

VI. Elektrodynamika a optika

Neexistuje žádná zvláštní „relativistická elektrodynamika“. Maxwellovy rovnice ve speciální teorii relativity nemusíme nijak měnit, splňují speciální princip relativity. Podrobněji si to ukážeme v prvních dvou částech této kapitoly. Půjde však o části trochu „techničtější“, takže je můžete, zejména při prvním seznamování s STR přeskočit.

V dalších dvou částech kapitoly se podíváme na tři zajímavé optické jevy a jejich rozbor z hlediska speciální teorie relativity: Dopplerův jev, fakt, že při pozorování pohybující se tyče ji nemusíme vidět zkrácenou, a také na zdánlivé nadsvětelné rychlosti kvazarů.

VI.1. Invariance Maxwellových rovnic

Elektrodynamiku, na rozdíl od klasické mechaniky, není nutno upravovat, aby vyhovovala speciální teorii relativity. Již před vznikem speciální relativity byl nalezen tvar transformací prostorových souřadnic a času, vůči nimž jsou Maxwellovy rovnice invariantní – a jsou to transformace Lorentzovy! Mělo se ovšem za to, že jde o čistě formální záležitost; za skutečné transformace mezi souřadnicemi inerciálních systémů byly „samozřejmě“ považovány Galileiho transformace. Vůči nim ovšem Maxwellovy rovnice invariantní nejsou – proto to hledání éteru, soustavy, v níž tyto rovnice platí.

Teprve speciální teorie relativity přinesla přirozený pohled na situaci:

Maxwellovy rovnice ve vakuu mají stejný tvar ve všech inerciálních systémech.
(To znamená, že platí stejně ve všech inerciálních systémech.)

Nesmíme si ovšem představovat, že Maxwellovy rovnice

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \vec{j} \\ \operatorname{div} \vec{D} &= \rho \\ \operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= 0 \\ \operatorname{div} \vec{B} &= 0\end{aligned}\tag{VI.1}$$

přepíšeme z inerciální soustavy S do S' jen tak, že uvážíme transformace prostorových souřadnic x, y, z a času t . Elektrická intenzita, magnetická indukce atd. se musí také transformovat, rozhodně obecně neplatí $\vec{E}' = \vec{E}$. Ostatně čtenář si možná už sám vzpomněl, že ve vodiči pohybujícím se rychlostí \vec{v} (při $|\vec{v}| \ll c$) je intenzita elektrického pole

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\tag{VI.2}$$

⚡ Jak odvodit transformace veličin elektromagnetického pole obecně?

Nejprve si uvědomíme, že pro pole ve vakuu (a jen takovými se budeme dále zabývat) platí $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$, $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, kde ε_0 a μ_0 jsou permitivita a permeabilita vakua; přitom platí

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}.\tag{VI.3}$$

Elektromagnetické pole ve vakuu lze tedy charakterizovat jen dvěma veličinami, např. \vec{E} a \vec{B} , a Maxwellovy rovnice (1) lze přepsat do tvaru obsahujícího jen je:

$$\text{rot } \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \mu_0 \vec{j} \quad (\text{VI.4.a})$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (\text{VI.4.b})$$

$$\text{rot } \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 \quad (\text{VI.4.c})$$

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (\text{VI.4.d})$$

Zkusme tyto rovnice přepsat ze soustavy S (v níž jsou nyní zapsány) do soustavy S' pohybující se vůči S ve směru osy x rychlostí v (tak jako tomu bylo výše). Nejprve přepíšeme derivace $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ a $\frac{\partial}{\partial t}$ ve (4) pomocí derivací $\frac{\partial}{\partial x'}$, $\frac{\partial}{\partial y'}$, $\frac{\partial}{\partial z'}$ a $\frac{\partial}{\partial t'}$. Pro libovolnou funkci f prostorových a časové souřadnice, tedy $f = f(x', y', z', t')$ platí

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial x'}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x'} - \frac{v}{c^2} \frac{\partial f}{\partial t'} \right) \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial y'}{\partial y} \frac{\partial f}{\partial y'} = \frac{\partial f}{\partial y'} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial z'}{\partial z} \frac{\partial f}{\partial z'} = \frac{\partial f}{\partial z'} \\ \frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial x'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial x'} + \frac{\partial t'}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial t'} = \gamma \left(\frac{\partial f}{\partial t'} - v \frac{\partial f}{\partial x'} \right) \end{aligned} \quad (\text{VI.5})$$

Kromě pravidla o derivování složené funkce jsme zde využili Lorentzových transformací

$$\begin{aligned} x' &= \gamma (x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma \left(t - \frac{v}{c^2} x \right) \end{aligned} ,$$

kde
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} .$$

Druhou sérii Maxwellových rovnic (4.c,d) lze s využitím (5) přepsat ve složkách na tvar:

$$\begin{aligned}
 0 &= \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} + \frac{\partial B_x}{\partial t} = \frac{\partial E_z}{\partial y'} - \frac{\partial E_y}{\partial z'} + \gamma \frac{\partial B_x}{\partial t'} - \gamma v \frac{\partial B_x}{\partial x'}, \\
 0 &= \frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial t} = \frac{\partial E_x}{\partial z'} - \gamma \frac{\partial E_z}{\partial x'} + \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_z}{\partial t'} + \gamma \frac{\partial B_y}{\partial t'} - \gamma v \frac{\partial B_y}{\partial x'}, \\
 0 &= \frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial t} = \gamma \frac{\partial E_y}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial E_y}{\partial t'} - \frac{\partial E_y}{\partial y'} + \gamma \frac{\partial B_z}{\partial t'} - \gamma v \frac{\partial B_z}{\partial x'}, \\
 0 &= \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = \gamma \frac{\partial B_x}{\partial x'} - \gamma \frac{v}{c^2} \frac{\partial B_x}{\partial t'} + \frac{\partial B_y}{\partial y'} + \frac{\partial B_z}{\partial z'}.
 \end{aligned} \tag{VI.6}$$

Pro další postup potřebujeme ovšem vztahy mezi \vec{E}, \vec{B} a \vec{E}', \vec{B}' . Zkusme tvar těchto vztahů **uhádnout**. Víme, že pro malé rychlosti platí (2), tj. $E'_x = E_x, E'_y = E_y - vB_z, E'_z = E_z + vB_y$. (Je $\vec{v} = (v, 0, 0)$.) Nejjednodušším zobecněním, které nás může napadnout, je

$$E'_x = \tilde{k} E_x \tag{VI.7.a}$$

$$E'_y = k(E_y - v \cdot B_z) \tag{VI.7.b}$$

$$E'_z = k(E_z + v \cdot B_y) \tag{VI.7.c}$$

kde \tilde{k} a k jsou konstanty, které mohou záviset na velikosti v . (Díky izotropii prostoru je v (7.b) a (7.c) stejná konstanta, ve směru osy x se ovšem děje pohyb a proto můžeme předpokládat, že může být $\tilde{k} \neq k$.)

Inverzní transformaci k (7) získáme podle principu relativity změnou znaménka v . (S se pohybuje vůči S' rychlostí $(-v, 0, 0)$.) Je tedy

$$E_x = \tilde{k} E'_x \tag{VI.8.a}$$

$$E_y = k(E'_y + v \cdot B'_z) \tag{VI.8.b}$$

$$E_z = k(E'_z - v \cdot B'_y) \tag{VI.8.c}$$

Kombinací (7.a) a (8.a) získáme $\tilde{k}^2 = 1$ a tedy $\tilde{k} = 1$. ($\tilde{k} = -1$ nedává smysl.) Dosazením (7.c) do (8.c) a úpravou můžeme vypočítat

$$B'_y = k \left(B_y + \frac{1}{v} \left(1 - \frac{1}{k^2} \right) E_z \right) \tag{VI.9}$$

a ze (7.b) a (8.b) podobně vyjádřit B'_z .

