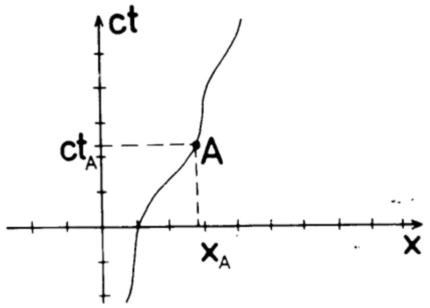
# VII. Minkowského prostoročas

## VII.1. Prostoročasové diagramy

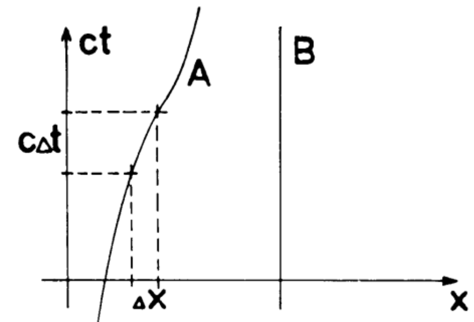
Již ze střední školy umíme vyjadřovat závislost polohy částice (hmotného bodu, tělesa…) na čase také graficky. Čas jsme zvyklí nanášet na vodorovnou osu, souřadnici $x$ na svislou. Z tvaru grafu $x = x(t)$ poznáme, zda jde o pohyb rovnoměrný nebo nerovnoměrný, můžeme odečíst rychlost částice atd.

Podobné diagramy jsou dobrou názornou pomůckou i ve speciální teorii relativity. Zde je ovšem zvykem orientovat časovou osu svisle a prostorovou ($x$-ovou) osu vodorovně. Na svislou osu se přitom většinou nanáší ne přímo hodnoty času $t$, ale součinu $c \cdot t$. (Na vodorovnou i svislou osu se tedy vynáší hodnoty v metrech.) Pohyb částice podél osy $x$ lze v tomto diagramu znázornit stejně dobře jako v grafech známých ze školy – viz obr.VII.1, na němž je znázorněn nerovnoměrný pohyb částice. Pro podobné diagramy se v teorii relativity vžilo pojmenování **prostoročasový diagram**.




Obr.VII.1. Prostoročasový diagram. (Jestliže dílek na ose $x$ znamená délku 1 metr, představuje dílek na svislé ose časový interval $1/\left(3 \cdot 10^8\right)$ sekundy.)

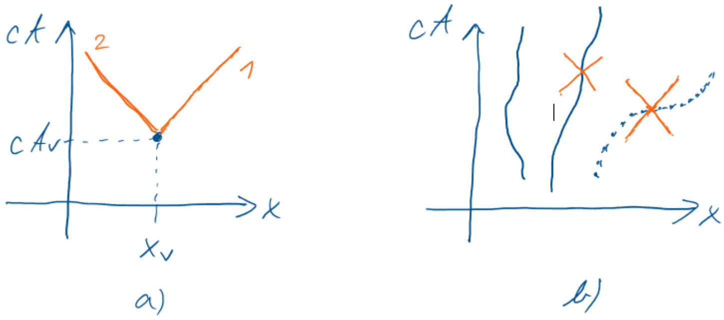
Polohu částice v daném okamžiku lze z diagramu přímo odečíst, jak je z obr.VII.1 zřejmé. Rychlost částice je dána sklonem křivky v daném bodě – viz obr.VII.2.




Obr.VII.2. Znázornění pohybu částic v prostoročasovém diagramu a souvislost sklonu křivky s rychlostí částice $\left(u_x / c = \Delta x / (c \cdot \Delta t)\right)$. Částice A se pohybuje s proměnnou rychlostí $u_x$, částice B v dané soustavě souřadnic stojí (pokud je též $y = konst.$ a $z = konst.$).

Sklon křivky $\pm 45°$ od svislé osy odpovídá rychlosti světla. (Pohyb světelných signálů vyslaných podél osy $x$ v čase $t_V$ z místa o souřadnici $x_V$ je dán vztahem $x = x_V \pm c(t - t_V)$; (viz obr.VII.3.a).)

Křivka znázorňující pohyb částice nemůže tedy mít vzhledem ke svislé ose sklon větší než $45°$ – viz obr.VII.3.b, kde je toto omezení výrazně vyznačeno pro jeden bod křivky; stejné omezení ovšem platí ve všech bodech křivky.

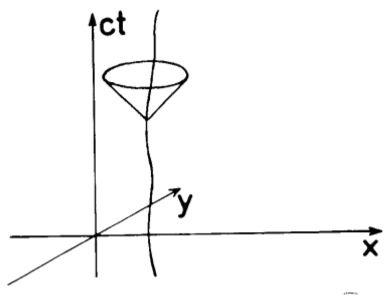



Obr.VII.3.

a) Znázornění pohybu světelných signálů vyslaných podél osy $x$ z místa o souřadnici $x_V$ v okamžiku $t_V$.
1 – signál pohybující se ve směru osy $x$; 2 – signál pohybující se proti směru osy $x$.

b) Rychlost částice nemůže převýšit rychlost světla – sklon odpovídající křivky v prostoročasovém diagramu tedy nemůže překročit $\pm 45°$ od svislé osy. Pohyb částice může odpovídat plně zakresleným křivkám; naopak tečkovaná křivka nemůže představovat pohyb žádné reálné částice.

Kdybychom prostoročasový diagram rýsovali ne v rovině, ale v prostoru, mohli bychom znázornit pohyb částic nejen podél osy $x$, ale v celé rovině $x$-$y$. Obrázek VII.4 vystihuje tuto představu (byť pouze nákresem na listu papíru).




Obr.VII.4. Prostoročasový diagram se zakreslením dvou prostorových os. Křivka znázorňuje pohyb částice v rovině $x$-$y$. Znázorněno je rovněž šíření světelných signálů, které částice v daný okamžik vyslala do všech směrů roviny $x$-$y$. Srovnejte s obr.VII.3.

Světelné signály, vyslané do všech směrů roviny $x$-$y$ budou na diagramu znázorněny jako plášť kužele – mluvíme proto o tzv. **světelném kuželi** (viz obr.VII.4). Název světelný kužel přenášíme i do dvourozměrných diagramů: světelným kuželem nazveme polopřímky 1 a 2 na obr.VII.3.a. A obr.VII.3.b bychom mohli komentovat slovy „**křivka znázorňující další pohyb částic musí vždy ležet uvnitř světelného kužele s vrcholem v daném bodě**.“

Jestliže byl čtenáři dosavadní postup jasný, jistě dokáže sám zodpovědět otázku:

Co vlastně jsou (co představují) body v prostoročasovém diagramu?

Ano, bod prostoročasového diagramu reprezentuje **událost**, tj. něco co se stalo **v určitém čase na určitém místě**. Např. bod $V$ na diagramu v obr.VII.4. představuje událost vyslání světelných signálů částicí. Ostatně celá křivka znázorňující pohyb částice je tvořena body diagramu: odpovídajícími událostmi jsou přítomnost částice v daném čase na daném místě.

