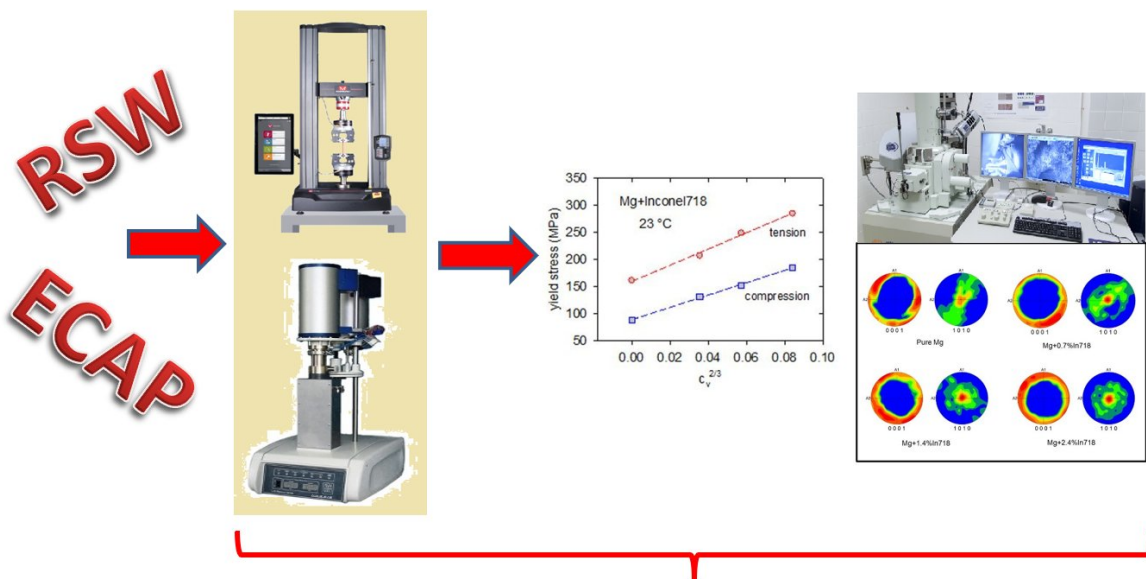
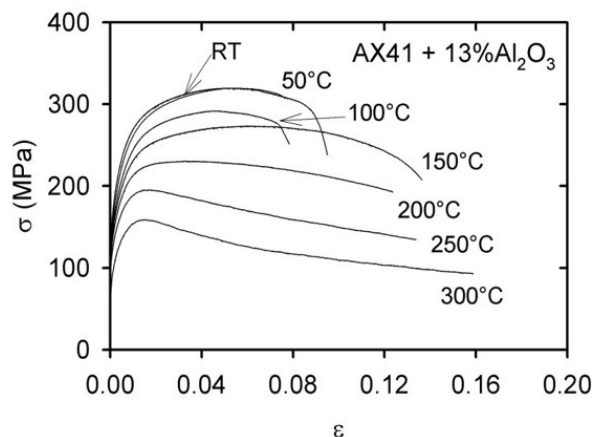
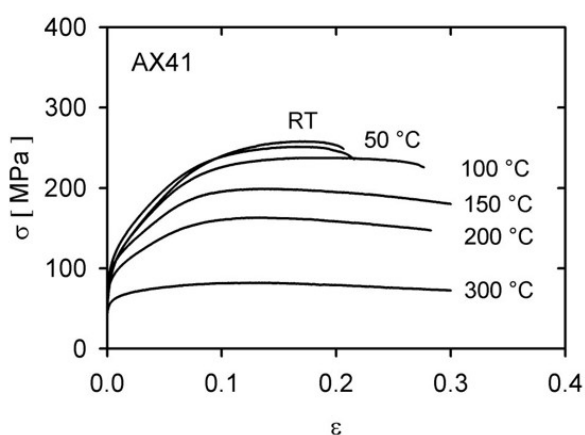


# DEFORMACE MATERIÁLŮ

## (principy a měření)\*



--> ?...? -->



\* Tvorba tohoto textu byla podpořena v rámci projektu "Podpora přípravy budoucích učitelů matematiky, fyziky a informatiky na MFF UK" (ukazatel P) v roce 2020.

## Deformace pevných látek

Deformaci pevných látek většinou dělíme na čtyři základní typy, kterými jsou:

- elastická deformace
- anelastická deformace
- plastická deformace
- creep

Při elastické deformaci reaguje deformovaný materiál na vnější deformační síly v podstatě okamžitě a po zániku deformačních sil se tvar deformovaného tělesa také téměř okamžitě vrací do původního stavu. Při deformaci anelastické dochází k určité časové prodlevě mezi deformačními silami a změnou tvaru (deformací). Můžeme říci, že anelastické deformace je časově závislou složkou elastické deformace. Elastické deformace má tedy dvě složky – časově nezávislou a časově závislou. Oba tyto deformační módy přitom v materiálu během jeho deformování působí současně.

Podobně i plastická deformace, která se vyznačuje trvalou nevratnou změnou tvaru deformovaného tělesa, má složku časově nezávislou a časově závislou (tzv. creep). Creep je také často definován jako plastická deformace probíhající při konstantní teplotě a konstantním napětí (konstantním zatížení) v závislosti na čase.

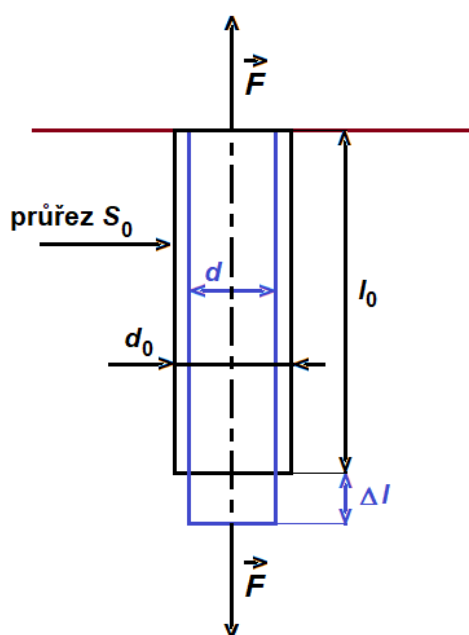
V následujícím textu se budeme věnovat pouze časově nezávislým složkám deformace. Anelastická deformace, a hlavně creep, jsou poměrně složité fyzikální fenomény a je lépe věnovat se jim zvlášť.

### a) Elastická deformace

Probereme dva základní typy elastické deformace – deformaci jednoosým tahem a smykovou deformaci.

#### *Elastická deformace jednoosým tahem*

Představme si, že deformujeme vzorek materiálu ve tvaru válečku, jehož počáteční délka je  $l_0$  a velikost plochy řezu kolmého k ose válečku je  $S_0$  (obr. 1).



Obr. 1. Jednoosá tahová deformace.

Pro prodloužení vzorku lze napsat:

$$\Delta l \sim l_0$$

$$\Delta l \sim F$$

$$\Delta l \sim \frac{1}{S_0}$$

což napíšeme ve formě rovnice jako:

$$\Delta l = k l_0 \frac{F}{S_0},$$

popř.

$$\frac{\Delta l}{l_0} = k \frac{F}{S_0}. \quad (1)$$

Podíl na levé straně rovnice (1) vyjadřuje tzv. relativní deformaci  $\varepsilon_r$ . Poměr síly  $F$  a velikosti

plochy kolmé ke směru této síly nazveme normálovým napětím  $\sigma$ . Rovnici (1) potom můžeme přepsat do tvaru

$$\varepsilon_r = k\sigma.$$

Konstantou úměrnosti v tomto vztahu je převrácená hodnota tzv. Youngova modulu pružnosti v tahu  $E$  (nebo zkráceně jenom modulu pružnosti v tahu). Rovnice popisující elastickou deformaci jednoosým tahem má tedy tvar:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}\sigma. \quad (2)$$

a vyjadřuje známý Hookův zákon.

