Kapitola 1

Matematika pro termodynamiku

Text této kapitoly si klade za cíl zopakovat pojmy, které by studenti měli znát z matematických přednášek a které většinou již aktivně používali v předchozích kurzech fyziky. Pojmy nejsou uváděny s matematickou preciznosti, důraz je kladen na pochopení jejich významu, prohloubení geometrické interpretace a upozornění na případný odlišný přístup, který budeme v termodynamice uplatňovat, v porovnání například s přístupem, který zná čtenář z mechaniky. Zájemce o přesnější matematické formulace odkazujeme na učebnice matematické analýzy.

1.1 Pár slov o jiném pohledu na funkce a proměnné a o jiném značení

V termodynamice v porovnání např. s mechanikou znepříjemňuje situaci skutečnost, že není jasné rozdělení veličin na ty, které hrají roli funkcí, a ty, které jsou jejich proměnnými. V mechanice je situace přehlednější. Čas a souřadnice určující polohu jsou typickými proměnnými, funkcemi jsou takové veličiny jako kinetická či potenciální energie a svoje role si obvykle nevyměňují – většinou jsme kinetickou či potenciální energii vyjádřili pomocí souřadnic a času[1], ale nebylo běžné, že bychom souřadnici chápali jako funkci kinetické energie.

Úkol 1.1 Nechť je naším systémem volně padající malá kulička (uvažujte ji jako hmotný bod) v místnosti. K popisu jejího stavu můžeme použít následující veličiny – vzdálenost od podlahy, rychlost, kinetická energie, potenciální energie.

[1] V kinetické energii je rychlost (hybnost) vyjádřena jako derivace souřadnice podle času.

(1) Najděte rovnice, které tyto veličiny vzájemně svazují.
(2) Které z nich obvykle uvažujeme jako nezávislé a které jako závislé? Mohou si svoje role prohodit? Pokud ano, vyjádřete příslušné rovnice.
(3) Jaké derivace bychom mohli počítat?

Uvažujme teď nejčastěji uváděný příklad systému v termodynamice – tím je konstantní množství ideálního plynu. Stav tohoto systému popišme pomocí objemu V, tlaku p a teploty T, které svazuje stavová rovnice ideálního plynu ve tvaru

$$pV = nRT,$$

kde n je látkové množství plynu a $R = 8{,}3\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$ univerzální plynová konstanta.

Pokud budeme mít plyn ve velmi pevné lahvi, je přirozené uvažovat objem a teplotu jako nezávislé proměnné (objem nastavíme volbou lahve a teplota se ustálí na teplotě okolí) a tlak jako jejich funkci $p = p(V,T)$, tj. závislou proměnnou. Stavová rovnice by tedy měla tvar

$$p(V,T) = \frac{nRT}{V}.$$

Pokud se ale budeme bavit o plynu uzavřeném v balónku či mýdlové bublině[2], je přirozené uvažovat jako nezávislé proměnné tlak p a teplotu T a jako závislou proměnnou objem V a stavovou rovnici přepsat na tvar

$$V = V(T,p) = \frac{nRT}{p}.$$

Úkol 1.2 Vymyslete situaci, kdy by bylo přirozené brát jako nezávislé veličiny objem V a tlak p a pomocí nich vyjádřit jako závislou proměnnou teplotu T.

Úkol 1.3 Uvažujme kondenzátor s proměnnou kapacitou. Najděte tři stavové veličiny popisující jeho stav a rovnici, která je svazuje. Vymyslete různé situace, které se liší tím, které ze stavových veličin je vhodné brát jako nezávislé a které jako závislé. Napište i příslušné tvary stavové rovnice.

[2] V těchto jednoduchých úvahách, které zde děláme, neuvažujte tlak způsobený povrchovým napětím či pevností gumy – tlak plynu uvnitř balónku či bubliny je pak roven vnějšímu, nejčastěji atmosférickému tlaku. Pokud bychom chtěli povrchové napětí či pevnost gumy uvažovat, pak bude celkový tlak plynu uvnitř dán součtem vnějšího tlaku a tlaku způsobeného mýdlovou či gumovou blánou, který je závislý i na objemu bubliny či balónku. Stavová rovnice bude komplikovanější a může se stát, že objem nebude možné explicitně vyjádřit, tj. bude pouze zadán jako implicitní funkce.

Z předchozích příkladů a úkolů je patrné, že v termodynamice je běžné v různých situacích uvažovat jako nezávislé proměnné různé veličiny a pomocí nich vyjadřovat zbylé, závislé veličiny. Proto považujeme za vhodné před samotným začátkem studia termodynamiky připomenout znalosti týkající se funkcí více proměnných a jejich derivací.

1.2 Derivace inverzní funkce

Z přednášek z matematiky víme, že pokud je funkce $f : y = f(x)$ „pěkná“[3] a prostá na nějakém okolí bodu x, lze na tomto okolí definovat inverzní funkci[4] $f_{\text{in}} : x = f_{\text{in}}(y)$. Mezi derivacemi obou funkcí platí, že „jedna je převrácenou hodnotou druhé“. Přesněji:

$$f' = \left.\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0} = \frac{1}{f'_{\text{in}}} = \frac{1}{\left.\frac{\mathrm{d}f_{\text{in}}}{\mathrm{d}y}\right|_{y_0}},$$

kde platí $y_0 = f(x_0)$, resp. $x_0 = f_{in}(y_0)$. Z toho je navíc patrné, že derivace dané funkce musí být nenulová.

Jádro matematického důkazu je ve vztahu pro derivaci složené funkce. Složíme-li funkci f a její inverzi f_{in}, platí v okolí bodu x

$$f_{\text{in}}(f(x)) = x.$$

Zderivujeme-li obě strany tohoto vztahu podle x v bodě x_0, dostáváme

$$f'_{\text{in}}(f(x))|_{x_0} \cdot f'(x_0)|_{x_0} = f'_{\text{in}}(f(x_0))\, f'(x_0) = 1,$$

a po dosazení rovnosti $f(x_0) = y_0$ a upravení získáváme hledaný vztah

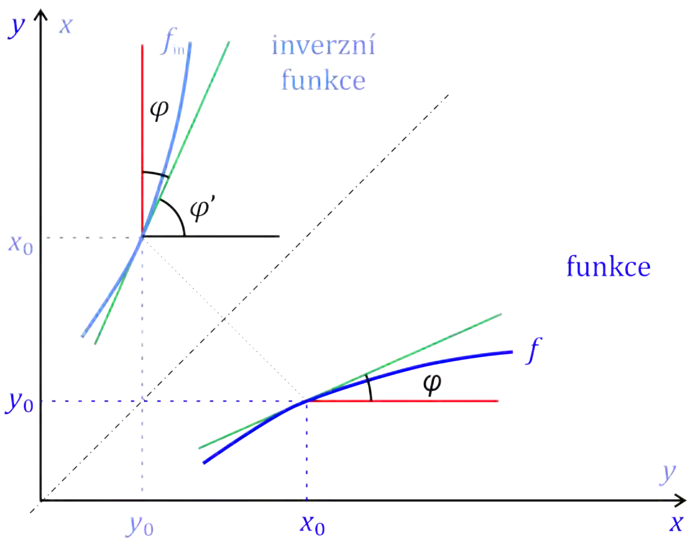
$$f'(x_0) = \frac{1}{f'_{\text{in}}(y_0)}.$$

Geometrická interpretace je zřejmá z obrázku 1.1. Derivace funkce f v bodě x_0 je rovna směrnici tečny v tomto bodě, tj. $\tan\varphi$. Pokud si funkci zobrazíme v osové souměrnosti s osou $y = x$, dostaneme funkci k ní inverzní. Zobrazíme-li stejně i tečnu a daný úhel, vidíme, že pro derivaci inverzní funkce platí

$$f'_{\text{in}} = \tan\varphi' = \tan\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = \cot\varphi = \frac{1}{\tan\varphi} = \frac{1}{f'}.$$

[3] My budeme uvažovat pouze spojité a hladké funkce, což je postačující.

[4] I když je obvyklé značit inverzní funkci jako f^{-1}, volíme značení odlišné, aby nemohlo dojít k záměně s převrácenou hodnotou.



Obrázek 1.1: Geometrická interpretace vztahu pro derivaci inverzní funkce

A ještě zmiňme „fyzikální přístup“ – i když se jedná spíše o mnemotechnickou pomůcku. Ve fyzice k derivacím přistupujeme nejčastěji jako k limitě podílu dvou rozdílů blízkých čísel[5], tj. jako k podílu toho, jak se změní y (samo závislé na x), pokud se maličko změnilo x. Limita spočívá v tom, že zmenšujeme změnu nezávislé proměnné x, tj.

$$f' = (y(x))' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

U inverzní funkce se prohodí role x a y – uvažujeme x jako závislé na y a pro derivaci platí

$$f'_{\mathrm{in}} = (x(y))' = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\Delta x}{\Delta y}.$$

Je vidět, že před provedením limity měly oba zlomky navzájem převrácenou hodnotu. Jedná-li se o funkce spojité, pak není důvod, aby provedení limity na této skutečnosti něco změnilo:

$$f'_{\mathrm{in}} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}} = \frac{1}{f'}.$$

[5]Proto je také ve fyzice mnohem častější značit derivaci jako $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$, nikoli jako f'. A také obvykle označujeme funkci stejným písmenem jako její výsledek, tj. $y = y(x)$.

1.3 Derivace funkce více proměnných

Úkol 1.4 Uveďte co nejvíce způsobů, jak se lze dívat na derivaci a její význam. Nemusí se jednat o přesné definice, spíše nám jde o různé pohledy na derivaci.

Úkol 1.5 Mějme funkci více proměnných, např. hustotu hmyzu H v pralese jako funkci souřadnic x, y a z a času t. Uveďte, jak se počítají a jaký význam mají parciální a totální derivace H podle času t. Čím se tyto derivace liší?
Vše potom ilustrujte také na nadmořské výšce V jako funkci souřadnic x a y.

Předchozí úkol připomněl odlišnosti parciální a totální derivace, pojďme to shrnout:

- Uvažujme funkci $F = F(x,y,t)$, která závisí na dvou[6] souřadnicích x a y a čase t. Dále mějme nějakou trajektorii popsanou závislostmi souřadnic $x = x(t)$ a $y = y(t)$ na čase.
- Při počítání parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial t}$ funkci F „normálně" derivujeme podle t a ostatní proměnné bereme jako konstanty.
- Při počítání totální derivace $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ musíme znát závislost ostatních proměnných na t – máme pak dvě možnosti. Buď dosadíme zadané závislosti $x = x(t)$, $y = y(t)$ atd., čímž získáme funkci jediné proměnné t a tu zderivujeme, nebo aplikujeme vztah
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{\partial F}{\partial t}, \tag{1.1}$$
který využívá znalost závislosti F na proměnných x, y atd., což může výpočet usnadnit (např. pokud se x vyskytuje ve výrazu pro F několikrát a samotná jeho závislost na t je komplikovanější).

V předchozím oddíle jsme si ukázali, že v termodynamice nemusí být úplně jasné, co považujeme za proměnné a co za funkce. Při počítání parciálních derivací je tedy nutné uvádět, jaké jsou ostatní proměnné derivované funkce, které považujeme za konstanty. To znamená, že místo stručného zápisu $\frac{\partial F}{\partial x}$ je třeba psát $\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}$, ze kterého je patrné, že druhou proměnnou je y a tu považujeme při derivování za konstantu. V termodynamice se používá trochu stručnější zápis, kdy se podmínky, za kterých derivaci počítáme, píšou jako spodní index derivace, tj. zápis vypadá takto $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y$
$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y .$$

[6] Dvě souřadnice jsou zde zvoleny proto, aby zápisy vztahů byly přehledné. Všechny vztahy ale platí i pro funkce s jiným počtem proměnných. Navíc, jak uvidíme dále, nám to umožní ilustrovat vše pomocí názorného modelu krajiny.