Poloha částice je ovšem obecně dána třemi prostorovými souřadnicemi a nedá se tedy na obr.VII.3 či 4 jednoznačně znázornit. K zachycení obecného pohybu částice (nejen v rovině *x*-*y*) bychom potřebovali čtyřrozměrný diagram: 3 osy prostorové (*x*,*y*,*z*) a 1 časovou ($c \cdot t$). Ten si ovšem názorně představit nebo nakreslit neumíme. Musíme se spokojit s jeho třírozměrnou analogií (viz výše obr.VII.4), v níž je ovšem ztracena informace o *z*-ové souřadnici částice. I tato analogie nám však poskytuje dobré služby.

---

K čemu všechny tyto úvahy o prostoročasových diagramech?

V newtonovské fyzice by bylo možno uvažovat prostor a čas odděleně. Dvanáct hodin pět minut bylo dvanáct hodin pět minut v celém vesmíru a nezávisle na pohybu pozorovatelů. Teorie relativity nás ale naučila, že skutečnost je jiná: v každé soustavě plyne čas jinak, události současné v jedné soustavě se v jiných soustavách staly obecně v různých okamžicích, prostorové a časové souřadnice jsou v Lorentzových transformacích neoddělitelně smíchány…

Místo zvlášť o prostoru a zvlášť o čase je tedy přirozenější mluvit o jejich spojení, **prostoročase**. A nejen mluvit: teorie relativity ukazuje, jaké jsou jeho vlastnosti, jak souvisí se „starými“ pojmy prostor a čas atd.

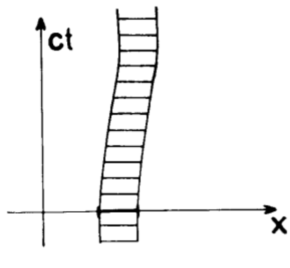
My se budeme s prostoročasem a jeho vlastnostmi seznamovat postupně. Pomohou nám přitom právě prostoročasové diagramy. Proč?

Prostoročas v sobě spojuje prostor i čas; zadání bodu v prostoročase tedy určuje nejen, **kde** se něco stalo, ale i **kdy** se to stalo. **Body prostoročasu** jsou tudíž **události**. A právě události jsou zobrazovány **body v prostoročasových diagramech**. **Prostoročasový diagram je tedy vlastně znázorněním (části) prostoročasu**.

Ovšem, diagram na obr.VII.4 nerozliší události o různých hodnotách souřadnice *z*. K dokonalému znázornění prostoročasu by byl nutný čtyřrozměrný diagram. I jeho třírozměrná nebo dvourozměrná analogie (viz obr.VII.1-3) nám však mohou vlastnosti prostoročasu přiblížit.

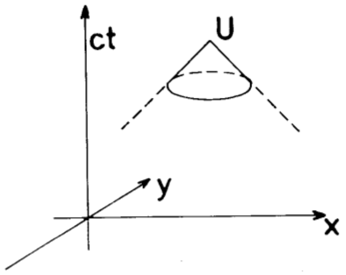
---

Prostoročasové diagramy zobrazují **svět v jeho vývoji**. Tomu odpovídá i užívaná terminologie. Křivky znázorňující pohyb částic (viz obr.VII.4) se nazývají **světočáry** částic. Pohybující se těleso (např. tyč) není samozřejmě znázorněno jedinou světočárou, ale tzv. **světovou trubicí**, skládající se ze světočar všech bodů tělesa – viz obr.VII.5.




Obr.VII.5. Světová trubice

O světelném kuželi jsme se již zmiňovali výše. Poznamenejme, že na obr.VII.4 je znázorněn **budoucí světelný kužel**; **minulý světelný kužel** je zakreslen na obr.VII.6.




Obr.VII.6. Minulý světelný kužel příslušný k události *U* je tvořen světelnými signály, které přecházejí do této události (tj. pozorovatel na daném místě je v daný čas detekuje).

Světočáry a další zmíněné objekty však nechápeme jen jako čáry na papíře. Podobně jako v klasické mechanice mluvíme o trajektorii částice v prostoru, mluvíme v teorii relativity o světočáře částice v **prostoročase**. Světočára nakreslená v prostoročasovém diagramu je pak jejím znázorněním. Podobně je tomu se světovou trubicí, světelným kuželem atd.

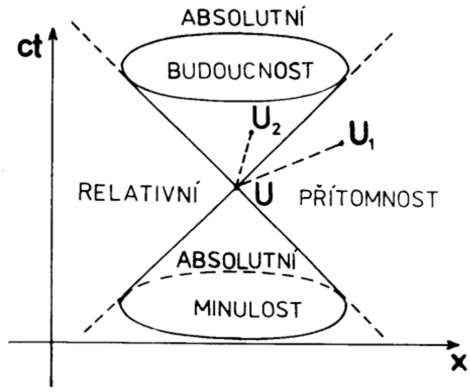
Čtenáře, který se obává nově zaváděných pojmů, můžeme uklidnit: už jich pro popis prostoročasových diagramů mnoho nepřibude. Ovšem pojem prostoročas a jeho význam by si měl čtenář – po přečtení celé kapitoly VII. – pořádně promyslet. (A pak zejména ještě jednou po prostudování následující kapitoly.)

Pojmy, které můžeme při „prostoročasovém pohledu“ zpřesnit, jsou minulost, budoucnost a přítomnost. Uvažujme určitou událost *U*. (Klepněte např. prstem na stránku skript. I to je událost.)

Které události v prostoročase můžeme vzhledem k *U* označit za budoucí, které za minulé a které za přítomné?

Z kapitoly IV. víme, že události, které by byly s *U* spojeny signálem šířícím se nadsvětelnou rychlostí, by v některých inerciálních systémech předcházely *U*, v některých v čase následovaly po *U* a v některých systémech se staly současně s událostí *U*. O těchto událostech tedy sotva můžeme říci, že by patřily do budoucnosti nebo naopak do minulosti události *U*. Mluvíme o nich jako o událostech relativně přítomných (relativně – tj. jen v některých inerciálních systémech) a jejich množinu nazýváme **relativní přítomností** události *U*.

Události, do nichž lze z *U* vyslat signál šířící se rychlostí světla nebo nižší, musí ve **všech** inerciálních soustavách nastat **později** než *U*. Jejich množinu proto nazýváme **absolutní budoucností** události *U*. (Zdůrazněme slovo **absolutní** – to, že nastávají později než *U*, nezávisí na volně inerciální soustavy souřadnic.) Na prostoročasovém diagramu (obr.VII.7) vidíme, že do absolutní budoucnosti patří právě všechny události tvořící vnitřek a plášť budoucího světelného kužele. Analogicky označujeme vnitřek a plášť minulého světelného kužele jako **absolutní minulost**. Události patřící k absolutní minulosti *U* nastávají ve všech inerciálních soustavách dříve než událost *U*.




Obr.VII.7. Absolutní minulost, budoucnost a relativní přítomnost události *U*.
(Signál šířící se od *U* k $U_1$ by musel mít nadsvětelnou rychlost; události *U* a $U_2$ lze spojit signálem šířícím se rychlostí $u \le c$ .)