Modul pružnosti v tahu je důležitým materiálovým parametrem. Udává se v MPa a vyjadřuje, jak velké napětí by muselo být aplikováno, aby se délka vzorku zdvojnásobila. (Je ale v podstatě nemožné, aby se při elastické deformaci délka vzorku zdvojnásobila. Elastická deformace dosahuje pouhých jednotek procent.) Typická hodnota modulu  $E$  vychází v GPa. Např. modul pružnosti oceli je zhruba 210 GPa.

Při deformaci vzorku dochází také ke změně jeho příčného rozměru. Tímto „příčným zkrácením“ bude  $\Delta d = d - d_0$  ( $d, d_0$  viz obr. 1) Podobně jako u prodlužování i v tomto případě můžeme napsat vcelku zřejmě úměrnosti):

$$\Delta d \sim d_0,$$

$$\Delta d \sim F \text{ a}$$

$$\Delta d \sim \frac{1}{S_0}$$

a příslušná rovnice potom bude mít podobu:

$$\Delta d = k'd_0 \frac{F}{S_0},$$

což ještě přepíšeme jako:

$$\frac{\Delta d}{d_0} = \eta = k'\sigma. \quad (3)$$

Bezrozměrnou veličinu  $\eta$  (která je záporná, jak je zřejmé z definice  $\Delta d$ ) nazveme relativní příčné zkrácení.

Konstantu  $k'$  v tomto případě nenahrazujeme přímo nějakým materiálovým parametrem. Ten přiřadíme poměru této konstanty  $k'$  a konstanty  $k$  ze vztahu (1), který vyjadřuje Poissonovo číslo  $\mu$ :

$$\mu = \frac{k'}{k}. \quad (4)$$

Z experimentů víme, že tato konstanta, která je důležitým materiálovým parametrem je vždy menší než jedna polovina ( $\mu < 1/2$ ). Často se také setkáváme s převrácenou hodnotou Poissonova čísla, kterou nazýváme Poissonovou konstantou a značíme ji  $m$ :

$$m = \frac{1}{\mu}. \quad (5)$$

Zkombinujeme-li dva z předchozích vztahů:

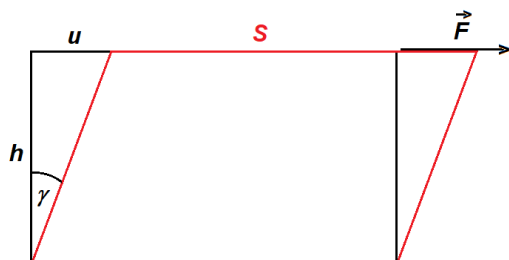
$$\sigma = \frac{1}{k'\eta} \text{ a } k' = k\mu,$$

a vezmeme v úvahu, že  $k = \frac{1}{E}$ , dostaneme vztah mezi normálovým napětím  $\sigma$  a relativním příčným zkrácením  $\eta$ :

$$\sigma = \frac{E}{\mu} \eta. \quad (6)$$

## b) Smyková elastická deformace

Nyní si představíme kvádr, jehož dolní podstava je zafixovaná. Na horní podstavu z boku (tedy tečně v její rovině) působí deformační síla. (obr. 2). Tato síla způsobí zkosení původního kvádru o úhel  $\gamma$ . Pro tento úhel platí:



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{u}{h}.$$

Vzhledem k tomu, že se jedná o elastickou deformaci a ta bývá v případě smykové deformace velmi malá, můžeme tangens úhlu  $\gamma$  nahradit přímo tímto úhlem:

$$\operatorname{tg} \gamma \approx \gamma.$$

Obr. 2. Smyková elastická deformace.

Úhel  $\gamma$  charakterizuje smykovou deformaci uvažovaného kvádru. Platí úměrnosti:

$\gamma \approx F_t$  a  $\gamma \approx \frac{1}{S}$ . Na jejich základě napíšeme rovnici pro smykovou deformaci:

$$\gamma = k'' \frac{F_t}{S} = k'' \tau. \quad (7)$$

Písmenem  $\tau$  je označeno tzv. smykové napětí. Je dáno poměrem velikosti smykové síly  $F_t$  působící tečně k rovině horní podstavy kvádru a velikosti plochy této podstavy.

Analogicky k tahové deformaci položíme konstantu úměrnosti v rovnici (7) rovnou převrácené hodnotě odpovídajícího materiálového parametru, kterým je zde modul pružnosti ve smyku  $G$ . Tím získáme vztah pro elastickou deformaci ve smyku, který je zároveň zápisem Hookova zákona pro smykovou deformaci:

$$\gamma = \frac{1}{G} \tau. \quad (8)$$

Smykový modul  $G$  můžeme interpretovat jako smykové napětí (tečné napětí) které by způsobilo zkos  $\gamma = 45^\circ$ . Těžko ale nalezneme materiál, který by tak velké elastické deformace ve smyku byl schopen.

Z předchozího textu vyplývá, že elastické vlastnosti pevné látky můžeme charakterizovat materiálovými parametry  $E$ ,  $G$ ,  $\mu$ . Ty jsou svázány vztahem (který zde nebudeme odvozovat):

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (9)$$

Parametry  $G$ ,  $E$  a  $\mu$  tedy nejsou na sobě nezávislé. Stačí znát dva z nich, třetí umíme dopočítat.

Pro Poissonovo číslo  $\mu$  platí, že je menší než 0,5. Rozborem vztahu (9) zjistíme, s uvažováním  $\mu < \frac{1}{2}$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)} \Rightarrow \mu = \frac{E}{2G} - 1$$

$$\mu < \frac{1}{2}, \quad \frac{E}{2G} - 1 < \frac{1}{2} \Rightarrow G > \frac{1}{3}E$$

Modul pružnosti ve smyku je tedy větší než 1/3 modulu pružnosti v tahu.

Vezmeme-li v úvahu ještě limitní případ, kdy by se Poissonovo číslo blížilo k nule, získáme druhou relaci mezi  $G$  a  $E$ :

$$\mu \rightarrow 0, \quad \frac{E}{2G} - 1 \rightarrow 0 \Rightarrow G \rightarrow \frac{1}{2}E.$$

Odtud je vidět, že pro moduly  $E$  a  $G$  platí:

$$\frac{1}{3}E < G < \frac{1}{2}E. \quad (10)$$

V krátké kapitole věnované elastické deformaci jsme si všimli pouze dvou specifických případů: jednoosého tahu a smyku. Elastickou deformaci lze obecně popsat pomocí tenzoru napětí a tenzoru deformace. Vztah mezi nimi potom vyjadřuje zobecněný Hookův zákon. Je to sice zajímavá problematika, je ale probírána v mechanice, popř. v mechanice kontinua, je tedy možné se ní seznámit v příslušných učebnicích, např. [1-3]. V dalším kapitole se podrobněji seznámíme s problematikou plastické deformace pevných látek.

