VIII. Čtyřrozměrný formalismus speciální teorie relativity

VIII.1. Čtyřvektory

V „obyčejném" třírozměrném prostoru řekneme o trojici hodnot (např. u_1, u_2, u_3), že tvoří vektor, jestliže se při otočení soustavy souřadnic tyto hodnoty transformují stejně jako složky polohového vektoru $\vec{r}(x_1, x_2, x_3)$ resp. vektoru posunutí $\Delta\vec{r}(\Delta x_1, \Delta x_2, \Delta x_3)$.

Tolik téměř formální definice. Ve skutečnosti máme asi všichni intuitivní představu, že vektor je něco, co má velikost a směr, tedy něco, co lze reprezentovat orientovanou úsečkou. Např. vektor rychlosti $\vec{u}$ částice si asi běžně představíme a v grafickém znázornění nakreslíme jako úsečku se šipkou.

Souvisí nějak tato intuitivní představa se zmíněnou formální definicí?

Ovšemže souvisí, a to velmi těsně. Orientovaná úsečka není nic jiného než vektor posunutí $\Delta\vec{r}$ a tak není divu, že se složky veličiny, které lze touto orientovanou úsečkou reprezentovat, transformují stejně jako složky $\Delta\vec{r}$.

Díky formální definici tedy umíme transformovat složky vektoru. Ale intuitivní představa je také velmi důležitá. Zdůrazňuje totiž fakt, že vektor je něco, co existuje nezávisle na soustavě souřadnic. (Spojnice Praha-Brno zůstane stejná nezávisle na tom, jak bychom natočili síť souřadnic, s jejíž pomocí bychom danou oblast mapovali.) Složky vektoru se samozřejmě při otočení soustavy souřadnic mění, vektor sám však ne.

Vektory jsou pro fyziku velmi užitečným prostředkem. Může nás proto napadnout, že pro speciální teorii relativity by bylo výhodné mít obdobné veličiny i v prostoročase. A právě takovéto veličiny teď zavedeme.

Veličinu A nazveme **čtyřvektor**, jestliže se její čtyři složky A^μ transformují při Lorentzově transformaci stejně jako souřadnice x^μ, tj. podle vztahu

$$A'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu A^\nu , \qquad (\mu = 0,1,2,3) \tag{VIII.1}$$

kde $\Lambda^\mu{}_\nu$ je matice Lorentzovy transformace z inerciálního systému S do S'. A^α jsou složky čtyřvektoru v soustavě S, A'^α složky v soustavě S'.

Čtyřvektor může být charakterizován i složkami s dolními indexy (tzv. kovariantními složkami) A_μ . Snižování a zvyšování indexů provádíme pomocí Minkowského tenzorů:

$$\begin{aligned} A_\mu &= \eta_{\mu\alpha} A^\alpha \\ A^\rho &= \eta^{\rho\sigma} A_\sigma \end{aligned} \tag{VIII.2}$$

Snížením a opětovným zvýšením indexu dostaneme samozřejmě opět původní složku. (Ověřte!) Vzhledem k symetrii $\eta_{\alpha\beta} \left(\eta_{\alpha\beta} = \eta_{\beta\alpha}\right)$ platí též $A_\mu = \eta_{\alpha\mu} A^\alpha$ apod. Transformaci složek A_μ bychom mohli odvodit stejným postupem jako výše transformaci x_μ (viz text před (VII.27)) a s obdobným výsledkem:

$$A'_\mu = \Lambda_\mu{}^\beta A_\beta \tag{VIII.3}$$

kde $\Lambda_{\mu}^{\ \beta}$ je dáno vztahem (VII.26).

Poznámka ke značení: Čtyřvektory se obvykle značí velkými písmeny s řeckým indexem. V dalším budeme proto často mluvit o „čtyřvektoru A^{μ}“, „čtyřvektoru B_{α}“, apod. a budeme tím mít na mysli celý čtyřvektor A atd. a ne jeho určitou složku. Pokud budeme mluvit o složkách čtyřvektorů, vždy to explicite zdůrazníme, takže nedojde k nedorozumění.

Skalárním součinem čtyřvektorů A^{μ} a B^{μ} nazýváme výraz $A^{\mu} B_{\mu} \left(= \eta_{\mu\nu} A^{\mu} B^{\nu} = A_{\mu} B^{\mu}\right)$.

Po přetransformování do *S’* (pomocí (1) a (3) a využití (VII.28) dostaneme

$$A'^{\mu} B'_{\mu} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha} \Lambda_{\mu}^{\ \beta} A^{\alpha} B_{\beta} = \Lambda^{\mu}_{\ \alpha} \left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}_{\ \mu} A^{\alpha} B_{\beta} = \underbrace{\left(\Lambda^{-1}\right)^{\beta}_{\ \mu} \Lambda^{\mu}_{\ \alpha}}_{\delta_{\alpha}^{\beta}} A^{\alpha} B_{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta} A^{\alpha} B_{\beta} = A^{\alpha} B_{\alpha} . \quad \text{(VIII.4)}$$

(Součin matice Λ a inverzní matice Λ^{-1} dává jednotkovou matici, jejímiž složkami jsou $\delta_{\alpha}^{\ \beta}$.)
Vidíme, že:

Skalární součin čtyřvektorů se při Lorentzově transformaci nemění (je stejný, ať ho vyčíslíme v kterékoliv inerciální soustavě souřadnic).

Veličiny, které se při Lorentzově transformaci nemění, nazýváme **invarianty** nebo prostě **skaláry**. Příkladem skaláru je **čtyřinterval** $(\Delta s)^2$. Ze zápisu

$$(\Delta s)^2 = \Delta x^{\mu} \Delta x_{\mu}$$

vidíme okamžitě, proč je tomu tak: jde o skalární součin čtyřvektoru Δx^{μ} se sebou samým.

(Uvědomte si, že Δx^{μ} **je čtyřvektor**!)

V případě pohybující se částice je čtyřinterval událostí na její světočáře časový, $(\Delta s)^2 < 0$ (viz článek VII.2) a je vhodnější pracovat s **vlastním časem** τ. Pro události tak blízké, že pohyb částice mezi nimi lze považovat za rovnoměrný, je jeho přírůstek (viz (VII.5))

$$\Delta \tau = \sqrt{-\frac{1}{c^2} (\Delta s)^2} .$$

Vidíme tedy, že **vlastní čas je skalár**. V následujícím článku toho s výhodou použijeme.

Poznamenejme ještě, že **čtyřvektory lze sčítat a násobit skalárem**: jsou-li A^{μ} a B^{μ} čtyřvektory a k skalár, jsou

$$C^{\alpha} = A^{\alpha} + B^{\alpha} \quad \text{(VIII.5.a)}$$

a

$$D^{\alpha} = k A^{\alpha} \quad \text{(VIII.5.b)}$$

také čtyřvektory. (Uvědomte si, že čtyřvektory jsou tedy i výrazy, např. $\left(A^{\mu} A_{\mu}\right) A^{\alpha}$, $\left(A^{\rho} B_{\rho}\right) C_{\sigma}$ apod.) Příslušné operace se samozřejmě provádějí po složkách. Nelze ovšem sčítat či porovnávat složky s horními a dolními indexy: výrazu jako $A^{\alpha} + B_{\alpha}$ nebo $C^{\mu} = A_{\mu}$ nemají jako operace s čtyřvektory žádný smysl.

Na závěr zdůrazněme ještě skutečnost, že **čtyřvektory** jsou objekty v prostoročase, které **nezávisí na volbě soustavy souřadnic**. V různých soustavách souřadnic má čtyřvektor různé složky, ale jde stále o tentýž čtyřvektor. (Viz diskusi na začátku článku.) Proto zjistíme-li v jedné soustavě souřadnic, že např. dva čtyřvektory se rovnají, $A^\alpha = B^\alpha$ $(\alpha = 0,1,2,3)$, znamená to, že se rovnají i v libovolné jiné inerciální soustavě ($A'^\alpha = B'^\alpha$ v libovolném *S'*). Podobně platí-li vztah (5.a) v nějaké soustavě, platí v libovolné jiné inerciální soustavě – prostě čtyřvektor *C* je součtem čtyřvektorů *A* a *B*. Složky čtyřvektorů nám jen umožňují popsat situaci z hlediska zvolené soustavy souřadnic.

VIII.2. Relativistická mechanika ve čtyřrozměrném formalismu

Přejděme nyní od obecného matematického aparátu k fyzice. Jak s pomocí skalárů a čtyřvektorů popsat pohyb a vystihnout dynamiku částice?

a) Čtyřrychlost

Základní veličinou, která v mechanice charakterizuje pohyb částice, je rychlost. Rychlost vyjadřuje posunutí částice $\Delta\vec{r}$ za krátký časový interval Δt:

$$\vec{u} = \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}\ , \quad \text{resp.} \quad u_i = \frac{\Delta x_i}{\Delta t},$$

přesněji vzato samozřejmě v limitě $\Delta t \to 0$. Vzhledem k otočení soustavy souřadnic je $\Delta\vec{r}$ vektorem a Δt se nemění, je skalárem. $\vec{u}$ je proto vektor.

Obdobně můžeme postupovat i ve čtyřrozměrném formalismu: posunutí Δx^μ je čtyřvektorem. (Při Lorentzově transformaci je $\Delta x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \Delta x^\nu$.) Ovšem dělit Δx^μ přírůstkem času Δt by nemělo dobrý smysl: Δt není skalár, ale, až na faktor *c*, nultá složka čtyřvektoru. Při Lorentzově transformaci se mění. Podíl $\dfrac{\Delta x^\mu}{\Delta t}$ by se tedy při Lorentzově transformaci transformoval velmi komplikovaně a rozhodně by se nejednalo o čtyřvektor. K tomu, aby vznikl čtyřvektor, potřebujeme Δx^μ **dělit skalárem**.

Vhodný skalár naštěstí máme k dispozici. Je to přírůstek vlastního času $\Delta\tau$ (odpovídající danému posunutí Δx^μ). Veličina

$$U^\mu = \frac{\Delta x^\mu}{\Delta\tau} \qquad \text{(VIII.6)}$$

nazývaná **čtyřrychlost**, již čtyřvektorem je.

Vztah (6) si ovšem žádá jistého zpřesnění. Pro částici pohybující se nerovnoměrně musíme $\Delta\tau$ volit dostatečně malé, nebo ještě lépe: limitovat $\Delta\tau \to 0$. Pak podíl v pravé části (6) přejde v derivaci $\dfrac{dx^\mu}{d\tau}$.