Zde nastoupí další odhad: pro $v \rightarrow 0$ musí na pravé straně (9) vymizet člen obsahující E_z . Nejjednodušší je tedy předpokládat, že transformace by měla mít tvar

$$B'_y = k(B_y + K \cdot v \cdot E_z) \tag{VI.10}$$

Porovnáním (9) a (10) a úpravou dostaneme

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - Kv^2}}.$$

Tedy nás již nemůže napadnout nic jiného, než že $K = 1/c^2$ a

$$k = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \gamma.$$

Jestliže navíc v analogii se (7.a) odhadneme, že $B'_x = B_x$, **uhádnli** jsme již (resp. napůl uhádnli, napůl odvodili) všechny transformační vztahy:

$$\begin{aligned} E'_x &= E_x, & B'_x &= B_x \\ E'_y &= \gamma(E_y - v \cdot B_z), & B'_y &= \gamma\left(B_y + \frac{v}{c^2} E_z\right) \\ E'_z &= \gamma(E_z + v \cdot B_y), & B'_z &= \gamma\left(B_z - \frac{v}{c^2} E_y\right) \end{aligned} \quad (\text{VI.11})$$

Inverzní transformace se od (11) samozřejmě liší jen záměnou čárkovaných a nečárkovaných veličin a změnou znaménka u v :

$$\begin{aligned} E_x &= E'_x, & B_x &= B'_x \\ E_y &= \gamma(E'_y + v \cdot B'_z), & B_y &= \gamma\left(B'_y - \frac{v}{c^2} E'_z\right) \\ E_z &= \gamma(E'_z - v \cdot B'_y), & B_z &= \gamma\left(B'_z + \frac{v}{c^2} E'_y\right) \end{aligned} \quad (\text{VI.12})$$

Dosažením těchto vztahů do (6) získáme

$$\gamma \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right) - v \gamma \operatorname{div}' \vec{B}' = 0 \quad (\text{VI.13.a})$$

$$\frac{\partial E'_x}{\partial z'} - \frac{\partial E'_z}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial t'} = 0 \quad (\text{VI.13.b})$$

$$\frac{\partial E'_y}{\partial x'} - \frac{\partial E'_x}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial t'} = 0 \quad (\text{VI.13.c})$$

$$-\gamma \frac{v}{c^2} \left(\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} \right) + \gamma (\operatorname{div}' \vec{B}') = 0, \quad (\text{VI.13.d})$$

kde

$$\operatorname{div}' \vec{B}' = \frac{\partial B'_x}{\partial x'} + \frac{\partial B'_y}{\partial y'} + \frac{\partial B'_z}{\partial z'}. \quad (\text{VI.14})$$

Kombinací (13.a) a (13.d) dostaneme $\operatorname{div}' \vec{B}' = 0$ a

$$\frac{\partial E'_z}{\partial y'} - \frac{\partial E'_y}{\partial z'} + \frac{\partial B'_x}{\partial t'} = 0;$$

spolu s (13.b) a (13.c) to znamená, že

$$\begin{aligned} \operatorname{rot}' \vec{E}' + \frac{\partial \vec{B}'}{\partial t'} &= 0, \\ \operatorname{div}' \vec{B}' &= 0. \end{aligned}$$

(Symbolika rot' je analogická (14).)

Získané vztahy představují druhou sérii Maxwellových rovnic, zapsanou v soustavě S' ; tvar rovnic je přitom stejný jako v S (viz (4.c,d)). To nás utvrzuje v přesvědčení, že (11) jsou správnými transformačními vztahy pro \vec{E} a \vec{B} .

Podobně jako druhou sérii lze do S' přepsat i první sérii Maxwellových rovnic (4.a,b). Příslušné úpravy zde již detailně provádět nebudeme a necháváme je na čtenáři, neboť jde o úpravu sice zdlouhavou, ale přímočarou. Výsledkem úprav je zjištění, že i první série Maxwellových rovnic je invariantní vůči Lorentzově transformaci za předpokladu, že platí transformace (11) a že \vec{j} a ρ se transformují podle vztahů

$$\begin{aligned} j'_x &= \gamma(j_x - v\rho) \\ j'_y &= j_y \\ j'_z &= j_z \\ \rho' &= \gamma\left(\rho - \frac{v}{c^2} j_x\right) \end{aligned} \tag{VI.15}$$

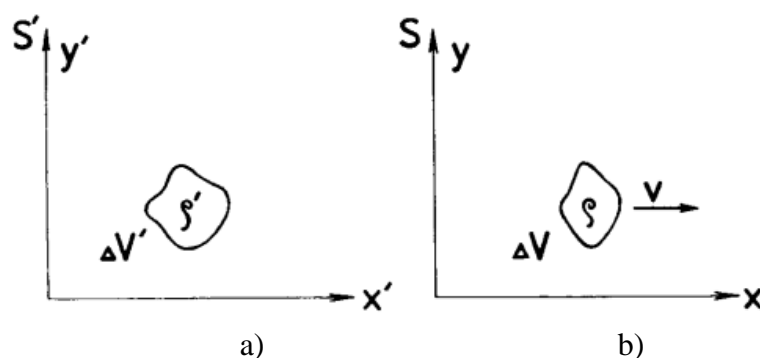
Všimněte si, jak se vztahy (15) podobají Lorentzově transformaci souřadnic! I to nás přesvědčuje o jejich správnosti.

Nyní už máme celý obraz pohromadě. Maxwellovy rovnice jsou invariantní vůči Lorentzově transformaci; \vec{E} a \vec{B} se přitom transformují podle (11) a hustota proudu a náboje podle vztahů (15).

Pozn.: Invarianci rovnic jsme ověřili vůči speciální Lorentzově transformaci. Vůči otočením a posunům soustav souřadnic jsou ovšem Maxwellovy rovnice také invariantní – jak plyne už z jejich vektorového zápisu – takže jsou invariantní i vůči obecné Lorentzově transformaci.

Poznamenejme ještě, že „uhádnutí“, která jsme dělali při odvozování (11) se teď staly pouhými pomůckami; **ověřili** jsme již, že právě (11) jsou „správné“ transformace \vec{E} a \vec{B} , tj. ty transformace, které **při přechodu od S k S' ponechávají Maxwellovy rovnice invariantní**.

Všimněme si ještě jednoho důsledku transformace hustot náboje a proudu. Uvažujme náboj, který je v soustavě S' rovnoměrně rozložen (s hustotou ρ') v objemu $\Delta V'$ a který je v S' **v klidu**. Viz obr.VI.1.a. Je tedy $\vec{j}' = 0$. Označíme $\rho' = \rho_{klid.}$, $\Delta V' = \Delta V_{klid.}$.



Obr.VI.1. Hustota náboje a objem v soustavách S' a S .

V soustavě S se tento rozložený náboj pohybuje, viz obr. VI.1.b. Z transformací inverzních k (15):

$$j_x = \gamma(j'_x + v\rho'), \quad (\text{VI.16.a})$$

$$j_y = j'_y, \quad j_z = j'_z, \quad (\text{VI.16.b,c})$$

$$\rho = \gamma\left(\rho' + \frac{v}{c^2}j'_x\right), \quad (\text{VI.16.d})$$

plyne (ze (16.d)), že hustota náboje v soustavě S je

$$\rho = \gamma\rho' = \frac{\rho_{klid.}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}. \quad (\text{VI.17})$$

Objem ΔV , který náboj zaujímá v soustavě S , se ovšem rovněž liší od $\Delta V'$. Díky kontrakci délek je totiž jeho délka ve směru osy x zkrácena (oproti délce v S') v poměru $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Rozměry v kolmých směrech (tj. ve směrech os y a z) se nemění. Je tedy

$$\Delta V = \Delta V_{klid.} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{VI.18})$$

(Vztah (18)) je nejnázornější, uvažujeme-li objem ve tvaru kvádrů; pak je $\Delta V' = \Delta x' \cdot \Delta y' \cdot \Delta z'$, analogicky ΔV a $\Delta x = \Delta x' \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$.)