Tím můžeme zapsat i to, že danou derivaci počítáme za nějakých složitějších podmínek, než jen při konstantní druhé proměnné. Vztah 1.1 potom má tvar

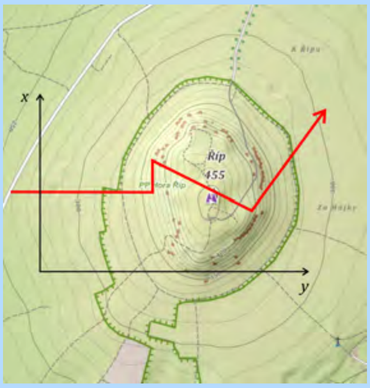
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,t} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{x,t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial t}\right)_{x,y} . \tag{1.2}$$

Úkol 1.6 Uvažujte válec o výšce v a poloměru podstavy r.
(1) Určete, jak rychle se mění plocha jeho pláště S (tj. jeho povrch bez podstav) s výškou v za předpokladu, že poloměr podstavy je konstantní – tj. derivaci $\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_r$.
(2) Tutéž derivaci spočtěte za podmínky, že konstantní je objem válce V – nyní jde o derivaci $\left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)_V$.
Porovnejte a okomentujte rozdíly obou výsledků.

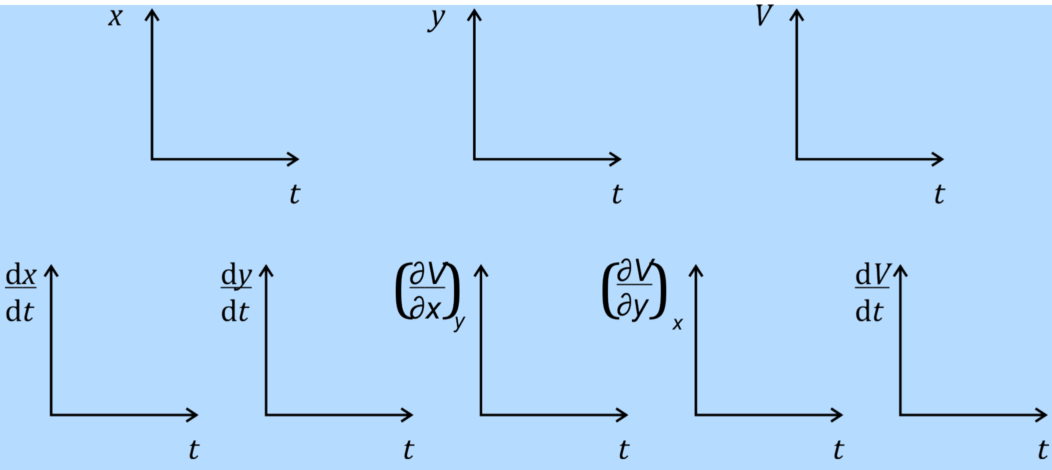
Pojďme si ještě na následující úloze ověřit, že ve vztahu 1.2 umíme přiřadit význam jednotlivým derivacím, které v něm vystupují.

Úkol 1.7

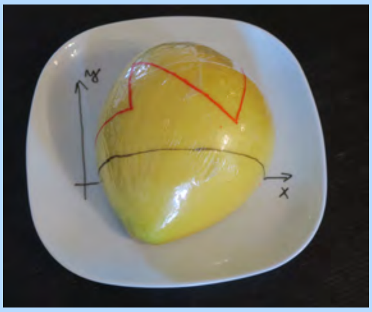
Pojďme se projít v okolí Řípu. I zde si zavedeme funkci nadmořské výšky $V = V(x,y)$ jako funkci polohy určené souřadnicemi x a y. Prohlédněte si mapu, nalezněte vrstevnice a připomeňte si jejich význam. Najděte místa, kde je kopec strmý a kde je naopak velmi pozvolný („skoro“ rovina).



Uvažujte, že vaše cesta je vyznačena červenou barvou a že jdete stále stejně rychle. Načrtněte grafy časové závislosti souřadnice x, souřadnice y a nadmořské výšky V, ale také derivací $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$, $\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_y$, $\left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_x$ a $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. Popište, které grafy spolu navzájem souvisí a jak.



Pokud vám úkol činí problémy, použijte k jeho vyřešení vhodný model. Osvědčil se prostorový papírový model kopce, vhodná miska nebo polovina pomela, které je zabaleno v igelitu, takže na něj lze psát stíracími fixy a v případě potřeby vytvořit příslušné řezy nožem.



Úkol 1.8 Uvažujme stejnou situaci jako v předchozím úkolu, tj. funkci V dvou proměnných x a y s významem nadmořské výšky v okolí kopce. Opět se zde „procházíme“, tj. máme zde definovanou nějakou křivku popsanou parametrem t. Pro totální derivaci platí

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)_{y,t} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\right)_{x,t} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}.$$

Tento vztah má tvar

$$\text{totální derivace} = \bullet \cdot \bullet + \bullet \cdot \bullet,$$

kde na místech puntíků jsou derivace.

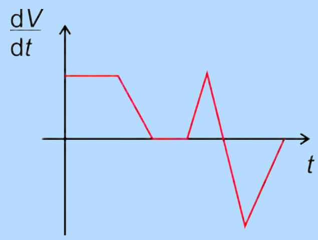
Najděte na kopci takové místo a nakreslete v něm takovou cestu, aby tento výraz měl tvar:

1. kladné číslo · záporné číslo + záporné číslo · kladné číslo,
2. nula · kladné číslo + záporné číslo · nula.

Vymyslete i další kombinace kladné, záporné a nulové hodnoty a najděte je na mapě. Je možné najít libovolnou z nich?

Úkol 1.9

Vraťte se k zadání předchozího úkolu.
Tentokrát budeme znát průběh derivace nadmořské výšky V během našeho výletu, tj. $\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}t}$. Vaším úkolem je najít trasu tohoto výletu.
Je řešení jednoznačné?

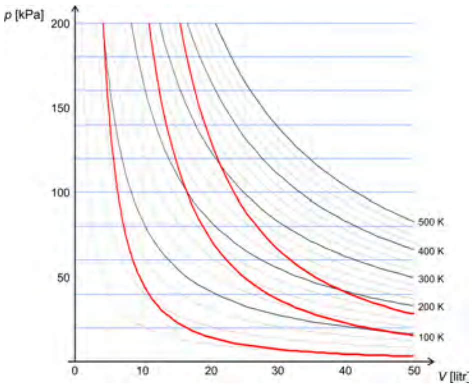


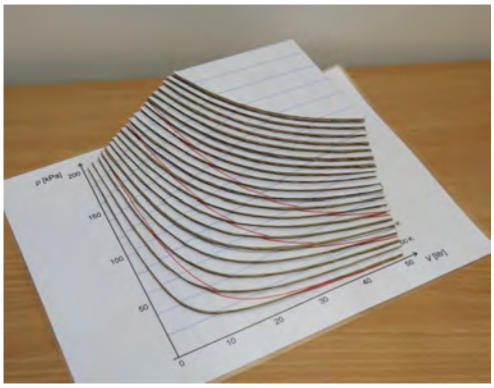
Výpočtová úloha 1.1
Zkusme už úlohu čistě termodynamickou. Zajímá nás, jak se mění teplota při adiabatickém rozpínání ideálního plynu.

Řešení:
Připomeňme si, že stavová rovnice ideálního plynu má tvar $pV = nRT$ a adiabatický děj je dán vztahem $pV^\kappa = K = \text{konst.}$, kde tlak p, objem V a teplota T popisují stav plynu, R je univerzální plynová konstanta, n látkové množství plynu, konstanta K souvisí s počátečním stavem plyn a konstanta κ je rovna podílu tepelných kapacit při konstantním tlaku a při konstantním objemu, tj. $\kappa = \frac{c_p}{c_V} > 1$.

Změna teploty při adiabatickém rozpínání znamená, že hledáme derivaci teploty podle objemu za předpokladu, že se pohybujeme po adiabatě, tj. hledáme $\left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_{\text{adiab.}}$.

V analogii s našimi procházkami kolem Řípu si celou úlohu představíme tak, že stavová rovnice udává „tvar krajiny“, teplota T hraje roli nadmořské výšky, izotermy tedy představují vrstevnice. Rovnice adiabaty udává naši cestu (na obrázku červeně) a naši otázku můžeme formulovat takto: „Jak je naše cesta strmá?“





Pusťme se do počítání. Uvažujeme stavovou rovnici $T = T(V,p)$ a rovnici adiabaty udávající závislost tlaku na objemu $p = p(V)$, tj. po dosazení dostaneme $T = T(V,p(V))$. Derivace T dle objemu V je

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}} = \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p + \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}}.$$

Do obecného vztahu můžeme dosadit konkrétní závislosti. Pro ideální plyn platí

$$T = \frac{pV}{nR} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_p = \frac{p}{nR}, \quad \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_V = \frac{V}{nR}$$

a pro adiabatický děj

$$p = \frac{K}{V^\kappa} \qquad \Rightarrow \qquad \left(\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}} = \frac{\kappa V}{V^{\kappa+1}}.$$

Po dosazení

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}} = \frac{p}{nR} - \frac{V}{nR}\frac{\kappa K}{V^{\kappa+1}}.$$

Dosadíme $K = pV^\kappa$ a upravíme

$$\left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}} = -\frac{p}{nR}(\kappa - 1).$$

Vidíme, že derivace je záporná, což je ve shodě s tím, že o adiabatickém rozpínání plynu víme, že se při něm plyn ochlazuje (což je patrné i z grafu).

Samozřejmě jsme hledanou derivaci mohli určit i přímo, z rovnice pro adiabatický děj vyjádříme tlak p, dosadíme do stavové rovnice a tak dostaneme teplotu T jako funkci jediné proměnné V

$$T = \frac{pV}{nR} = \frac{K}{V^\kappa}\frac{V}{nR} = \frac{KV^{1-\kappa}}{nR} \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}V}\right)_{\text{adiab.}} = \frac{KV^{-\kappa}(1-\kappa)}{nR} = -\frac{p}{nR}(\kappa - 1).$$

Vidíme, že oběma postupy jsme získali stejný výsledek.

Vztah pro výpočet derivace složené funkce (1.2, tzv. „řetízkové pravidlo“) můžeme uplatnit i v případě, že vnitřní funkce jsou také funkcemi více proměnných. Ukažme si to na příkladu sférických souřadnic $r \in (0, \infty)$, $\vartheta \in< 0,\pi)$ a $\varphi \in< 0,2\pi)$. Kartézské souřadnice můžeme vyjádřit pomocí sférických souřadnic x, y a z

$$x = r\cos\varphi\sin\vartheta, \qquad y = r\sin\varphi\sin\vartheta, \qquad z = r\cos\vartheta.$$

Ale toto vyjádření lze i invertovat, tj. vyjádřit sférické souřadnice pomocí kartézských souřadnic

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}, \qquad \vartheta = \arctan\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, \qquad \varphi = \arctan\frac{y}{x}.$$

Pokud máme funkci F a vyjádříme ji ve sférických souřadnicích $F = F(r,\vartheta,\varphi)$. můžeme se na její vyjádření „dívat přes sférické souřadnice“

$$F = F(r,\vartheta,\varphi) = F\left(r(x,y,z), \vartheta(x,y,z), \varphi(x,y,z)\right).$$

Pokud máme nyní spočítat např. derivaci $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z}$, můžeme podle řetízkového pravidla psát

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{y,z} = \left(\frac{\partial F}{\partial r}\right)_{\vartheta,\varphi}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial F}{\partial \vartheta}\right)_{r,\varphi}\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial x}\right)_{y,z} + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right)_{r,\vartheta}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{y,z}.$$

Výhoda takového postupu se ukáže v případě, že funkce F je sféricky symetrická, tj. závisí jen na souřadnici r, pak v předchozím vztahu bude nenulový jen první člen.

Alternativně můžeme nejprve dosadit vyjádření souřadnic r, ϑ a φ do vztahu pro funkci F, čímž efektivně dostaneme funkci $F = F(x,y,z)$, kterou pak „kartézsky“ zderivujeme. Oba způsoby samozřejmě dávají stejný výsledek.