---

Až dosud jsme pomocí prostoročasových diagramů sledovali dění v prostoročase vlastně jen z hlediska jedné inerciální soustavy souřadnic *S* – to znamená, uměli jsme z diagramu odečíst prostorové a časovou souřadnici dané události (viz obr.VII.1), ovšem pouze souřadnice v *S*. Události samy jsou ovšem absolutní: rozsvícení lampy je rozsvícením lampy ve všech inerciálních systémech. Není možné, aby se lampa v jedněch systémech rozsvítila a v jiných zůstala zhasnutá. Mohli bychom říci, že **dění v prostoročase** (zachycované i na prostoročasových diagramech) **je absolutní**. Jde jen o to zjistit, jaké souřadnice přiřadí událostem pozorovatelé v různých inerciálních systémech.

I zde nám mohou názorně pomoci prostoročasové diagramy. Vedle os *x* a *ct* do nich totiž můžeme zakreslit i osy $x'$ a $ct'$ odpovídající systému *S'*.

Co je to vlastně osa *x*? Množina bodů (událostí), pro něž $t = 0$ (a také $y = 0$ a $z = 0$). A osa *ct*? Množina bodů v prostoročase, pro něž je $x = 0$ (a $y = 0$, $z = 0$) – tedy vlastně světočára pozorovatele, který stojí v počátku soustavy *S*. Analogicky tomu bude i s osami příslušnými *S'*.

Ze speciální Lorentzovy transformace

$$x' = \gamma(x - \upsilon t), \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = \gamma\left(t - \frac{\upsilon}{c^2}x\right)$$

plyne

**pro osu *ct'*** (tj. $x' = 0$, světočáru pozorovatele stojícího v počátku *S'*)

$$x = \frac{\upsilon}{c}(ct)$$

**pro osu *x'*** (tj. $t' = 0$)

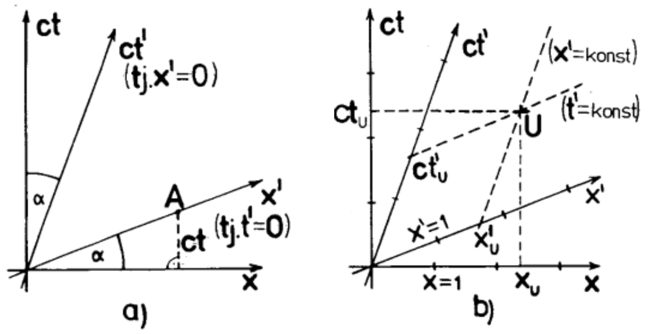
$$c \cdot t = \frac{\upsilon}{c}x$$

Osy *x'* a *ct'* jsou tedy vůči osám *x* a *ct* skloněny o stejný úhel $\alpha$, pro nějž platí

$$tg\ \alpha = \frac{\upsilon}{c} \qquad \text{(VII.1)}$$

jak to znázorňuje obr.VII.8.a. Z (1) samozřejmě vyplývá, že

$$|\alpha| < \frac{\pi}{4} ..$$




Obr.VII.8. Osy příslušející systémům *S* a *S’* v prostoročasovém diagramu a určování souřadnic.

Obrázek VII.8.b ukazuje, jak určíme nečárkované (*x*,*t*) a čárkované (*x’*,*t’*) souřadnice dané události jejím promítnutím na příslušné osy. Podél os *x’* a *ct’* nelze ovšem na diagramu jednoduše odměřit vzdálenosti – měřítko na těchto osách se totiž liší od měřítek os *x* a *ct*! Je to zřejmé např. z inverzní Lorentzovy transformace

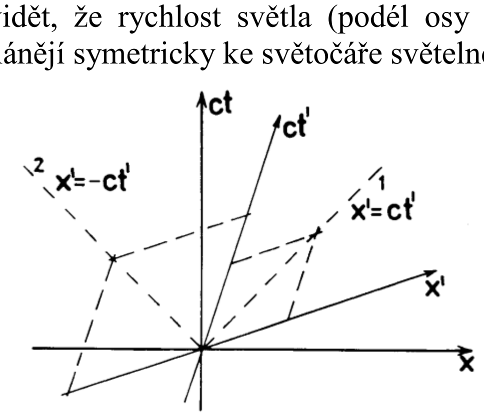
$$x = \frac{x' + \upsilon t'}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \ .$$

pro $t' = 0$ je $x = x' / \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}$, takže $x' = 1$ odpovídá $x = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} > 1$.

Podobně je tomu na ose *ct’*. Měřítka na osách *x’* a *ct’* jsou totiž stejná.

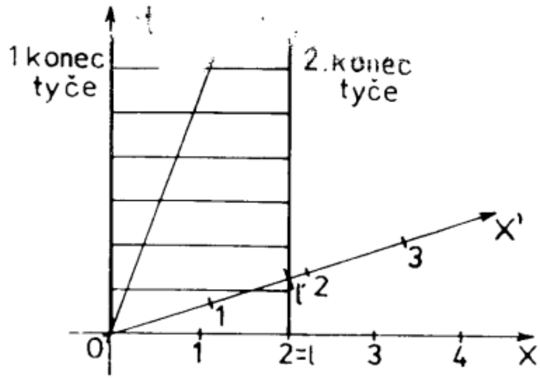
---

Pomocí znázornění Lorentzovy transformace na prostoročasových diagramech (tj. znázornění os $x, ct$ i $x', ct'$ lze lehce ilustrovat řadu výsledků, které jsme v kapitole IV. odvozovali výpočtem. Lze například vidět, že rychlost světla (podél osy *x*) je stejná v *S* a *S’* – viz obr.VII.9. (osy *x’* a *ct’* se sklánějí symetricky ke světočáře světelného signálu 1 na obr.VII.9.)




Obr.VII.9. Rychlost světelného signálu je *c* i vůči *S’*.

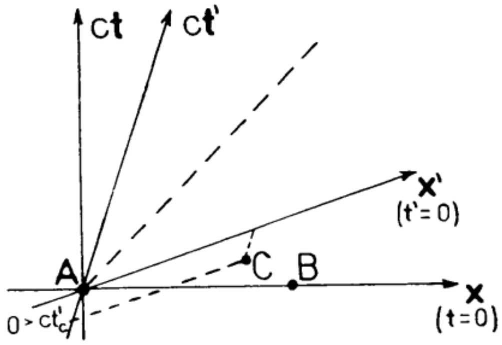
Ilustrace kontrakce délek na diagramu vyžaduje uvažovat různá měřítka os *x* a *x'*, proto nemusí působit bezprostředně přesvědčivě. Ovšem ukázat se dá, jak je vidět na obr.VII.10, znázorňujícím světovou trubici tyče stojící v soustavě *S*.




Obr.VII.10. Znázornění kontrakce délky tyče stojící v *S* z hlediska *S'*.

Podobně jako kontrakci délek by bylo možno na diagram znázornit dilataci času.