Celkový náboj v dané oblasti je v soustavě S' : $Q' = \rho' \cdot \Delta V' = \rho_{klid.} \cdot \Delta V_{klid.}$ a v soustavě S :

$$Q = \rho \Delta V = \frac{\rho_{klid.}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \cdot \Delta V_{klid.} \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = \rho_{klid.} \cdot \Delta V_{klid.} = Q'$$

Soustava S ovšem mohla být libovolná. Vidíme, že

náboj daného tělesa je stejný ve všech inerciálních soustavách; tj.
náboj je invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Nyní už bychom uměli transformovat i sílu, působící na daný náboj pohybující se rychlostí \vec{u} v elektromagnetickém poli, tj. **Lorentzovu sílu**

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{u} \times \vec{B}) \quad (\text{VI.19})$$

Znamenalo by to transformovat \vec{E}, \vec{B} a \vec{u} . Přímochárým, ale poněkud zdlouhavým výpočtem bychom mohli ověřit, že se síla (19) skutečně transformuje tak, jak se ve speciální relativitě transformovat má, tj. podle (V.28). Tím bychom jednak potvrdili, že skutečně existuje síla, která se takto transformuje, a jednak se ujistili, že vztah (19) je správným relativistickým vztahem pro sílu působící na náboj.

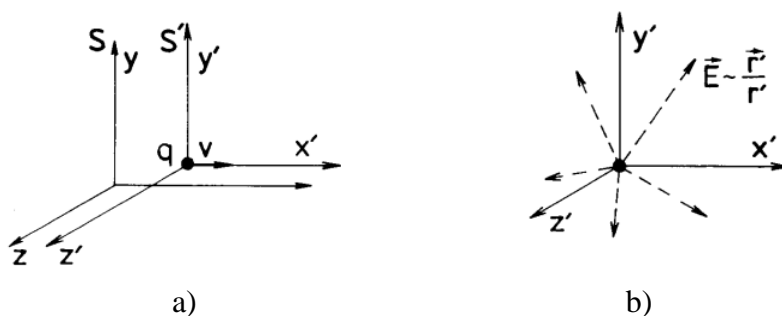
Obecně vidíme, že všechny potřebné vztahy umíme odvodit, resp. ověřit jejich konzistenci. Potřebné výpočty jsou ovšem zdlouhavé a mohou nám připadat těžkopádné. Čtenář, který má tento pocit, se může těšit na kapitulu VIII. Tam poznáme formalismus, který většinu práce „udělá za nás“ a vztahy elektrodynamiky v něm nabydou jednoduchou a přirozenou podobu.

VI.2. Příklady elektromagnetických polí

a) Pole rovnoměrně se pohybujícího náboje

Uvažujme náboj q pohybující se ve vakuu v systému S podél osy x konstantní rychlostí v . Jaké bude elektromagnetické pole buzené tímto nábojem?

Speciální teorie relativity nabízí pro řešení tohoto problému jednoduchou a přirozenou metodu. S nábojem spojíme inerciální systém S' (viz obr.VI.2.a).



Obr.VI.2. K nalezení pole rovnoměrně se pohybujícího náboje

V systému S' jde tedy o („normální“) elektrostatické pole stojícího bodového náboje:

$$\vec{E}' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r'^2} \frac{\vec{r}'}{r'}, \quad \vec{B} = 0$$

(viz obr.VI.2.b), kde

$$r' = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2}. \quad (\text{VI.20})$$

Ve složkách je

$$E'_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E'_y = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3}, \quad E'_z = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3}. \quad (\text{VI.21})$$

Složky \vec{E} a \vec{B} v systému S získáme z (21) transformací (12):

$$E_x = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x'}{r'^3}, \quad E_y = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y'}{r'^3}, \quad E_z = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z'}{r'^3}, \quad (\text{VI.22.a})$$

$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{v}{c^2} E_z, \quad B_z = \frac{v}{c^2} E_y. \quad (\text{VI.22.b})$$

Vztahy (22.b) můžeme vyjádřit vektorovým zápisem

$$\vec{B} = \frac{1}{c^2} \vec{v} \times \vec{E} \quad (\text{VI.23})$$

Ve vyjádření složek intenzity \vec{E} (22.a) ovšem ještě musíme vyjádřit x', y', z' pomocí x, y, z a t , tj. užít Lorentzovy transformace $x' = \gamma(x - vt)$, $y' = y$, $z' = z$. Je pak

$$E_x = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{x - vt}{r'^3}, \quad E_y = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{y}{r'^3}, \quad E_z = \gamma \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{r'^3}, \quad (\text{VI.24})$$

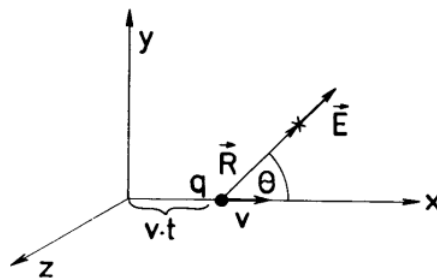
kde

$$r'^2 = \gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2 \quad (\text{VI.25})$$

Vztahy (24) můžeme vyjádřit vektorově, zavedeme-li vektor

$$\vec{R} = (x - vt, y, z)$$

spojující místo, kde je náboj v daném čase t , s místem, v němž určujeme intenzitu (viz obr.VI.3). Označíme-li $R = |\vec{R}|$ a úhel ϑ podle obr.VI.3, je úpravou (25)



Obr.VI.3. K vektorovému vyjádření pole pohybujícího se náboje

$$r'^2 = \gamma^2 R^2 \cos^2 \vartheta + R^2 \sin^2 \vartheta = \gamma^2 \left[R^2 \cos^2 \vartheta + \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) R^2 \sin^2 \vartheta \right] = \gamma^2 R^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right).$$

Po dosazení $\gamma^2 = 1/(1 - v^2/c^2)$ lze pak (24) zapsat vztahem

$$\vec{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{R}}{R^3} \frac{1 - \frac{v^2}{c^2}}{\left(1 - \frac{v^2}{c^2} \sin^2 \vartheta\right)^{\frac{3}{2}}}. \quad (\text{VI.26})$$

Elektrická intenzita má tedy radiální směr (vzhledem k okamžité poloze náboje); velikost intenzity je největší v rovině kolmé k rychlosti náboje ($\sin \vartheta = 1$) a nejmenší ve směru rychlosti ($\vartheta = 0$ a π). Pro názornost lze zhruba říci, že se „pole posouvá spolu s nábojem“.

Směr elektrické intenzity by bylo možno názorně vystihnout pohybující se soustavou siločar. Je třeba si ovšem uvědomit, že pole v soustavě S není elektrostatické a platnost obvyklých

názorných představ je omezená. Lze např. definovat (pohybující se) soustavu ekvipotenciálních ploch, ovšem tyto plochy **nejsou** kolmé k siločárám.

⚡ Dokážete odpovědět proč?

(Vysvětlení je přirozené: **neplatí** $\vec{E} = -\text{grad}\varphi$. Proč? Protože $\vec{E} = -\text{grad}\varphi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$ a vektorový potenciál \vec{A} se musí měnit s časem, neboť $\vec{B} = \text{rot}\vec{A}$ se také mění s časem – viz (23) a (26).)

Nesmíme rovněž považovat za zcela samozřejmě, že elektrické pole pohybujícího se náboje je vždy radiální. Taková představa by možná mohla vzniknout – ovšem žádné podobné obecné pravidlo neexistuje. Kdybychom v nějakém okamžiku náboj zastavili, ovlivnilo by to v čase t elektromagnetické pole maximálně do vzdálenosti $c(t - \tilde{t})$; rychleji se rozruch šířit nemůže. Ve vzdálenějších oblastech bude pole dosud takové, jako by se náboj dále pohyboval rovnoměrně. Elektrická intenzita pak samozřejmě míří jinam než do bodu, kde se náboj skutečně nachází,

b) Pole nekonečného přímého vodiče s proudem

Přímý nekonečně dlouhý vodič stojící v inerciálním systému S (ve vakuu) je protékán proudem I . Osa x systému S splývá s osou vodiče. Magnetické pole v S určíme známými metodami – nejjednodušší je využít symetrie úlohy a zákona celkového proudu. Magnetická indukce je

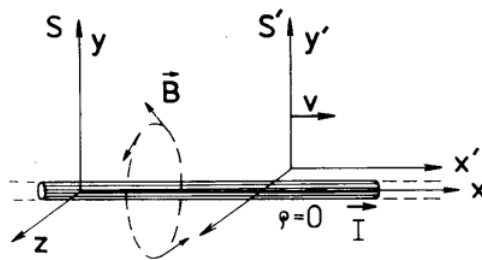
$$B_x = 0, \quad B_y = -\frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{z}{R^2}, \quad B_z = \frac{I\mu_0}{2\pi} \frac{y}{R^2}, \quad (\text{VI.27})$$

kde

$$R^2 = y^2 + z^2.$$

Intenzita elektrického pole by měla směřovat osy x ; má-li vodič nulový odpor, bude $\vec{E} = 0$. Tento případ budeme uvažovat dále.