## b) Plastická deformace a její měření

Nápadným vnějším rysem plastické deformace je nevratná změna tvaru deformovaného tělesa. Při plastické deformaci dochází k řadě složitých procesů uvnitř struktury látky jako je např. vznik, pohyb a hromadění dislokací v krystalové mřížce, formování dislokační struktury spojené se vznikem napěťových polí, v nichž se musí dislokace pohybovat, interakce dislokací s různými typy překážek, vzájemná interakce dislokací, jejich skluz, šplhání, anihilace, vznik dvojčat, jejich růst, reorientace zrn, přeskupování bodových poruch apod. Jde o komplexní a velmi složitou problematiku. Existuje mnoho modelů mikrostrukturních změn v průběhu plastické deformace a celé náročné odvětví nazývané dislokační dynamika, která se věnuje procesům spojeným vývojem dislokační struktury uvnitř pevných látek (převážně kovů).

Cílem tohoto textu není podrobný popis a rozbor mikrostrukturních procesů spojených s plastickou deformací. zaměříme se pouze na nejdůležitější rysy této zajímavé problematiky. Nejprve se stručně podíváme na to, jak lze plastickou deformaci experimentálně zkoumat, poté si všimneme základních rysů plastické deformace monokrystalů, a nakonec bude naznačeno něco málo z teorie plastické deformace polykrystalických materiálů. Budeme se tedy zabývat pouze krystalickými pevnými látkami a mechanismy jejich plastické deformace. Dá se říci, že tato oblast je nejvíce prozkoumána a nejlépe jí rozumíme. Látkám amorfním, sklům, keramice, polymerům a mnoha dalším, se v tomto textu věnovat nebudeme.

## Experimentální zkoumání plastické deformace

Při působení deformačních sil dochází k adjustaci krystalové mřížky tak, aby byla zachována rovnováha mezi působícími vnějšími silami a meziatomovými silami. Deformace vede k posunutím, která je možno měřit. Jak již bylo zmíněno, tvarová změna tělesa, k níž dochází během plastické deformace, nezmizí poté, co na těleso přestanou působit deformační síly. Tento druh deformace má pro tvar tělesa trvalé následky.

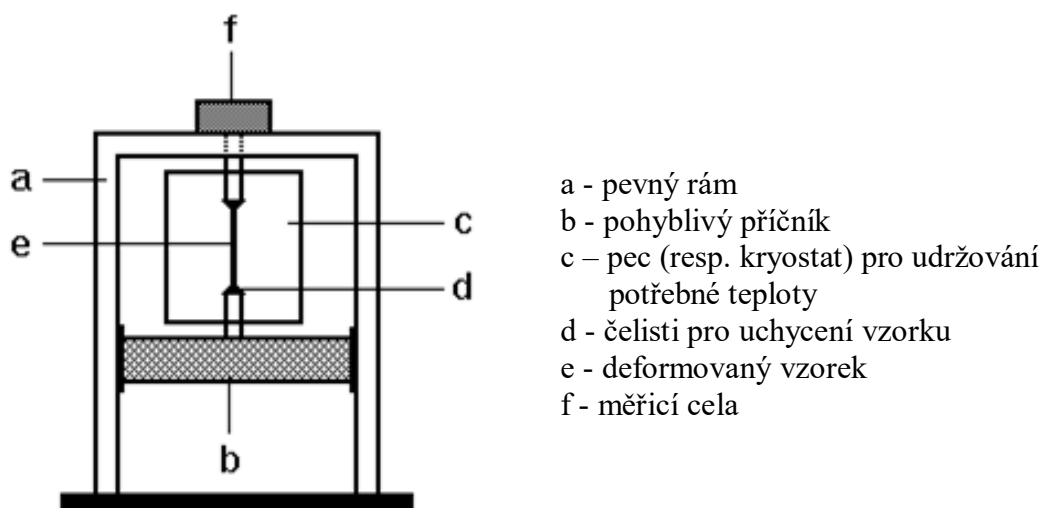
Velikost síly, způsobující určitou změnu tvaru (např. prodloužení), závisí na rozměrech tělesa. Z tohoto důvodu je výhodné sledovat velikost napětí. Napět'ový stav tělesa je obecně určen tenzorem napětí. Stejně tak rozměrové změny jsou obecně charakterizovány tenzorem deformace. Vzhledem ke zmíněné závislosti tvarových změn na geometrii deformovaného tělesa je vhodné vztahovat posunutí způsobená uvedeným jevem ke vhodně zvoleným měrným rozměrům a převádět je tak na bezrozměrné veličiny.

Při studiu plastické deformace je výhodné volit vzorky jednoduchého geometrického tvaru, které namáháme jednoosým napětím. Nejčastěji používané tvary vzorků jsou válce nebo hranoly. Střední část vzorku je tvarována tak, aby na ni působilo homogenní napětí. Konce vzorku jsou uzpůsobeny pro uchycení do deformačního stroje.

Při experimentu nás zajímají tři proměnné: napětí, deformace a rychlost pohybu příčnicku deformačního stroje. Jednu z těchto veličin držíme na konstantní hodnotě. Experiment provádíme při zvolené teplotě, kterou udržujeme na stálé hodnotě. Jsou-li splněny tyto podmínky, můžeme deformační zkoušky rozdělit do tří skupin.

### 1. Zkoušky s konstantní rychlostí deformačního stroje

Testovaný vzorek se prodlužuje konstantní rychlostí v deformačním stroji. Schéma tohoto stroje je znázorněno na obrázku 3, fotografii detailu si můžete prohlédnout na obrázku 4.



Obr. 3. Schéma deformačního stroje.



Obr. 4. Čelisti deformačního stroje.

Jeden konec vzorku je upevněn pomocí čelistí k posuvnému příčnicku, který se posouvá předepsanou rychlostí. Druhý konec je spojen s měřicí celou (vhodným dynamometrem), pomocí níž měříme zatěžovací sílu. Vzorek s čelistmi může být přitom umístěn v peci, aby mohl experiment probíhat při zvolené teplotě (při některých experimentech je naopak nutno vzorek držet při nízkých teplotách, v tom případě je pec nahrazena kryostatem). I když deformujeme pouze subtilní vzoreček, bývá deformační stroj masivní. Obzvláště jeho rám působí předimenzovaně. Má to svůj dobrý důvod. Potřebujeme deformovat vzorek, ale ne stroj. I když mohutné provedení rámu

stroje jeho deformaci minimalizuje, je v některých případech nutné znát tuhost stroje a provést příslušnou kalibraci.

#### b) *Zkoušky při stálém napětí.*

Vzorek je vystaven konstantnímu zatížení, přičemž je možno registrovat prodloužení vzorku (deformaci) v závislosti na čase. V tomto případě tedy měříme creep.



Obr. 5. Laboratoř pro měření creepu bývá vybavena řadou „creepostrojů“.

#### c) *Napětíové relaxace.*

V tomto případě je vzorek deformován konstantní deformační rychlostí až do určité hodnoty napětí a deformace. Potom je zastaven pohyb příčnicku a měří se pokles napětí s časem. Experiment může pokračovat tak, že obnovíme pohyb příčnicku deformačního stroje, opět deformujeme do jisté hodnoty napětí (deformace) a opakujeme relaxační test. Je-li provedena série napětíových relaxací na jednom vzorku při konstantní teplotě, lze zjistit mnoho důležitých veličin (např. parametry tepelně aktivovaných dějů). O napětíových relaxacích bude více pojednáno později.

Podle druhu namáhání lze dále dělit deformační zkoušky na zkoušky tahem, tlakem, smykem, krutem, ohybem, víceosé namáhání apod.

### **Plastická deformace monokrystalů**

Popis plastické deformace monokrystalů je snadnější, než je tomu u polykrystalických materiálů. Podívejme se tedy nejprve stručně na teorii plastické deformace monokrystalů.