1.4 Derivace ve směru a gradient

Parciální derivaci si tedy můžeme představit jako derivaci počítanou tak, že jdeme po cestě ve směru příslušné osy (ve směru, kterým roste daná proměnná). Odtud se již přímo dostáváme k tzv. derivaci ve směru. V našem příkladě s funkcí nadmořské výšky v krajině F je velmi pěkně vidět její geometrický význam – jde o derivaci dané funkce, pokud se budu pohybovat po cestě v daném směru jednotkovou rychlostí. Pojďme podle této představy tuto derivaci spočítat. Směr nechť je dán jednotkovým vektorem $\vec{v} = (v_x, v_y)$, který bude mít v tomto příkladě význam rychlosti. Pro polohu v závislosti na čase t platí:

$$x(t) = v_x t, \qquad y(t) = v_y t.$$

Pro derivaci ve směru $\vec{v}$ tedy dostáváme

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)_{\vec{v}} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_x \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y + v_y \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x .$$

Z posledního vztahu je patrné zobecnění pro funkce více proměnných. Pokud bychom si zavedli formálně vektor parciálních derivací (pro funkce více proměnných přidáme analogicky další složky)

$$\nabla F = \operatorname{grad} F = \left(\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x\right),$$

můžeme derivaci ve směru přepsat pomocí skalárního součinu jako

$$\left(\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}\right)_{\vec{v}} = \vec{v} \cdot \nabla F.$$

Naše „odvození“ vztahu z geometrického významu odpovídá i přesné matematické definici.

Úkol 1.10 S gradientem jsme se již potkali jako s operátorem, který u skalární funkce více proměnných udává směr, ve kterém funkce nejvíce roste. Ukažte (stačí u funkcí dvou proměnných), že „derivace ve směru gradientu“ je opravdu ze všech derivací v různých směrech největší.

1.5 Derivace funkce zadané implicitně

Další užitečné použití derivace složené funkce více proměnných je při odvození vztahu pro **derivaci funkce, která je dána implicitně.**[7] Nejprve ilustrujme funkci danou implicitně obecně – taková funkce je dána předpisem $F(x,y) = 0$, který určuje křivku, na které daná rovnost platí (pokud by F byla funkce nadmořské výšky, tak se jedná o vrstevnici). Uvedený předpis můžeme chápat jako zadání funkce $y = y(x)$ a můžeme hledat její derivaci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. Použijme vztah pro derivaci funkce více proměnných:

$$F(x, y(x)) = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0,$$

odkud můžeme hledanou derivaci lehce vyjádřit

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x},$$

a protože jsme derivaci y hledali za podmínky, že $F = 0$, můžeme ještě doplnit značení

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_F = -\frac{\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x}. \tag{1.3}$$

Úkol 1.11 Procvičme si derivaci funkce dané implicitně při hledání derivace v bodech ležících na kružnici. Uvažujme kružnici o poloměru 1, která je dána rovnicí $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$. Tento předpis definuje funkci na okolí všech bodů kružnice až na dva. V tomto smyslu ji budeme chápat jako funkci danou implicitně.

Nakreslete si obrázek a z něj odhadněte velikost derivace v bodech $[0,1]$, $[\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$ a $[-\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2]$.

Poté najděte derivace pomocí vztahu pro derivaci implicitní funkce. Výpočet ověřte tím, že z dané rovnice vyjádříte $y = y(x)$ pro horní polokružnici a zderivujete ho.

Úkol 1.12 Uvažujme ideální plyn popsaný rovnicí $pV = nRT$ a izotermický děj (tj. děj, při kterém je teplota T konstantní). Na chvíli se „tvařme“, že z uvedené rovnice neumíme vyjádřit tlak p jako funkci objemu V. Určete derivaci $\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T$ pomocí derivace implicitní funkce.

[7] Jednoduše řečeno je funkce daná implicitně ve chvíli, kdy její předpis nemá tvar „$y =$ nějaký vzoreček s x“.

Získaný výsledek ověřte tak, že tlak p ze stavové rovnice vyjádříte a zderivujete.

Pozn.: Pro ideální plyn se opravdu jedná o triviální cvičení a vztah pro derivaci funkce dané implicitně zde používáme opravdu jen ze „cvičných důvodů“. Dále se ale budeme potkávat se situacemi, kdy opravdu nebude možné (nebo bude velmi obtížné) konkrétní veličinu ze stavové rovnice vyjádřit. Příkladem může být objem V ve van der Waalsově stavové rovnici pro reálný plyn

$$\left(p + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT.$$

Aplikujme výše uvedený postup (viz odvození vztahu 1.3) na termodynamický systém v rovnovážném stavu, ve kterém je popsán stavovou rovnicí ve tvaru $p = p(T,V)$, a odvoďme vztah

$$\alpha\beta p = \gamma$$

mezi

- teplotním součinitelem objemové roztažnosti $\gamma = \frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$,
- teplotním součinitelem rozpínavosti $\beta = \frac{1}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$ a
- součinitelem izotermické stlačitelnosti $\alpha = -\frac{1}{V}\left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T$.

Úkol 1.13 Než budete počítat dál, uvědomte si, co který koeficient znamená fyzikálně, jak definiční vztah souvisí s jeho názvem a proč je v poslední definici mínus.

Systém je popsán stavovou rovnicí, kterou můžeme uvažovat například ve tvaru $p = p(T,V)$. Protože se budeme snažit vyjádřit koeficient γ, budeme počítat derivaci V podle T na izobaře, tj. $\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p$. Izobaru budeme chápat jako funkci $p = p(T,V(T)) = \text{konst.}$, resp. $p = p(T,V(T)) = 0$ (pozn. konstantu můžeme od obou stran rovnice odečíst, v derivacích nebude hrát roli). Hledanou derivaci pak nalezneme pomocí věty o derivaci implicitní funkce:

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V}{\left(\frac{\partial p}{\partial V}\right)_T}.$$

Pokud navíc na derivaci ve jmenovateli použijeme větu o derivaci inverzní funkce, dostaneme

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V \left(\frac{\partial V}{\partial p}\right)_T.$$

Porovnáním těchto výrazů s definicemi součinitelů (v odrážkách výše) dostáváme:

$$\gamma V = (-\beta p)(-\alpha V) \Rightarrow \alpha\beta p = \gamma.$$

Tento vztah platí zcela obecně – pro libovolný systém (např. reálný plyn) popsaný veličinami V, p a T.

Úkol 1.14 Jako drobné cvičení vyjděte ze stavové rovnice pro ideální plyn $pV = nRT$. Spočítejte všechny tři koeficienty a ověřte odvozený vztah.

Úkol 1.15 Uvažujme tři veličiny A, B a C, mezi kterými platí vztah $A = A(B,C)$. Pomocí derivace implicitní funkce ukažte, že platí

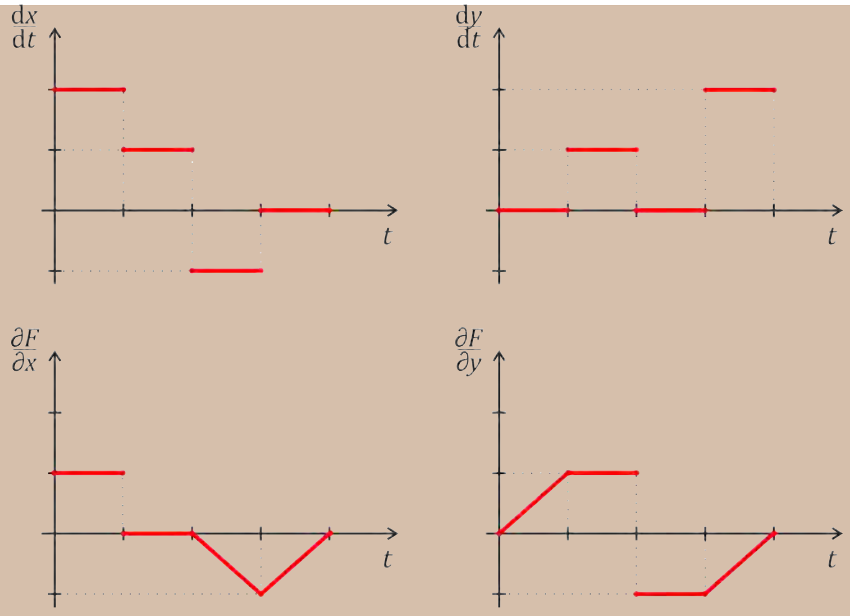
$$\left(\frac{\partial A}{\partial B}\right)_C \left(\frac{\partial B}{\partial C}\right)_A \left(\frac{\partial C}{\partial A}\right)_B = -1.$$

Jak by se změnil uvedený vztah, pokud by platilo $B = B(A,C)$, resp. $C = C(A,B)$?

1.6 Zpětná rekonstrukce funkce z grafů derivací

V předchozím textu jsme k funkcím hledali derivace. Teď zkusíme jako nácvik na další látku vyřešit jednu konkrétní úlohu, která vyžaduje obrácený postup:

Výpočtová úloha 1.2
Vyrazíme společně na malou vycházku. Jako správní „matfyzáci“ si krajinu popíšeme kartézskými souřadnicemi – souřadnice x míří na východ a souřadnice y míří na sever. Dále si zde zavedeme funkci dvou proměnných $F = F(x,y)$, která vyjadřuje nadmořskou výšku v daném místě. Vycházka je popsána následujícími čtyřmi grafy:



Naším úkolem je popsat vycházku jazykem srozumitelným i někomu jinému (tedy např. „nejprve jsme šli celkem pomalu na jih a cesta mírně stoupala, potom jsme se vydali výrazně rychleji na severozápad a čekalo nás strmé klesání“) a k popisu cesty připojit i popis okolní krajiny.

Na tomto příkladu také:

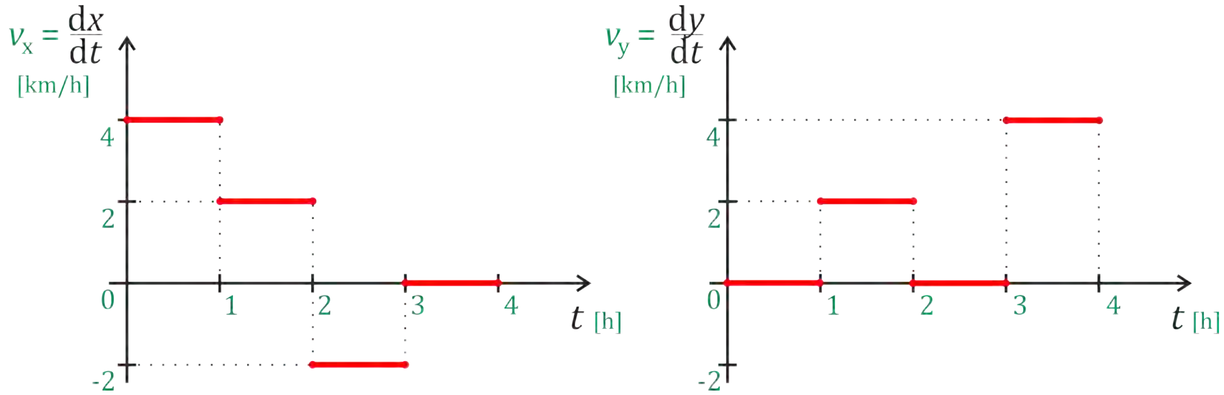
- Určete totální derivaci F podle času, tj. $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ a její graf v závislosti na čase.
- Určete derivaci ve směru cesty v jednotlivých místech vycházky.
- najděte vztah mezi totální derivací podle času a derivací ve směru cesty.

Vzorové řešení:

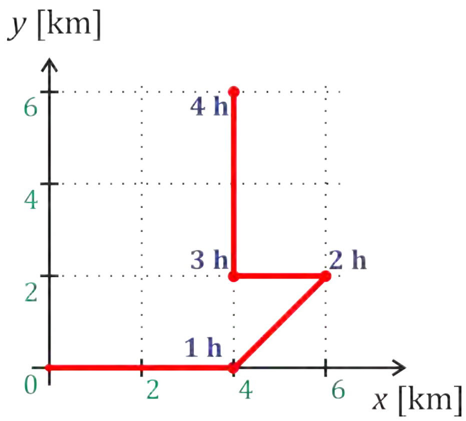
Nejprve využijeme první dva grafy, které nám dávají informaci o tom, jak rychle se měnily naše souřadnice, tj. dávají nám průběh rychlosti. Pro názornost zvolíme jednotky pro obě osy (obr. 1.2) – udělejme z toho takovou půldenní, čtyřhodinovou procházku celkem pohodovým tempem. Přitom budeme uvažovat, že „strmost“ krajiny není nijak velká, takže můžeme zanedbat složky rychlosti ve směru z a zaměňovat průmět rychlosti do vodorovné roviny s celkovou rychlostí.

A jak vypadal náš výlet po hodinách? Zkusíme to vyčíst z grafů:

- První hodinu jsme šli pouze ve směru x (východním směrem), a to rychlostí 4 km/h. Urazili jsme tedy 4 km.