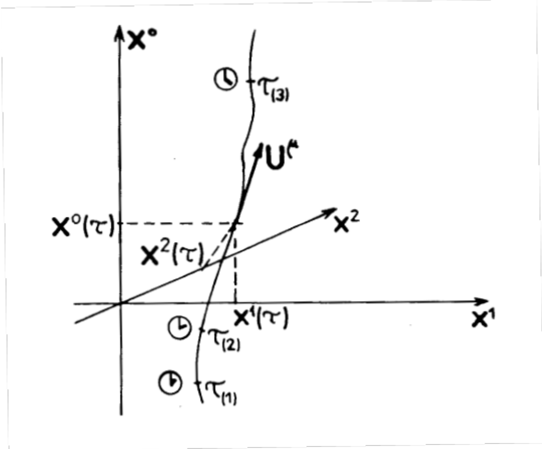
Jak derivovat x^μ podle τ?

Uvědomme si ještě jednou od začátku, jak je v prostoročase zachycen pohyb částice. Je vyjádřen světočárou, tj. spojitou křivkou, jejímiž body jsou události x^μ (znamenající výskyt částice na daném místě v daný čas). Vlastní čas τ částice je čas, který by naměřily hodiny, jež by se pohybovaly spolu s částicí. Každé hodnotě vlastního času odpovídá určitá hodnota

„souřadnicového“ času t a určité místo, v němž se částice v tomto okamžiku nachází – tedy určité hodnoty souřadnic x^0, x^1, x^2, x^3. (Pracujeme teď v jisté pevně zvolené inerciální soustavě S.) To znamená, že existují funkce

$$x^\mu = x^\mu(\tau); \tag{VIII.7}$$

vlastní čas světočáru parametrizuje. Situaci nám může názorněji přiblížit prostoročasový diagram nakreslený na obr.VIII.1.



Obr.VIII.1. Znázornění pohybu částice v prostoročasovém diagramu: parametrizace světočáry vlastním časem τ, čtyřrychlost jako tečný vektor ke světočáře.

Souřadnice částice jsou tedy funkcemi jediného parametru τ; lze je proto podle něj derivovat a definovat **čtyřrychlost** U^μ již přesně jako

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}. \tag{VIII.8}$$

Z geometrického hlediska je zřejmé, že U^μ je tečný čtyřvektor ke světočáře, tak jak to ukazuje obr.VIII.1. (Připomeňme si, že „obyčejná“ rychlost je tečným vektorem k trajektorii částice!)

Více nás však zajímá fyzikální hledisko. Všechny složky U^μ mají rozměr rychlosti a jsou derivacemi souřadnic částice podle času. Ovšem, ne podle času t, nýbrž podle vlastního času τ. To je ale vlastně nejlepší možný ze všech časů, podle nichž bychom mohli derivovat. Jediný je jednoznačně spjat s částicí samou (až na aditivní konstantu. která je dána okamžikem, v němž zvolíme $\tau = 0$) a nezávisí na něčem tak libovolném, jako je volba soustavy souřadnic. Je tedy definice (8) nejlepším možným způsobem, jak v prostoročase zavést veličinu s významem rychlosti.

Čtyřrychlost U^μ ovšem souvisí s „obyčejnou“ rychlostí $\vec{u}$ částice (jejíž složky budeme značit u_1, u_2, u_3 a její velikost u): Mezi τ a t totiž platí vztah (viz (IV.17))

$$\Delta\tau = \sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}\,\Delta t, \tag{VIII.9}$$

z něhož plyne

$$\frac{d\tau}{dt}=\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} \quad \text{a} \quad \frac{dt}{d\tau}=\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \tag{VIII.10}$$

Vlastní čas τ lze vyjádřit jako funkci t a funkce (7)

$$x^\mu = x^\mu(\tau) = x^\mu(\tau(t))$$

derivovat jako složené funkce:

$$U^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\cdot\frac{dx^\mu}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\cdot\frac{dx^\mu}{dt}.$$

$x^0 = ct$, takže $\frac{dx^0}{dt}=c$; pro $\mu = i = 1,2,3$ jsou pak $\frac{dx^i}{dt}$ složky rychlosti $\vec{u}$: $\frac{dx^i}{dt}=u_i$. (Pozn.: U prostorových složek nevadí, že index i píšeme dole, tak jak jsme zvyklí z klasické mechaniky, místo nahoře.) Význam složek U^μ je teď už zřejmý:

$$U^0 = \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \qquad U^i = \frac{u_i}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \quad \text{pro } i=1,2,3. \tag{VIII.11.a}$$

Tyto vztahy se často zapisují ve tvaru

$$U^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_2}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{u_3}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right), \tag{VIII.11.b}$$

který je analogický třírozměrnému zápisu $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$, a někdy ještě kompaktněji jako

$$U^\mu = \left(\frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}, \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right). \tag{VIII.11.c}$$

Čtyřvektor čtyřrychlosti je tedy „obyčejnou“ rychlostí $\vec{u}$ plně určen.

Z uvedených vztahů se můžeme lehce přesvědčit o tom, že pro velikost čtyřrychlosti platí

$$U^\mu U_\mu = -c^2. \tag{VIII.12}$$

Uměli byste tento užitečný vztah odvodit i jiným způsobem? (Návod: Užijte (6) a vztah mezi $(\Delta\tau)^2$ a $(\Delta s)^2$.)

A ještě jedna otázka:

Z (11) a (12) vidíme, že čtyřvektor U^μ není nikdy identicky roven nule, ani když částice v dané soustavě souřadnic stojí. Je to překvapující nebo naopak přirozené? A proč?

Nyní již můžeme postupovat rychleji. Analogicky ke čtyřrychlosti bychom mohli definovat **čtyřzrychlení** jako

$$A^{\mu} = \frac{dU^{\mu}}{d\tau}, \tag{VIII.13}$$

určovat jeho souvislost s vektorem zrychlení částice $\vec{a}$ a vyšetřovat jeho vlastnosti. Zvídavý čtenář si může sám odvodit, že čtyřzrychlení je kolmé na čtyřrychlost: $A^{\mu}U_{\mu} = 0$ - k důkazu je třeba derivovat (12) podle τ, ukázat, že hyperbolický pohyb vyšetřovaný v článku IV.4. je ve skutečnosti pohybem s konstantním čtyřzrychlením atd.

b) Čtyřhybnost

Nás teď bude spíše zajímat, jak zkonstruovat v daném formalismu veličinu, která by měla význam hybnosti. Zřejmě půjde opět o čtyřvektor.

Hybnost je součinem hmotnosti a rychlosti částice. Rychlost je charakterizována čtyřrychlostí U^{μ}. Je tedy přirozené definovat **čtyřhybnost** P^{μ} jako

$$P^{\mu} = m_0 U^{\mu} \tag{VIII.14}$$

kde m_0 je klidová hmotnost částice. **Klidová hmotnost částice** samozřejmě nezávisí na výběru soustavy souřadnic, **je** tedy **skalárem**. Součin skaláru a čtyřvektoru je opět čtyřvektorem:

P^{μ} **je tedy čtyřvektor**.

(Je zřejmé, proč jsme U^{μ} nemohli násobit ničím jiným než m_0, např. relativistickou hmotností *m*. Výsledkem by nebyl čtyřvektor, ale veličina s nějakými podivnými transformačními vlastnostmi, pro naše účely nepoužitelná.)

Dosazením (11) do (14) můžeme konkrétně vyjádřit složky P^{μ}. Uvážíme-li přitom, že $m_0 \Big/ \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}} = m; \quad m\vec{u} = \vec{p}$ a $mc^2 = E$, dostaneme

$$\left.\begin{aligned} P^0 &= \frac{E}{c} \\ P^i &= p_i \quad (i = 1,2,3) \\ \text{resp.} \qquad P^{\mu} &= \left(\frac{E}{c}, \vec{p}\right), \end{aligned}\right\} \tag{VIII.15}$$

kde *E* je energie částice a $\vec{p}$ její hybnost („obyčejná“, tj. vektor hybnosti). Tyto vztahy ukazují, jak teorie relativity spojuje energii a hybnost částice do jednoho objektu. Navíc z nich vidíme, že je to právě relativistická energie $E = mc^2$ a nikoli třeba kinetická energie $E - E_0$, která po vydělení *c* vystupuje jako nultá složka čtyřvektoru P^{μ}. To je další důkaz, proč chápat *E* jako základnější veličinu než třeba $E - E_0$.

Poznamenejme ještě, že vztahy (15) umožňují definovat čtyřhybnost i pro částice pohybující se rychlostí světla, pro něž U^{μ} neexistuje (je pro ně $\Delta\tau = 0$; viz též (11) pro $u = c$). P^{μ} je i v tomto případě tečný ke světločáře částice.

Protože P^μ je čtyřvektor, transformuje se při Lorentzově transformaci podle vztahů

$$P'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu P^\nu . \tag{VIII.16}$$

Ze vztahů (15) pak můžeme odvodit, jak se při ní transformuje energie a hybnost.

Konkrétně při speciální Lorentzově transformaci, kdy $\Lambda^\mu{}_\nu$ je dáno maticí (VII.25) je, jak si čtenář jako užitečné cvičení lehce sám ověří,

$$P'^0 = \gamma\left(P^0 - \beta P^1\right),$$
$$P'^1 = \gamma\left(P^1 - \beta P^0\right),$$
$$P'^2 = P^2,$$
$$P'^3 = P^3.$$

Dosazením složek (15) (a analogicky v S' $P'^0 = E'/c$ atd.) dostaneme v tomto případě transformační vztahy (V.33), které jsme v kapitole V. odvozovali poměrně zdlouhavě a těžkopádně. Zde vycházejí jako jednoduchý důsledek obecného a snadno zapamatovatelného vztahu (16).

Odvoďme ještě vztah pro velikost čtyřhybnosti. Z definice (14) a vztahu (12) okamžitě plyne, že

$$P^\mu P_\mu = -m_0^2 c^2 . \tag{VIII.17.a}$$

Po dosazení složek (15) a provedení skalárního součinu odtud dostaneme vztah mezi energií a hybností částice

$$-\frac{E^2}{c^2} + p^2 = -m_0^2 c^2 ,$$

resp.

$$E^2 = m_0^2 c^4 + p^2 c^2 , \tag{VIII.17.b}$$

který jsme již jiným postupem odvodili dříve (viz (V.34)). I v tomto případě je odvození pomocí 4-rozměrného formalismu jednodušší a vztah sám se lépe pamatuje. Poznamenejme ještě, že vztahy (17) platí i pro $m_0 = 0$, kdy (14) a (12) nelze použít.

c) Pohybová rovnice

Dosáhli jsme bodu, kdy nám formalismus umožňuje zapsat a dokonce v jistém smyslu i odvodit relativistickou pohybovou rovnici částice.