Plastická deformace probíhá převážně tzv. skluzovým mechanismem. Jde o posuv jedné části krystalu vůči druhé. Makroskopický směr tohoto posuvu (skluzu) je shodný se směrem některého základního vektoru mřížky. Posunutí se uskutečňuje v tzv. skluzových rovinách, které odpovídají jistým krystalografickým rovinám. Skluzovými rovinami bývají roviny nejhustěji obsazené atomy. Podobně směr skluzu je směrem s největší hustotou atomů. Rovinou a směrem skluzu je určen skluzový systém.

Deformace monokrystalu skluzem je provázána typickou změnou vnějšího tvaru vzorku (krystalu). Měl-li například vzorek před deformací tvar válce, je po deformaci jednoosým

tahem s osou namáhání totožnou s podélnou osou vzorku podoben pásku s eliptickým průřezem.

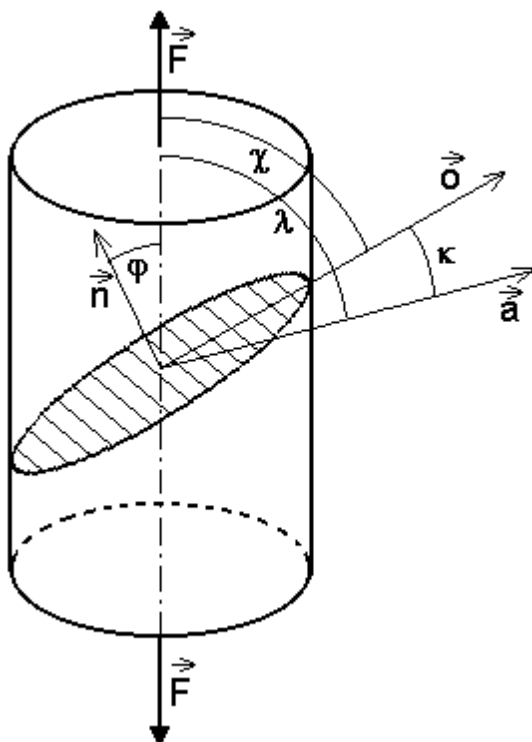
Kvantitativní popis deformace a působícího napětí je nutné provést vhodným způsobem vycházejícím z charakteru deformace. Ten musí být zvolen tak, aby použité veličiny odpovídaly geometrii popisovaného děje. Použijeme-li pro popis veličiny přímo měřitelné při tahové zkoušce, získáme jako výsledek graf napětí  $\sigma$  v závislosti na relativním prodloužení  $\varepsilon_r$ . Napětím  $\sigma$  je myšleno napětí v rovině kolmé k ose válcového vzorku. Relativní prodloužení je definováno vztahem

$$\varepsilon_r = \frac{l-l_0}{l_0} = \frac{\Delta l}{l_0}, \quad (11)$$

kde  $l_0$  je původní délka vzorku,  $l$  je délka deformovaného vzorku.

Dále je nutno nalézt příslušné vztahy mezi  $\sigma$  a  $\varepsilon_r$  jim odpovídajícími veličinami v krystalografickém systému. Napětí je třeba nahradit složkami napětí ve směru skluzu a v rovině skluzu. Toto smykové napětí označíme  $\tau$  (říkáme mu skluzové napětí). Relativní prodloužení nahradíme skluzem (označíme ho písmenem  $a$ ). Skluz definujeme jako poměr posunutí  $s$  dvou bodů, které před deformací ležely na společné normále ke skluzové rovině ve vzdálenosti  $h$ . Tedy

$$a = \frac{s}{h}. \quad (12)$$



Obr. 6. K odvození vztahu mezi smykovým napětím způsobujícím posunutí atomových rovin vůči sobě ve směru skluzu a působící silou. Skluzová rovina je vyšrafována.

Vztah mezi smykovým napětím, způsobujícím posunutí atomových rovin vůči sobě ve směru skluzu a aplikovanou deformační silou (resp. aplikovaným napětím), odvodíme na jednoduchém případě. Představíme si válcový monokrystal s jedním systémem skluzových rovin, na který ve směru osy válce působí síla o velikosti  $F$  (viz obr. 6). Normálové napětí působící na rovinu kolmou k ose vzorku je

$$\sigma = \frac{F}{S}, \quad (13)$$

kde  $S$  je velikost průřezu vzorku.



Řez rovnoběžný se skluzovou rovinou, jejíž normála  $\vec{n}$  svírá s osou vzorku úhel  $\varphi$ , má plochu  $S_1$ , která má velikost  $S_1 = S/\sin \chi$ , kde  $\chi = 90^\circ - \varphi$ . Úhel  $\chi$  svírá osa vzorku s průmětem osy vzorku do skluzové roviny (na obrázku je průmět označen  $\vec{d}$ ). Napětí  $\sigma_1$ , působící ve skluzové rovině, lze rozložit do dvou složek: normálové a smykové. Pro napětí  $\sigma_1$  platí:

$$\sigma_1 = \frac{F}{S_1} = \sigma \sin \chi. \quad (14)$$

Normálová složka je dána vztahem

$$\sigma_n = \sigma \sin \chi \cos \varphi = \sigma \sin^2 \chi. \quad (15)$$

Toto napětí je kolmé na skluzovou rovinu, vyvolává tedy oddělení atomů ve směru normály skluzové roviny. Mělo by tedy mít rozhodující úlohu při lomu (trvalém oddělení dvou částí krystalu).

Smykové napětí, lze zapsat jako

$$\sigma_s = \sigma \sin \chi \cos \chi. \quad (16)$$

Smykové napětí  $\sigma_n$  leží ve skluzové rovině ve směru  $\vec{d}$ . Způsobuje posunutí atomů vůči sobě. Směr skluzu však nemusí být totožný se směrem  $\vec{d}$ . Pro skluz bude tedy rozhodující složka napětí ve směru skluzu. Toto skluzové napětí  $\tau$  je dáno vztahem

$$\tau = \sigma \sin \chi \cos \chi \cos \kappa, \quad (17)$$

kde  $\kappa$  je úhel mezi směrem skluzu  $\vec{a}$  a směrem  $\vec{d}$  ležícím v rovině skluzu. Pokud směr působící síly a směr skluzu svírají úhel  $\lambda$ , je možno určit velikost skluzového napětí  $\tau$  přímo průmětem působícího napětí do směru skluzu. Potom dostaneme vztah

$$\tau = \sigma \sin \chi \cos \lambda. \quad (18)$$

Oba vztahy pro skluzové napětí jsou ekvivalentní, a proto můžeme psát

$$\cos \lambda = \cos \chi \cos \kappa. \quad (19)$$

Vztah mezi skluzovým a tahovým napětím se často píše ve tvaru

$$\tau = \mu \sigma, \quad (20)$$

kde  $\mu = \sin \chi \cos \lambda = \cos \varphi \cos \lambda$  se nazývá Schmidův (orientační) faktor.

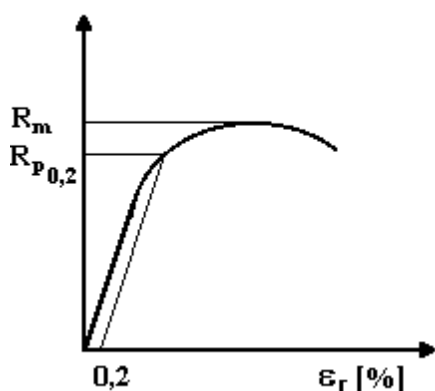
V uvedeném zjednodušeném případě bylo uvažováno pouze o jednom skluzovém systému. V reálných monokrystalech však bývá několik skluzových systémů. Složky napětí do jednotlivých skluzových systémů budou různé v závislosti na orientaci daného skluzového systému. Je možné vyslovit následující zákon (známý jako Schmidův zákon):

Aby mohl nastat skluz, musí skluzové napětí dosáhnout alespoň jisté minimální hodnoty. V dané skluzové rovině a v daném směru skluzu (tedy v daném skluzovém systému) nastane skluz, pokud skluzové napětí dosáhne určité kritické hodnoty. Monokrystal se tedy začne plasticky deformovat při různém napětí  $\sigma$  podle toho, jak je orientován, tzn. v jaké poloze (určené úhly  $\chi$  a  $\lambda$ ) je skluzový systém vůči směru působící síly, ale přitom odpovídající skluzové napětí bude pro různě orientované monokrystalu stejné (viz vztah (18)).