Jaké bude elektromagnetické pole v soustavě S' , pohybující se ve směru osy x rychlostí v ? (Viz obr.VI.4.)



Obr.VI.4. Pole přímého vodiče s proudem

Složky \vec{E}' a \vec{B}' určíme z transformačních vztahů (11). Nebude nás zajímat ani tak \vec{B}' (která se liší od (27) jen o faktor γ), ale \vec{E}' . Zavedeme-li vektor kolmý k ose x'

$$\vec{R}' = (0, y', z'); \quad \text{je } R' = R,$$

lze \vec{E}' (jehož složky jsme získali z (11) po dosazení (27)) vyjádřit vektorově jako

$$\vec{E}' = -\frac{\gamma v I}{2\pi\epsilon_0 c^2 R'} \frac{\vec{R}'}{R'} \quad (\text{VI.28})$$

Uvažujme náboj q stojící v soustavě S' ve vzdálenosti R' od vodiče. Pole na něj působí silou $\vec{F}' = q\vec{E}'$; pro $q > 0$ a $I > 0$ je tento náboj přitahován k vodiči (viz (28)). Pomocí transformačních vztahů pro sílu (V.28) lze spočítat sílu \vec{F} , působící na tento náboj v soustavě S . (V daném případě vyjde $\vec{F} = \vec{F}'/\gamma$.) V soustavě S je ovšem $\vec{E} = 0$. Jaká je „podstata síly \vec{F} “?

V S se náboj pohybuje rychlostí $\vec{v} = (v, 0, 0)$ a existuje tam magnetické pole o indukci \vec{B} . Z hlediska soustavy S je tedy \vec{F} silou, již na pohybující se náboj působí magnetické pole. (Čtenář sám může ověřit, že $\vec{F} = q\vec{v} \times \vec{B}$.) Efekt, který v S působí magnetické pole, je z hlediska S' dán elektrickým polem.

Pozn.: Proto se někdy tvrdí, že magnetismus je vlastně relativistickým efektem: Např. přitahování dvou rovnoběžných vodičů protékáných proudy v opačných směrech lze vysvětlit coulombickým přitahováním nábojů ve vhodně zvolené soustavě S' . Kdyby se žáci seznamovali dostatečně podrobně s teorií relativity dříve, než s magnetickým polem stacionárního proudu a jeho účinky, bylo by snad možno podobnou argumentaci využít. Ovšem objasňovat od začátku jevy známé z běžné praxe pomocí relativistických efektů (nad nimiž je většinou přece jen třeba se více zamyslet) je dosti diskutabilní. Běžný fenomenologický výklad magnetických jevů sice nemá tak senzační příděch jako relativistická argumentace, ale je zřejmě pro většinu žáků schůdnější. K otázce vztahu elektromagnetismu a relativity lze konstatovat, že speciální teorie relativity jasně ukázala, jak jsou elektrické a magnetické jevy neoddelitelně spojeny, takže je vhodnější mluvit o jevech elektromagnetických a o (jediném) elektromagnetickém poli. Jejich oddělení je možné jen ve speciálních případech, i to jen z hlediska vhodně vybraných soustav souřadnic. Je například pravda, že **pole, které by se řídilo jen zákony elektrostatiky nemůže v přírodě existovat** – odporovalo by principu relativity, neboť zákony elektrostatiky nejsou invariantní vůči Lorentzově transformaci.

Vraťme se ještě k elektrickému poli (28) v soustavě S' . Z hlediska této soustavy musí být dané pole buzeno elektrickým nábojem. Ten se nemůže nalézt nikde jinde než na vodiči (jinde je vakuum, ostatně úvahu můžeme potvrdit pomocí Gaussovy věty). **Z hlediska soustavy S' je tedy vodič nabitý.** To je ostatně v souladu se vztahy (15) pro transformaci hustoty náboje a proudu. Je-li průřez vodiče Σ , je $I = j_x \Sigma$ a délková hustota náboje v S' je $\eta' = \rho' \cdot \Sigma$. V S je $\rho = 0$. Z (15) pak plyne

$$\eta' = -\frac{\gamma v}{c^2} I \quad (\text{VI.29})$$

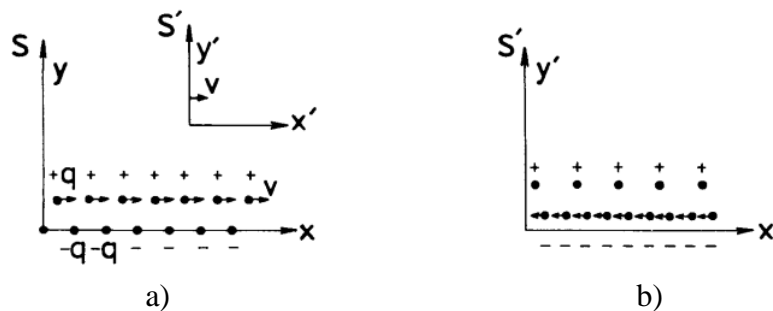
a čtenář se může výpočtem přesvědčit, že tato hustota náboje skutečně generuje pole s intenzitou \vec{E}' .

Až potud je vše v pořádku. Hlubavějšího čtenáře však možná neuspokojuje znalost formálních vztahů (15). Může ho napadnout „základní“ otázka:

Odkud se vlastně v S' „vezme“ náboj (nutný pro splnění (29))?

Naštěstí lze situaci objasnit pomocí názorného modelu; zde to ale uděláme jen v jednoduchém případě a pouze kvalitativně. Proud znamená pohyb elektrických nábojů. Uvažujme v systému S řadu kladných nábojů q pohybujících se podél osy x rychlostí v . Vzdálenosti nábojů jsou stejné, označme je l . Ve stejných rozestupech l jsou na ose x rozmístěny náboje $-q$, viz obr.VI.5.a. Systém S' necháme pohybovat stejnou rychlostí v (v tom je ta jednoduchost).

Jak vypadá situace z hlediska systému S' ? Náboje $+q$ jsou nyní v klidu; ovšem jejich rozestupy jsou $l'_+ > l$ (V S jsou rozestupy menší než l'_+ díky kontrakci délek.) Naopak náboje $-q$ se pohybují a jejich rozestupy jsou díky kontrakci délek zkráceny na $l'_- = l\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} < l$, jak to ukazuje obr. VI.5.b. Výsledkem je délková hustota náboje $\eta' < 0$.



Obr.VI.5. K transformaci hustoty náboje a proudu

Podrobnějším výpočtem jde spočítat hustotu náboje i v obecném případě.

c) Poznámky k invariantům elektromagnetického pole

Přímým dosazením transformačních vztahů (11) se lze přesvědčit, že výrazy

$$\frac{E^2}{c^2} - B^2 \quad \text{a} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} \quad (\text{VI.30})$$

nemění svou velikost při Lorentzově transformaci (tj. $E'^2/c^2 - B'^2 = E^2/c^2 - B^2$ a $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = \vec{E} \cdot \vec{B}$).

Nazýváme je proto **invarianty magnetického pole**.