V klasické mechanice má pohybová rovnice tvar „derivace hybnosti podle času rovná se působící síle“. Zobecnění na relativistický případ je ve vybudovaném formalismu vcelku přímočaré: Na levé straně rovnice musí být derivace **čtyřhybnosti** a to samozřejmě nikoli podle času *t*, ale podle **vlastního času**, aby byl získán čtyřvektor. (Derivujeme čtyřvektor P^μ podle skaláru τ.)

Na pravé straně rovnice bude člen popisující silové působení na částici. Protože levá strana rovnice je čtyřvektor, musí být tento člen také čtyřvektor. Budeme ho nazývat **čtyřsíla** a značit $\widetilde{F}^\mu$.

Relativistická pohybová rovnice částice tedy musí mít tvar

$$\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \tilde{F}^{\mu} . \tag{VIII.18}$$

Výše uvedený postup nelze sice přísně vzato považovat za odvození, ale rozhodně je nejpřirozenějším zobecněním pohybové rovnice klasické mechaniky. Hledáme-li pohybovou rovnici, která má být takovým zobecněním a obsahovat čtyřvektory a skaláry, nutně dospějeme k rovnici (18).

Rozepišme nyní rovnici (18) do složek, abychom viděli jejich konkrétní význam. Nejprve si všimneme **prostorových složek** ($\mu = i = 1, 2, 3$). S využitím toho, že

$$\frac{dP^{\mu}}{d\tau} = \frac{dt}{d\tau}\,\frac{dP^{\mu}}{dt} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{dP^{\mu}}{dt} \tag{VIII.19}$$

(viz (10)) a toho, že $P^i = p_i$ (viz (15)), dostáváme z (18) rovnici

$$\frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\,\frac{dp_i}{dt} = \tilde{F}^i$$

a po vynásobení $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$ a dosazení za p_i pak

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 u_i}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\tilde{F}^i . \tag{VIII.20}$$

To je ale pohybová rovnice

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{m_0 \vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right) = \vec{F} ,$$

jak ji známe z kapitoly V. (viz (V.16)). Vidíme zároveň, že prostorové složky čtyřsíly $\tilde{F}^i$ souvisí se složkami F_i vektoru síly $\vec{F}$ vztahem

$$\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\tilde{F}^i = F_i ,$$

resp.

$$\tilde{F}^i = \frac{F_i}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} . \tag{VIII.21}$$

Časová (nultá, $\mu = 0$) **složka** pohybové rovnice (18) dává (viz (19))

$$\frac{dP^0}{dt} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\tilde{F}^0$$

a po dosazení (15) a vynásobení *c* nakonec

$$\frac{dE}{dt} = c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\,\tilde{F}^0 . \tag{VIII.22}$$

Změna energie částice za jednotku času je výkon $\mathscr{P}$ dodávaný částici $\left(\frac{dE}{dt} = \mathscr{P}\right)$. Výraz na pravé straně (22) musí tedy být výkon působících sil. Odtud dostáváme interpretaci nulté složky čtyřsíly:

$$\tilde{F}^0 = \frac{\mathscr{P}}{c\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} \tag{VIII.23}$$

Tuto interpretaci můžeme podpořit i jinak. Vynásobíme-li pohybovou rovnici (18) U_μ a dosadíme do ní $P^\mu = m_0 U^\mu$ dostaneme

$$U_\mu \frac{d}{d\tau}\left(m_0 U^\mu\right) = U_\mu \tilde{F}^\mu$$

a po rozderivování levé strany

$$\left(U_\mu U^\mu\right)\frac{dm_0}{d\tau} + m_0\left(U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}\right) = U_\mu \tilde{F}^\mu . \tag{VIII.24}$$

Derivací (12) podle τ zjistíme, že $\frac{dU^\mu}{d\tau}U_\mu + U^\mu \frac{dU_\mu}{d\tau} = 0$, a protože $U^\mu \frac{dU_\mu}{d\tau} = U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau}$ (viz výše definici skalárního součinu čtyřvektorů), plyne odtud

$$U_\mu \frac{dU^\mu}{d\tau} = 0 .$$

Protože navíc $U_\mu U^\mu = -c^2$, dává (24) po úpravě výsledek

$$-c^2 \frac{dm_0}{d\tau} = U_\mu \tilde{F}^\mu . \tag{VIII.25}$$

Vidíme, že formalismus může vystihnout i situaci, kdy se vlivem vnějšího působení mění klidová hmotnost částice $\left(\frac{dm_0}{d\tau} \neq 0\right)$. To není tak zcela absurdní, jak se může zdát.

Například stojící začerněná kulička, na níž dopadá ze všech stran světlo, pohlcuje energii a její celková energie – a tedy i hmotnost – proto vzrůstá. Protože kulička je v klidu, jde o vzrůst klidové hmotnosti.

Přesto však takové případy z dalších úvah vyloučíme a budeme uvažovat jen takové situace, v nichž je $m_0 = konst$. Pak z (25) nutně plyne, že

$$U_\mu \tilde{F}^\mu = 0 , \tag{VIII.26}$$

tedy **čtyřsíla je kolmá na čtyřrychlost**. Protože $U_\mu = \left(-c/\sqrt{1-u^2/c^2}\,,\, \vec{u}/\sqrt{1-u^2/c^2}\right)$, je

$$U_\mu \tilde{F}^\mu = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(-c\cdot\tilde{F}^0 + u_i\tilde{F}^i\right) = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\left(-c\cdot\tilde{F}^0 + \frac{u_i F^i}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}\right). \tag{VIII.27}$$

(Zde jsme již dosadili za $\tilde{F}^i$ z (21).) Kombinací (26) a (27) (a $u_i F_i = \vec{u} \cdot \vec{F}$) nakonec dostáváme

$$\tilde{F}^0 = \frac{\vec{u} \cdot \vec{F}}{c\sqrt{1 - \frac{u^2}{c^2}}}.$$

Součin $\vec{u} \cdot \vec{F}$ je ovšem výkon působící síly, takže opět dostáváme (23).

Vztahy (21) a (23) spojující sílu a výkon síly s $\tilde{F}^\mu$ nemusí sloužit jen k interpretaci složek čtyřsíly. Umožnily by nám též určit, jak se síla a výkon transformují při Lorentzově transformaci. Stačilo by vyjít z transformace čtyřsíly

$$\tilde{F}'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu \tilde{F}^\nu . \qquad \text{(VIII.28)}$$

Odvození vztahů pro F_i' a $\mathscr{P}'$ v případě speciální Lorentzovy transformace si z nich může provést čtenář sám jako užitečné cvičení a po odvození srovnat s (V.28).

d) Význam 4-rozměrného formalismu

Doplňme diskusi o pohybové rovnici ještě jednou důležitou otázkou:

Je pro pohybovou rovnici 4-rozměrný formalismus cenný jen tím, že ji umožňuje kompaktně zapsat a že ji umožnil vyvodit jako přímočaré zobecnění pohybové rovnice klasické mechaniky? Je to jediná cena zápisu (18)?

Samozřejmě, jde o víc. Ve tvaru (18) obsahuje pohybová rovnice jen čtyřvektory a skaláry – tedy jen veličiny, nezávislé na volbě soustavy souřadnic. (Viz diskusi v článku VIII.1.) To znamená, že sama **pohybová rovnice nezávisí na volbě soustavy souřadnic**.

Čtenář může namítnout, že rovnice je ale zapsána v nějaké soustavě souřadnic *S*; v zápise

$$\frac{dP^\mu}{d\tau} = \tilde{F}^\mu \qquad \text{(VIII.29)}$$

se přece vyskytují složky čtyřvektorů P^μ a $\tilde{F}^\mu$, a ty jsou přece v různých inerciálních soustavách různé.

Ovšem po vynásobení obou stran této rovnice $\Lambda^\alpha{}_\mu$, vysčítání přes μ a využití toho, že $\Lambda^\alpha{}_\mu$ jsou konstanty, získáme

$$\frac{d}{d\tau}\left(\Lambda^\alpha{}_\mu P^\mu\right) = \Lambda^\alpha{}_\mu \tilde{F}^\mu ,$$

čili (viz (16) a (28))

$$\frac{dP'^\mu}{d\tau} = \tilde{F}'^\mu .$$

Vidíme, že v libovolném jiném inerciálním systému *S'* má pohybová rovnice stejný tvar jako v *S* – tj. je stejným způsobem složena z veličin odpovídajících danému systému (měřených v daném systému). **Zápis (18) ($\equiv$(29)) tedy jasně ukazuje, že**

relativistická pohybová rovnice má ve všech inerciálních systémech stejný tvar.

(Jinak řečeno, její tvar se nemění při Lorentzově transformaci.)

To ale neznamená nic víc a nic méně, než že rovnice **vyhovuje speciálnímu principu relativity**.

A právě zde můžeme vidět jednu z největších předností 4-rozměrného formalismu:

Tím, že se nám podaří zapsat určitý fyzikální zákon pomocí skalárů a čtyřvektorů, máme automaticky zajištěno, že tento zákon vyhovuje speciálnímu principu relativity – tedy základnímu požadavku, který musí fyzikální zákony ve speciální teorii relativity splňovat.

V pohybové rovnici jsme dosud nevyjádřili čtyřsílu v případě nějakého konkrétního silového působení. Uděláme to pro případ pohybu nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli, který jsme již diskutovali v kap.V. Nejprve se ale musíme seznámit s tím, jak ve 4-rozměrném formalismu vyjádřit veličiny popisující pole ($\vec{E}$ a $\vec{B}$). Ukazuje se, že to není možné čtyřvektorem, ale je nutné použít veličinu tenzorového charakteru. Nemůžeme se tedy vyhnout ani následujícímu stručnému seznámení s tenzory ve 4-rozměrném formalismu – i když je omezíme jen na nejnutnější míru.