## Plastická deformace polykrystalů

Výsledky získané na monokrystalech nelze jednoduše aplikovat na polykrystalické materiály. Ukazuje se, že není možné uvažovat o souboru monokrystalů, z nichž každý bude představovat jedno zrno polykrystalu a bude se deformovat tak, jak to známe u monokrystalů. V monokrystalech probíhá deformace více méně homogenně, u polykrystalů je však deformace v různých zrnech různá a může se lišit i v jednotlivých místech zrna. Dalším rozdílem je, že deformace polykrystalu začíná při vyšším napětí, než je tomu u monokrystalů. Hodnota meze kluzu  $\sigma_k$  (tj. hodnota napětí, při kterém začíná plastická deformace) je mnohem vyšší než kritické skluzové napětí. Plastickou deformaci polykrystalů ovlivňují hranice zrn a jejich vzájemná orientace.

V technické praxi je velmi často používána zkouška tahem při konstantní deformační rychlosti. Sleduje se závislost tzv. inženýrského (resp. smluvního) napětí  $\sigma_s$  na poměrném prodloužení  $\varepsilon_r$ . Inženýrské napětí je definováno jako poměr deformační síly  $F$  a velikosti plochy průřezu  $S_0$  deformovaného vzorku.  $S_0$  je v případě inženýrského napětí počáteční průřez vzorku. Tento průřez používáme pro výpočet napětí během celého průběhu deformačního experimentu. Poměrné prodloužení je dáno vztahem (11). V následujícím obrázku jsou znázorněny veličiny používané při popisu deformačního děje u polykrystalických látek tak, jak je používá technická praxe.



Obr. 7. Veličiny používané při popisu deformačního děje v technické praxi.

V obrázku je pro označení napětí použito písmeno  $R$ , které se v inženýrské praxi často používá místo ve fyzice používaného značení  $\sigma$ . Vzhledem k tomu, že je dosti obtížné určit rozhraní mezi oblastí elastické a plastické deformace, používá se tzv. *smluvní* mez v tahu  $R_{p0,2}$ , což je hodnota napětí způsobující plastickou deformaci 0,2 %.

Druhou důležitou charakteristikou křivky smluvního napětí je mez  $R_m$  daná vztahem

$$R_m = \frac{F_m}{S_0}, \quad (21)$$

kde  $F_m$  je maximální deformační síla a  $S_0$  počáteční průřez vzorku.

Poměrné trvalé prodloužení, při němž dojde k přetržení vzorku, se nazývá tažnost. Tažnost je definována jako

$$\delta = \frac{l_t - l_0}{l_0}, \quad (22)$$

kde  $l_t$  je délka vzorku po přetržení,  $l_0$  je počáteční délka vzorku.

Tažnost se obvykle udává v procentech.

Při deformaci však dochází ke změně průřezu vzorku. Abychom zohlednili tuto skutečnost, zavádíme veličiny skutečné napětí (true stress)  $\sigma$  a skutečné poměrné prodloužení (true strain)  $\varepsilon$ . Platí pro ně následující vztahy:

$$\sigma = \frac{F}{S_0} (1 + \varepsilon_r), \quad (23)$$

$$\varepsilon = \int_{l_0}^l \frac{dl}{l} = \ln \frac{l}{l_0} = \ln \frac{l_0 + \Delta l}{l_0} = \ln(1 + \varepsilon_r). \quad (24)$$

Při zpracování výsledků deformace jednoosým tahem (resp. tlakem) vycházíme z předpokladu, že deformace je homogenní. Že tedy stupeň deformace a rychlost deformace podél vzorku jsou stejné. Od jistého stupně deformace však dochází k lokalizaci napětí ve vzorku. To se projeví lokálním zaškrcením vzorku. Průřez vzorku se při tom přestane měnit homogenně. Teorie deformace jednoosým tahem je podrobněji zpracována v [4].

Všimněme si počáteční fáze plastické nestability. Předpokládejme, že objem vzorku se nemění a síla působící na vzorek při deformaci tahem je stejná podél celého vzorku. Dalším předpokladem je, že skutečné napětí  $\sigma$  závisí na skutečné deformaci  $\varepsilon$  a na skutečné deformační rychlosti  $\dot{\varepsilon}$ . Pro skutečné poměrné prodloužení (skutečnou deformaci) platí:

$$\varepsilon = \ln \frac{t}{t_0} = \ln \frac{S}{S_0}, \quad (25)$$

kde  $S_0$  je plocha aktuálního průřezu vzorku.

Dále platí vztah

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = -\frac{1}{S} \frac{dS}{dt} = -\frac{\dot{S}}{S} \quad (26)$$

Vzhledem k vyslovenému předpokladu o neměnnosti síly podél vzorku dostáváme

$$\frac{dF}{dt} = S \left[ \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\dot{\varepsilon}} \frac{d\varepsilon}{dt} + \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_{\varepsilon} \frac{d\dot{\varepsilon}}{dt} \right] + \sigma \frac{dS}{dt}. \quad (27)$$

Označíme

$$h = \frac{1}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon} \right)_{\dot{\varepsilon}}, \quad (28)$$

$$m = \frac{\dot{\varepsilon}}{\sigma} \left( \frac{\partial \sigma}{\partial \dot{\varepsilon}} \right)_{\varepsilon} = \left( \frac{\partial \ln \sigma}{\partial \ln \dot{\varepsilon}} \right)_{\varepsilon}. \quad (29)$$

Parametry  $h$  a  $m$  se mohou během deformace měnit, jsou charakteristikami daného materiálu a podmínek pokusu.

Rovnici (27) je možno upravit na tvar

$$\frac{dS}{dt} (1 - m - h) = -\frac{mS}{S} \frac{dS}{dt}, \quad (30)$$

popřípadě je možno napsat

$$\frac{S}{\dot{S}} \frac{d\dot{S}}{dS} = \frac{d \ln \dot{S}}{d \ln S} = \frac{h+m-1}{m}. \quad (31)$$

Další rovnicí, kterou je možno odvodit, je

$$\frac{\dot{F}}{F} = -\frac{\dot{l}}{l} (1 - h + m) + \frac{\dot{l}}{l} m. \quad (32)$$

Při konstantním prodlužování vzorku (při konstantní rychlosti pohybu příčnicku), tedy když  $\dot{l} = 0$ , nastává maximální zatížení ( $dF=0$ ), jak plyne z (32), když

$$h = 1 + m. \quad (33)$$

Pokud platí

$$\frac{\dot{l}}{l} = \frac{\dot{l}}{l} = konst., \quad (34)$$

tedy když skutečná deformační rychlost je konstantní, maximum zatížení nastává, když  $h = 1$ .