Obrázek 1.2: Grafy popisující průběh rychlosti, nyní už s jednotkami



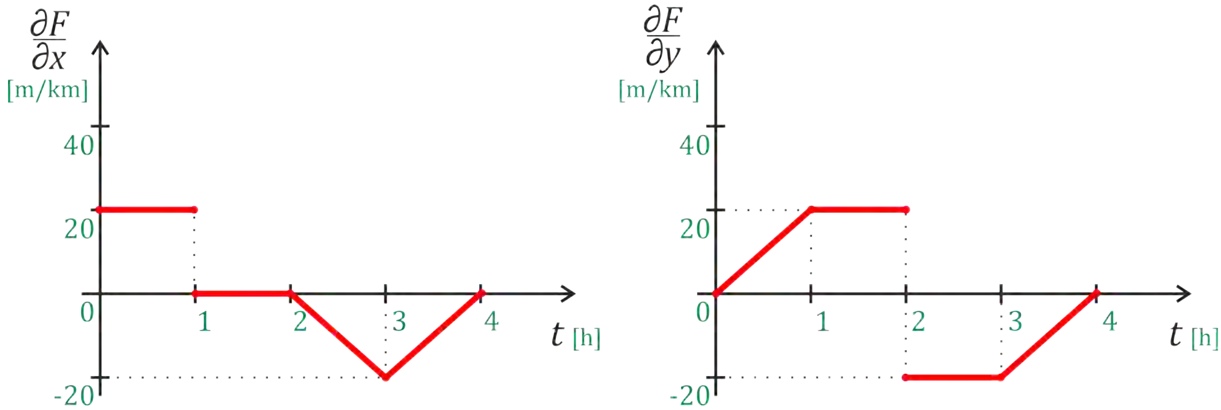
Obrázek 1.3: Mapa naší vycházky

- Druhou hodinu jsme šli ve směru (1,1), tj. severovýchodně, a naše rychlost byla $\sqrt{2^2 + 2^2}$ km/h = 2,8 km/h.
- Ve třetí hodině vycházky jsme kráčeli proti směru osy x, tedy západně, a to rychlostí jen 2 km/h.
- Poslední, čtvrtou hodinu jsme šli směrem na sever rychlostí 4 km/h.

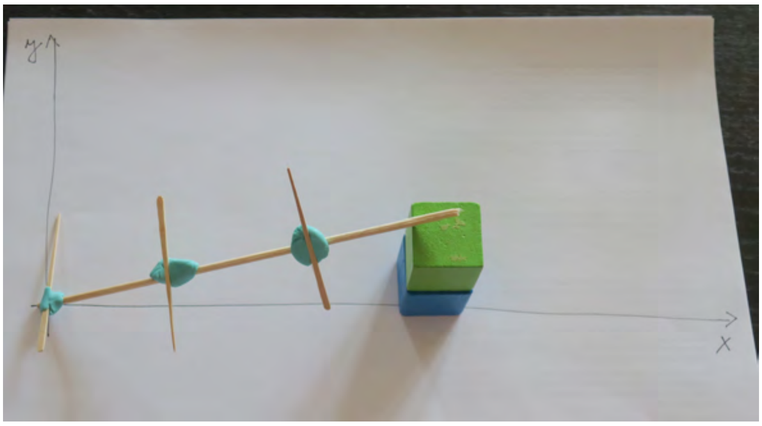
Vytvoříme nyní mapu našeho putování (obr. 1.3) a naznačíme do ní i časové údaje, tj. kdy jsme v daném místě byli. Z grafů v zadání nijak neplyne, že jsme začínali v počátku souřadnicové soustavy, ale pro jednoduchost je tak obrázek namalován.

Nyní nastal čas vzít v úvahu i zbylé dva grafy. Doplňme i do nich číselné údaje (obr. **??**) a opět se podívejme na náš výlet po hodinách.

Během **první hodiny** naší vycházky měla krajina v x-ovém (tj. východním) směru stálý sklon 20 m/1 km. Naše cesta vedla na východ, takže její stoupání bylo stálé, a protože



Obrázek 1.4: Grafy popisující krajinu našeho výletu



Obrázek 1.5: Špejle představuje cestu a její sklon ve směru na východ, párátka určují sklon krajiny v okolí cesty.

jsme šli již dříve určenou rychlostí 4 km/h, nastoupali jsme na čtyřech ušlých kilometrech 80 výškových metrů. Můžeme se také podívat, jak vypadala krajina okolo, tedy v nejbližším okolí cesty (znalost derivace nám umožňuje odhalit právě jen nejbližší okolí). Sklon krajiny ve směru kolmém na naši cestu se z počáteční nulové hodnoty postupně zvyšoval, tj. postupně jsme šli po více a více příkrém úbočí – po naší levé ruce (směrem na sever) se zvedal svah, po naší pravé ruce (jih) bylo údolí (viz obr. **??**).

Ve **druhé hodině** vidíme, že ve směru x je rovina a ve směru y stálé stoupání 20 m/km (alespoň v okolí naší cesty). Protože jsme se vydali ve směru $(1, 1)$, tj. severovýchodně, nejdeme ani po rovině, ani přímo do kopce. Spočtěme naše „stoupání“ pomocí derivace složené funkce – rychlost změny nadmořské výšky $\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t}$ je v časech $t \in (1\,\mathrm{h}; 2\,\mathrm{h})$ rovna

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \cdot 2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} + 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \cdot 2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}} = 40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}.$$

Pokud bychom si chtěli spočítat sklon naší cesty, využijeme toho, že jsme již dříve určili délku druhého úseku (2,8 km), tj. sklon cesty byl $\frac{40}{2{,}8}\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}} \doteq 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}$; stoupání bylo tedy mírnější než v prvním úseku.

Sklon cesty na druhém úseku můžeme spočítat také jiným způsobem, a to pomocí derivace ve směru cesty. Jednotkový vektor ve směru naší cesty je $\vec{n} = (\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ a derivace ve směru $\vec{n}$ je potom

$$\frac{\partial F}{\partial \vec{n}} = (\mathrm{grad}\, F)\cdot\vec{n} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y n_x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x n_y = 0\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} \doteq 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}.$$

Zcela nepřekvapivě dostáváme stejný sklon cesty jako předchozím postupem.

Třetí hodina naší vycházky bude na rozluštění asi nejzapeklitější. Jdeme proti směru osy x, tj. na západ, a pro sklon naší cesty je tedy určující derivace F podle x. Ta je po celou hodinu záporná, to znamená, že ve směru růstu x (tj. východním směrem) funkce F (tj. nadmořská výška) klesá. Protože ale šlapeme na západ, jdeme celou třetí hodinu do kopce. Možná pomůže i formální výpočet – například v čase $t = 2{,}5$ h stoupáme tempem

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

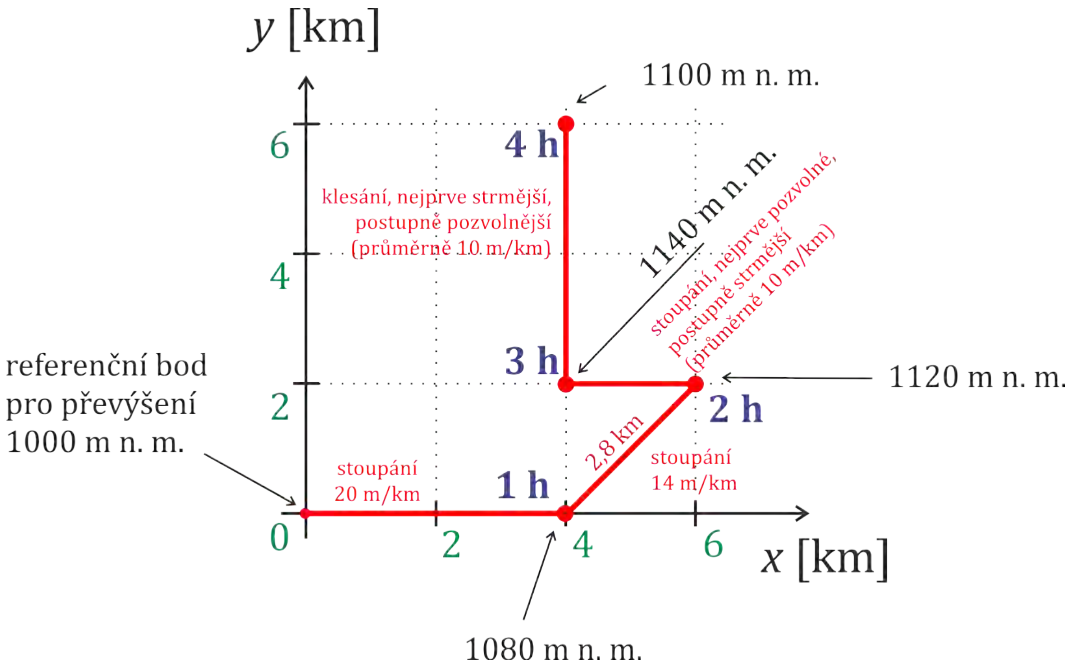
$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\right)\cdot\left(-2\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right) + \left(-20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\right)\cdot\left(0\,\frac{\mathrm{km}}{\mathrm{h}}\right) = 20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{h}}.$$

Protože sklon cesty lineárně roste z nuly až na konečných 20 m/km, můžeme za celou třetí hodinu uvažovat „průměrný“ sklon 10 m/km, což dává při dříve zjištěné rychlosti chůze 2 km/h celkové nastoupané převýšení ve třetím úseku 20 metrů; výškový profil cesty bude parabolický.

Pokud jde o okolí cesty, ve směru y má krajina stálý „záporný“ sklon, celou dobu tedy jdeme po stále stejně „nakloněném“ úbočí. Po pravé ruce (na severu) je pod námi údolí, po levé ruce (na jihu) se nad námi tyčí svah – alespoň v blízkém okolí cesty.

V poslední, **čtvrté hodině**, jsme nabrali stejnou rychlost jako na počátku, tj. 4 km/h, a míříme na sever. Konečně jdeme z kopce, protože pro sklon naší cesty je nyní rozhodující derivace F podle y, která je záporná. Klesání je na začátku čtvrté hodiny rovno -20 m/km, ale postupně se zmenšuje a na úplném konci vycházky přechází cesta v rovinku. Celkově ztratíme během čtvrté hodiny 40 výškových metrů – sklon cesty má až na znaménko stejný časový průběh jako ve třetím úseku, ale protože jdeme dvakrát tak rychle, je i změna nadmořské výšky dvojnásobná.

Ani stráň okolo cesty není rovná, klesá kolmo na cestu od západu směrem k východu a její sklon se postupně zmenšuje. Může nás napadnout, jakým směrem bychom se museli



Obrázek 1.6: Mapa naší cesty doplněná o převýšení, sklony a vzdálenosti

v daném místě cesty rozběhnout, abychom klesali či stoupali nejvíce – tento směr určuje gradient F. Například v čase $t = 3{,}5$ h máme

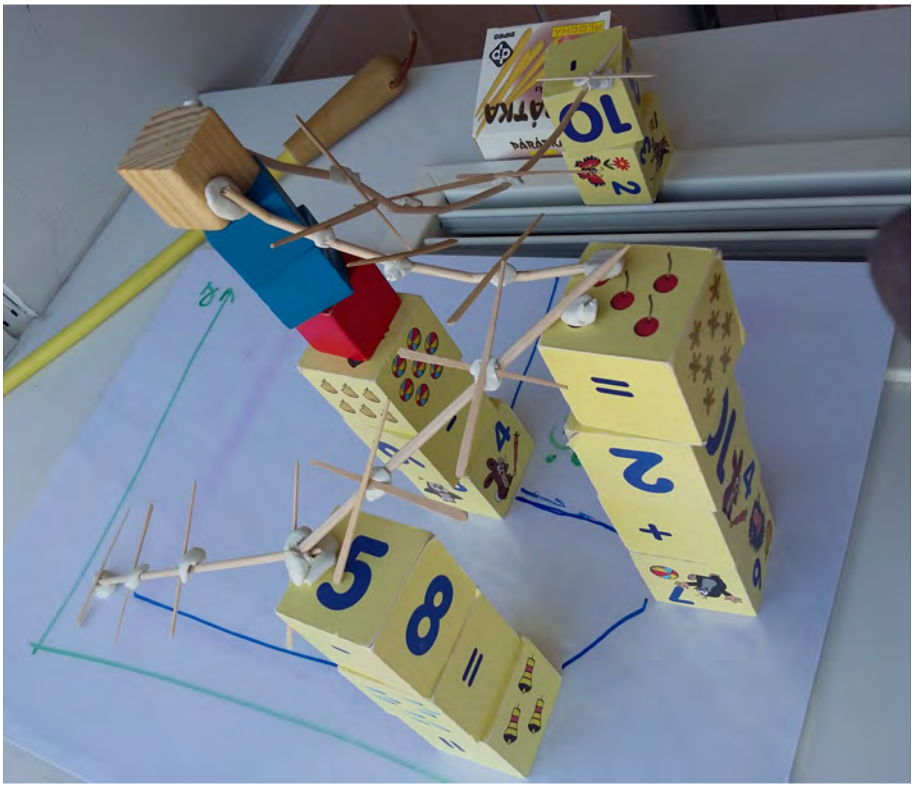
$$\operatorname{grad} F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}\right) = \left(-10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}, -10\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\right) = 14\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{km}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Tento výsledek znamená, že v tomto místě krajina stoupá nejrychleji jihozápadním směrem, z čehož lze usoudit, že na druhou stranu, tj. na severovýchod bude nejvíce klesat. Sklon je zde 14 m/km.