VIII.3. Čtyřtenzory

Čtyřtenzor druhého řádu je veličina, jejíž složky $T^{\mu\nu}$ se při Lorentzově transformaci transformují podle vztahu

$$T'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}T^{\alpha\beta}. \tag{VIII.30.a}$$

Čtyřtenzor druhého řádu má tedy 16 složek. Lze jej samozřejmě charakterizovat i složkami s dolními indexy $T_{\alpha\beta}$, které se transformují pomocí matice $\Lambda_{\mu}{}^{\nu}$

$$T'_{\rho\sigma} = \Lambda_{\rho}{}^{\alpha}\Lambda_{\sigma}{}^{\beta}T_{\alpha\beta} \tag{VIII.30.b}$$

a také smíšenými složkami $T^{\alpha}{}_{\beta}$ nebo $T_{\alpha}{}^{\beta}$, které se transformují tak, jak to odpovídá poloze jejich indexů:

$$T'^{\alpha}{}_{\beta} = \Lambda^{\alpha}{}_{\iota}\Lambda_{\beta}{}^{\kappa}T^{\iota}{}_{\kappa}, \quad T'_{\alpha}{}^{\beta} = \Lambda_{\alpha}{}^{\iota}\Lambda^{\beta}{}_{\kappa}T_{\iota}{}^{\kappa}. \tag{VIII.30.c}$$

Snižování a zvyšování indexů se provádí pomocí Minkowského tenzoru:

$$\begin{aligned} &T_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\mu}\eta_{\beta\nu}T^{\mu\nu}; \quad T_{\alpha}{}^{\rho} = \eta_{\alpha\beta}T^{\beta\rho} \\ &T^{\rho\sigma} = \eta^{\sigma\beta}T^{\rho}{}_{\beta} = \eta^{\rho\alpha}\eta^{\sigma\beta}T_{\alpha\beta}\ldots \quad \text{atd.} \end{aligned} \tag{VIII.31}$$

Místo o „čtyřtenzorech“ budeme v dalším pro jednoduchost mluvit pouze o tenzorech; pojmu „čtyřtenzor“ užijeme jen tam, kde by mohlo dojít k záměně s „obyčejnými“ tenzory ve třírozměrném prostoru.

Jeden příklad tenzoru 2. řádu už známe – je to Minkowského tenzor $\eta_{\alpha\beta}$. Ze vztahu (VII.23) lze odvodit, že se transformuje podle vztahu $\eta_{\rho\sigma} = \Lambda_{\rho}{}^{\alpha}\Lambda_{\sigma}{}^{\beta}\eta_{\alpha\beta}$, tj. podle (30.b) s tím, že složky $\eta'_{\rho\sigma}$ jsou i v nové soustavě *S'* tytéž jako v *S* – viz (VII.13). Minkowského tenzor má tedy ve všech inerciálních soustavách souřadnic tytéž složky $\eta_{\alpha\beta}$.

Na základě výše uvedeného by čtenář zřejmě již sám uměl definovat tenzory vyšších řádů a napsat vztahy, pomocí nichž se transformují. Obecně mají tyto vztahy vždy tvar

$$T'^{\mu\nu\ldots}{}_{\rho\sigma\ldots} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda^{\nu}{}_{\beta}\ldots\Lambda_{\rho}{}^{\iota}\Lambda_{\sigma}{}^{\kappa}\cdots T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\iota\kappa\ldots} \tag{VIII.30.d}$$

Řád tenzoru je roven počtu indexů. Podle toho lze tedy říci, že **čtyřvektor je (čtyř)tenzor 1. řádu a skalár je (čtyř)tenzor nultého řádu**. Odpovídají tomu i pravidla pro transformaci čtyřvektoru a skalárů.

Jaké **operace** můžeme **s tenzory** provádět?

Sčítání:

např. $W^{\alpha\beta}{}_{\gamma} = V^{\alpha\beta}{}_{\gamma} + T^{\alpha\beta}{}_{\gamma}$.

Sčítat lze jen tenzory stejného řádu a se stejně uspořádanými indexy. Výsledkem je tenzor téhož řádu.

Násobení skalárem:

např. $W_{\mu\nu} = kT_{\mu\nu}$.

Výsledkem je tenzor téhož řádu.

Násobení (tenzorové):

např. $W^{\alpha\beta}{}_{\mu\rho}{}^{\sigma} = T^{\alpha\beta}{}_{\mu}\, V_{\rho}{}^{\sigma}$.

Výsledkem je tenzor, jehož řád je součtem řádů obou součinitelů. Např. $A^{\mu}B^{\nu}$ je tenzor 2. řádu.

Úžení: kdy jeden horní a jeden dolní index jsou stejné a sčítá se přes ně od 0 do 3:

např. $W^{\alpha\beta}{}_{\mu} = T^{\alpha\rho\beta}{}_{\mu\rho}$.

V tomto případě je ρ tzv. němý index; α, β a μ jsou volné indexy.

Úžení snižuje řád tenzoru o 2.

Další příklady na úžení:

$T^{\alpha\mu}{}_{\mu}$ je 4-vektor (tenzor 1. řádu),

$T^{\rho}{}_{\rho}$ je skalár (tenzor nultého řádu),

$A^{\alpha}B_{\beta}$ je tenzor 2. řádu, $A^{\alpha}B_{\alpha}$ je tenzor nultého řádu vzniklý z něj úžením (v tomto případě jde o skalární součin, zavedený již výše),

$T^{\alpha}{}_{\mu}A^{\mu}$ je 4-vektor, atd.

Typ výsledku je tedy určen jednoduchým pravidlem – je dán počtem indexů, které zbydou volné. Čtenáři si mohou sami ověřit, že transformační vlastnosti výsledných tenzorů tomu odpovídají. Stačí uvážit, že $\Lambda^{\mu}{}_{\alpha}\Lambda_{\mu}{}^{\beta} = \delta_{\alpha}{}^{\beta}$.

Je-li tenzor funkcí souřadnic, lze jej parciálně **derivovat**:

$$\frac{\partial T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\iota\kappa\ldots}}{\partial x^{\mu}} \overset{\text{ozn.}}{=} T^{\alpha\beta\ldots}{}_{\iota\kappa\ldots,\mu} \quad .$$

Speciálně pro funkci $f = f\left(x^0, x^1, x^2, x^3\right)$ budeme tedy značit

$$\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}} \overset{\text{ozn.}}{=} f,_{\mu}$$

Použitý zápis $f,_{\mu}$ vypadá jako čtyřvektor. Tak tomu ale opravdu je, neboť v S' je

$$f',_{\mu} = \frac{\partial f}{\partial x'^{\mu}} = \frac{\partial x^{\alpha}}{\partial x'^{\mu}} \frac{\partial f}{\partial x^{\alpha}} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu} f,_{\alpha} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha} f,_{\alpha} .$$

(Zde jsme využili toho, že $x^{\alpha} = \left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu} x^{\mu}$ a $\left(\Lambda^{-1}\right)^{\alpha}{}_{\mu} = \Lambda_{\mu}{}^{\alpha}$ – viz (VII.28.).)

$f,_{\mu}$ je analogií gradientu – mohli bychom mluvit o **čtyřgradientu** funkce *f*. Vidíme, že čtyřgradient je čtyřvektor s jedním **dolním** indexem.

(Poznámka: Zde jsme vlastně mimochodem narazili na jeden z podstatných důvodů, proč se ve formalismu rozlišují horní a dolní indexy: souřadnice a čtyřgradient se transformují různě – souřadnice jako čtyřvektor s horním indexem, čtyřgradient jako čtyřvektor s dolním indexem. V třírozměrném euklidovském prostoru se složky polohového vektoru i gradientu transformují stejně, horní a dolní indexy proto není třeba rozlišovat.)

Podobně jako u $f,_{\mu}$ je tomu třeba u parciální derivace obecného tenzoru. Derivace přidává jeden dolní index a zvyšuje tedy řád tenzoru o 1. Např. parciální derivace čtyřvektoru $A^{\alpha},_{\beta}$ tvoří tenzor 2. řádu. Úžením lze řád snížit:

$A^{\alpha},_{\alpha}$ je skalár. Jde o analogii divergence a proto o něm mluvíme jako o **čtyřdivergenci** čtyřvektoru A^{μ}.

VIII.4. Teorie elektromagnetického pole ve čtyřrozměrném formalismu

V tomto článku ukážeme, jak lze ve 4-rozměrném formalismu jednoduše vyjádřit vztahy teorie elektromagnetického pole. Nepůjde přitom ani tak o přísně deduktivní odvozování vztahů jako spíše o ukázku, jak vztahy již známé nabývají ve formalismu jednoduchý a přirozený tvar.

a) Tenzor elektromagnetického pole

Vektory elektrické intenzity a magnetické indukce $\vec{E}$ a $\vec{B}$ nelze doplnit na čtyřvektory. Ostatně, při Lorentzově transformaci se složky $\vec{E}$ a $\vec{B}$ vzájemně promíchávají (viz (VI.11)), což naznačuje, že tyto vektory je nutno zkombinovat do jediného objektu. Ukazuje se, že jejich vhodným spojením je čtyřtenzor $F^{\mu\nu}$ se složkami

$$F^{0i} = \frac{E_i}{c}, \quad F^{ij} = \varepsilon_{ijk} B_k, \quad F^{\beta\alpha} = -F^{\alpha\beta}, \tag{VIII.32.a}$$

tj.

$$F^{\mu\nu} = \begin{array}{c|c} & \nu = 0 \quad\quad 1 \quad\quad 2 \quad\quad 3 \\ \begin{array}{c} \mu = 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} & \begin{pmatrix} 0 & \frac{E_1}{c} & \frac{E_2}{c} & \frac{E_3}{c} \\ -\frac{E_1}{c} & 0 & B_3 & -B_2 \\ -\frac{E_2}{c} & -B_3 & 0 & B_1 \\ -\frac{E_3}{c} & B_2 & -B_1 & 0 \end{pmatrix} \end{array} \tag{VIII.32.b}$$

V (32.a) se ve výraze $\varepsilon_{ijk} B_k$ sčítá vždy přes k od 1 do 3 – připomínáme, že takto se sčítá vždy přes opakující se latinské indexy.

Čtyřtenzor $F^{\mu\nu}$ se nazývá **tenzor elektromagnetického pole**. Lze jej samozřejmě charakterizovat i složkami s dolními indexy $F_{\mu\nu}$ – ty se od $F^{\mu\nu}$ liší jen změnou znaménka E_i, jak lze lehce ověřit. $F^{\mu\nu}$ i $F_{\mu\nu}$ jsou antisymetrické vzhledem k záměně indexů μ a ν.