To znamená, že

$$\sigma = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \quad (35)$$

Deformace bude stabilní a homogenní, když

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial s} \leq 0. \quad (36)$$

Deformace bude nestabilní, když

$$\frac{\partial \dot{s}}{\partial s} > 0. \quad (37)$$

Při deformaci tahem je podíl  $\dot{S}$  a  $S$  vždy záporný. Podmínka pro homogenní a stabilní deformaci při deformaci v tahu má tvar

$$\frac{\partial \ln \dot{S}}{\partial \ln S} \geq 0. \quad (38)$$

Z rovnice (31) plyne, že k zaškrvení vzorku (k lokalizaci napětí) dojde, když

$$h = 1 - m. \quad (39)$$

### Rovnice popisující plastickou deformaci polykrystalů

Křivky napětí-deformace polykrystalických materiálů se studují již dlouhou dobu, doposud však nebyl nalezen jejich obecný analytický popis. Důvodem je velmi složitá podstata napětí v polykrystalech. To závisí na řadě strukturních parametrů. Těmito parametry jsou např. typ struktury, velikost zrn, textura, koncentrace a rozdělení příměsových atomů, přítomnost druhé fáze a další. Závislost napětí na absolutní teplotě  $T$ , deformační rychlosti  $\dot{\varepsilon}$  a dané dislokační struktuře může být popsána kinetickou rovnicí

$$\sigma = \sigma(\rho, \dot{\varepsilon}, T). \quad (40)$$

Změna deformačních napětí v průběhu deformace souvisí s vývojem dislokační struktury. Dislokační struktura se vyvíjí v závislosti na teplotě, rychlosti deformace, historii vzorku a dalších parametrech. Dislokační struktura může být popsána různými parametry. Zvolíme-li pouze jeden, např. hustotu dislokací  $\rho$ , je možné popsat rychlost vývoje dislokační struktury během probíhající deformace při dané deformační rychlosti a teplotě evoluční rovnicí

$$\frac{d\rho}{d\varepsilon} = f(\rho, \dot{\varepsilon}, T). \quad (41)$$

Jak již bylo uvedeno, obecný popis křivek napětí deformace není znám. Mnozí se však snažili o řešení tohoto problému. Nejstarší užívaná empirická rovnice deformační křivky pochází od Ludwiga [5]

$$\sigma = K_1 \varepsilon^{n_1}, \quad (42)$$

kde  $K_1$ ,  $n_1$  jsou závislé na materiálu, teplotě a deformační rychlosti. Typické hodnoty exponentu  $n_1$  se pohybují v rozmezí mezi 0,2 a 0,5. Hodnoty  $K_1$  se pohybují v rozmezí několika řádů (typicky  $10^{-1} G$  až  $10^3 G$ , kde  $G$  je modul pružnosti ve smyku). Popis pomocí konstant  $K_1$  a  $n_1$  zpravidla nebývá interpretován na fyzikálním základě.

V literatuře bývají uváděny různé modifikace vztahu (42). Jako příklad je možné uvést vztah

$$\sigma - \sigma_0 = K_2 \varepsilon^{n_2}, \quad (43)$$

popřípadě

$$\sigma = K_3(\varepsilon + \varepsilon_0)^{n_3}, \quad (44)$$

kde  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_0$  jsou empirické konstanty,  $K_2$ ,  $K_3$ ,  $n_2$ ,  $n_3$  by měly záviset na druhu materiálu, teplotě a rychlosti deformace, neměly by ale záviset na deformaci.

Pozornější pohled na rovnice (42), (43) a (44) ukazuje, že tyto vztahy mohou mít pouze omezenou platnost [6]. Pro deformaci  $\varepsilon = 0$  předpokládají uvedené vztahy nekonečnou směrnicí křivky  $\sigma$ - $\varepsilon$ . To však není v souladu s výsledky experimentů. Podle uvedených rovnic by křivky měly být stále rostoucí. Experimenty však ukazují, že deformační křivky dosahují jistých nasycených hodnot pro vyšší deformace. Ukazují se i další nesrovnalosti s výsledky experimentů. V pracích [7], [8] je pro popis deformačních křivek navržen exponenciální vztah

$$\frac{\sigma_S - \sigma}{\sigma_S - \sigma_0} = \exp(-\varepsilon/\varepsilon_C), \quad (45)$$

kde  $\sigma_S$ ,  $\sigma_0$ ,  $\varepsilon_C$  jsou parametry závislé na materiálu, teplotě a rychlosti deformace. Vztah (45) předpokládá, že napětí dosáhne asymptoticky saturované hodnoty  $\sigma_S$ . Rovněž směrnicí křivky  $\sigma$ - $\varepsilon$  pro  $\varepsilon = 0$  má jistou hodnotu (nejde k nekonečnu). Zavedeme-li koeficient zpevnění  $\vartheta$  jako  $d\sigma/d\varepsilon$ , dostaneme z (45):

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \vartheta = \vartheta_0 \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_S}\right), \quad (46)$$

kde  $\vartheta_0 = \sigma_S/\varepsilon_C$ .

Podle (46) by měl koeficient zpevnění lineárně klesat s napětím. Tento předpoklad není v souladu s výsledky experimentů. Ani vztah (46) není tedy obecně platný.

Ačkoliv uvedené vztahy (42)-(45) docela dobře vyhovují technické praxi, nepopisují fyzikálně uspokojivým způsobem křivku napětí deformace. Existují různé příčiny tohoto stavu. Jako příklad je možné uvést tyto dva důvody:

- (i) Křivky napětí deformace se skládají z několika různých oblastí. V těchto oblastech mají rozhodující vliv různé mikroskopické procesy. Každá tato oblast je jinak ovlivněna deformační rychlostí a teplotou.
- (ii) Vzhledem k omezené platnosti mechanické stavové rovnice je deformace složitější fyzikální veličina, a nemusí být v jednotlivých případech v přímém vztahu k aktuální dislokační struktuře.

Vzhledem k uvedeným potížím při snaze o analytický popis deformačních křivek je vhodné použít při popisu mikrofyzikálních procesů probíhajících při plastické deformaci koeficientu zpevnění  $\vartheta$ . Známe-li koeficient zpevnění, můžeme se vrátit zpět k napětí

$$\sigma = \int_0^\varepsilon \vartheta d\varepsilon. \quad (47)$$

### Dislokační modely zpevnění polykrystalů

Dislokační modely zpevnění předpokládají, že se část pohyblivých dislokací nedostane na povrch, k hranicím zrn nebo neanihiluje navzájem, ale zastaví se na překážkách nebo reagují s novými dislokacemi a vytvoří nové překážky. Předpokládejme, že v konkrétní skluzové rovině působí napětí  $\tau$  (označení je zvoleno tak, jak je tomu zvykem u monokrystalů). Koeficient zpevnění je definován jako

$$\theta = \frac{d\tau}{da}, \quad (48)$$

kde  $a$  je skluz realizovaný pohybem dislokací.

K veličinám charakterizujícím polykrystalu lze dojít pomocí Taylorova orientačního faktoru  $\psi$ . Tento faktor je zaveden jako

$$\psi = \frac{\int N(m') m' dm'}{\int N(m') dm'}, \quad (49)$$

kde  $N(m')$  je počet zrn, ve kterých je orientace skluzových rovin určena faktorem  $m' = (\sin \chi \cos \lambda)^{-1}$ ;  $\chi$  zde označuje úhel, který svírá osa vzorku s průmětem osy vzorku do skluzové roviny a  $\lambda$  je úhel mezi směrem působící síly a směrem skluzu. Napětí působící v polykrystalickém vzorku je pak dáno jako  $\sigma = \psi\tau$  a příslušná deformace  $\varepsilon = a/\psi$  a koeficient zpevnění  $\vartheta = \psi^2\theta$ .