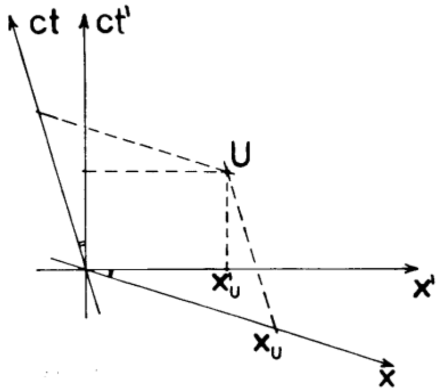
Prostoročasové diagramy jsou ovšem neocenitelnou pomůckou při ilustraci relativity současnosti a přehození časového sledu. Obrázek VII.11 to ukazuje jasně.




Obr.VII.11. Události A a B jsou současné v soustavě *S*, ale nejsou současné v soustavě *S'*. Pro událost A a C je $t_C > t_A$, ale $t'_C < t'_A$. (Ať je událost C jakkoli blízko světelného kužele události A – ovšem v relativní přítomnosti události A – vždy lze vést osu *x'* tak, aby bylo $t'_C < 0$.)

Vidíme také, **proč** je současnost relativní. Množina událostí o daném čase *t* (tj. navzájem současných událostí) je vlastně řezem prostoročasu. Řez lze ovšem vést i jinak ($t' = \text{konst.}$) a to řadou způsobů – a co řez, to jiná současnost, resp. současnost z hlediska jiného systému *S'*. Absolutní, nezávislý na pozorovatelích je prostoročas sám a události v něm.

Na všech dosud uvedených diagramech byla osa *x* vodorovná, *ct* svislá a osy $x', ct'$ byly skloněné. To ovšem není nutné a výchozím systémem pro konstrukci diagramu může být systém *S'*. Výsledek ukazuje obr.VII.12.




Obr.VII.12. Prostoročasový diagram, při jehož konstrukci se vycházelo z *S'*.

Doporučujeme čtenáři, aby si sám odvodil a rozmyslel, proč obr.VII.12 vypadá tak, jak vypadá. (S uvážením faktu, že systém *S* se pohybuje vůči *S'* proti směru osy *x'*.)

Světočáry světelných signálů by ovšem i na obr.VII.12 svíraly se svislicí úhel 45°. To naznačuje, že světočáry světelných paprsků mají v prostoročase základnější význam, než světočáry pozorovatelů.

## VII.2. Čtyřinterval

Uvažujme dvě události A a B a označme rozdíly jejich souřadnic

$$\Delta x = x_{(B)} - x_{(A)},\ \Delta y = y_{(B)} - y_{(A)},\ \Delta z = z_{(B)} - z_{(A)}$$

$$\Delta t = t_{(B)} - t_{(A)}.$$

Jak jsme již dokázali v článku III.5, lze z rozdílu souřadnic vytvořit kombinaci

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2, \qquad \text{(VII.2)}$$

která se nemění při přechodu od jednoho inerciálního systému k jinému inerciálnímu systému *S'* (je **invariantem** Lorentzovy transformace):

$$\Delta s = \Delta s',$$

kde

$$(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2 + (\Delta z')^2.$$

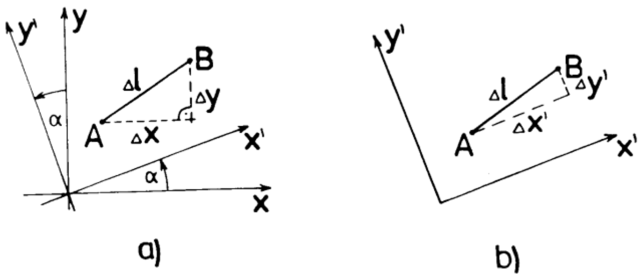
Připomeňme, že veličinu $\Delta s$ nazýváme **čtyřinterval** (daných událostí). Vidíme, že

čtyřinterval závisí pouze na daných událostech (a nikoliv na volbě inerciální soustavy souřadnic, v níž ho vyčíslujeme).

Veličinu, která se chová přesně stejně, známe z „obyčejného“, třírozměrného prostoru. Je to **vzdálenost** $\Delta l$ dvou bodů v prostoru. V kartézské soustavě souřadnic je

$$(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2. \qquad \text{(VII.3)}$$

Na obr.VII.13 je situace pro jednoduchost znázorněna ve dvourozměrném případě.




Obr.VII.13. Ke vzdálenosti bodů v euklidovském prostoru

Vzdálenost bodů A a B nezávisí na natočení soustavy souřadnic, v níž ji počítáme dle vztahu (3).

Skutečnost, že $(\Delta l)^2 = (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\Delta x')^2 + (\Delta y')^2$ lze v tomto případě dokázat jednoduše i formálně ze vztahů mezi $x, y$ a $x', y'$ :

$$\begin{aligned} x' &= x\cos\alpha + y\sin\alpha, \\ y' &= -x\sin\alpha + y\cos\alpha, \end{aligned}$$

pouhým dosazením. Obvykle nám ale takový postup připadá příliš umělý: je nám zřejmé, že vzdálenost daných bodů má určitou pevnou hodnotu (když uvažujeme nepohyblivé body). Kdyby zeměměřiči prohlásili, že délka Karlova mostu závisí na tom, zda ji vypočteme v soustavě souřadnic, v níž osa $y$ míří k magnetickému severnímu pólu, nebo v soustavě, v níž tato osa míří k Polárce, asi bychom jim nevěřili. Celá naše zkušenost nám říká, že vzdálenost bodů je cosi základnějšího než soustavy souřadnic – ty jsou vlastně jen naší pomocnou konstrukcí. Vzdálenost a její vlastnosti přímo souvisí s geometrií prostoru. (Míněno „našeho“ třírozměrného prostoru tak, jak jeho geometrii známe ze školy.) Víme třeba, že když zkonstruujeme trojúhelník o stranách dlouhých 3, 4 a 5 jednotek, bude pravoúhlý; v každém pravoúhlém trojúhelníku platí Pythagorova věta atd. atd.

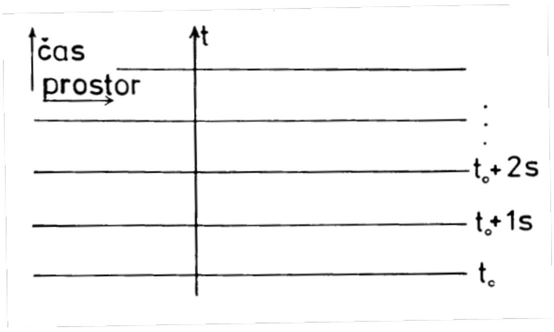
Proč zde rozebíráme tyto známé a zřejmé věci? Protože analogicky je tomu i v prostoročase.

**Čtyřinterval v prostoročase je analogií vzdálenosti v třírozměrném prostoru.**
(Nebo v dvourozměrném prostoru.)

Prostorové a časové souřadnice jsou vlastně jen naše pomocné konstrukce zavedené proto, abychom mohli dění v prostoročase pohodlněji popsat. Žijeme v prostoročase; prostor bez času nebo čas bez prostoru ještě nikdo nikdy neviděl. Jistě, s geometrickými vlastnostmi prostoročasu nemáme tak názornou zkušenost jako s geometrií třírozměrného prostoru. Ale prostoročas svou geometrii má a čtyřinterval je základní veličinou, která ji vystihuje. Naopak prostor sám o sobě (a podobně čas sám o sobě) už nemůžeme z hlediska poznatků teorie relativity považovat za základní objekty: vzdálenosti daných bodů jsou pro různé pozorovatele různé.