Pomocí invariantů (30) můžeme jednoduše prokázat, že čistě elektrické nebo čistě magnetické pole je jen velmi speciálním případem obecného elektromagnetického pole. Jde nám zde o to, zda pro **zadané** elektromagnetické pole existuje soustava S' , v níž je pole **čistě elektrické** (nebo čistě magnetické). (Např. pole $\vec{E} = (0, E, 0)$, $\vec{B} = (0, 0, E/(2c))$ je čistě elektrické v soustavě S' pohybující se vzhledem k S rychlostí $c/2$).

V případě, že existuje soustava S' , v níž $\vec{B}' = 0$, je v ní $\vec{E}' \cdot \vec{B}' = 0$ a $E'^2/c^2 - B'^2 > 0$. Protože jde o invarianty, musí být v **libovolné soustavě S**

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad E^2/c^2 - B^2 > 0.$$

Pro pole, které je v nějaké soustavě S' **čistě magnetické**, musí být podobně v libovolné soustavě

$$\vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad \text{a} \quad E^2/c^2 - B^2 < 0.$$

Obecné elektromagnetické pole, pro něž je $\vec{E} \cdot \vec{B} \neq 0$, tedy **nelze** Lorentzovou transformací převést na pole čistě elektrické nebo čistě magnetické.

d) Rovinné elektromagnetické vlny

Elektrická intenzita a magnetická indukce lineárně polarizované, monochromatické rovinné vlny šířící se ve vakuu ve směru jednotkového vektoru \vec{n} jsou jak známo dány vztahy

$$\vec{E} = \vec{E}_0 \cdot \cos \left[\omega \left(t - \frac{\vec{n} \cdot \vec{r}}{c} \right) \right], \quad (\text{VI.31.a})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{c} \vec{n} \times \vec{E}, \quad (\text{VI.31.b})$$

kde
$$\vec{E}_0 \perp \vec{n}, \quad \text{tj. } \vec{E}_0 \cdot \vec{n} = 0, \quad (\text{VI.32})$$

$|\vec{E}_0|$ je amplituda elektrické intenzity, ω úhlová frekvence vlny, $\vec{r} = (x, y, z)$ a případné fázové posunutí v (31.a) neuvažujeme, resp. volbou okamžiku $t = 0$ dosáhneme toho, že je nulové.

Snadno můžeme ověřit, že pro monochromatickou rovinnou vlnu jsou oba výše zmíněné invarianty rovny nule:

$$E^2/c^2 - B^2 = 0 \quad \text{a} \quad \vec{E} \cdot \vec{B} = 0 \quad (\text{VI.33})$$

(Neplatí ovšem, že vždy, když jsou splněny vztahy (33), jde o rovinnou vlnu; vzájemně kolmá homogenní pole – elektrické a magnetické – mohou dát stejný výsledek.)

Hustota energie elektromagnetického pole ve vakuu je obecně

$$w = \frac{1}{2} \left(\varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{\mu_0} B^2 \right) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 (E^2 + c^2 B^2);$$

v monochromatické rovinné vlně tedy díky (33)

$$w = \varepsilon_0 E^2 \quad (\text{VI.34})$$

Hustota hybnosti elektromagnetického pole ve vakuu je obecně

$$\vec{g} = \vec{D} \times \vec{B} = \varepsilon_0 \vec{E} \times \vec{B},$$

v monochromatické rovinné vlně (kde platí (31.b)) tedy po úpravě (s využitím (32) a (34))

$$\vec{g} = \frac{\varepsilon_0}{c} \vec{E} \times (\vec{n} \times \vec{E}) = \frac{1}{c} \varepsilon_0 E^2 \vec{n} = \frac{w}{c} \vec{n}. \quad (\text{VI.35})$$

V určitém zadaném objemu V má tedy rovinná vlna energii

$$W = \int_V w dV \quad (\text{VI.36})$$

a hybnost

$$\vec{p} = \int_V \vec{g} dV = \frac{1}{c} \vec{n} \int_V w dV = \frac{W}{c} \vec{n}, \quad (\text{VI.37})$$

kde jsme využili (35) a (36). energii jsme zde výjimečně značili W , neboť symbol E v této kapitole užíváme k označení velikosti elektrické intenzity.

Vidíme, že pro velikost hybnosti (části monochromatické rovinné vlny) platí

$$p = \frac{W}{c}. \quad (\text{VI.38})$$

Čtenář si pravděpodobně již uvědomil, že vztah (38) platí pro částice s $m_0 = 0$, tedy i pro fotony. Zde jsme k němu dospěli na základě klasické (tj. nekvantové) teorie elektromagnetického pole. Neznamená to sice, že by z teorie elektromagnetického pole vyplývalo, že fotony musí existovat – výsledek (38) je ale s představou o jejich existenci plně konzistentní.

Poznamenejme ještě, že ze vztahu (38) resp. (37) lze vyjít při odvozování vztahu mezi hmotností a energií ($\Delta W = \Delta mc^2$). Takový byl i Einsteinův postup v jeho práci z r. 1905.

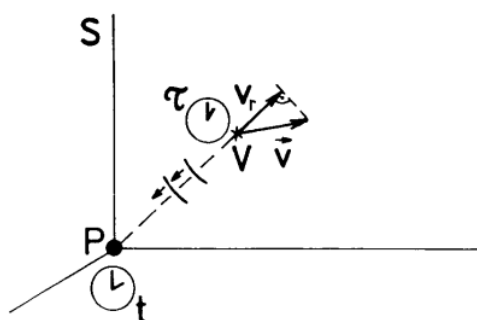
Čtenář možná nyní očekává, že začneme na rovinnou vlnu aplikovat Lorentzovy transformace. Jistě bychom to mohli udělat a získat hodnoty $\omega', \vec{n}', \vec{E}', \vec{B}', w', \vec{g}'$ a též W', \vec{p}' v jiné inerciální soustavě S' . Postup by byl vcelku přímočarý. Výsledkem by byl vztah pro Dopplerův jev (který v následujícím článku odvodíme jiným způsobem), potvrzení vztahu pro aberaci světla (IV.7) a obecných vztahů pro transformaci energie a hybnosti ((V.33) – je jistě užitečné ověřit, že platí nejen pro částice). Výpočty však již ponecháme čtenáři, zejména tomu, který se o věc hlouběji zajímá, jako užitečné cvičení.

Pozn.: Jediný problém, který by mu mohl zkomplikovat situaci, je určení objemu V , který v soustavě S' odpovídá objemu V' , přes nějž se integruje v (36) a (37). Nelze jednoduše užít např. kontrakce délek: má-li skutečně jít o část vlny, je objem V unášen spolu s vlnou a jeho transformace je složitější. Dá se ukázat, že daný objem se transformuje stejně jako vlnová délka; názorně si to lze rozmyslet na příkladu vlny, šířící se ve směru osy x .

VI.3. Dopplerův jev

Tón píšťaly lokomotivy slyšíme vyšší, když se lokomotiva přibližuje, než když se vzdaluje. Podobnými – nebo modernějšími – příklady objasňujeme žákům Dopplerův jev. Jak tomu bude v případě, kdy místo zvuku půjde o světlo, resp. obecně o elektromagnetické záření?

Uvažujme vysílač V monochromatického záření – např. laser na raketě pohybující se vůči dané inerciální soustavě S rychlostí \vec{v} . Frekvence zdroje záření v soustavě S' , v níž je V v klidu, nechť je ν_V . (V našem případě je to frekvence laseru měřená na raketě.) V soustavě S stojí pozorovatel (přijímač) P a záření přijímá a měří jeho frekvenci. Viz obr.VI.6.



Obr.VI.6. K odvození Dopplerova jevu

⚡ Jakou frekvenci ν_P pozorovatel naměří?