Vektory $\vec{E}$ a $\vec{B}$ nejsou v $F^{\mu\nu}$ zkombinovány libovolně, ale tak, aby byly vystiženy jejich transformační vlastnosti. Čtenář může sám jednoduše ověřit, že z transformačního vztahu pro $F^{\mu\nu}$:

$$F'^{\mu\nu} = \Lambda^{\mu}{}_{\alpha} \Lambda^{\nu}{}_{\beta} F^{\alpha\beta} \tag{VIII.33}$$

plynou po dosazení matice speciální Lorentzovy transformace (VII.25) příslušné vztahy pro transformaci $\vec{E}$ a $\vec{B}$ (viz (VI.11)).

Poznámka: Při tomto ověřování doporučujeme čtenáři, aby si nejprve rozepsal (33) jako

$$\begin{aligned} F'^{\mu\nu} = {} & \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{0} F^{00} + \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{1} F^{01} + \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{2} F^{02} + \Lambda^{\mu}{}_{0}\Lambda^{\nu}{}_{3} F^{03} + \\ & + \Lambda^{\mu}{}_{1}\Lambda^{\nu}{}_{0} F^{10} + \Lambda^{\mu}{}_{1}\Lambda^{\nu}{}_{1} F^{11} + \Lambda^{\mu}{}_{1}\Lambda^{\nu}{}_{2} F^{12} + \Lambda^{\mu}{}_{1}\Lambda^{\nu}{}_{3} F^{13} + \\ & + \Lambda^{\mu}{}_{2}\Lambda^{\nu}{}_{0} F^{20} + \Lambda^{\mu}{}_{2}\Lambda^{\nu}{}_{1} F^{21} + \Lambda^{\mu}{}_{2}\Lambda^{\nu}{}_{2} F^{22} + \Lambda^{\mu}{}_{2}\Lambda^{\nu}{}_{3} F^{23} + \\ & + \Lambda^{\mu}{}_{3}\Lambda^{\nu}{}_{0} F^{30} + \Lambda^{\mu}{}_{3}\Lambda^{\nu}{}_{1} F^{31} + \Lambda^{\mu}{}_{3}\Lambda^{\nu}{}_{2} F^{32} + \Lambda^{\mu}{}_{3}\Lambda^{\nu}{}_{3} F^{33} \quad , \end{aligned}$$

pak využil antisymetrie $F^{\alpha\beta}$, z níž speciálně plyne, že $F^{00} = F^{11} = F^{22} = F^{33} = 0$ a teprve pak konkrétně vyjadřoval $E'_1 = cF'^{01}, \ldots \quad B'_1 = F'_{23}, \ldots$ atd.

Vztah (33) je jistě kompaktnější a jednodušší k zapamatování, než vztahy (VI.11). Je ovšem i podstatně obecnější, neboť vystihuje transformaci $\vec{E}$ a $\vec{B}$ při libovolné Lorentzově transformaci. (Poznámka: Lze samozřejmě ukázat, že (33) správně vystihuje transformaci složek $\vec{E}$ a $\vec{B}$ i při otočení os soustavy souřadnic. Pro E_i je příslušný důkaz jednoduchý a čtenář si ho může provést sám, pro B_i by byl komplikovanější.)

Pro doplnění uveďme, že ve 4-rozměrném formalismu lze jednoduše pracovat i s potenciály elektromagnetického pole. Ukazuje se, že skalární potenciál φ a vektorový potenciál $\vec{A}$ lze zkombinovat do čtyřvektoru

$$A^{\mu} = \left(\frac{\phi}{c},\, \vec{A}\right), \text{ resp. } A_{\mu} = \left(-\frac{\phi}{c},\, \vec{A}\right) \tag{VIII.34}$$

zvaného **čtyřpotenciál**. Tomu odpovídají i transformační vztahy pro potenciály. Složky tenzoru elektromagnetického pole jsou dány parciálními derivacemi A_{μ} jako

$$F_{\mu\nu} = A_{\nu},_{\mu} - A_{\mu},_{\nu}\,. \tag{VIII.35}$$

Snadno se můžeme přesvědčit, že to odpovídá obvykle užívaným vztahům. Např. pro $\mu = 0,\ \nu = 1$ dává (35)

$$F_{01} = A_1,_0 - A_0,_1 = \frac{\partial A_1}{\partial x^0} - \frac{\partial\left(-\frac{\phi}{c}\right)}{\partial x^1} = \frac{1}{c}\frac{\partial A_1}{\partial t} + \frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial x}$$

a odtud $E_1 = -cF_{01} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial t}$, což je složkou známého vztahu $\vec{E} = -\operatorname{grad}\phi - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t}$. Podobně je tomu pro další složky.

Čtyřpotenciál není samozřejmě určen jednoznačně. Jak můžeme ověřit dosazením do (35), přičteme-li k A_{μ} čtyřgradient libovolné („rozumné“) skalární funkce souřadnic,

$$\tilde{A}_{\mu} = A_{\mu} + f,_{\mu}\,,$$

tenzor $F^{\mu\nu}$ se nemění. Je totiž $f,_{\mu\nu} - f,_{\nu\mu} \equiv \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\mu}}\right) - \frac{\partial}{\partial x^{\mu}}\left(\frac{\partial f}{\partial x^{\nu}}\right) = 0$, neboť pořadí derivování je zaměnitelné. (O f předpokládáme, že má spojité druhé parciální derivace. Podobné předpoklady nebudeme již dále explicite zdůrazňovat.)

b) Lorentzova čtyřsíla

Lorentzova síla závisí na veličinách popisujících elektromagnetické pole ($\vec{E}$ a $\vec{B}$), na rychlosti částice $\vec{u}$ a elektrickém náboji částice q. Ve 4-rozměrném formalismu to znamená, že vektor čtyřsíly musí být „zkonstruován“ z tenzoru $F^{\mu\nu}$, čtyřvektoru U^{α} a skaláru q. (Náboj částice je stejný ve všech inerciálních systémech, je tedy skalárem podobně jako m_0.) Výsledek by přitom měl na uvedených veličinách záviset lineárně. (Proč? Uvědomte si, jak vypadá vektorové vyjádření Lorentzovy síly.) Pak je lze do čtyřvektoru zkombinovat prakticky jediným způsobem:

$$\tilde{F}^{\mu}_{\text{Lor.}} = qF^{\mu\nu}U_{\nu}\,. \tag{VIII.36}$$

Výraz (36) bychom samozřejmě mohli násobit libovolnou konstantou (skalárem), ale jeho rozepsáním do složek zjistíme, že právě on odpovídá Lorentzově síle:

pro $\mu = i\ (=1, 2, 3)$ je

$$\tilde{F}^{i}_{\text{Lor.}} = q\left[F^{i0}U_0 + F^{ij}U_j\right] = q\left[\left(-\frac{E_i}{c}\right)\left(\frac{-c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right) + \varepsilon_{ijk}B_k\frac{u_j}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\right] =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-u^2/c^2}}\, q\left[E_i + \varepsilon_{ijk}u_jB_k\right]\ ;$$

pro vektor síly odpovídající $\tilde{F}^{\mu}_{\text{Lor.}}$ ($F_{\text{Lor.}\,i} = \sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}\tilde{F}^{i}_{\text{Lor.}}$, viz (21)) je tedy opravdu

$$\vec{F}_{\text{Lor.}} = q\left(\vec{E} + \vec{u}\times\vec{B}\right).$$

Složka $\mu = 0$ dá též očekávaný výsledek (viz (23)):

$$\tilde{F}^{0}_{\text{Lor.}} = qF^{0i}U_i = q\frac{E_i}{c}\frac{u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\left(q\vec{E}\cdot\vec{u}\right)}{c\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\left(\vec{F}_{Lor.}\cdot\vec{u}\right)}{c\sqrt{1-u^2/c^2}}.$$

Pohybová rovnice nabité částice ve vnějším elektromagnetickém poli je tedy

$$\frac{d}{d\tau}\left(m_0U^{\mu}\right) = qF^{\mu\nu}U_{\nu}\,. \qquad \text{(VIII.37)}$$

Klidovou hmotnost m_0 částice je možno z derivace vytknout, neboť $m_0 = \text{konst.}$; silové působení (viz 25) m_0 nemění.

Lorentzova čtyřsíla je totiž kolmá na čtyřrychlost:

$$\tilde{F}^{\mu}_{\text{Lor.}}U_{\mu} = q\cdot F^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu} = 0$$

díky tomu, že jde o součin veličiny antisymetrické v μ a ν ($F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$) a veličiny symetrické v μ a ν ($U_{\mu}U_{\nu} = U_{\nu}U_{\mu}$).

Je to zřejmé z úpravy $F^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu} = -F^{\nu\mu}U_{\nu}U_{\mu} = -F^{\alpha\beta}U_{\alpha}U_{\beta} = -F^{\mu\nu}U_{\mu}U_{\nu}$; že z $a = -a$ plyne $a = 0$ je již jisté.

Připomeňme ještě jednou úvahy k článku VIII.2.d:

Pohybová rovnice (37) má zjevně ve všech inerciálních systémech stejný tvar. Čtenář se o tom může přesvědčit přímo přetransformováním (36) z *S* do *S’*.

Analogicky to ale platí zcela pro libovolnou rovnici tvaru tenzor = tenzor.
Tenzorový zápis fyzikálních zákonů zaručuje, že vyhovují speciálnímu principu relativity.

Při konkrétním zápisu daného fyzikálního zákona (ve složkách) v určité inerciální soustavě pak do něj samozřejmě dosazujeme veličiny vztažené k této soustavě. Např. do složek $F^{\mu\nu}$ v (37) dosazujeme složky $\vec{E}$ a $\vec{B}$ měřené v této inerciální soustavě apod.

c) Maxwellovy rovnice

K zápisu Maxwellových rovnic potřebujeme kromě $F^{\mu\nu}$ ještě zdrojový člen obsahující hustotu náboje (ρ) a hustotu proudu ($\vec{j}$). Pohled na transformační vztahy (VI.15) pro ρ a $\vec{j}$ ukazuje, že je lze zkombinovat do čtyřvektoru

$$j^{\mu} = \left(c\rho, \vec{j} \right), \qquad \text{(VIII.38)}$$

nazývaného **hustota čtyřproudu**. (Pozn.: Zde výjimečně užíváme pro označení 4-vektoru malé písmeno.)