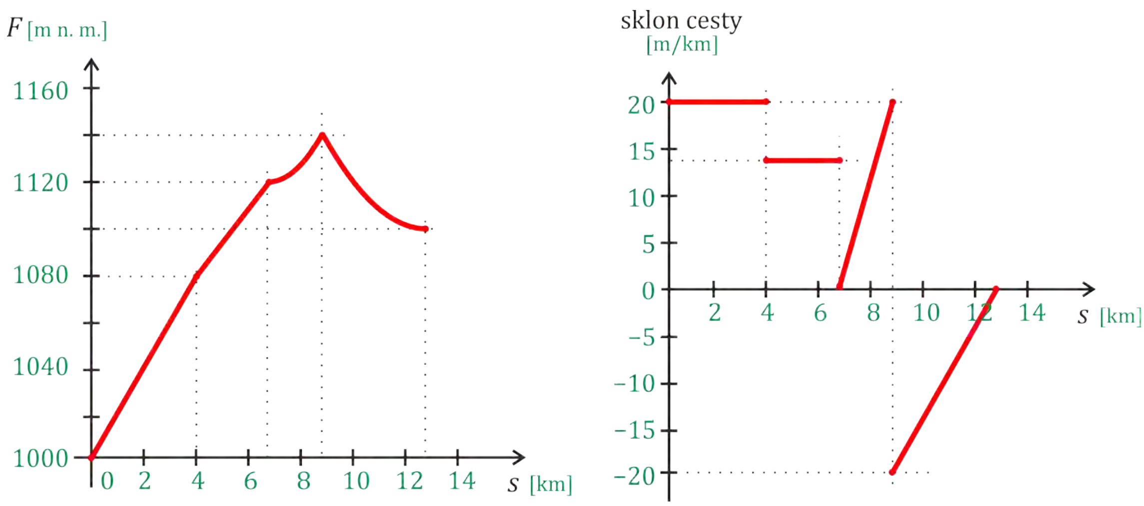
Mapu naší vycházky z obr. 1.3 můžeme nyní aktualizovat doplněním převýšení a sklonu cesty (obr. 1.6) a celou krajinu v okolí naší cesty si názorně namodelujeme – obr. 1.7.

Z doplněné mapy lze snadno nakreslit výškový profil cesty v čase a její „sklon v čase“ (obr. 1.6). Stejně tak můžeme zakreslit závislost výškového profilu a sklonu cesty na uražené vzdálenosti (obr. 1.9). Rozmystele si, že

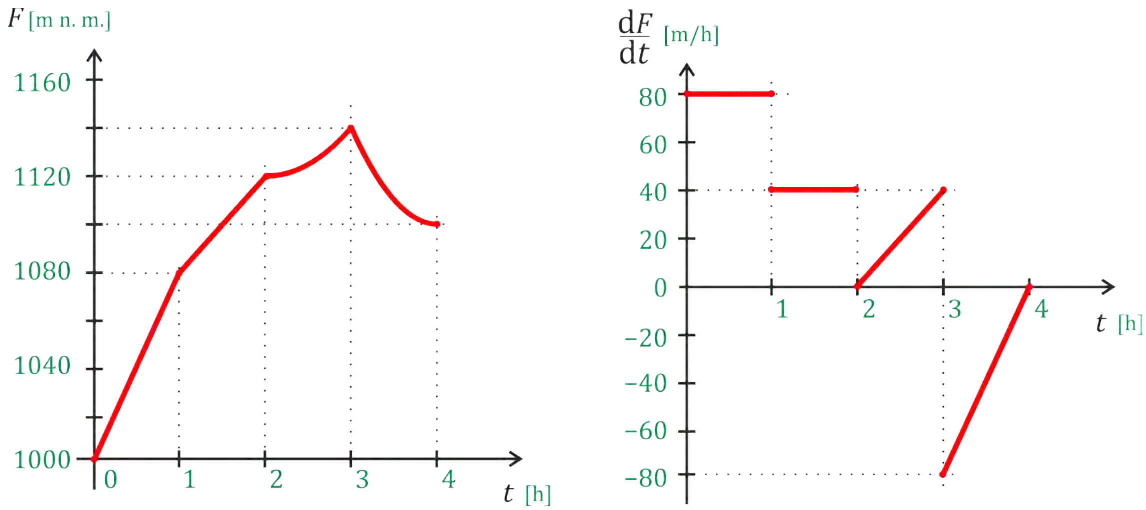
- „sklon v čase“ není nic jiného než totální derivace nadmořské výšky F,
- grafy na obr. 1.9 se od grafů na obr. 1.8 liší jen tím, že byly osy přeškálovány rychlostí naší chůze v jednotlivých hodinách cesty.



Obrázek 1.7: Uff, konečně v cíli! Celá cesta a krajina v jejím nejbližším okolí znázorněná pomocí špejlí a párátek.



Obrázek 1.8: Závislosti nadmořské výšky a sklonu naší cesty na uražené vzdálenosti



Obrázek 1.9: Závislosti nadmořské výšky a sklonu naší cesty na čase

1.7 Totální diferenciál a Pfaffovy formy

Znalost derivací nám říká, jak rychle daná funkce (fyzikálněji veličina) roste, když se mění její proměnné. V termodynamice budeme často vyjadřovat místo derivací přímo přírůstky veličin, tj. budeme hledat výrazy, které nám řeknou, jak se změní veličina $F = F(x,y)$, pokud se změní její proměnné x a y, přičemž uvedené změny budeme brát jako infinitezimálně malé. Budeme tedy pracovat s výrazy ve tvaru

$$\mathrm{d}F = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y,$$

kde $f = f(x,y)$ a $g = g(x,y)$ jsou nějaké funkce proměnných x a y. Omezíme se na případy, kdy jsou tyto funkce spojité a hladké v obou proměnných.

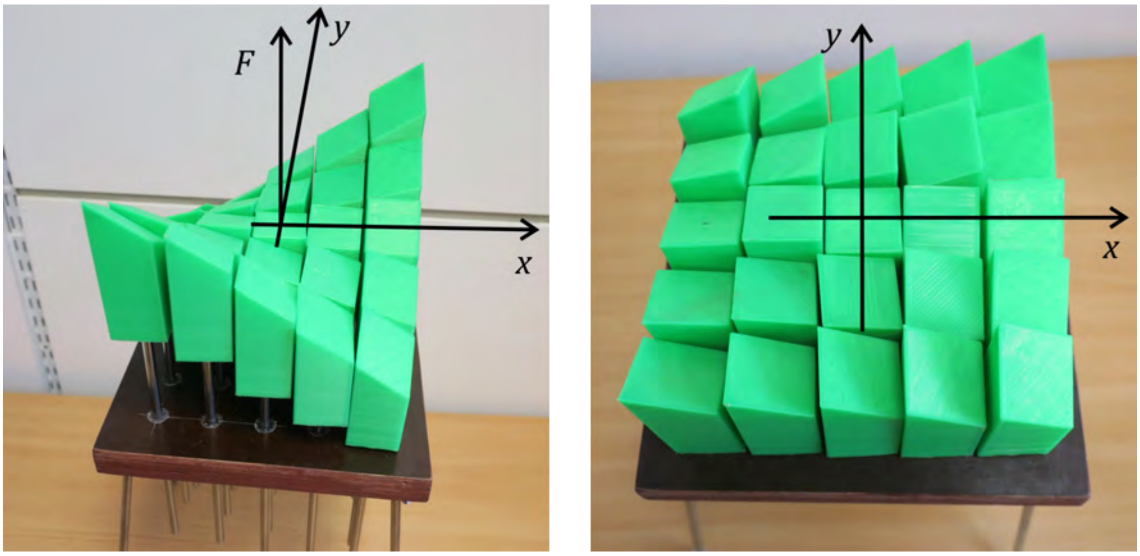
Uvažujme nyní, že funkci F známe. Protože funkce f nám vlastně říká, jak rychle má růst F při změně x, vidíme, že ji můžeme ztotožnit s parciální derivací podle x, tj. $f = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y$; podobně $g = \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x$.

Ke stejnému závěru lze dojít i tak, že výraz pro totální derivaci funkce $F(x,y)$ (vztah 1.2) „vynásobíme“ diferenciálem $\mathrm{d}t$:

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} \qquad \Big|\cdot \mathrm{d}t$$

$$\mathrm{d}F = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x \mathrm{d}y = f(x,y)\,\mathrm{d}x + g(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

Výraz na předchozím řádku budeme nazývat **totálním diferenciálem funkce** $F(x,y)$.



Obrázek 1.10: Funkce $F(x, y) = xy$ sestavená z pohyblivých tečných rovin (vlevo) a tečné roviny umístěné „do stejné výšky“ (vpravo), což názorně ukazuje jakou informaci o průběhu dané veličiny poskytuje znalost Pfaffovy formy (resp. zde totálního diferenciálu).

V matematice se jako totální diferenciál označuje lineární zobrazení, které nejlépe aproximuje funkci v daném bodě. Toto lineární zobrazení lze geometricky znázornit jako tečnou nadrovinu; v našem případě funkcí dvou proměnných (ať jde o nadmořskou výšku v okolí Řípu nebo teplotu ideálního plynu jako funkci objemu a tlaku) se jedná o rovinu. Tato rovina je určena tečnami ve směrech x a y, tj. oběma parciálními derivacemi. To ale znamená, že jak „matematický“, tak „fyzikální“ totální diferenciál nesou stejnou informaci.

Pokud zůstaneme u funkce dvou proměnných $F = F(x, y)$ a třetí prostorovou souřadnici použijeme k zachycení funkční hodnoty, lze si informace uložené v totálním diferenciálu geometricky představit i tak, že průběh funkce budeme aproximovat tečnými rovinami a všechny tyto roviny umístíme do stejné výšky (viz obr. 1.10 vpravo).

Úkol 1.16 Pokuste se vyjádřit obecnou nebo parametrickou rovnici tečné roviny pomocí uvedených parciálních derivací funkce F.

Je vidět, že pokud známe funkci F, je vytvoření jejího totálního diferenciálu velmi jednoduché. My se ale nyní budeme zabývat úlohou obrácenou. V termodynamice totiž často sestavíme výraz, který říká, jak se nějaká veličina mění při změnách veličin, které jsme se rozhodli považovat za její proměnné. A bylo by pro nás velmi výhodné umět tuto veličinu explicitně vyjádřit, případně konstatovat, že takové vyjádření neexistuje. Převedeno do řeči matematiky, budeme mít výraz typu

$$đF = f(x, y)\,\mathrm{d}x + g(x, y)\,\mathrm{d}y,$$

který má stejný tvar jako totální diferenciál výše, ale funkce f a g mohou být libovolné hladké a spojité funkce; výrazy tohoto typu budeme nazývat **(diferenciální) Pfaffovy formy**.[8] A budeme se ptát, zda existuje funkce $F = F(x, y)$, taková, že by se jednalo o její totální diferenciál. Pokud taková $F = F(x, y)$ existuje, nazveme takovou Pfaffovu formu **integrabilní**, pokud ne, budeme hovořit o **neintegrabilní** Pfaffově formě.