---

Stojí za to si situaci znovu promyslet od začátku: **Kdyby** vzdálenost $\Delta l$ daných bodů v prostoru nezávisela na tom, ve které inerciální soustavě ji měříme, a kdyby na tom nezávisel ani časový interval $\Delta t$ mezi danými událostmi (tj. kdyby $\Delta l$ a $\Delta t$ byly **absolutní**, nezávislé na volbě pozorovatele), bylo by přirozené uvažovat nezávisle na sobě prostor a čas. Taková byla situace v klasické mechanice. Formálně bychom mohli i zde hovořit o prostoročase jako množině všech událostí, ale bylo by to uměle vykonstruované spojení. Čas a prostor by si v něm zachovaly svůj absolutní a nezávislý význam a mohli bychom je vždy dobře rozlišit. Viz obr.VII.14, znázorňující prostoročasový diagram odpovídající Newtonovské představě.




Obr.VII.14. Newtonovská představa vzájemně nezávislého prostoru a času.
Jiný čas než *t* zde neexistuje!

Speciální teorie relativity nás ale poučila, že $\Delta l$ i $\Delta t$ závisí na volbě pozorovatele. Jsou to tedy veličiny pouze relativní.

Kdybychom ze souřadnic událostí nemohli zkonstruovat žádnou veličinu, která by byla na pozorovatelích nezávislá, bylo by zřejmě spojování prostoru a času do jednoho objektu rovněž problematické. Ovšem my již víme, že existuje veličina, která je **absolutní** a to je právě **čtyřinterval**.

Takto nás speciální teorie relativity **nutí spojit prostor a čas**. Prostoročas tedy není nějakým vykonstruovaným objektem, ale nezbytným spojením prostoru a času do jediného přirozeného celku.

Geometrie prostoročasu se ovšem liší od geometrie „obyčejného“ (tj. Euklidovského) třírozměrného prostoru – a nejen počtem rozměrů. Vzdálenost dvou bodů v euklidovském prostoru je vždy nezáporné číslo; přitom nule je rovna, jen pokud oba body splývají. Naproti tomu v prostoročase může být druhá mocnina čtyřintervalu kladná, záporná i rovna nule. $(\Delta s)^2$ dané vztahem (2) lze totiž upravit na tvar

$$(\Delta s)^2 = -(c\Delta t)^2 + (\Delta l)^2 , \qquad \text{(VII.4)}$$

kde $\Delta l$ je vzdálenost daných bodů (viz (3)). Znaménko tedy záleží na tom, zda v (4) převládne „prostorový“ člen $(\Delta l)^2$ nebo „časový“ člen $(c\Delta t)^2$. Podle toho rozdělujeme čtyřintervaly na

a) **prostorové** – pro něž $\underline{(\Delta s)^2 > 0}$

Pro ně je $\Delta l > c|\Delta t|$ ;

je tedy zřejmé, že události, jejichž čtyřinterval je prostorový, nelze spojit žádným signálem – ten by se totiž musel pohybovat nadsvětelnou rychlostí.

Čtenář si sám může uvědomit a zdůvodnit, že pokud je interval dvou událostí prostorový, existuje IS, v němž se obě události staly současně.
(Jakou mají události v této soustavě vzdálenost? Souvisí nějak s hodnotou $\Delta s$ ?)
Prostorový interval událostí tedy znamená, že se každá událost stala v relativní přítomnosti druhé události. (Viz U a $U_1$ na obr.VII.7.)

Čtyřintervaly dále mohou být

b) **nulové** – tedy ty, pro něž $\underline{(\Delta s)^2 = 0}$ .

Ze (4) pak plyne $\Delta l = c|\Delta t|$. Události lze tedy spojit světelným signálem; proto se takové čtyřintervaly nazývají též **světelné**.

Vidíme, že na rozdíl od euklidovského prostoru události nemusí splývat, aby jejich čtyřinterval byl $\Delta s = 0$ . Naopak k zadané události lze vzít libovolnou událost ležící na jejím světelném kuželi – jejich čtyřinterval bude nulový.

Poslední možností jsou čtyřintervaly

c) **časové** – pro něž $\underline{(\Delta s)^2 < 0}$

(Pozn.: protože stále pracujeme s veličinami $(\Delta s)^2$, nemusí nám nijak vadit skutečnost, že $(\Delta s)$ samotné by muselo být v tomto případě ryze imaginární.)

V daném případě je $\Delta l < c|\Delta t|$.

Obě události lze tedy spojit signálem, šířícím se podsvětelnou rychlostí. Takovýmto signálem může být i vystřelená částice. S částicí lze spojit inerciální systém; v tomto inerciálním systému pak, jak je zřejmé, nastaly obě události na tomtéž místě.

Jaký čas $\Delta\tau$ uplyne v této soustavě mezi oběma událostmi? Označme danou soustavu *S’*. Podle (4) je

$$(\Delta s')^2 = -(c\Delta t')^2 + (\Delta l')^2 = -c^2(\Delta\tau)^2 ,$$

neboť $\Delta t' = \Delta\tau$ a $\Delta l' = 0$ (události nastávají v *S’* na tomtéž místě). Protože $\Delta s' = \Delta s$ , je

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{-(\Delta s)^2}{c^2}} . \qquad \text{(VII.5)}$$

$\Delta\tau$ je vlastní čas hodin, které „letí rovnoměrně přímočaře od jedné události k druhé“. (Přesněji řečeno, je to přírůstek vlastního času takových hodin mezi oběma událostmi.)

Vztah (5) ukazuje souvislost časového čtyřintervalu s vlastním časem; kromě toho umožňuje snad nejkratším způsobem odvodit **dilataci času**. Označme rychlost pohybu hodin (měřících čas $\tau$) vůči inerciální soustavě *S* jako *u*. Za čas $\Delta t$ (čas v soustavě *S*) se hodiny posunou o $\Delta l = u|\Delta t|$; ze (4) je pak

$$(\Delta s)^2 = -c^2(\Delta t)^2 + u^2(\Delta t)^2 = -(c^2 - u^2)(\Delta t)^2 . \qquad \text{(VII.6)}$$

Odpovídající přírůstek času $\Delta\tau$ na pohybujících se hodinách získáme dosazením (6) do (5):

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{c^2 - u^2}{c^2}(\Delta t)^2} = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\Delta t ,$$

což je výsledek, odvozený již dříve jiným postupem (viz (IV.17)).

## VII.3. Úvod do čtyřrozměrného formalismu

Pro další práci bude výhodné rozlišovat souřadnice *ct, x, y,* a *z* pomocí indexů. I ve třírozměrném prostoru, při práci s „obyčejnými“ vektory apod., přece přinášelo použití indexů výhody. Jistě bylo jednodušší psát třeba vztah pro skalární součin jako $\vec{a}\cdot\vec{b} = \sum_{i=1}^{3} a_i \cdot b_i$ resp., při použití sčítacího pravidla, $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_i b_i$, než vypisovat $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$. Podobně nám indexy zjednoduší situaci i v prostoročase.