Maxwellovy rovnice ve vakuu pak lze psát ve tvaru

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu} = \mu_0 j^{\mu} \qquad \text{(1. série)}, \qquad \text{(VIII.39.a)}$$

$$F_{[\alpha\beta,\gamma]\,\text{cykl.}} = 0 \qquad \text{(2. série)}, \qquad \text{(VIII.39.b)}$$

kde $F_{[\alpha\beta,\gamma]\,\text{cykl.}} \equiv F_{\alpha\beta,\gamma} + F_{\beta\gamma,\alpha} + F_{\gamma\alpha,\beta}$ je jen označení zavedené pro krátkost zápisu a μ_0 je permeabilita vakua.

Rozepsáním do složek se můžeme přesvědčit, že (39) jsou skutečně Maxwellovy rovnice:

- (39.a) dává pro $\mu = 0$ konkrétně

$$F^{0i}{}_{,i} = \mu_0 c\rho ,$$

čili $\left(F^{0i} = E_i / c\right)$: $\dfrac{\partial E_i}{\partial x_i} = \mu_0 c^2 \rho = \dfrac{\rho}{\varepsilon_0}$, tj.

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho .$$

- pro $\mu = i \ (=1, 2, 3)$ je (39.a)

$$\mu_0 j^i = F^{i0}{}_{,0} + F^{ij}{}_{,j} = \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{E_i}{c} \right) + \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\varepsilon_{ijk} B_k \right) = -\frac{1}{c^2}\frac{\partial E_i}{\partial t} + \varepsilon_{ijk}\frac{\partial B_k}{\partial x_j} = -\mu_0\varepsilon_0 \frac{\partial E_i}{\partial t} + \mu_0 \varepsilon_{ijk}\frac{\partial H_k}{\partial x_j}, \text{ tj.}$$

$$\operatorname{rot} \vec{H} - \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \vec{j} .$$

- (39.b) dává pro $\alpha = 1, \quad \beta = 2, \quad \gamma = 3$

$$F_{12,3} + F_{23,1} + F_{31,2} = 0 ,$$

čili (po dosazení (32)) $\dfrac{\partial B_3}{\partial x_3} + \dfrac{\partial B_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial B_2}{\partial x_2} = 0$, tj.

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 .$$

- Pro $\alpha = 0, \quad \beta = i, \quad \gamma = j$ vedou (39.b) k rovnici

$$\operatorname{rot} \vec{E} + \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0 ;$$

ověření již ponecháváme čtenáři jako užitečné cvičení.

Tenzorový zápis Maxwellových rovnic je podstatně kompaktnější než běžný zápis ve vektorovém tvaru. Je z něj též okamžitě vidět, že Maxwellovy rovnice jsou invariantní vůči

Lorentzově transformaci. Navíc výše uvedený rozpis rovnic (39) utvrzuje v interpretaci složek $F^{\mu\nu}$ (vztahy (32)).

Pro doplnění uveďme i rovnice pro čtyřpotenciál A^{μ}. Již samo **zavedení čtyřpotenciálu**, resp. vyjádření $F^{\mu\nu}$ pomocí vztahu (35) automaticky **zaručuje splnění druhé série Maxwellových rovnic**. Zvídavý čtenář se o tom může přesvědčit dosazením (35) do (39.b) a uvážením záměnnosti parciálních derivací $A_{\alpha,\mu\nu} = A_{\alpha,\nu\mu}$. 1. sérii (39.a) lze po dosazení (35) přepsat na tvar

$$\eta^{\mu\alpha} \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}} \left(A^{\rho}{}_{,\rho} \right) - \eta^{\alpha\beta} A^{\mu}{}_{,\alpha\beta} = \mu_0 j^{\mu} .$$

Lorentzova podmínka má ve formalismu velmi jednoduchý tvar:

$$A^{\rho}{}_{,\rho} = 0 . \tag{VIII.40}$$

Je-li splněna, lze 1. sérii dále přepsat na

$$\eta^{\alpha\beta} \frac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} \left(A^{\mu} \right) = -\mu_0 j^{\mu} .$$

Ovšem $\eta^{\alpha\beta} \dfrac{\partial^2}{\partial x^{\alpha} \partial x^{\beta}} = -\dfrac{1}{c^2} \dfrac{\partial^2}{\partial t^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial (x_1)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial (x_2)^2} + \dfrac{\partial^2}{\partial (x_3)^2}$ je d'Alembertův operátor označovaný obvykle symbolem $\Box$. (Z uvedeného je vidět, že operátor $\Box$ je skalár.)

Výslednou rovnici pro čtyřpotenciál A^{μ} lze tedy psát ve tvaru

$$\Box A^{\mu} = -\mu_0 j^{\mu} . \tag{VIII.41}$$

d) Rovnice kontinuity

Derivací 1. série Maxwellových rovnic (39.a) podle x^{μ} získáme

$$F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = \mu_0 j^{\mu}{}_{,\mu} . \tag{VIII.42}$$

Díky antisymetrii $F^{\mu\nu}$ a možnosti záměny pořadí derivování je levá strana (42) rovna nule: $F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = F^{\alpha\beta}{}_{,\beta\alpha} = F^{\alpha\beta}{}_{,\alpha\beta} = -F^{\beta\alpha}{}_{,\alpha\beta} = -F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu}$ a odtud $F^{\mu\nu}{}_{,\nu\mu} = 0$. Je tedy

$$j^{\mu}{}_{,\mu} = 0 . \tag{VIII.43}$$

Dosazením složek $j^{\mu} = (c\rho, \vec{j})$, viz (38), přejde (43) na tvar

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{j} = 0 , \tag{VIII.44}$$

který ukazuje, že jde o **rovnici kontinuity**.

Rovnice kontinuity (43) resp. (44) vyjadřuje zákon zachování náboje. Tuto známou skutečnost lze ilustrovat na případě, kdy čtyřproud je dán pohybem nějaké „substance" (tekutiny, nabitého prachu apod.), která nese elektrický náboj. Čtyřrychlost „substance" označíme U^{μ}, hustotu elektrického náboje ρ. Obecně jsou obě tyto veličiny funkce místa a času.

Rozložení náboje lze charakterizovat i **klidovou hustotou náboje** ρ_0, což je hustota, měřená v inerciální soustavě, vůči níž je v daném bodě substance právě v klidu. Z této definice je zřejmé, že ρ_0 je skalár: Celkový náboj v určitém elementu objemu dělíme klidovým objemem elementu, tj. objemem měřeným v soustavě, v níž substance v daném bodě právě stojí. Obě veličiny – náboj i klidový objem – jsou skaláry. Pro úplnost připomeňme, že nula v symbolu ρ_0 není index – podobně jako u m_0. Hustota náboje ρ v soustavě, vůči níž se substance pohybuje rychlostí $\vec{u}$, můžeme spočíst ze vztahu (VI.17):

$$\rho = \frac{\rho_0}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}}. \qquad \text{(VIII.45)}$$

(Tento vztah je možno vyložit i názorně: stejný náboj připadá na objem, který je díky kontrakci délek menší právě o faktor $\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}$.)

Hustota čtyřproudu j^μ je v daném případě

$$j^\mu = \rho_0 U^\mu. \qquad \text{(VIII.46)}$$

Že je tomu opravdu tak, lze ověřit rozpisem do složek:

$$j^0 = \rho_0 \frac{c}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = c\rho, \qquad \vec{j} = \rho_0 \frac{\vec{u}}{\sqrt{1-\frac{u^2}{c^2}}} = \rho\vec{u}.$$

Dosazení (46) do rovnice kontinuity (43) dá

$$\left(\rho_0 U^\mu\right)_{,\mu} = 0. \qquad \text{(VIII.47)}$$

Levá strana je po rozderivování a úpravách

$$\left(\rho_0 U^\mu\right)_{,\mu} = \rho_{0,\mu} U^\mu + \rho_0 U^\mu{}_{,\mu} = \frac{\partial\rho_0}{\partial x^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \rho_0 U^\mu{}_{,\nu} = \frac{d\rho_0}{d\tau} + \rho_0 U^\mu{}_{,\mu}. \qquad \text{(VIII.48)}$$

Člen $U^\mu{}_{,\mu}$ vyjádříme v soustavě, v níž v daném místě substance právě stojí, tj. je tam $\vec{u} = 0$. (Derivace $\vec{u}$ podle souřadnic mohou být ovšem nenulové.) Po dosazení složek U^μ a derivování dostaneme v tomto případě $U^\mu{}_{,\mu} = \operatorname{div}\vec{u}$. Označíme-li ΔV_0 objem malé části substance v okolí daného bodu (klidový objem) měřený v právě uvažované inerciální soustavě, a to objem „tekoucí“ spolu se substancí, můžeme $\operatorname{div}\vec{u}$ vyjádřit pomocí změny ΔV_0 s časem. Jde o vztah známý z teoretické mechaniky, přesněji z mechaniky kontinua. Platí

$$\operatorname{div}\vec{u} = \frac{1}{\Delta V_0}\frac{d\left(\Delta V_0\right)}{d\tau}.$$

(V soustavě, v níž substance v daném bodě právě stojí, je přírůstek času totožný s přírůstkem vlastního času τ; proto v uvedeném vztahu derivujeme podle τ.)

Je tedy

$$U^\mu{}_{,\mu} = \frac{1}{\Delta V_0}\frac{d\left(\Delta V_0\right)}{d\tau} \qquad \text{(VIII.49)}$$

a po dosazení do (48) dostáváme z rovnice kontinuity (47)

$$\frac{d\rho_0}{d\tau}+\rho_0\frac{1}{\Delta V_0}\frac{d\left(\Delta V_0\right)}{d\tau}=0 \quad \Big/ \cdot \Delta V_0$$

$$\frac{d\rho_0}{d\tau}\cdot\Delta V_0+\rho_0\frac{d\left(\Delta V_0\right)}{d\tau}=0, \quad \text{tj.}\ \frac{d}{d\tau}\left(\rho_0\Delta V_0\right)=0;$$

celkový náboj $\rho\Delta V$ se tedy v objemu, tekoucím se substancí, nemění.

e) Rovinné elektromagnetické vlny

Rovinnou monochromatickou elektromagnetickou vlnu ve vakuu (kde nejsou ani žádné náboje a proudy, tedy $j^\mu=0$) lze popsat čtyřpotenciálem

$$A^\mu=C^\mu\cdot e^{-i\,k_\alpha x^\alpha}\,, \tag{VIII.50}$$

kde C^μ a k_α jsou konstantní čtyřvektory. Přesněji bychom měli říci, že A^μ je reálnou částí výrazu (50). Jak je ale v teorii elektromagnetického pole obvyklé, budeme pracovat s komplexními veličinami a symboly pro reálnou část proto většinou psát nebudeme. Rozeberme nyní výraz (50) podrobněji a ukažme, že opravdu rovinnou vlnu vystihuje.