Místo s frekvencí je názornější pracovat s periodami. Uvažujme dva následující „hřebeny“ vlny 1 a 2, šířící se od vysílače k přijímači. První hřeben vyslal vysílač v čase t_{v1} , druhý v čase

$$t_{v2} = t_{v1} + \Delta t_v. \quad (\text{VI.39})$$

V okamžiku vyslání prvního hřebenu vlny byla vzdálenost vysílače a přijímače rovna l . První hřeben byl tedy P přijat v čase

$$t_{p1} = t_{v1} + \frac{l}{c}. \quad (\text{VI.40})$$

(Předpokládáme, že se signál šíří ve vakuu.) Než je vyslán druhý hřeben, vysílač se ale od přijímače vzdálí o $v_r \Delta t_v$, kde v_r je radiální rychlost vysílače (průmět v do spojnice PV : $v_r = v \cos \vartheta$, viz obr.VI.6.). Druhý hřeben tedy dorazí k P v čase

$$t_{p2} = t_{v2} + \frac{l + v_r \Delta t_v}{c} = t_{v1} + \Delta t_v + \frac{l}{c} + \frac{v_r}{c} \Delta t_v. \quad (\text{VI.41})$$

Rozdíl $\Delta t_p = t_{p2} - t_{p1}$ je periodou přijatého záření. Odečtením (40) od (41) získáme

$$\Delta t_p = \Delta t_v \left(1 + \frac{v_r}{c} \right). \quad (\text{VI.42})$$

Ovšem Δt_v **není** perioda záření měřená v soustavě spojené se zdrojem. (V našem příkladu: perioda měřená hodinami na raketě.) Hodiny pohybující se rychlostí v spolu s vysílačem se zpožďují. Zatímco v soustavě S uplyne čas Δt_v , uplyne na hodinách spojených s V pouze

$$\Delta \tau = \Delta t_v \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}. \quad (\text{VI.43})$$

Uvědomme si ještě jednou: Δt_v je doba mezi vysláním dvou hřebenů vlny měřená v soustavě spojené s pozorovatelem, $\Delta \tau$ doba mezi vysláním měřená v soustavě spojené s vysílačem; Δt_p je doba mezi přijetím těchto hřebenů měřená pozorovatelem P . Kombinací (42) a (43) získáme pro periody záření

$$\Delta t_p = \frac{1 + \frac{v_r}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \Delta \tau. \quad (\text{VI.44})$$

Pro pozorovatele platí, že frekvence přijatého záření je

$$\nu_p = \frac{1}{\Delta t_p}.$$

V soustavě, v níž je zdroj v klidu, je frekvence vyslaného záření

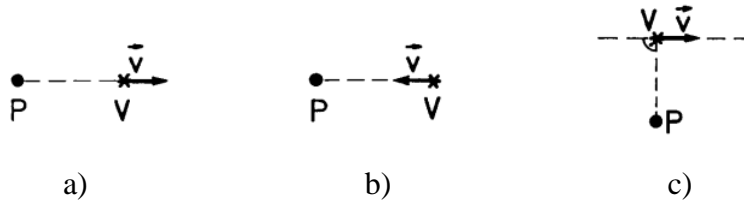
$$\nu_v = \frac{1}{\Delta \tau}.$$

Kombinací těchto vztahů dostaneme konečný výsledek

$$\nu_p = \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 + \frac{v_r}{c}} \nu_v. \quad (\text{VI.45})$$

Speciálně pro **zdroj**, který se od přijímače **vzdaluje radiálně rychlostí v** (viz obr.VI.7.a) $v_r = v$ a (45) lze upravit na

$$v_P = \sqrt{\frac{1 - \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}}} v_V. \quad (\text{VI.46})$$



Obr.VI.7. Speciální případy pohybu zdroje vůči pozorovateli

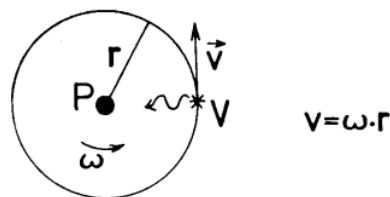
Naopak v případě zdroje **přibližujícího se radiálně rychlostí v** (viz obr.VI.7.b) je

$$v_P = \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} v_V \quad (\text{VI.47})$$

Pokud se zdroj pohybuje **kolmo** na spojnici s pozorovatelem (obr.VI.7.c), je

$$v_P = \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} v_V; \quad (\text{VI.48})$$

v tomto případě mluvíme o tzv. **transverzálním** (tj. příčném) **Dopplerově jevu**. Jedná se o čistě relativistický efekt (daný dilatací času), který nemá klasickou obdobu. Experimentálně je možno jej ověřovat tak, že se zdroj záření umístí na obvodu rotujícího kotouče a přijímač do jeho středu – viz obr.VI.8. Přitom zároveň ověřujeme skutečnost, že **Dopplerův jev nezávisí na zrychlení zdroje**. Experimenty provedené s γ -zářením, při nichž zdroj i přijímač využívaly Mössbauerova jevu (při němž lze dosáhnout velice úzkých spektrálních čar a tím velmi přesného měření změn frekvence), potvrdily platnost vztahu (48) s přesností 1,5%.

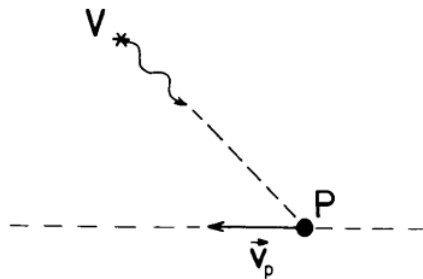


Obr.VI.8. Experimentální ověření transverzálního Dopplerova jevu

Dosud jsme Dopplerův jev popisovali v soustavě spojené s přijímačem P . Lze ovšem uvažovat i situaci, kdy zdroj V je v klidu a přijímač se pohybuje rychlostí v_p .

Jaká bude frekvence ν_p přijímaného záření v tomto případě?

První myšlenkou, která nás napadne, by mihlo být: „Vztah (45) asi platí i nyní, stačí změnit znaménko \vec{v} , což nezmění $\sqrt{1-v^2/c^2}$, ale změní jmenovatele na $1-v_r/c$.“ Tato úvaha je ale příliš zjednodušená. Co to je radiální rychlost zdroje v_r ? (Viz obr.VI.6.) Je to průmět rychlosti zdroje \vec{v} do směru světelného paprsku šířícího se od V k P – v soustavě S spojené s pozorovatelem. V případě, kdy se bude pohybovat pozorovatel (a zdroj bude v klidu), bude jeho radiální rychlost vzhledem ke zdroji v_{pr} průmětem jeho rychlosti $\vec{v}_p (= -\vec{v})$ do směru paprsku šířícího se od V k P – ovšem v soustavě spojené se zdrojem! Ale **směry paprsku v různých soustavách jsou různé**. Proto **není** $v_{pr} = -v_r$; úvaha zmíněná na začátku odstavce je tedy nesprávná, neboť nebere v úvahu aberaci světla. Názorným příkladem může být situace znázorněná na obr.VI.7.c: V soustavě spojené se zdrojem vypadá tak, jak ji ukazuje obr.VI.9.



Obr.VI.9. K Dopplerovu jevu z hlediska soustavy spojené se zdrojem

Vztah (45) mezi ν_p a ν_V bychom samozřejmě mohli vyjádřit pomocí veličin v soustavě spojené se zdrojem (s tím, že bychom aberaci světla vzali v úvahu). Jednodušší je však odvodit jej od začátku postupem zcela analogickým výše uvedenému odvození vztahu (45).

Čtenář by si rozhodně měl toto odvození sám podrobně provést; jen tak se přesvědčí, že odvození Dopplerova jevu skutečně rozumí. Výsledek je

$$\nu_p = \frac{1 - \frac{v_{pr}}{c}}{\sqrt{1 - \frac{v_p^2}{c^2}}} \nu_V \quad (\text{VI.49})$$

Pozn.: Častou chybou je nesprávně určená vzdálenost, o níž se pozorovatel vzdálí od zdroje mezi přijetím prvního a druhého „hřebenu“ vlny. Správně je samozřejmě $v_{pr} \cdot \Delta t_p$ (nikoli $v_{pr} \cdot \Delta t_V$). Rovněž je třeba si uvědomit, že dilatace času se nyní týká pozorovatele. Je $\nu_p = 1/\Delta\tau_p$, kde $\Delta\tau_p$ je doba mezi přijetím 1. a 2. hřebenu vlny měřená hodinami spojenými s pozorovatelem. Doba mezi přijetím hřebenu v soustavě spojené se zdrojem je Δt_p .