### Zpevňující procesy

S pokračující deformací dochází k růstu napětí. Tento růst je způsoben růstem hustoty dislokací. Předpokládá se, že růst hustoty dislokací lze popsat čistě geometrickým zákonem

$$\tau = \alpha G b \sqrt{\rho} \quad (50)$$

a že je málo ovlivněn teplotou nebo deformační rychlostí.

Ve vztahu (50) je  $\alpha$  faktor interakce dislokací,  $b$  Burgersův vektor a  $\rho$  hustota dislokací. Rychlost produkce dislokací  $d\rho$  v intervalu skluzu  $da$  je dána vztahem

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{1}{bL}, \quad (51)$$

kde  $L$  je střední volná dráha dislokací. Předpokládáme-li, že  $L$  je úměrná střední vzdálenosti dislokací  $l_D = 1/\sqrt{\rho}$ , potom

$$\frac{d\rho}{da} = \frac{1}{bL} = \frac{1}{\beta b} \frac{1}{l_D} = \frac{1}{\beta b} \sqrt{\rho}. \quad (52)$$

Konstanta  $\beta$  závisí na orientaci krystalu. Dislokacemi se střední vzdáleností  $l_D$  pomocí nichž je realizováno skluzové napětí mohou být primární dislokace, nebo dislokace lesa.

### Procesy zpevnění a odpevnění

Na křivkách napětí-deformace bývá pozorována oblast nasycení. To znamená, že zpevnění neprobíhá konstantní rychlostí. Pokles koeficientu zpevnění indikuje možnost probíhání dynamického zotavování v deformovaném materiálu. V následujících částech jsou popsány základní modely procesů zpevnění a odpevnění.

Změnu napětí můžeme připsat změně hustoty dislokací  $d\rho$ . Pokud působí současně procesy zpevnění i odpevnění, má  $d\rho$  dvě složky. První z nich popisuje změny v hustotě překážek v důsledku zpevňujících procesů ( $d\rho_z$ ), druhý člen ( $d\rho_r$ ) pak změny způsobené zotavovacími procesy

$$d\rho = d\rho_z - d\rho_r. \quad (53)$$

Člen  $d\rho_z$  je příspěvkem ke zpevnění. Popisuje změnu v hustotě překážek poté, co se určitá část pohybujících dislokací po proběhnutí dráhy  $dx$  zastavila na překážkách. Platí

$$d\rho_z = \frac{\rho_m}{L} dx, \quad (54)$$

kde  $\rho_m$  je hustota pohyblivých dislokací. Změna hustoty dislokací, která je důsledkem zotavovacích procesů, určuje složku  $d\rho_r$ .

Je-li střední počet míst v elementární ploše  $dS$  skluzové roviny, kde dochází k anihilaci, dán jako  $\rho dS$  a  $L_R$  je střední délka dislokačních linií, které spějí k anihilaci v těchto místech, je celková změna délky dislokačních linií v objemu  $V$ :

$$Vd\rho_r = L_R \rho dS. \quad (55)$$

Závislost střední volné dráhy na hustotě dislokací je dána vztahem

$$L = \frac{g}{\sqrt{\rho}}, \quad (56)$$

kde  $g$  je číselná konstanta.

Protože  $dx$  je úměrné  $dS$ , je pravděpodobnost anihilace úměrná počtu průchodů dislokace místy, kde může dojít k anihilaci. Přírůstek deformace je dán vztahem

$$da = \rho_m b dx = \rho b \frac{dS}{V}. \quad (57)$$

Koeficient zpevnění můžeme napsat jako

$$\theta = \frac{d\tau}{da} = \frac{d\tau}{d\rho} \frac{d\rho}{da}, \quad (58)$$

takže

$$\theta = \frac{\alpha G}{2g} - \frac{L_r}{2b} \tau = \theta_0 \left(1 - \frac{\tau}{\tau_s}\right), \quad (59)$$

$$\text{kde } \theta_0 = \frac{\alpha G}{2g}, \tau_s = \frac{\alpha G b}{gL}.$$

Vztah (59) je znám jako Kocksův vztah (popsaný model pak jako Kocksův model [9]). Z tohoto vztahu vyplývá, že koeficient zpevnění by měl klesat s napětím a pro  $\tau = \tau_s$  je  $\theta = 0$ .

Jiný model vytvořili Estrin a Mecking [10]. Podle tohoto modelu může být za jistých okolností střední volná dráha dislokací  $L$  konstantní, daná např. rozměrem zrna nebo podzrna. Pro koeficient zpevnění lze napsat vztah

$$\theta \tau = \theta_0^2 \left(1 - \frac{\tau^2}{\tau_s^2}\right), \quad (60)$$

$$\text{kde } \theta_0^2 = \frac{\alpha^2 G^2 b}{2L} \text{ a } \tau_s^2 = \frac{\alpha^2 G^2 b^2}{L_r L}.$$

Z experimentů plyne, že také tento model má omezenou platnost.

Nyní si všimneme dvou důležitých odpevňujících procesů – příčného skluzu a šplhání dislokací.

Typickým odpevňujícím dějem, který probíhá i při nízkých teplotách, je příčný skluz. K zaškrcení dislokace je zapotřebí aktivační energie  $U_{cs}$ , která je dána vztahem [11]

$$U_{cs} = -A(\gamma) \ln\left(\frac{\tau}{\tau_{cs}}\right), \quad (61)$$

$$\text{kde } A(\gamma) = \frac{0,35Gb^3}{(1+n/900)(1+180\gamma/Gb)}.$$

V tomto vztahu  $\gamma$  je energie vrstevné chyby,  $n$  je počet dislokací v nakupení před překážkou a  $\tau_{cs}$  je konstanta.

$U_{cs}$  tedy podle tohoto vztahu logaritmičticky roste s napětím a hyperbolicky klesá s velikostí energie vrstevné chyby  $\gamma$ .

Frekvence příčného skluzu je dána Arrheniovou rovnicí

$$v_{cs} = v_0 \exp\left(\frac{-U_{cs}}{kT}\right) = v_0 \exp\left(\frac{A}{kT} \ln\frac{\tau}{\tau_{cs}}\right), \quad (62)$$

kde  $kT$  má obvyklý význam.

Protože rychlost deformace je úměrná frekvenci  $\dot{a} = \kappa v_{cs}$ , můžeme psát

$$\ln\left(\frac{\tau}{\tau_{cs}}\right) = -\frac{kT}{A} \ln\left(\kappa \frac{v_0}{\dot{a}}\right). \quad (63)$$



U experimentálních křivek monokrystalů bývá napětí  $\tau$  ztotožňováno s napětím na začátku třetí oblasti křivky zpevnění při rychlosti  $\dot{a}$ . U polykystalů je analogickou veličinou saturevané napětí  $\sigma_s$ . Tedy

$$\ln\left(\frac{\sigma_s}{\sigma_0}\right) = -\left(\frac{kT}{A_1}\right) \ln\left(\frac{\dot{\epsilon}_0}{\dot{\epsilon}}\right), \quad (64)$$

kde  $\dot{\epsilon}_0$ ,  $\sigma_0$  jsou konstanty a pro  $A_1$  platí

$$A_1 = \frac{Gb^3}{2,83\left(1 + \frac{180\gamma}{Gb}\right)}. \quad (65)$$

Je vidět, že měřením rychlosti závislosti saturevaných napětí je možné určit funkci  $A_1$  a s použitím rovnice (64) je možné určit energii vrstevné chyby.