Terminologie a značení: V případě, že pracujeme s obecnou Pfaffovou formou, písmeno $đ$ *se „škrtá“, aby se zdůraznilo, že se nejedná o totální diferenciál. Pokud už víme, že se jedná o integrabilní Pfaffovu formu, tj. jde o totální diferenciál nějaké funkce, pak se* d *neškrtá. Ve fyzice obvykle již budeme vědět, které veličiny mají integrabilní, resp. neintegrabilní formy, a tedy i „jaké d použít“.*

Místo integrabilní Pfaffova forma se také používá označení úplný diferenciál a neintegrabilní Pfaffova forma se označuje jako neúplný diferenciál.

Výpočtová úloha 1.3
Než budeme pokračovat obecně, ukažme si jednu konkrétní Pfaffovu formu – práci plynu.

Řešení:
Nejprve velmi jednoduše: Jestliže plyn zvětší svůj objem V, pak vykoná práci rovnou součinu tlaku p a změně objemu δV. Tlak ale může záviset na objemu, tak musíme uvažovat jen malou změnu objemu $\mathrm{d}V$, pro kterou se tlak příliš nezmění, tj.

$$đW = p(V)\,\mathrm{d}V.$$

V případě větší změny objemu δV celkovou práci naintegrujeme

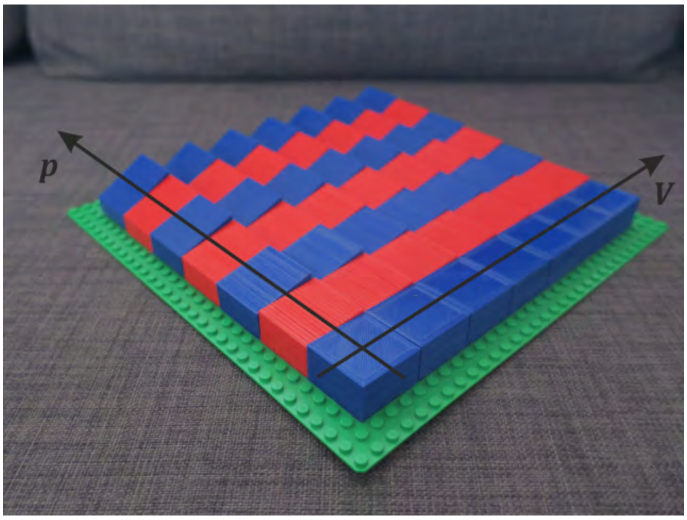
$$W = \int_{V_0}^{V_0+\delta V} p(V)\,\mathrm{d}V.$$

Je přirozené pracovat s nezávislými proměnnými p a V (tj. vše budeme vyjadřovat pomocí tlaku a objemu). Úplný zápis diferenciálu (formy) práce je tedy

$$đW = p\,\mathrm{d}V + 0\,\mathrm{d}p,$$

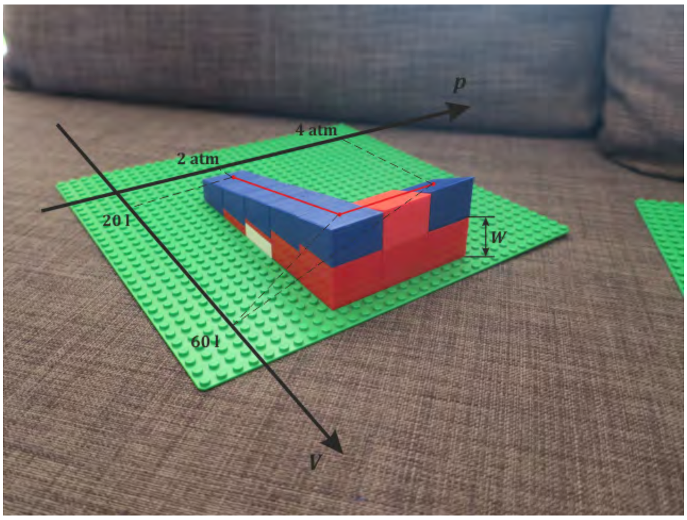
což nám říká, že při změně objemu se koná práce úměrná velikosti tlaku a při změně tlaku se práce nekoná. Vše shrnuje obrázek:

[8] Johann Friedrich Pfaff (22. 12. 1765 – 21. 4 1825), německý matematik



Diferenciál práce je zde v jednotlivých bodech vyjádřen pomocí roviny, která naznačuje přírůstek či úbytek práce v závislosti na tom, kterým směrem se vydáme. Vidíme, že ve směru V jsou roviny skloněné úměrně hodnotě tlaku p (porovnáme-li strmost kostiček v jednotlivých řádcích, tak postupně narůstá) a ve směru p mají všechny roviny nulový sklon (všechny kostičky v jednom řádku jsou stejně strmé).

Jak již bylo naznačeno, znalost diferenciálu (Pfaffovy formy) nám umožňuje počítat křivkové integrály. Geometricky to znázorňuje následující obrázek – kostičky jsou narovnány do takové výšky, aby na „na sebe navazovaly“. Celková změna výšky nám tedy řekne výsledný integrál.



Zkusme najít nějaké pravidlo, které by nám umožnilo jednoduše zjistit, zda konkrétní Pfaffova forma je integrabilní. Pokud se jedná o integrabilní Pfaffovu formu, tj. existuje příslušná funkce F, pak musí platit

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x}.$$

Záměnnost obou derivací máme zaručenu tím, že jsme se v našich úvahách omezili pouze na funkce, které mají všechny derivace až do druhého řádu. Později dokážeme, že uvedené tvrzení platí i obráceně. Tj. pokud je podmínka

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial g}{\partial x} \tag{1.4}$$

splněna, funkce F existuje, a pokud splněna není, funkce F neexistuje. Tím jsme získali poměrně jednoduchý způsob, jak ověřit existenci funkce F, tj. integrabilitu formy $đF$.

Poznámka: Pokud bychom pracovali s Pfaffovou formou veličiny závislé na více než dvou proměnných, je nutné, aby byla splněna podmínka analogická podmínce 1.4 pro každou dvojici proměnných.

Pojďme si použití podmínky 1.4 ilustrovat na dvou konkrétních jednoduchých případech:

Výpočtová úloha 1.4
Zjistěte, zda jsou následující Pfaffovy formy integrabilní:

- a) $đF = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$,
- b) $đG = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.

Řešení:
Řešení spočívá v ověření podmínky 1.4.

a) Začněme s formou $đF = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$:

$$f(x,y) = y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

$$g(x,y) = x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 1.$$

Vidíme, že podmínka je splněna, jedná se tedy o integrabilní Pfaffovu formu. Nedá příliš práce uhodnout, že daná Pfaffova forma vznikla jako totální diferenciál funkce $F(x,y) = xy + C$, kde C je libovolná konstanta. (Obecně platí, že diferenciál nám funkci určí až na aditivní konstantu.)

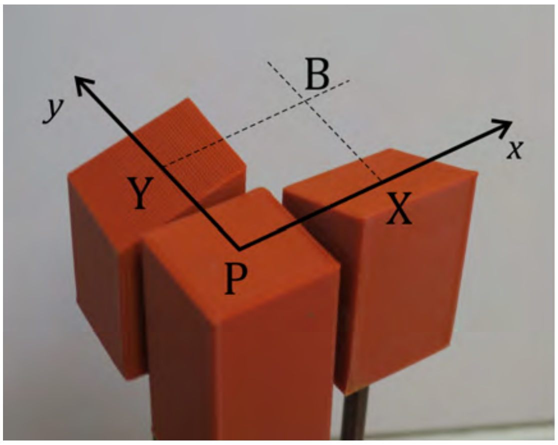
b) Nyní ověříme podmínku pro $\text{đ}G = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$:

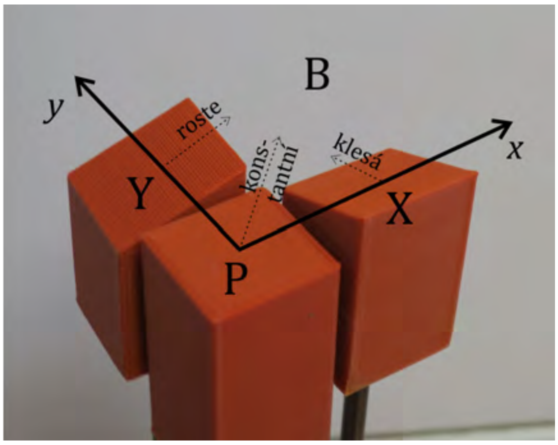
$$f(x,y) = y \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 1,$$

$$g(x,y) = -x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = -1.$$

Podmínka splněna není, jedná se tedy o neintegrabilní Pfaffovu formu a neexistuje žádná funkce, pro kterou by tato forma byla totálním diferenciálem.

Pojďme výpočty ilustrovat ještě na mechanickém modelu, který ukazuje tečné roviny v bodech P = $[0,0]$, X = $[\,\mathrm{d}x, 0]$, Y = $[0,\, \mathrm{d}y]$ a B = $[\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y]$. Zvedáním červených kvádříků se pokusíme danou funkci „vytvořit“. Obě parciální derivace F v bodě P = $[0,0]$ jsou nulové. To znamená, že když zvolíme hodnotu (tj. výšku pro tečné roviny) v tomto bodě, pak hodnota v bodě (výška roviny), který je o malý kousek posunutý ve směru x, by měla být stejná (obdobně i ve směru y). Tím máme nastavené polohy kvádříků v bodech X a Y (viz obrázek 1.7 vlevo).





Problém nastane, pokud se pokusíme umístit tečnou rovinu do bodu B = $[\,\mathrm{d}x,\, \mathrm{d}y]$. Kvádřík v bodě X ve směru y klesá (příslušná derivace je zde záporná), což znamená, že kvádřík v bodě B by měl být ostře níže, než tři již umístěné kvádříky.

Na druhou stranu kvádřík umístěný v bodě Y ve směru x roste (derivace je kladná), což naopak říká, že kvádřík v bodě B by měl být ostře výše, než tři předešlé.

A pokud by nám tyto komplikace nestačily, tak přímá cesta z bodu P do bodu B má nulovou derivaci, takže podle této informace bychom měli čtvrtý kvádřík umístit do stejné výšky jako tři předchozí.

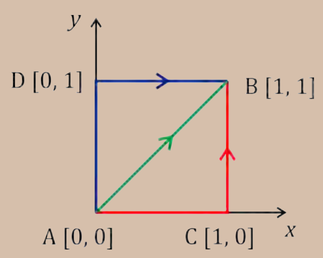
Z toho je jasně patrné, že hodnota G v bodě B (vyjádřená výškou, do které bychom daný kvádřík umístili) není dána jednoznačně, ale závisí na způsobu, jak se snažíme tuto funkci vytvářet. Což je obsahem tvrzení, že neexistuje funkce $G = G(x,y)$, která by tvořila onu plochu, ke které by $\text{đ}G$ určovala tečné roviny. Tečné roviny určené $\text{đ}G$ se nedají „naskládat" do hladké plochy.

1.8 Integrabilita Pfaffovy formy a křivkový integrál

V následujících dvou jednoduchých příkladech uvidíme, že u integrabilní formy nezávisí integrál $\int_\Gamma \mathrm{d}F$ na „cestě", ale pouze na volbě počátečního a koncového bodu, naopak u neintegrabilní formy je výsledek integrálu na cestě závislý. Odtud také plyne pojmenování integrabilní a neintegrabilní formy.

Výpočtová úloha 1.5

A) Uvažujme Pfaffovu formu $\mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$. Spočítejte křivkový integrál $\int_A^B \mathrm{d}F$, kde počáteční bod A má souřadnice [0,0] a koncový bod B má souřadnice [1,1]. Integrál spočítejte po těchto třech cestách:



- a) Nejprve po ose x do bodu $C = [1,0]$ a potom ve směru osy y do koncového bodu [1,1] (na obrázku červeně).
- b) Nejprve po ose y do bodu $D = [0,1]$ a potom ve směru osy x do koncového bodu [1,1] (na obrázku modře).
- c) Po přímé cestě, tj. po přímce $y = x$ (resp. úsečce AB, na obrázku zeleně).

B) Poté celý výpočet zopakujte pro Pfaffovu formu $\text{đ}G = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.