Pro prostorové souřadnice *x, y, z* budeme užívat indexů 1, 2, 3, pro časovou souřadnici *ct* indexu 0. Pro zápis těchto indexů budeme užívat znaků $\alpha, \beta, \gamma \ldots \mu, \nu, \rho \ldots$, tedy malých písmen řecké abecedy. Malá písmena latinky – i, j, k, l … - zůstanou vyhrazena pro indexy probíhající pouze hodnoty 1, 2, 3, např. při označování složek „obyčejných“ třírozměrných vektorů. Indexy ovšem budeme psát nejen vpravo **dole**, ale často také vpravo **nahoře** u dané veličiny; brzy uvidíme, k čemu je to dobré.

Souřadnice *ct, x, y, z* označíme pomocí indexů následovně:

$$\begin{aligned} x^0 &= ct \\ x^1 &= x \\ x^2 &= y \\ x^3 &= z \end{aligned} \qquad \text{(VII.7)}$$

Poznamenejme, že nejde o umocňování, číslice u *x* nejsou exponenty, ale indexy. (Druhou mocninu *x* bychom zapsali jako $(x^1)^2$ apod.)

Jsou-li $x^\mu_{(A)}$ souřadnice události A (kde $\mu = 0, 1, 2, 3$, tj. např. $x^0_{(A)} = c \cdot t_A$, kde $t_A$ je čas, kdy se stala událost A atd.) a $x^\mu_{(B)}$ souřadnice události B, označíme rozdíly souřadnic samozřejmě

$$\Delta x^\mu = x^\mu_{(B)} - x^\mu_{(A)} \qquad (\text{pro } \mu = 0, 1, 2, 3). \qquad \text{(VII.8)}$$

Zde již vidíme první drobnou výhodu formalismu: nemusíme vypisovat $\Delta t = t_B - t_A, \Delta x = x_B - x_A \ldots$, ale vystačíme s jediným vztahem (8). Dále již přestaneme explicitně vypisovat i to, že tento a podobné vztahy platí pro $\mu = 0, 1, 2, 3$; automaticky budeme předpokládat, že platí pro všechny hodnoty indexů.

Čtyřinterval událostí A a B je (viz (2))

$$(\Delta s)^2 = -\left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 . \qquad \text{(VII.9)}$$

Tento zápis se již velmi podobá vztahu (3) pro vzdálenost dvou bodů v třírozměrném euklidovském prostoru; v nyní zavedeném označení je

$$(\Delta l)^2 = \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2 \qquad \text{(VII.10)}$$

V čem se liší vztahy (9) a (10)?

V počtu souřadnic, samozřejmě. Proto jde jednou o čtyřrozměrný a jednou o třírozměrný prostor. Ovšem podstatnější odlišností je přítomnost znaménka minus před $\left(\Delta x^0\right)^2$ v (9). Právě ono ukazuje, že časová souřadnice se přece jen liší od souřadnice prostorové. A právě ono způsobuje, že prostoročas se v některých vlastnostech podstatně liší od euklidovského prostoru – např. v tom, že pro různé události může být $\Delta s = 0$. (V euklidovském čtyřrozměrném prostoru, pro nějž $\left(\Delta s_{Eukl}\right)^2 = \left(\Delta x^0\right)^2 + \left(\Delta x^1\right)^2 + \left(\Delta x^2\right)^2 + \left(\Delta x^3\right)^2$ by toto možné nebylo.) Přesto je prostoročas se čtyřintervalem, daným (9), euklidovskému prostoru v leccems příbuzný; říkáme proto, že jde o **pseudoeuklidovský** čtyřrozměrný **prostor**. Používá se pro něj i názvu **Minkowského prostor** resp. **Minkowského prostoročas** podle matematika H. Minkowského, který již v r. 1908 pojem prostoročas zavedl a dal tak Einsteinově speciální teorii relativity přirozenou geometrickou interpretaci.

---

V případě třírozměrného prostoru lze vztah (10) zapsat ještě jednodušeji jako

$$(\Delta l)^2 = \sum_{i=1}^{3} \left(\Delta x^i\right)^2 .$$

Vztah (9) takto přímočaře zjednodušit nelze, brání nám v tom právě ono minus před $\left(\Delta x^0\right)^2$. Zjednodušení však dosáhneme tím, že situaci nejdříve zdánlivě zkomplikujeme: zavedeme ještě souřadnice $x_\mu$ (s indexem dole), a to vztahy

$$\begin{aligned} x_0 &= -ct \\ x_1 &= x \\ x_2 &= y \\ x_3 &= z \end{aligned} \qquad \text{(VII.11)}$$

Rozdíly souřadnic $x_\mu$ mezi událostmi A a B označíme analogicky k (8) $\Delta x_\mu$. Je tedy $\Delta x_0 = -\Delta x^0$ a $\Delta x_i = \Delta x^i$ pro $i = 1, 2, 3$. Čtyřinterval (9) lze pak zapsat jako

$$(\Delta s)^2 = \sum_{\mu=0}^{3} \Delta x_\mu \cdot \Delta x^\mu$$

Zápis ještě poněkud zjednodušíme tím, že nebudeme psát znak pro sumaci. Zavedeme totiž **sčítací pravidlo**:

Pokud se v jednom členu výrazu vyskytuje tentýž řecký index dole i nahoře, sčítá se přes něj od 0 do 3.

Podotkněme ještě, že ve členu se nesmí tentýž index vyskytnout více než dvakrát (např. $x^\mu x_\mu x^\mu x_\alpha$), a že se rovněž nesmí vyskytovat dvakrát dole nebo dvakrát nahoře (např. $\Delta x^\rho \Delta x^\rho$) – takové výrazy by neměly smysl. Členem výrazu se zde rozumí veličina nebo součin veličin. Např. výraz $A_\mu A^\mu + \Delta x_\alpha \Delta x^\alpha$ se skládá ze dvou členů.

Přijmeme-li uvedená označení a úmluvy, lze vztah pro čtyřinterval psát ve tvaru

$$(\Delta s)^2 = \Delta x_\mu \Delta x^\mu \qquad \text{(VII.12)}$$

Není náhodou, pokud nám tento zápis připomíná vztah pro druhou mocninu velikosti třírozměrného vektoru $|\vec{a}|^2 = a_i a_i$. Je opravdu jeho analogií.

---

Věnujme se teď ještě jednomu problému.

Je nějaký vztah mezi veličinou s indexem nahoře a toutéž veličinou s indexem dole? Je např. nějak možné „snížit“ index u dané veličiny?

Porovnání vztahů (7) a (11) pro $x^\mu$ a $x_\mu$ naznačuje řešení:

u složek s indexy 1, 2 a 3 nezáleží na tom, zda je index dole či nahoře; složka s indexem 0 změní při snížení indexu svoje znaménko.