Výraz $-k_\alpha x^\alpha$ v exponentu je fáze vlny; vidíme, že je invariantní vůči Lorentzově transformaci. (Proč?)
Rozpis skalárního součinu $k_\alpha x^\alpha$ do složek dá

$$A^\mu=C^\mu e^{i\left(-ck_0t-k_i x^i\right)}. \tag{VIII.51}$$

Z optiky a teorie elektromagnetického pole víme, že v popisu rovinné elektromagnetické vlny se vyskytuje faktor

$$e^{i\left(\omega t-\vec{k}\cdot\vec{r}\right)}, \tag{VIII.52}$$

kde ω je úhlová frekvence a $\vec{k}$ vlnový vektor. Porovnáním s (51) vidíme, že

$$k_0=-\frac{\omega}{c} \quad \text{a } k_i \text{ jsou složky } \vec{k}\,.$$

Lze též psát

$$k^\mu=\left(\frac{\omega}{c},\,\vec{k}\right). \tag{VIII.53}$$

Protože prostorovými složkami k^μ jsou složky vlnového vektoru $\vec{k}$, nazýváme k^μ **vlnový čtyřvektor** (a značíme ho stejným písmenem *k*).

Vlnový čtyřvektor určuje frekvenci vlny (složkou k_0) a směr šíření vlny (je dán směrem $\vec{k}$). Z transformačních vztahů pro k^μ tedy bylo možno odvodit, jak se transformuje frekvence a vlnový vektor při obecné Lorentzově transformaci. Vlnový čtyřvektor určuje také rychlost šíření vlny (z (52) je vidět, že plochy konstantní fáze se šíří rychlostí $\omega/\left|\vec{k}\right|$). Dosazením (50) do rovnice pro čtyřpotenciál (viz (41) pro $j^\mu=0$)

$$\Box A^\mu=0\,, \quad \text{tj.}\ \eta^{\alpha\beta}\frac{\partial^2 A^\mu}{\partial x^\alpha\partial x^\beta}=0 \tag{VIII.54}$$

dostaneme

$$\left(\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta\right) C^\mu e^{-ik_\alpha x^\alpha} = 0 .$$

(50) je tedy řešením (54) jen pokud

$$\eta^{\alpha\beta} k_\alpha k_\beta = 0 , \quad \text{tj. } k_\alpha k^\alpha = 0 . \qquad \text{(VIII.55)}$$

Vlnový čtyřvektor má tedy nulovou velikost. (Neznamená to ovšem, že by byl identicky roven nule!)

Po rozpisu do složek dá (55) známý vztah

$$-\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 + \vec{k}\cdot\vec{k} = 0 , \text{ tj. } \frac{\omega}{c} = \left|\vec{k}\right| ,$$

z něhož plyne, že **vlna se šíří rychlostí *c***.

Tenzor elektromagnetického pole rovinné monochromatické vlny můžeme z A^μ určit pomocí vztahů (35). Po výpočtu bychom zjistili, že platí $F^{\mu\nu} k_\nu = 0$ a další vztahy, z nichž by plynuly známé vztahy mezi $\vec{E}, \vec{B}$ a $\vec{k}$. Zde to již podrobněji provádět nebudeme. Zmíníme se pouze o vyjádření invariantů zavedených v článku VI. Z definice $F^{\mu\nu}$ lze lehce ověřit, že platí

$$2\left(-\frac{E^2}{c^2} + B^2\right) = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} . \qquad \text{(VIII.56.a)}$$

Druhý invariant lze vyjádřit pomocí tenzoru $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$, který je analogií Levi-Civitova symbolu ε_{ijk} . (Je $\varepsilon_{0123} = +1,\ \ \varepsilon_{1023} = -1$ a indexy lze cyklicky zaměňovat. Jsou-li libovolné dva indexy stejné, je hodnotou symbolu 0.) Pro druhý invariant pak platí

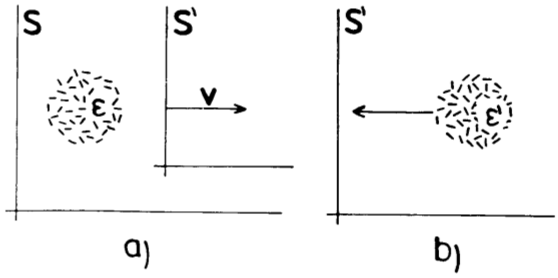
$$4\frac{1}{c}\vec{E}\cdot\vec{B} = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} F^{\alpha\beta} F^{\gamma\delta} . \qquad \text{(VIII.56.b)}$$

Z uvedených vyjádření (56) je okamžitě vidět, že jde o skaláry. V případě rovinné elektromagnetické vlny jsou oba skaláry rovny nule.

VIII.5. Tenzor energie a hybnosti

Energie a hybnost částice tvoří čtyřvektor, definovaný pouze na světočáře částice. U pole a spojitého rozložení látky jsou energie a hybnost rozloženy s určitou hustotou. Nelze je ale vystihnout čtyřvektorem, jak je vidět z následující úvahy:

Nechť v inerciální soustavě *S* je určitá látka v klidu a je rozložena s hustotou ρ_m. (Symbol *m* není index, pouze zdůrazňuje, že jde o hustotu hmotnosti.) Protože $E = mc^2$, je hustota energie $\varepsilon = \rho_m c^2$. V jiné inerciální soustavě *S'* ovšem obecně existuje i tok energie, viz obr.VIII.2. Podobně je tomu i s hybností.



Obr.VIII.2. Látka, která je vůči soustavě *S* v klidu, se vůči soustavě *S'* pohybuje a dostává se i na místa, kde byla její hustota (a tedy i hustota energie) nulová. V *S'* tedy existuje tok energie.

Veličina, která má ve čtyřrozměrném formalismu popisovat rozložení energie a hybnosti pole nebo spojité rozložení látky, musí tedy zahrnovat i hustoty toku energie a hybnosti.

Takovouto veličinou je **tenzor energie a hybnosti** $T_{\mu\nu}$. Místo formálních definic si ho přiblížíme na nejjednodušším příkladu spojitého látkového prostředí, jímž je tzv. **hmotný prach**. Tak označujeme látku, složenou z mnoha malých částic, které spolu vzájemně neinteragují. Částice jsou tak malé a je jich tak mnoho, že jejich rozložení můžeme považovat za spojité.

Pohyb částic hmotného prachu vystihneme jejich **čtyřrychlostí** U^μ, o nichž předpokládáme, že se místo od místa mění spojitě a hladce. Hustotu prachu v určitém bodě je nejvhodnější určovat v soustavě, vůči níž prach v tomto bodě právě stojí. Celkovou hmotnost částic v určitém elementu objemu vydělíme objemem tohoto elementu – protože částice i element v dané soustavě stojí, jde o klidovou hmotnost dělenou klidovým objemem elementu. Takto změřenou hustotu ρ_{0m} proto označujeme jako **klidovou hustotu klidové hmotnosti**.

Tlak ani jiné síly ve hmotném prachu nepůsobí. (Pokud by částice byly nabité, mohly by ovšem interagovat prostřednictvím elektromagnetického pole; to ale zatím nebudeme uvažovat.) Parametry charakterizující hmotný prach jsou tedy pouze ρ_{0m} a U^μ. Z nich lze tenzor druhého řádu až na případný násobek vytvořit jediným možným způsobem:

$$T^{\mu\nu}_{\mathrm{Prach}} = \rho_{0m} U^\mu U^\nu . \qquad \text{(VIII.57)}$$

ρ_{0m} i U^μ jsou funkcemi souřadnic, funkcí souřadnic je proto i **tenzor energie a hybnosti hmotného prachu** (57).

Ukážeme nyní, že $T^{\mu\nu}$ daný (57) opravdu charakterizuje hustotu energie a hybnosti a jejich toků; zároveň budeme interpretovat jeho složky.

Složka T^{00} dá po dosazení složek U^μ

$$T^{00} = \rho_{0m} U^0 U^0 = \rho_{0m} \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{\rho_{0m}}{1-u^2/c^2} \cdot c^2 .$$

Ovšem $\rho_{0m} \Big/ \left(1-\frac{u^2}{c^2}\right) = \rho_m$ je hustota hmotnosti (v soustavě *S*). Jeden faktor $1\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}$, kterým je ρ_{0m} násoben, odpovídá tomu, že v ρ_m vystupuje celková (relativistická) a nikoli klidová hmotnost; druhý faktor $1\Big/\sqrt{1-u^2/c^2}$ tomu, že tato hmotnost připadá na menší objem než je objem klidový. (Objem je o faktor $\sqrt{1-u^2/c^2}$ menší díky kontrakci délek. Srovnejte též (45).) $\varepsilon = \rho_m c^2$ je hustota energie.

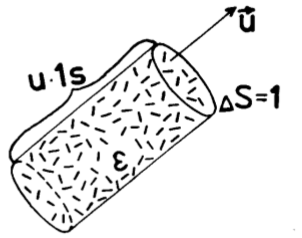
Je tedy zřejmé, že **složka** T^{00} **představuje hustotu energie**:

$$T^{00} = \rho_m c^2 = \varepsilon . \qquad \text{(VIII.58.a)}$$

Složky T^{0i} $(i = 1, 2, 3)$ jsou po dosazení

$$T^{0i} = \rho_{0m} \frac{c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \cdot \frac{u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \rho_m c u^i = \frac{1}{c} \varepsilon\, u_i . \qquad \text{(VIII.58.b)}$$

Vektor $\varepsilon\, \vec{u} = \vec{J}$ je vektor hustoty toku energie. (Jednotkovou plochou kolmou na $\vec{J}$ projde za 1 sekundu energie rovná $\left|\vec{J}\right|$ - viz obr.VIII.3.)