Řešení:
A) Pfaffova forma $\mathrm{d}F = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$ je integrabilní, očekáváme tedy, že integrál bude mít stejnou hodnotu pro všechny tři cesty.

a) **Červená cesta:** Integrál si rozdělíme na dvě části:

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_A^C \mathrm{d}F + \int_C^B \mathrm{d}F.$$

V prvním integrálu jdeme ve směru osy x, tj. $\mathrm{d}x$ je nenulové a $\mathrm{d}y$ nulové, ve druhé části cesty je to obráceně. Dostáváme:

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_A^C y\,\mathrm{d}x + \int_C^B x\,\mathrm{d}y.$$

Dosadíme konkrétní hodnoty mezí i konkrétní hodnoty x a y na příslušných částech cesty a zintegrujeme:

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_{x=0}^1 0\,\mathrm{d}x + \int_{y=0}^1 1\,\mathrm{d}y = 0 + [y]_{y=0}^1 = 1.$$

b) **Modrá cesta:** Výpočet integrálu po této cestě je obdobný jako v předchozím případě:

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_A^D \mathrm{d}F + \int_D^B \mathrm{d}F = \int_{y=0}^1 0\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^1 1\,\mathrm{d}x = 0 + [x]_{x=0}^1 = 1.$$

c) **Zelená cesta:** Výpočet integrálu po této křivce si ukážeme dvěma způsoby. Nejprve využijeme znalosti předpisu dané křivky jako funkce $y = y(x) = x$. Určíme vztah mezi diferenciály obou proměnných

$$\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,\mathrm{d}x = 1\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x.$$

Vidíme, že křivka je popsána touto funkcí pro $x \in (0{,}1)$, což budou integrační meze. Nyní sestavíme integrál a dosadíme za y i za diferenciál $\mathrm{d}y$:

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_A^B (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y) = \int_{x=0}^1 (x\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}x) = \int_{x=0}^1 2x\,\mathrm{d}x = [x^2]_{x=0}^1 = 1.$$

Druhou možností je popsat křivku pomocí vhodného parametru t. Zde

$$x = x(t) = t,\ y = y(t) = t,\ \text{kde } t \in (0{,}1).$$

Odtud spočítáme diferenciály

$$\mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t,\ \mathrm{d}y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\mathrm{d}t = \mathrm{d}t$$

a vše dosadíme do integrálu

$$\int_A^B \mathrm{d}F = \int_{t=0}^1 (y(t)\,\mathrm{d}x + x(t)\,\mathrm{d}y) = \int_{t=0}^1 (t\,\mathrm{d}t + t\,\mathrm{d}t) = \int_{t=0}^1 2t\,\mathrm{d}t = [t^2]_{t=0}^1 = 1,$$

který je díky triviálnímu tvaru křivky prakticky totožný s předchozím výpočtem.

Vidíme, že integrace po všech třech cestách vede ke stejnému výsledku, což nás u integrabilní formy nepřekvapuje. Ještě si můžeme uvědomit, že hodnota uvedeného integrálu je rovna rozdílu hodnoty funkce F v koncovém a počátečním bodě.

B) Jak víme z předchozí úlohy, Pfaffova forma $đG = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$ je neintegrabilní, takže očekáváme, že by integrace po uvedených cestách mohla vést k rozdílným výsledkům. Protože je tato forma záměrně zvolena tak, aby se lišila od předchozí jen v jednom znaménku, bude i výpočet obdobný. Proto ho zde jen stručně zopakujeme a barevně vyznačíme místa, která se liší.

a) Červená cesta

$$\int_A^B đG = \int_A^C đG + \int_C^B đG = \int_{x=0}^1 0\,\mathrm{d}x - \int_{y=0}^1 1\,\mathrm{d}y = 0 - [y]_{y=0}^1 = -1.$$

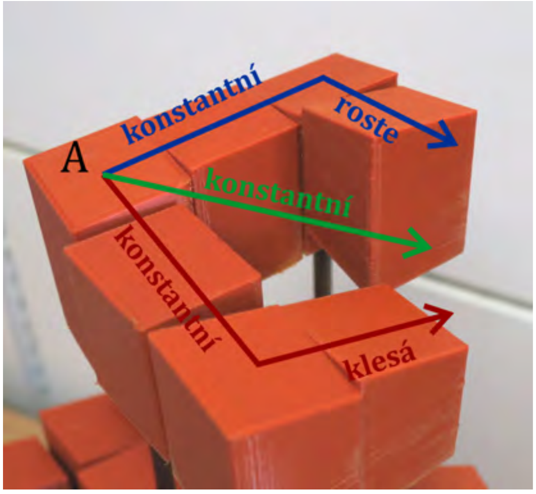
b) Modrá cesta

$$\int_A^B đG = \int_A^D đG + \int_D^B đG = -\int_{y=0}^1 0\,\mathrm{d}y + \int_{x=0}^1 1\,\mathrm{d}x = 0 + [x]_{x=0}^1 = 1.$$

c) Zelená cesta

$$\int_A^B đG = \int_A^B (y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y) = \int_{x=0}^1 (x\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}x) = \int_{x=0}^1 0\,\mathrm{d}x = 0.$$

Jak jsme očekávali, u neintegrabilní formy nám pro různé cesty vyšly různé výsledky. Výpočet názorně ukazuje i následující obrázek.



A ještě jeden fyzikální příklad.

Výpočtová úloha 1.6
Uvažujme plyn o objemu $V_0 = 20$ litrů a tlaku $p_0 = 2$ atmosféry, který zvětší svůj objem na trojnásobek a tlak na dvojnásobek. Určete práci, kterou plyn vykoná, pokud

- a) nejprve zvětší svůj objem a poté tlak („červená cesta“),
- b) nejprve zvětší tlak a teprve poté objem („modrá cesta“),
- c) tlak i objem porostou rovnoměrně („zelená cesta“).

Řešení:
Již víme, že práci plynu lze určit pomocí integrace:

$$W = đW = \int_{poc.\,stav}^{kon.\,stav} p(V)dV.$$

Konkrétně:

$$\text{a)} \qquad W_a = \int_{V_0}^{3V_0} p_0 \,\mathrm{d}V + 0 = p_0(3V_0 - V_0) = 2p_0V_0 = 8\,\mathrm{kJ},$$

$$\text{b)} \qquad W_b = 0 + \int_{V_0}^{3V_0} 2p_0 \,\mathrm{d}V + 0 = 2p_0(3V_0 - V_0) = 4p_0V_0 = 16\,\mathrm{kJ}.$$

Před výpočtem práce po zelené cestě si uvědomíme, že zde platí

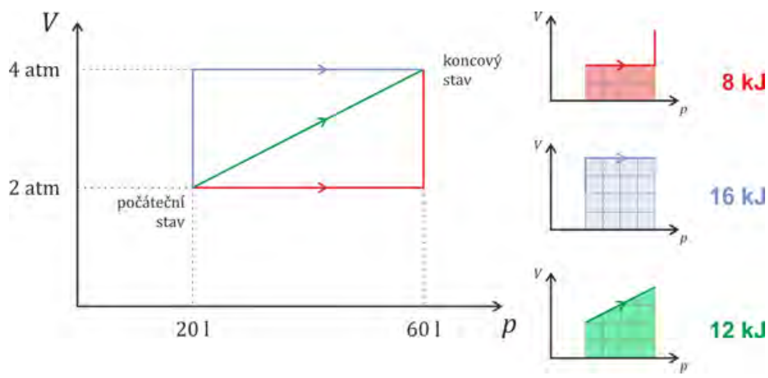
$$\frac{p - p_0}{V - V_0} = \frac{p_k - p_0}{V_k - V_0} = \frac{2p_0 - p_0}{3V_0 - V_0} \qquad \Rightarrow \qquad p = \frac{p_0}{2V_0}V + \frac{3p_0}{2}$$

a to dosadíme do integrace

$$\text{c)} \qquad W_c = \int_{V_0}^{3V_0} \frac{p_0}{2V_0} V + \frac{p_0}{2}\,\mathrm{d}V = \left[\frac{p_0}{4V_0} V^2 + \frac{p_0}{2} V\right]_{V_0}^{3V_0} = 6p_0V_0 = 12\,\mathrm{kJ}.$$

Vidíme, že dle očekávání celková práce závisí na způsobu, jakým se plyn z počátečního do koncového stavu dostal, tj. práce má neintegrabilní Pfaffovu formu.

Již na střední škole se daný integrál interpretuje pomocí plochy pod křivkou závislosti tlaku p na objemu V (tzv. pV-diagram, viz obrázek).



Ale integrovat můžeme i pomocí „kvádříků“. Objem V a tlak p umístíme do vodorovné roviny a třetí, na ně kolmou osu využijeme ke znázornění toho, jak „narůstá“ práce.

1.9 Hledání funkce na základě její Pfaffovy formy

Pojďme si na formách z předchozí části ukázat postup, jak hledat funkci F na základě znalosti její Pfaffovy formy $đF$. Jedná se také o jeden ze způsobů, jak zjistit či ověřit integrability dané formy. Pokud sestavené rovnice mají řešení, tj. funkci F nalezneme, forma $\mathrm{d}F$ je integrabilní. V opačném případě zjistíme, že soustava rovnic řešení nemá a forma $đF$ je tedy neintegrabilní.

Výpočtová úloha 1.7
Nalezněte funkci F, pokud znáte její diferenciální formu $đF = y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y$.

Řešení:
Necháme teď stranou, že výsledek vlastně známe, protože jsme ho už dříve „uhodli“. Naším úkolem je ukázat si obecný postup.

Z tvaru zadané formy známe vztahy pro parciální derivace F

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = y, \qquad \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = x,$$

takže máme vyřešit tuto soustavu dvou parciálních diferenciálních rovnic.

Poznámka: Velmi běžnou chybou při řešení této soustavy je „zintegrování obou rovnic každé zvlášť a sečtení výsledků“. To by zde dalo $\bar{F} = yx + xy = 2xy$. Zderivováním zjistíme, že totální diferenciál $\mathrm{d}\bar{F} = 2y\,\mathrm{d}x + 2x\,\mathrm{d}y$ je odlišný od formy v zadání.

Z první rovnice dostáváme pro F výraz

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_y = y \quad \Rightarrow \quad F(x,y) = yx + C(y),$$

kde roli integrační konstanty může hrát libovolná funkce $C = C(y)$ proměnné y. Tento tvar F dosadíme do druhé rovnice

$$\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_x = x + \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y} = 0,$$

což nám dává diferenciální rovnici pro funkci $C = C(y)$, jejímž řešením je konstantní funkce.

Hledanou funkcí F je tedy funkce $F = xy + \text{konstanta}$.

Výpočtová úloha 1.8
Nalezněte funkci G, pokud znáte její diferenciální formu $đG = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y$.

Řešení:
Nyní postup zopakujeme již rychleji. Máme rovnice

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y = y, \qquad \left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_x = -x,$$

První rovnice nám dává

$$\left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_y = y \quad \Rightarrow \quad G(x,y) = yx + K(y)$$

a druhá rovnice

$$\left(\frac{\partial G}{\partial y}\right)_x = x + \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}y} = -x \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}K}{\mathrm{d}y} = -2x.$$

Poslední vztah nelze splnit žádnou funkcí K, která by závisela pouze na proměnné y. Soustava rovnic tedy nemá řešení a neexistuje funkce G, pro kterou by forma $đG$ byla totálním diferenciálem. Jedná se o neintegrabilní formu.

Z předchozích dvou úloh je vidět obecně platné důležité tvrzení:

Pokud je Pfaffova forma integrabilní, pak určuje funkci F jednoznačně až na aditivní konstantu.

Pravdivost uvedeného tvrzení lze názorně ilustrovat i pomocí modelů. Díky formě znám tečné roviny ve všech bodech funkce. Pokud mám pomocí nich funkci F konstruovat, tak musím někde začít a zvolit hodnotu funkce F v tomto bodě = výšku tečné roviny (kvádříku) = hodnotu uvedené aditivní konstanty. Sklon roviny mi určuje polohu tečných rovin (kvádříků) v okolí mého výchozího bodu (v infinitezimálních vzdálenostech). A tyto roviny mohu použít k nalezení hodnot funkce F zase „o kousek dál“ a postupnými kroky vytvořit celou funkci. I když tento postup vypadá poněkud naivně a neohrabaně, uvědomte si, že po přidání limity „rozměry kvádříku se zmenšují“, nejde o nic jiného než o poctivou integraci zadané formy.