Formálně můžeme toto pravidlo vyjádřit tak, že zavedeme veličinu se dvěma dolními indexy, tzv. **Minkowského tenzor** $\eta_{\alpha\beta}$, jehož složky jsou

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 \text{ pro } \alpha = \beta = 0 \\ +1 \text{ pro } \alpha = \beta = 1,2,3 \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \qquad \text{(VII.13)}$$

Jinak řečeno, složky $\eta_{\alpha\beta}$ tvoří matici

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{array}{r} \beta = \\ \alpha = 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

Pak lze psát

$$x_\mu = \eta_{\mu\nu} x^\nu \qquad \text{(VII.14.a)}$$

a samozřejmě také

$$\Delta x_\alpha = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^\beta \qquad \text{(VII.14.b)}$$

(Čtenář, který se s uvedeným formalismem setkává poprvé, by si měl tyto i další podobné vztahy rozepsat, tedy napsat $x_\mu = \eta_{\mu 0} x^0 + \eta_{\mu 1} x^1 + \eta_{\mu 2} x^2 + \eta_{\mu 3} x^3$ a dále třeba konkrétně pro $\mu = 0 : x_0 = \eta_{00} x^0 + \eta_{01} x^1 + \eta_{02} x^2 + \eta_{03} x^3 = \eta_{00} x^0 = -x^2$ atd. Tak pro něj zde uváděné zápisy dostanou jasnější obsah.)

O operacích (14) skutečně mluvíme jako o **snižování indexu**. Obdobně lze **zvyšovat index** pomocí veličiny $\eta^{\alpha\beta}$, která má tytéž složky jako $\eta_{\alpha\beta}$

$$\eta^{\alpha\beta} = \begin{cases} -1 \text{ pro } \alpha = \beta = 0 \\ +1 \text{ pro } \alpha = \beta = 1,2,3 \\ 0 \text{ pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{VII.15}$$

Tuto veličinu rovněž nazýváme Minkowského tenzor. (Pozn.: pro rozlišení o ní můžeme mluvit jako o kontravariantním Minkowského tenzoru; $\eta_{\alpha\beta}$ je tzv. kovariantní Minkowského tenzor. Horní indexy se totiž nazývají též kontravariantní a dolní indexy kovariantní. Bez těchto názvů se však v dalším celku obejdeme.)

**Zvyšování indexu** je pak dáno vztahem

$$x^{\mu} = \eta^{\mu\nu} x_{\nu} \tag{VII.16}$$

a podobně pro $\Delta x^{\mu}$.

Snížíme-li index u nějaké veličiny pomocí $\eta_{\alpha\beta}$ a pak ho opět zvýšíme pomocí $\eta^{\alpha\beta}$, dostaneme nakonec opět původní složky?

Dosazení (14) do (16) a využití (13) a (15) nás přesvědčí, že tomu tak samozřejmě je. Je to vidět i z toho, že platí

$$\eta^{\alpha\rho}\eta_{\rho\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta} = \begin{cases} \text{pro } \alpha = \beta \\ \text{pro } \alpha \neq \beta \end{cases} \tag{VII.17}$$

Snížení a opětné zvýšení indexu pak totiž dá

$$\eta^{\alpha\mu}\left(\eta_{\mu\nu}x^{\nu}\right) = \left(\eta^{\alpha\mu}\eta_{\mu\nu}\right)x^{\nu} = \delta^{\alpha}_{\nu}x^{\nu} = x^{\alpha}.$$

Veličinu $\delta^{\alpha}_{\beta}$ je přirozené nazývat **Kroneckerova delta**. Vidíme, že v daném formalismu má Kroneckerova delta **smíšené složky** – tj. horní i dolní indexy.

Vybudované základy formalismu nám umožňují ještě jedno vyjádření čtyřintervalu – pomocí Minkowského tenzoru:

$$(\Delta s)^2 = \eta_{\alpha\beta}\ \Delta x^{\alpha}\ \Delta x^{\beta} \tag{VII.18}$$

---

Čtenář si teď možná klade otázku, zda si z něj autor nedělá blázny.

Proč to všechno? Proč zavádět indexy dole i nahoře, sčítací pravidla, Minkowského tenzory a zvyšování a snižování indexů? Jednoduchost zápisu (12) či (18) v porovnání s (2) za to přece zjevně nestojí!

Samozřejmě, zatím naše snažení vypadá hůř než pověstné chození s kanónem na vrabce. Již v následujícím článku a zejména pak v následující kapitole se však zaváděný formalismus ukáže jako velmi vhodný a efektivní nástroj pro vyjádření všech vztahů speciální teorie relativity – vyjádření, které bude stručnější, výstižnější a snáze zapamatovatelné, než vztahy uváděné v předchozích kapitolách. Formalismus se dokonce ukáže jako nástroj, s jehož pomocí lze vztahy speciální teorie relativity i přímo vyvozovat a hledat – a to už je zřejmě víc, než v co jsme asi doufali. Navíc lze tento formalismus dále podstatně zobecnit tak, aby byl použitelný i pro obecnou teorii relativity. Je tedy jasné, že se vyplatí věnovat jeho zvládnutí jisté úsilí a překonat případně i určitou nechuť, kterou člověk k novému neznámému formalismu může mít.

Poznámka: Ve speciální teorii relativity samotné se lze obejít i bez horních indexů a Minkowského tenzoru, ovšem za cenu toho, že se ve formalismu objeví komplexní čísla. Lze totiž zavést časovou souřadnici jako $x_4 = ict$ a prostorové ponechat $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$. Vztah pro čtyřinterval $(\Delta s)^2 = (\Delta x_1)^2 + (\Delta x_2)^2 + (\Delta x_3)^2 + (\Delta x_4)^2$ pak formálně vypadá stejně jako ve čtyřrozměrném euklidovském prostoru: minus je „schováno“ v souřadnici *ict*. Geometrie Minkowského prostoru se tím ovšem nijak nezmění; pseudoeuklidovský charakter prostoru je jen „maskování“. Směrem k obecné relativitě ale tento přístup zobecnit nejde. Ve speciální relativitě pak skutečnost, že $x_4$ musí být ryze imaginární, může vést k různým falešným spekulacím o „čase jako imaginárním čtvrtém rozměru“ apod. Proto v těchto skriptech uvedený přístup nepoužíváme. Běžně se s ním ovšem pracuje v celé řadě vysokoškolských učebnic i dalších knih, zabývajících se speciální teorií relativity; je tedy pravděpodobné, že se čtenář s tímto „*ict*-formalismem“ také setká. Pro informaci věnujeme proto vztahům STR v *ict*-formalismu dodatek I.