Obr.VIII.3. K toku energie

Vidíme, že **složky** T^{0i} **jsou složky vektoru toku energie dělené** $\boldsymbol{c}$:

$$T^{0i} = \frac{1}{c} J_i . \qquad \text{(VIII.58.b')}$$

Složky T^{i0} bychom mohli interpretovat stejně (je $T^{i0} = T^{0i}$), ale užitečnější bude interpretace vycházející ze zápisu

$$T^{i0} = c\,(\rho_m u_i) .$$

Vektor $\rho_m \vec{u} = \vec{g}$ je vektor hustoty hybnosti. (Představuje celkovou hybnost všech částic v jednotce objemu.)
Je tedy vidět, že **složky** T^{i0} **jsou složkami hustoty hybnosti násobené** $\boldsymbol{c}$:

$$T^{i0} = c \cdot g_i . \qquad \text{(VIII.58.c)}$$

Konečně složky T^{ij} jsou

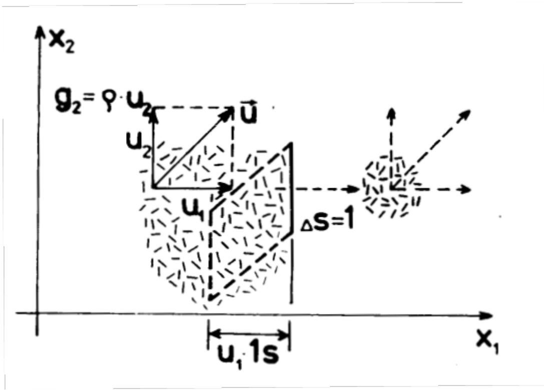
$$T^{ij} = \rho_{0m} \frac{u_i}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \frac{u_j}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \rho_m u_i u_j = g_i u_j .$$

Výrazy $g_i u_j$ se od (58.b) liší jen tím, že místo $\frac{\varepsilon}{c}$ se zde vyskytuje g_i (a místo indexu *i* index *j*) – jde tedy o složky toku g_i. Označíme-li $\vec{T}^{(i)}$ vektor hustoty toku i-té složky hybnosti, je

$$T^{ij} = T^{(i)}{}_j ; \qquad \text{(VIII.58.d)}$$

složky T^{ij} **tedy charakterizují hustotu toku hybnosti**.

Pro složku T^{21} to názorně ukazuje obr.VIII.4.



Obr.VIII.4. K hustotě toku hybnosti.
Složka g_2 hustoty hybnosti je přenášena jednotkovou plochou Δs kolmo na osu *x*. Složka prošlá za 1 s je rovna $g_2 u_i = T^{21}$.

Výše uvedené interpretace složek $T^{\mu\nu}$ platí obecně pro tenzor energie a hybnosti libovolných spojitých prostředí a polí. Obecně platí i to, že **tenzor energie a hybnosti je symetrický**,

$$T^{\beta\alpha} = T^{\alpha\beta}. \qquad \text{(VIII.59)}$$

Vztahy (58) nám též umožňují přesvědčit se, že **zákony zachování energie a hybnosti** lze pomocí tenzoru energie a hybnosti vystihnout jedinou rovnicí:

$$T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0. \qquad \text{(VIII.60)}$$

Opravdu: pro $\mu = 0$ dá (60) $T^{00}{}_{,0} + T^{0i}{}_{,i} = 0$, tj. po dosazení (58.a) a (58.b')

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon) + \frac{1}{c}\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0,$$

tedy

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{J} = 0,$$

což je zákon zachování energie v diferenciálním tvaru.

Pro $\mu = i\ (=1, 2, 3)$ dá (60) $T^{i0}{}_{,0} + T^{ij}{}_{,j} = 0$; po dosazení (58.c) a (58.d) pak

$$\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(c g_i) + \frac{\partial T^{(i)}{}_j}{\partial x_j} = 0,$$

čili

$$\frac{\partial g_i}{\partial t} + \operatorname{div} \vec{T}^{(i)} = 0,$$

což je diferenciální tvar zákona zachování hybnosti.

Pro **hmotný prach** lze platnost rovnice (60) jednoduše přímo ověřit. Dosazení (57) do (60) dá

$$\left(\rho_{0m} U^\mu U^\nu\right)_{,\nu} = 0.$$

Levou stranu této rovnice lze upravit:

$$\left(\rho_{0m} U^\mu U^\nu\right)_{,\nu} = \left(\rho_{0m} U^\nu\right)_{,\nu} U^\mu + \rho_{0m} U^\mu{}_{,\nu} \frac{dx^\nu}{d\tau} = U^\mu \left(\rho_{0m} U^\nu\right)_{,\nu} + \rho_{0m} \frac{dU^\mu}{d\tau}.$$

Rovnici (60) lze tedy pro hmotný prach zapsat ve tvaru

$$U^{\mu}\left(\rho_{0m}U^{\alpha}\right)_{,\alpha}+\rho_{0m}\frac{dU^{\mu}}{d\tau}=0\,. \tag{VIII.61}$$

Na částice prachu ovšem nepůsobí žádné síly; je tedy pro každou částici

$$\frac{dU^{\mu}}{d\tau}=0\,. \tag{VIII.62}$$

(Jde o pohybovou rovnici v případě $\widetilde{F}^{\mu}=0$.)

Navíc platí

$$\left(\rho_{0m}U^{\alpha}\right)_{,\alpha}=0\,, \tag{VIII.63}$$

neboť jde o **rovnici kontinuity** vyjadřující zachování hmotnosti. (Srovnejte rovnici kontinuity (47) vyjadřující zachování elektrického náboje. Odvození platnosti (63) by bylo naprosto stejné jako v případě rovnice (47) a nebudeme je zde proto opakovat.) Oba členy v rovnici (61) jsou tedy nulové, rovnice platí.

Poznámka pro zvídavé čtenáře: Je možný i opačný pohled: Rovnice (62) a (63) lze odvodit z rovnice (61). Násobíme-li (61) U_{μ} a využijeme toho, že $U_{\mu}\dfrac{dU^{\mu}}{d\tau}=0$ (viz výše odvození (25)) a $U_{\mu}U^{\mu}=-c^2$ (12), dostaneme $-c^2\left(\rho_{0m}U^{\alpha}\right)_{,\alpha}=0$, tj. rovnici kontinuity (63). Kombinací (63) a (61) pak dostaneme pohybovou rovnici (62). Vidíme, že z rovnice $T^{\mu\nu}{}_{,\nu}=0$ můžeme odvodit pohybovou rovnici. I to platí obecněji; podrobnosti může čtenář najít v doporučené literatuře.

Opusťme hmotný prach. Dalším důležitým látkovým prostředím je **dokonalá tekutina**. Bez důkazu uvedeme, že $T^{\mu\nu}$ má v tomto případě tvar

$$T^{\mu\nu}_{\text{dok.t.}}=\left(\rho_{0m}+\frac{p_0}{c^2}\right)U^{\mu}U^{\nu}+p_0\eta^{\mu\nu}\,, \tag{VIII.64}$$

kde p_0 je tlak měřený v soustavě, která je vůči danému elementu tekutiny právě v klidu. Čtenář se může sám přesvědčit, že v této soustavě jsou v daném bodě složky $T^{\mu\nu}$

$$T^{00}=\rho_{0m}c^2,\quad T^{11}=T^{22}=T^{33}=p_0,\quad T^{\mu\nu}=0\quad \text{pro}\ \nu\neq\mu\,.$$

Vidíme, že složky T^{ij} charakterizují i **napětí** v daném prostředí.

Poněkud složitější tvar má **tenzor energie a hybnosti elektromagnetického pole**:

$$T^{\mu\nu}_{\text{elmag}}=\frac{1}{\mu_0}\left[F^{\mu\alpha}F^{\nu}{}_{\alpha}-\frac{1}{4}\eta^{\mu\nu}\left(F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\right)\right]. \tag{VIII.65}$$

Postup jeho odvození zde uvádět nebudeme. Ověříme pouze, že složky $T^{\mu\nu}_{\text{elmag}}$ odpovídají výše uvedené interpretaci (58).

Člen $F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}$ v (65) je roven $2\left(B^2-E^2/c^2\right)$ (viz (56.a)). Při dosazení za $F^{\rho\sigma}$ lze pak složky $T^{\mu\nu}_{\text{elmag}}$ upravit na tvar:

$$T^{00}_{\text{elmag}} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{0i}F^0{}_i + \frac{1}{4}\cdot 2\left(B^2 - E^2/c^2\right)\right] = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E^2}{c^2} + \frac{1}{2}B^2 - \frac{1}{2}\frac{E^2}{c^2}\right] =$$
$$= \frac{1}{2\mu_0}\left[\varepsilon_0\mu_0 E^2 + \mu_0 BH\right] = \frac{1}{2}\left(\vec{E}\cdot\vec{D} + \vec{H}\cdot\vec{B}\right),$$

což je hustota energie elektromagnetického pole.

Dále již stručněji:

$$T^{0i}_{\text{elmag}} = \frac{1}{\mu_0}\left[F^{0j}F^i{}_j\right] = \frac{1}{\mu_0}\left[\frac{E_j}{c}\varepsilon_{ijk}B_k\right] = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}E_jH_k = \frac{1}{c}\left[\vec{E}\times\vec{H}\right]_i = \frac{1}{c}S_i,$$

kde $\vec{S} = \vec{E}\times\vec{H}$ je Poyntingův vektor, který je roven hustotě toku energie.

Podobně upravíme

$$T^{i0}_{\text{elmag}} = \frac{1}{c}\varepsilon_{ijk}E_jH_k = c\,\varepsilon_{ijk}D_j\cdot B_k = c\left[\vec{D}\times\vec{B}\right]_i = cg_i,$$

kde $\vec{g} = \vec{D}\times\vec{B}$ je hustota hybnosti elektromagnetického pole. Analogicky můžeme dosazením ověřit, že prostorové složky T^{ij} se až na znaménko rovnají složkám Maxwellova tenzoru napětí:

$$T^{ij}_{\text{elmag}} = -T^{\text{Maxwell}}_{ij}$$

a mají opravdu význam složek hustoty toku hybnosti. Ověření již ponecháváme čtenáři jako jednoduché cvičení.

Závěrem k případu, kdy je přítomna látka i pole, ev. více látek a polí. Interaguje-li látka s polem, může energie a hybnost přecházet z pole na látku i naopak. (Vymyslete nějaký jednoduchý příklad!) Zachovávat se tedy může jen celková energie a celková hybnost.

Protože energie i hybnost jsou veličiny aditivní, je přirozené definovat **celkový tenzor energie a hybnosti** jako součet tenzorů energie a hybnosti všech látek a polí, které jsou přítomny. Např. pro nabitý hmotný prach a s ním interagující elektromagnetické pole je

$$T^{\mu\nu} = T^{\mu\nu}_{\text{prach}} + T^{\mu\nu}_{\text{elmag}}.$$

Rovnice $T^{\mu\nu}{}_{,\nu} = 0$ pak přirozeně platí jen pro celkový tenzor energie a hybnosti.