Úkol 1.17 Vraťte se ještě k práci plynu $đW = p\,\mathrm{d}V$. Ověřte, že pro ní neplatí podmínka integrability 1.4. Pokuste se tuto formu zintegrovat výše uvedeným postupem a ukažte, kde přesně postup selže.

1.10 Integrační faktor a jeho hledání

Pokud je Pfaffova forma $đF = f(x, y, ...)\,\mathrm{d}x + g(x, y, ...)\,\mathrm{d}y + ...$ neintegrabilní, lze někdy najít funkci $\mu = \mu(x, y, ...)$ takovou, že forma $\mathrm{d}G = \mu\, đF$ integrabilní je. Funkci μ potom nazýváme **integrační faktor**. Z fyzikálního hlediska je to velmi důležité, protože tak dějovou veličinu F „převedeme“ na stavovou veličinu G.

Uveďme konkrétní příklad.

Výpočtová úloha 1.9
Nalezněte integrační faktor $\mu = \mu(x, y)$ pro neintegrabilní Pfaffovu formu

$$đG = y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y.$$

Řešení:
Je-li $\mu = \mu(x,y)$ integračním faktorem $đF$, pak

$$\mathrm{d}H = \mu\, đG = \mu y\,\mathrm{d}x - \mu x\,\mathrm{d}y$$

je integrabilní Pfaffovou formou (totálním diferenciálem nějaké funkce G) a musí splňovat podmínku 1.4, tj. musí platit

$$\frac{\partial(\mu y)}{\partial y} = \frac{\partial(-\mu x)}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad y\,\frac{\partial \mu}{\partial y} + \mu = -x\,\frac{\partial \mu}{\partial x} - \mu,$$

což je parciální diferenciální rovnice pro funkci μ. My ale nemusíme najít všechna její řešení, stačí nám najít řešení jediné. Pojďme proto vyzkoušet, zda by μ nemohlo být pouze funkcí jedné proměnné – vyzkoušíme, zda rovnici řeší neřeší např. funkce typu $\mu = \mu(x)$:

$$0 + \mu = -x\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} - \mu \quad \Rightarrow \quad x\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} + 2\mu = 0,$$

Dosazením jsme získali diferenciální rovnici prvního řádu, kterou lze řešit separací proměnných

$$\int \frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = -2 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} \quad \Rightarrow \quad \ln \mu = -2 \ln x \quad \Rightarrow \quad \mu = \frac{1}{x^2}.$$

Protože jsme hledali jedno konkrétní řešení, položili jsme pro jednoduchost i integrační konstantu rovnu nule. Dostáváme tedy formu

$$\mathrm{d}H = \mu \, đG = \frac{1}{x^2} y \, \mathrm{d}x - \frac{1}{x^2} x \, \mathrm{d}y = \frac{y}{x^2} \, \mathrm{d}x - \frac{1}{x} \, \mathrm{d}y$$

a je velmi snadné ověřit, že tato forma splňuje podmínku 1.4.

Nalezené řešení není samozřejmě jediné. Obdobně lze uvažovat i funkci μ závislou jen na y, případně lineární kombinace těchto řešení.

V úvodu tohoto oddílu jsme uvedli, že integrační faktor je možné nalézt. Podle počtu proměnných nastávají pro integrační faktor tyto případy:

- Pokud se jedná o formu jediné proměnné, tj.

$$đF = f(x) \, \mathrm{d}x,$$

pak vzhledem k tomu, že $f(x)$ je spojitá a má derivaci, je možné ji vždy zintegrovat a $F(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$.

- Pokud se jedná o formu dvou proměnných, tj.

$$đG = g_1(x,y) \, \mathrm{d}x + g_2(x,y) \, \mathrm{d}y,$$

může být tato integrabilní nebo neintegrabilní, ale v případě její neintegrability vždy existuje integrační faktor $\mu(x,y)$.

- Pokud má forma tři a více proměnných, mohou nastat tři případy:

  - Forma je integrabilní.
  - Forma je neintegrabilní, ale existuje integrační faktor (tzv. holonomní forma).
  - Forma je neintegrabilní a ani neexistuje integrační faktor (tzv. neholonomní forma).

Nebudeme uvedené tvrzení detailně dokazovat. Uveďme jen náznak důkazu. Hledaná funkce μ má N proměnných, tj. N derivací v daném bodě. Pro tyto derivace máme $\frac{N(N-1)}{2}$ podmínek (tolik, kolik je dvojic proměnných, viz 1.4). Tato homogenní soustava rovnic má vždy netriviální řešení, pokud je rovnic méně než proměnných, tj.

$$\frac{N(N-1)}{2} < N,$$

což je splněno pro $N = 1$ a $N = 2$. Pro $N \geq 3$ již existence netriviálního řešení není zaručena.

Úkol 1.18 Vraťme se opět k práci plynu W, jejíž diferenciál je dán vztahem $đW = p\,\mathrm{d}V$.

1. Již víme, že se jedná o neintegrabilní formu. Nalezněte její integrační faktor μ.
2. Fyzikálně interpretujte stavovou veličinu, jejíž diferenciál je $\mu\,đW$.
3. Doposud jsme vše vyjadřovali pomocí nezávislých proměnných objem V a tlak p. Zkuste uvedené úvahy provést i za předpokladu, že našimi nezávislými veličinami budou objem V a teplota T. V takovém případě ale musíme dodat závislost teploty T na tlaku a objemu, uvažujme tedy ideální plyn, pro který platí $pV = nRT$, kde n je látkové množství plynu (uvažujme ho jako konstantní) a R plynová konstanta.

1.11 Věta o pěti ekvivalencích

V tomto oddíle shrneme vše, co jsme si o Pfaffových formách řekli a ilustrovali na jednoduchých příkladech. Vše zachycuje tzv. **věta o pěti ekvivalencích**.

Uvažujme n funkcí n proměnných $f_j(x_1, x_2, \dots x_n)$, které mají spojité všechny derivace. Potom následující výroky jsou ekvivalentní:

1. Pfaffova forma $\mathrm{d}F(x_1, x_2, \dots x_n) = f_1\,\mathrm{d}x_1 + f_2\,\mathrm{d}x_2 + \dots + f_n\,\mathrm{d}x_n$ je integrabilní, tj. existuje funkce $F = F(x_1, x_2, \dots x_n)$, pro kterou je tato forma totálním diferenciálem.
2. Existuje funkce $\Phi(x_1, x_2, \dots x_n)$ taková, že libovolný křivkový integrál $\int_A^B \mathrm{d}F = \Phi(B) - \Phi(A)$, kde A je počáteční a B koncový bod dané křivky.
3. Křivkový integrál $\int_\Gamma \mathrm{d}F$ nezávisí na zvolené cestě.
4. Integrál po uzavřené křivce $\oint_\Gamma \mathrm{d}F = 0$.
5. Pro všechny dvojice indexů $j, k \in 1, 2, \dots n$ je splněna podmínka $\frac{\partial f_j}{\partial x_k} = \frac{\partial f_k}{\partial x_j}$.

Poznamenejme explicitně, že ekvivalence těchto pěti výroků znamená, že jsou splněny buď všechny, nebo žádný z nich.

Místo důkazu této věty si ukážeme, jak by její jednotlivá tvrzení vypadala v případě, který je nám dobře znám z mechaniky – pro diferenciál vykonané práce, tj. skalární součin síly $\vec{F}$ a posunutí $\mathrm{d}\vec{r}$

$$\mathrm{d}W = \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{r} = F_x \,\mathrm{d}x + F_y \,\mathrm{d}y + F_z \,\mathrm{d}z.$$

Vidíme, že složky síly zde hrají roli „koeficientů určujících rychlost nárůstu práce“ ve směrech jednotlivých os.

První výrok z věty o pěti ekvivalencích by zněl tak, že silové pole je konzervativní – jedná se tedy pouze o jiné pojmenování. Druhý výrok se v mechanice obvykle formuluje tak, že lze zavést potenciální energii Φ a práci po určité křivce počítat jako rozdíl potenciální energie v koncovém a počátečním bodě. Třetí a čtvrtý výrok zůstávají beze změny. Poslední, páté tvrzení (tj. podmínky integrability) nejprve přepišme pro síly. Pro složky x a y platí

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0,$$

kde v poslední rovnici poznáváme z-ovou složku $\operatorname{rot} \vec{F}$. Ostatní podmínky integrability dají nulovost zbylých dvou složek rotace síly. Podmínky integrability lze tedy v řeči mechaniky formulovat tak, že pole je konzervativní právě tehdy, když je rotace síly nulová.

Důkazy ekvivalence jednotlivých tvrzení v obecnější podobě, jak jsme je uvedli zde, jsou zcela analogické těm, které jste dělali v mechanice.

1.12 Úlohy pro procvičení

1. Zjistěte, zda se jedná o totální diferenciál. Pokud ano, zintegrujte. Pokud ne, pokuste se nalézt integrační faktor.
a) $đF(x,y) = 2x \sin y \, \mathrm{d}x + \left(x^2 \cos y - \frac{1}{y^2}\right) \mathrm{d}y$
b) $đF(x,y) = x^2 \, \mathrm{d}x + \frac{3}{2} x y^2 \, \mathrm{d}y$
c) $đF(x,y) = 6xy^3 \, \mathrm{d}x + 9x^2y^2 \, \mathrm{d}y$
d) $đF(x,y) = 6xy^2 \, \mathrm{d}x + 9x^2 y \, \mathrm{d}y$
e) $đF(x,y) = 2xy \, \mathrm{d}x + x^2 \, \mathrm{d}y$
f) $đF(x,y) = 2xy \, \mathrm{d}x + (x^2 + y^2) \, \mathrm{d}y$
g) $đF(x,y,z) = \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}z$
h) $đF(x,y,z) = (\sin y - y \cos x + yz) \, \mathrm{d}x + (x \cos y - \sin x + xz) \, \mathrm{d}y + xy \, \mathrm{d}z$
i) $đF(x,y,z) = (y^2 + 5x^4 z^6 + 2yz^2) \, \mathrm{d}x + (2xy + 3y^2 z^4 + 2xz^2) \, \mathrm{d}y + (4y^3 z^3 + 6x^5 z^5 + 4xyz) \, \mathrm{d}z$

2. Integrujte Pfaffovu formu

$$đW = (y^2 + 5x^4 z^6 + 2yz^2) \, \mathrm{d}x + (2xy + 3y^2 z^4 + 2xz^2) \, \mathrm{d}y + (4y^3 z^3 + 6x^5 z^5 + 4xyz) \, \mathrm{d}z$$

po křivce Γ, která vede z bodu [0,0,0] do bodu [1,1,1], a to
a) ve směru os v pořadí x, y, z;
b) ve směru os v pořadí z, y, x;
c) přímo, po diagonále (při integraci využijte parametrizaci křivky).

Proveďte totéž s Pfaffovou formou $đW(x,y,z) = \mathrm{d}x + y \, \mathrm{d}z$. Diskutujte rozdíly.

3. Výrazy $đF(x,y) = 6xy^3 \, \mathrm{d}x + 9x^2y^2 \, \mathrm{d}y$ a $đF(x,y) = 6xy^2 \, \mathrm{d}x + 9x^2 y \, \mathrm{d}y$ zintegrujte po křivkách γ_1 a γ_2. Před integrací se pokuste odhadnout výsledek (využijte výsledky předchozí úlohy).
Křivka γ_1 se skládá ze dvou částí. Začíná v bodě (x_1,y_1). Na první části se nemění proměnná x a první část končí v bodě (x_1, y_2). Na druhé části se nemění proměnná y a křivka končí v bodě (x_2,y_2).
U druhé křivky je to naopak – v první části se nemění proměnná y a v druhé proměnná x. Křivka γ_2 tedy vede z bodu (x_1,y_1) přes bod (x_2,y_1) do bodu (x_2,y_2).
Obě křivky tedy mají stejný počátek a konec (nakreslete si jejich obrázek).

4. Uvažujte potenciální energii V v tíhovém poli s osou z orientovanou svisle vzhůru. V rovině xz platí $V(x,z) = mgz$. Spočtěte parciální derivaci podle x pro $V(x,z)$ a pro $U(x,r)$, kde r je vzdálenost od počátku (tj. souřadnice r z polárních souřadnic). Výsledek ilustrujte i pomocí vhodného obrázku.