Pro radiální vzdalování či přibližování pozorovatele dostaneme z (49) stejné vztahy (46) a (47) jako z (45). (Uvědomte si proč.) Pro pozorovatele pohybujícího se kolmo ke směru paprsku ($v_{pr} = 0$) je ale $\nu_p = \nu_V / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, což se liší od (48).

(Zdůvodněte, proč je tomu tak a nakreslete si danou situaci z hlediska soustav spojených s V a P .)

Závěrem již jen několik slov k aplikaci Dopplerova jevu. Uplatní se samozřejmě při záření částic v urychlovačích a v astrofyzice při záření látky pohybující se vysokými rychlostmi. Příkladem jsou proudy hmoty tryskající z centrálních oblastí kvazarů.

Při $|v| \ll c$ dostaneme z výše uvedených vztahů vztahy pro klasický Dopplerův jev, který se využívá v mnoha aplikačních oblastech. Zde se ovšem neuplatňují speciálně relativistické efekty.

Žákům bychom mohli důsledky Dopplerova jevu přiblížit i atraktivními příklady ze sci-fi. Lze třeba uvažovat o tom, jak by viděli světlo hvězd kosmonauti z rakety letící (vůči hvězdám) rychlostí blízkou rychlosti světla. Frekvence světla hvězd ležících ve směru letu by se zvýšila podle vztahu (47) a při dostatečně vysoké rychlosti by se v soustavě rakety už nejednalo o viditelné světlo, ale o rentgenové (resp. gama) záření. To mimochodem ukazuje, že fotonová raketa pro dálkové mezihvězdné lety by s sebou musela nést značně účinné – a tedy i značně hmotné – stínění, aby se předešlo ozáření kosmonautů. Kosmonaut, který by vystoupil na povrch rakety, by byl tímto rentgenovým zářením „prosvícen“ (podobně jako při rentgenování u lékaře). Zářením, které projde jeho tělem, by bylo možno exponovat fotografickou desku a získat tak obrázek jeho kostry. Není to však nutné – v soustavě spojené s hvězdami není prošlé záření rentgenové, ale viditelné. Pozorovatel, dívající se za raketou, by tedy kostru „prosvíceného“ kosmonauta viděl na vlastní oči. Naproti tomu pozorovatel, který by pozoroval přibližující se raketu, by byl v postavení značně nevýhodnějším: záření odražené od rakety vpřed by mělo v soustavě hvězd díky Dopplerovu jevu frekvenci ještě vyšší a na zmíněného pozorovatele by dopadalo vysoce energetické záření gama.

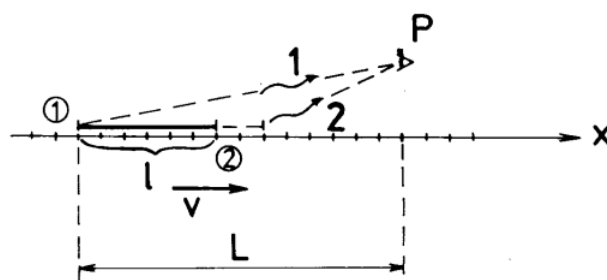
VI.4. Optický vzhled pohybujících se objektů

Ve IV. kapitole jsme odvodili kontrakci délek pohybujících se těles. Kontrakce se ovšem týká délky, kterou pozorovatelé **naměří**. Jinou otázkou je, **jak dlouhé budou pozorovatelé těleso vidět**.

V tomto případě totiž hraje roli i doba šíření světla od různých částí tělesa k pozorovateli.

a) Pozorování pohybující se tyče

Výše zmíněný problém budeme ilustrovat na jednoduchém příkladu. Uvažujme tyč pohybující se v soustavě S podél osy x rychlostí v . Viz obr.VI.10.



Obr.VI.10. Pozorování pohybující se tyče

Klidová délka tyče, tj. délka měřená v soustavě, v níž tyč stojí, je l_0 . Pozorovatel P pozoruje tyč z místa blízkého ose x – tak blízkého, že jeho vzdálenost od osy x zanedbáme a paprsky spojující konce tyče s pozorovatelem budeme považovat za rovnoběžné s osou x . Celá „scéna“ je rovnoměrně a dlouhodobě osvětlena.

Jak dlouhou pozorovatel tyč uvidí?

Samozřejmě ji uvidí zkrácenou díky perspektivě a faktu, že tyč svírá se spojnicí tyč-pozorovatel velmi malý úhel. Tento efekt nás však nyní nebude zajímat. Můžeme si např. představit, že na ose x je narysováno měřítko a pozorovatel srovnává pozorovanou délku tyče s tímto měřítkem. Perspektivní zkreslení a zkreslení dané natočením tyče tím odpadnou.

Uvažujme dva světelné signály: jeden vyslaný začátkem tyče (v čase t_{v_1}) a druhý koncem tyče (v čase t_{v_2}). Má-li pozorovatel **vidět** tyto signály jako současnou (tj. **současně viděnou**) polohu začátku a konce tyče, musí k němu oba signály **přiletět současně**:

$$t_{p_1} = t_{p_2} \quad (\text{VI.50})$$

|| Toto je v dané úvaze klíčové a čtenář by si to měl dobře promyslet.

Vzdálenost **začátku** tyče od pozorovatele v okamžiku t_{v_1} označíme L (viz obr.VI.10). Je tedy

$$t_{p_1} = t_{v_1} + \frac{L}{c}. \quad (\text{VI.51})$$

Vzdálenost **konce** tyče od pozorovatele v okamžiku t_{v_2} je

$$L - l - v(t_{v_2} - t_{v_1}), \quad (\text{VI.52})$$

neboť tyč se mezitím posouvá rychlostí v ; l je délka tyče v soustavě S . Je tedy

$$t_{p_2} = t_{v_2} + \frac{1}{c}[L - l - v(t_{v_2} - t_{v_1})]. \quad (\text{VI.53})$$

Porovnáním (51) a (53) (díky platnosti podmínky (50)) dostáváme po úpravě

$$t_{v_2} - t_{v_1} = \frac{l}{c - v}. \quad (\text{VI.54})$$

Délka tyče, kterou pozorovatel skutečně uvidí (srovnáním s měřítkem na ose x), je

$$l_{poz.} = l + v(t_{v_2} - t_{v_1}); \quad (\text{VI.55})$$

viz (52) – do $l_{poz.}$ se takto započítá i posunutí tyče od okamžiku, kdy byl vyslán signál 1 ze začátku tyče, do okamžiku vyslání signálu 2 z konce tyče. Dosazením (54) do (55) získáme

$$l_{poz.} = \frac{l}{1 - \frac{v}{c}}$$

a uvážením kontrakce délek $l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$ konečně

$$l_{poz.} = l_0 \frac{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}{1 - \frac{v}{c}} = l_0 \sqrt{\frac{1 + \frac{v}{c}}{1 - \frac{v}{c}}} > l_0 \quad (\text{VI.56})$$

|| Při **přibližování tyče** ji tedy pozorovatel **vidí** ne zkrácenou, ale **prodlouženou**.

Délku pozorovanou při vzdalování tyče bychom mohli odvodit analogicky, ale vlastně to není třeba: ve výše uvedeném odvození jsme nikde nepředpokládali $v > 0$. $v < 0$ tedy odpovídá vzdalování tyče; resp. pro vzdalování tyče rychlostí v stačí ve vztahu (56) zaměnit v za $-v$.

Z upraveného vztahu je pak zřejmé, že vzdalující se tyč vidí pozorovatel zkrácenou více, než odpovídá kontrakci délek.

Při větší vzdálenosti pozorovatele od osy x by byla situace složitější. Obecně lze pro pozorování pohybujících se těles odvodit zajímavé výsledky. Lze např. dokázat, že pohybující se koule uvidí pozorovatel vždy opět jako koule. Nikdy ji neuvidí zploštělou jako elipsoid, jako bychom mohli naivně očekávat na základě kontrakce délek.