## VII.4. Obecná Lorentzova transformace

Až dosud jsme se při transformaci mezi dvěma inerciálními systémy *S* a *S’* omezovali na případ, kdy jejich osy *x* a *x’* byly rovnoběžné s rychlostí $\vec{u}$ vzájemného pohybu soustav – tj. na speciální Lorentzovu transformaci. Soustavy os u *S* a *S’* lze však ještě natočit. Výsledná transformace pak odpovídá pohybu *S’* vůči *S* v libovolném směru a libovolnému (pevnému) otočení soustavy souřadnic. Protože ani speciální Lorentzova transformace, ani otočení soustavy souřadnic nemění hodnotu čtyřintervalu, je zřejmé, že rovněž výsledná

**obecná Lorentzova transformace zachovává čtyřinterval.**

Formalismus uvedený v předchozím článku nám umožňuje vyjádřit obecnou Lorentzovu transformaci matematicky. Je dána vztahem

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} \qquad \text{(VII.19)}$$

kde $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ jsou konstanty. (Připomeňme si, že vztah (19) platí pro $\mu = 0,1,2 \text{ a } 3$ a sčítá se v něm přes $\nu$ od 0 do 3.) Konstanty $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ nemohou být ovšem libovolné. (Jinak by (19) bylo prostě lineární transformací mezi $x^{\mu}$ a $x'^{\mu}$.) Musí splňovat podmínku **zachování čtyřintervalu** $(\Delta s)^2$.

Musí tedy být

$$\eta_{\mu\nu} \Delta x'^{\mu} \Delta x'^{\nu} = \eta_{\alpha\beta} \Delta x^{\alpha} \Delta x^{\beta} \qquad \text{(VII.20)}$$

pro libovolné $\Delta x^{\rho}$.

Pozn.: Uvědomuje si čtenář jasně, co míníme tím, když říkáme „pro libovolné $\Delta x^{\rho}$“? (V (20) se index $\rho$ nevyskytuje!) Ovšem, znamená to „pro libovolnou čtveřici hodnot $\Delta x^0, \Delta x^1, \Delta x^2, \Delta x^3$“. A tyto hodnoty samozřejmě v (20) vystupují. (Kde?)

Protože pro rozdíl souřadnic $\Delta x^{\mu}$ plyne z (19) transformační vztah

$$\Delta x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\rho} \Delta x^{\sigma} \qquad \text{(VII.21)}$$

(jak?); co znamená záměna indexu $\nu$ v (19) indexem $\sigma$?), lze do podmínky (20) dosadit a získat

$$\left(\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\right)\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta} = \left(\eta_{\alpha\beta}\right)\Delta x^{\alpha}\Delta x^{\beta}. \qquad \text{(VII.22)}$$

Je zřejmé, že tato podmínka platí pokud

$$\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta} = \eta_{\alpha\beta}. \qquad \text{(VII.23)}$$

Uvážíme-li symetrii výrazů $\eta_{\mu\nu}\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}$ a $\eta_{\alpha\beta}$ v (22) vzhledem k záměně $\alpha$ a $\beta$, lze ukázat, že (22) je nejen postačující, ale i nutnou podmínkou platnosti (22) – a tedy i zachování $(\Delta s)^2$.

Formálně tedy můžeme definovat, že

obecná Lorentzova transformace je transformace (19), kde konstanty $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ splňují podmínku (23).

---

Tato definice je ovšem poněkud širší než charakteristika Lorentzovy transformace ze začátku tohoto článku. Zahrnuje totiž i inverzi času (záměnu *t* za –*t*) a prostorovou inverzi (změnu orientace všech tří os), což jsou transformace, které zjevně nelze dostat pohybem inerciálních systémů vůči sobě a natočením soustav souřadnic. Lze ale ukázat (blíže viz dodatek F), že „nevhodné“ transformace lze vyloučit dodatečnými požadavky na koeficienty $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$ ($\Lambda^{0}{}_{0} > 0$ a $\det|\Lambda| > 0$, kde $\Lambda$ chápeme jako matici se složkami $\Lambda^{\mu}{}_{\nu}$). Dostaneme tak množinu **vlastních Lorentzových transformací**, které již odpovídají fyzikální představě uvedené na začátku článku.

Lze totiž dokázat, že libovolná vlastní Lorentzova transformace opravdu popisuje pohyb *S’* vůči *S* nějakou rychlostí $\vec{v}$ ($v < c$) a natočení soustavy souřadnic. Speciálně lze ukázat, že již samotná podmínka (23) zaručuje, že k transformaci (19) existuje transformace **inverzní**

$$x^{\mu} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\mu}{}_{\nu}\, x'^{\nu}$$

---

Pro získání bližší představy si matici $\Lambda$ Lorentzovy transformace konkrétně vypíšeme pro případ speciální Lorentzovy transformace. Ta je dána vztahy

$$x'^0 = \frac{x^0 - \frac{v}{c}x^1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(x^0 - \beta x^1\right),$$

$$x'^1 = \frac{x^1 - \frac{v}{c}x^0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = \gamma\left(-\beta x^0 + x^1\right), \qquad \text{(VII.24)}$$

$$x'^2 = x^2, \quad x'^3 = x^3,$$

kde

$$\beta = \frac{v}{c}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \quad .$$

Lehce se můžeme přesvědčit, že (24) se dá zapsat jako

$$x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu},$$

kde

$$\Lambda_{\mu}^{\nu} = \begin{array}{c|c} & \nu = 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \\ \begin{array}{c} \mu = 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \qquad \text{(VII.25)}$$

Čtenář by si měl sám rozepsat $x'^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu} x^{\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{0} x^{0} + \Lambda^{\mu}{}_{1} x^{1} + \Lambda^{\mu}{}_{2} x^{2} + \Lambda^{\mu}{}_{3} x^{3}$ postupně pro $\mu = 0, 1, 2$ a $3$, aby se přesvědčil, že opravdu dostane transformaci (24).

---

Čtenář by si mohl položit ještě otázku:

**Jak se transformují veličiny s dolními indexy, např. $x_{\mu}$?**

Transformovat $x^{\mu}$ už umíme. Můžeme tedy v $S$ zvednout index $x_{\mu}$ (pomocí $\eta^{\alpha\beta}$), provést transformaci do $S'$ (získáme tím $x'^{\rho}$) a v $S'$ index opět snížit (pomocí $\eta_{\alpha\beta}$). (V $S$ a $S'$ snižujeme indexy pomocí téhož tenzoru $\eta_{\alpha\beta}$; jak jinak, když $S$ a $S'$ jsou rovnoprávné.) To odpovídá vztahu

$$x'_{\mu} = \eta_{\eta\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta} x_{\beta}.$$

Označíme-li

$$\Lambda_{\mu}{}^{\beta} \overset{\text{ozn.}}{=} \eta_{\eta\rho} \Lambda^{\rho}{}_{\alpha} \eta^{\alpha\beta}, \qquad \text{(VII.26)}$$

což si lze pamatovat jako obyčejné snížení a zvýšení indexů v $\Lambda^{\rho}{}_{\alpha}$ lze jednoduše psát

$$x'_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\beta} x_{\beta} \qquad \text{(VII.27)}$$

Lze dokázat, že matice $\Lambda_{\mu}{}^{\beta}$ souvisí s inverzní maticí k $\Lambda^{\alpha}{}_{\beta}$ vztahem

$$\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda_{\beta}{}^{\alpha}. \qquad \text{(VII.28)}$$

Důkaz, stejně jako další diskusi vlastností obecné Lorentzovy transformace, může čtenář najít v dodatku F.