ${}^{1}\mathrm{H}$) a jádra tritia. Reakce může dát i jiné produkty, ale pro experiment byl zajímavý právě tento případ. V experimentu byla měřena energie těch protonů, které při dané reakci odlétaly kolmo na směr přilétávajících deuteronů. (Viz obr.V.8; v experimentu samozřejmě dopadá svazek deuteronů na terčík z deuteria.)



Obr.V.8. Reakce ${}^{2}\mathrm{H}+{}^{2}\mathrm{H}\to{}^{1}\mathrm{H}+{}^{3}\mathrm{H}$

Ze změřených kinetických energií ${}^{2}\mathrm{H}$ a ${}^{1}\mathrm{H}$ a ze známých klidových hmotností ${}^{2}\mathrm{H}$ a ${}^{1}\mathrm{H}$ (změřených hmotovým spektrometrem) lze na základě zákonů zachování energie a hybnosti a vztahu mezi energií, hybností a m_0 určit klidovou hmotnost vzniklého jádra tritia. Z experimentu vychází (při vyjádření hmotnosti v atomových hmotnostních jednotkách):

$$m_{0\ {}^{3}\mathrm{H}(\text{výpoč})} = \left(3,016056 \pm 1,5\cdot 10^{-5}\right)\ m_{\mathrm{u}}\ .$$

Klidovou hmotnost jádra tritia lze ovšem nezávisle určit hmotovou spektroskopií. Ta dává

$$m_{0\ {}^{3}\mathrm{H}(\text{změř})} = \left(3,0160494 \pm 7\cdot 10^{-7}\right) m_{\mathrm{u}}\ .$$

Obě veličiny se shodují s přesností lepší než 10^{-5}.

Ekvivalence hmotnosti a energie je základem pro určení vazebné energie jader z jejich hmotnostního defektu. Narušení tohoto vztahu nebylo zjištěno při žádném z proměřovaných $\alpha-$ či $\beta-$ rozpadů ani při žádné ze zkoumaných jaderných reakcí. Jeho platnost byla potvrzena i při anihilaci elektron-pozitronových párů nebo samovolném rozpadu mezonu π^{0} na dva fotony záření gama a naopak i při kreaci částic z gama záření.

Jaké aplikace má relativistická dynamika?

Řada z nich již byla výše zmíněna. Ve **fyzice elementárních částic** (resp. poněkud přesněji: ve fyzice vysokých energií) jsou to nejen výpočty pohybu částic v urychlovačích, ale zejména zcela samozřejmé využití při vyhodnocování a interpretaci naměřených dat.

Pro **jadernou fyziku** má význam především vztah $\Delta E = \Delta mc^2$; z hmotnostního defektu jader lze pak vypočíst energii, která se může uvolnit při různých jaderných reakcích. Speciální teorie relativity ovšem neříká nic o tom, zda ta či ona reakce může skutečně probíhat a s jakou pravděpodobností. („Ve hře" jsou i jiné zákony než jen zákon zachování energie.) Proto by bylo přehnané označovat třeba atomovou bombu za důsledek teorie relativity, i když v některých populárních líčeních se to téměř takto předkládá.

V **astrofyzice** se relativistická dynamika uplatňuje jednak nepřímo přes jadernou fyziku (stabilita nuklidů) a jednak přímo v astrofyzice vysokých energií. Ta se týká nejen „trysků" (jetů) u tak exotických objektů jako jsou kvasary (v nichž se rychlost vymršťované látky blíží rychlosti světla), ale i třeba kosmických paprsků. Vždyť v kosmických paprscích byly zjištěny částice s energiemi až 10^{20} eV (tj. řádově 10 J)!

Dosti negativní „aplikační výhled" nabízí relativistická dynamika perspektivě mezihvězdných letů, tak oblíbených ve sci-fi. Při těchto letech by se rychlost rakety musela blížit rychlosti světla. Energie, kterou by bylo třeba raketě dodat, aby se urychlila na tuto rychlost, by pak ovšem byla srovnatelná nebo vyšší než její klidová energie. Při raketě o hmotnosti pouhých 10^3 kg by to přestavovalo 10^{20} J. Navíc by bylo třeba urychlit i palivo, nutné na brzdění u cíle cesty, nemluvě o návratu. Aby bylo možno létat skutečně daleko, bylo by třeba $\gamma >> 1$; pak se ovšem potřebná energie ještě násobí. I v případě hypotetické fotonové rakety by byl poměr hmotnosti paliva a užitečného nákladu neúnosný. (Viz též dodatek H.) A to se nezmiňujeme o tom, jakou energii by v soustavě rakety měly částice mezihvězdné látky (a s jakou by narážely do její přídě)… Daleké mezihvězdné lety na rychlých fotonových raketách tedy zřejmě zůstanou v oblasti fantazie.