Zde do dalších podrobností nebudeme zacházet. Problém pozorování pohybujících se předmětů jsme zde uvedli hlavně proto, abychom si uvědomili, že ve výkladu např. kontrakce délek nebo při ilustraci teorie relativity pomocí myšlenkových pokusů bychom se neměli nechat unést a tvrdit, že ten či onen pozorovatel **vidí** to či ono zkráceně, když jde jen o měření délek.

Za určitých podmínek samozřejmě můžeme pozorovat i kontrakci danou faktorem $\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$. Je

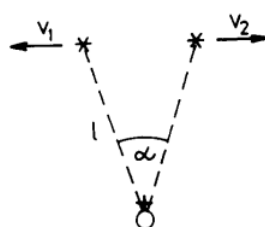
to např. při pozorování tyče kolmo na směr jejího pohybu. Bylo by též možno tyč znázorněnou na obr.VI.10. neosvětlovat dlouhodobě, ale jen zábleskem ve tvaru rovinné vlny, jejíž vlnoplochy by byly rovnoběžné s osou x ; takto „nasvícená“ tyč by se fotografovala fotoaparát, jehož závěrka by byla dlouhodobě otevřená. Tyto a další možnosti si již čtenář může rozmyslet sám. Navíc si může promyslet ještě jednu situaci: místo tyče bude pozorovatel pozorovat přibližující se (nebo vzdalující se) hodiny. Jakou rychlost jejich chodu uvidí?

b) Zdánlivé nadsvětelné rychlosti kvazarů

Konečná rychlost šíření světla se při pozorování rychle se pohybujících objektů může projevit i jinak: při naivní interpretaci pozorování se někdy zdá, že se objekty pohybují rychlostí vyšší než c .

Příkladem je zřejmě pozorování některých kvazarů. Kvazary jsou vzdálené kosmické objekty, v nichž podle všeho dochází k uvolňování ohromných energií a pohybu proudů látky vysokou rychlostí (blíží se c). Části těchto proudů můžeme rozlišit při pozorování pomocí radioteleskopů. Zhruba můžeme říci, že v radiovém oboru spektra vidíme, že kvazary se skládají typicky z několika navzájem se pohybujících částí. Vzájemnou úhlovou rychlost těchto částí umí dnes radioastronomie měřit velmi přesně. Označíme-li vzájemnou úhlovou rychlost dvou částí ω a známe-li vzdálenost l od Země ke kvazaru, zdá se být jednoduché určit jejich vzájemnou rychlost ve směru kolmém ke spojnici kvazar-Země:

$$v_{\perp} = l\omega.$$



Obr.VI.11. „Naivní“ pohled na vzdalování částí kvazaru

Z obr.VI.11 znázorňujícího situaci je zřejmé, že v_{\perp} by mohlo dosáhnout až hodnot blízkých se $2c$ (pokud jsou v_1 i v_2 blízké c). Na tom není nic „protirelativistického“, neboť v_{\perp} **není** rychlost nějakého objektu či signálu v některé inerciální soustavě. Rychlost jedné části kvazaru v soustavě spojené s druhou částí kvazaru je **nížší** než c . (Získáme ji relativistickým

složení rychlostí v_1 a v_2 .) Ovšem asi u deseti kvazarů byly naměřeny takové úhlové rychlosti ω , pro něž

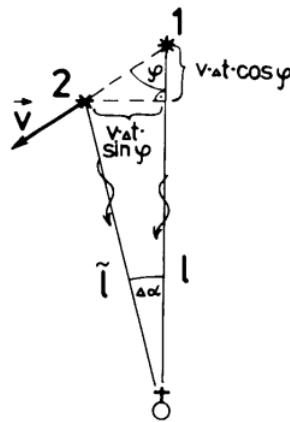
$$l \cdot \omega > 2c. \quad (\text{VI.57})$$

Hodnoty $l\omega$ dosahují až $10c$!

≡≡≡ Nevyvrací zmíněná pozorování speciální teorii relativity?

Nevyvrací. Možných vysvětlení je dokonce několik, za nejrealističtější se však pokládá model, jehož princip si dále stručně načrtneme. Čtenáře přitom možná překvapí, že k vysvětlení nebudeme vůbec potřebovat teorii relativity – postačí kinematika na úrovni prvního ročníku střední školy.

Uvažujme situaci znázorněnou na obr.VI.12. První zdroj je v klidu (v dané inerciální soustavě spojené se zemí resp. se Sluncem) a 2. zdroj se pohybuje rychlostí \vec{v} , která svírá se spojnicí kvazar-Země úhel φ . Tento zdroj se tedy přibližuje k Zemi.



Obr.VI.12. Model vysvětlující zdánlivé nadsvětelné rychlosti kvazarů

Nechť v čase t_{v1} polohy obou zdrojů splývaly. Světlo (radiové záření) vyslané zdrojem 1 v tomto okamžiku dorazí k Zemi v čase

$$t_{p1} = t_{v1} + \frac{l}{c}, \quad (\text{VI.58})$$

kde l je vzdálenost 1. zdroje od Země (viz obr.VI.12). Za čas Δt_v se zdroj posune ve směru \vec{v} o $v \cdot \Delta t_v$. Světlo, které v tomto okamžiku

$$t_{v2} = t_{v1} + \Delta t_v$$

vyšle k Zemi, k ní dorazí v čase

$$t_{p2} = t_{v2} + \frac{\tilde{l}}{c} = t_{v1} + \Delta t_v + \frac{\tilde{l}}{c}. \quad (\text{VI.59})$$

Vzdálenosti kvazarů jsou ohromné, takže $l \gg v \cdot \Delta t_v$. V tomto případě lze vzdálenost \tilde{l} vypočítat se zanedbatelnou chybou jako

$$\tilde{l} = l - v \cdot \Delta t_v \cos \varphi, \quad (\text{VI.60})$$

jak si může čtenář sám odvodit. (Např. z kosinové věty: $\tilde{l}^2 = l^2 + (v\Delta t_v)^2 - 2lv\Delta t_v \cos \varphi \doteq (l - v\Delta t_v \cos \varphi)^2$.)

Směr, v němž na Zemi pozorujeme druhý zdroj, se změnil o úhel α . Z obr.VI.12 lze odvodit, že

$$\Delta\alpha \doteq \sin \Delta\alpha = \frac{v\Delta t_V \sin \varphi}{\tilde{l}} \doteq \frac{v\Delta t_V \sin \varphi}{l}. \quad (\text{VI.61})$$

(Je $|\Delta\alpha| \ll 1$.) Pro pozorovatele na Zemi se směr takto potočí za dobu

$$\Delta t_P = t_{P2} - t_{P1} = \Delta t_V + \frac{\tilde{l} - l}{c},$$

kde jsme již využili (58) a (59). Po dosazení (60) dostaneme

$$\Delta t_P = \Delta t_V - \frac{v\Delta t_V \cos \phi}{c} = \Delta t_V \left(1 - \frac{v}{c} \cos \phi \right). \quad (\text{VI.62})$$

Úhlová rychlost ω , s jakou se otáčí směr, v němž vidíme zdroj, je dána poměrem (61) a (62):

$$\omega = \frac{\Delta\alpha}{\Delta t_P} = \frac{1}{l} \cdot \frac{v \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi},$$

takže

$$l \cdot \omega = c \cdot \frac{\frac{v}{c} \sin \varphi}{1 - \frac{v}{c} \cos \phi}. \quad (\text{VI.63})$$

Pro v dostatečně blízké c může být pro vhodné φ třeba i $l\omega > 10c$. Zlomek na pravé straně (63) má (jak si může čtenář snadno ověřit pro dané v/c) maximální hodnotu při $\cos \phi = v/c$; tato hodnota je $\frac{v}{c\sqrt{1-v^2/c^2}}$.

Pro v dostatečně blízké c může tedy $l\omega/c$ nabýt libovolně velké zadané hodnoty. Zdánlivá rychlost, kterou by pozorovatel na základě naivní interpretace zdroji přisoudil, tedy může být libovolně velká; skutečná rychlost zdroje je vždy nižší než rychlost světla.