Druhým důležitým zotavovacím procesem je šplhání dislokací. V oblasti nulového koeficientu zpevnění je v každém okamžiku zpevnění kompenzováno zotavením. Můžeme tedy napsat

$$d\tau = 0 = \left(\frac{\partial\tau}{\partial t}\right)_a dt + \left(\frac{\partial\tau}{\partial a}\right)_t da. \quad (66)$$

Rychlost deformace je

$$\dot{a}_s = \left(\frac{1}{\theta}\right) \left(\frac{-\delta\tau}{\delta t}\right)_a. \quad (67)$$

Při tomto ději dva dislokační zdroje produkují dislokace opačného znaménka. Aby došlo ke šplhání a anihilaci dislokací, musí být pro vzdálenost  $h$  těchto zdrojů splněna podmínka

$$h \leq \frac{Gb}{8\pi(1-\zeta)} \tau, \quad (68)$$

kde  $\zeta$  je Poissonova konstanta. Je-li síla působící na šplhající dislokaci ve směru kolmém ke skluzové rovině

$$F = nb\tau, \quad (69)$$

stupeň na dislokační linii šplhá rychlostí [12]

$$v_s = \left(\frac{D}{kT}\right) n\tau b^2, \quad (70)$$

kde  $D$  je koeficient difúze.

Rychlost šplhání při hustotě skoků na dislokaci  $c_s$  je

$$v_s = \left(\frac{D}{kT}\right) n\tau b^3 c_s. \quad (71)$$

Po uplynutí času  $t_1 = \frac{h}{2v_s}$  anihilují dvě dislokace a dvě nové vyběhnou ze zdrojů. Po proběhnutí dráhy  $L$  se znovu zablokují. Pro rychlost plastického tečení platí

$$\dot{a}_s = \left( \frac{4bLv_s}{h} \right) \rho. \quad (72)$$

Použijeme-li (50), (68) a (71), můžeme pro skluzovou rychlost napsat

$$\dot{a}_s = \frac{32\pi(1-\zeta)DbL}{G^3 a^2 kT} n c_s \tau^4. \quad (73)$$

Vztah (50) předpokládá platnost Cottrellova-Stokesova zákona ( $\frac{\tau_{ef}}{\tau=konst.}$ , kde  $\tau_{ef}$  je efektivní napětí). Rychlost plastického tečení, řízená šplháním dislokací, závisí na čtvrté mocnině napětí a na teplotě závisí stejně jako koeficient difuze  $D$  tak dlouho, dokud jsou k dispozici stupně na dislokační linii, tedy  $c_s$  je konstanta. Spíše však můžeme očekávat závislost  $c_s \sim L\rho_L$ , když stupně vznikají v protínacím procesu ( $\rho_L$  je hustota dislokací lesa). V literatuře je popsána řada variant tohoto modelu. Vedou na závislosti typu  $\dot{a} \sim \tau^{4,5}$ , popřípadě  $\dot{a} \sim \tau^3$ .

V Nabarrově modelu [13] je vysloven předpoklad, že deformace je důsledkem nekonzervativního pohybu dislokací, difúze se ale neuskutečňuje mřížkou, ale podél dislokační linie. Rychlost deformace je v takovém případě závislá na páté mocnině napětí:

$$\dot{a} = A_c \frac{Gb}{kT} D_c \left( \frac{\tau}{G} \right)^5, \quad (74)$$

kde  $A_c$  je konstanta a  $D_c$  je koeficient difúze dislokačním jádrem.

Podle modelu Lukáče a Balíka [14] lze vyjádřit závislost koeficientu zpevnění na napětí následujícím vztahem:

$$\vartheta = \frac{A}{\sigma - \sigma_y} + B - C(\sigma - \sigma_y) - D(\sigma - \sigma_y)^3, \quad (75)$$

kde  $\sigma_y$  je napětí na začátku plastické deformace, které zahrnuje i všechny příspěvky jiných zpevňujících mechanismů, než je dislokační zpevnění. Vztah je zapsán ve schématickém tvaru obvyklém pro polykrystaly. Členy se znaménkem + zde představují zpevňující procesy, členy se znaménkem – odpevňující procesy. První člen charakterizuje imobilizaci dislokací na nedislokačních překážkách, druhý člen pak imobilizaci dislokací na překážkách dislokačního typu. Třetí člen představuje skluzové zotavení a člen čtvrtý zotavení šplháním. Skluzovým zotavením je myšleno především zotavení příčným skluzem s následující anihilací dislokací. Ke zotavení může vést i reakce mezi dislokacemi.

Vezmeme-li v úvahu pouze druhý a třetí člen (imobilizaci dislokací na překážkách dislokačního typu a skluzové zotavení), dostaneme Kocksův model  $\vartheta = B - C(\sigma - \sigma_y)$ .

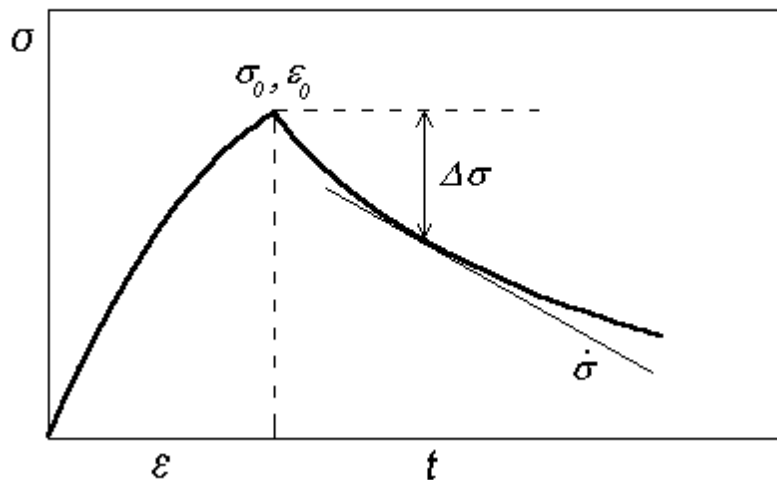
První a třetí člen (imobilizace dislokací na překážkách nedislokačního typu a skluzové zotavení) představují model Estrina a Meckinga  $\vartheta = \frac{A}{\sigma - \sigma_y} - C(\sigma - \sigma_y)$ .

První až třetí člen představují model Malýginův [15]  $\vartheta = \frac{A}{\sigma - \sigma_y} + B - C(\sigma - \sigma_y)$ .

## Napět'ové relaxační testy

Tato experimentální metoda umožňuje studium tepelně aktivovaných procesů probíhajících v deformovaných materiálech. Z křivek relaxace napětí lze přímo určit aktivační parametry, jako jsou aktivační objem  $V$ , parametr napět'ové citlivosti  $n$ , popřípadě termická a atermická složka deformačního napětí apod. V závěru této kapitoly si ukážeme použití napět'ové relaxace k určení aktivačního objemu a parametru napět'ové citlivosti a dále pak k určení vnitřního a efektivního napětí. (Význam těchto pojmů bude uveden v následujícím textu.)

Princip metody relaxace napětí je následující. Vzorek deformujeme v deformačním stroji (v tahu, nebo v tlaku – v našich ukázkách se omezíme na tlakovou deformaci) do jisté hodnoty napětí  $\sigma_0$ , kterému odpovídá deformace  $\varepsilon_0$ . Potom stroj zastavíme a registrujeme časový pokles napětí  $\sigma(t)$ . Dále postupujeme tak, že po určité době zaznamenávání poklesu napětí a času stroj opět spustíme a vzorek tak dále deformujeme v tlaku. Při nějaké jiné hodnotě napětí  $\sigma_1$  (deformaci  $\varepsilon_1$ ) opět pohyb příčnicku deformačního stroje zastavíme a registrujeme další relaxaci napětí. Tímto způsobem je možné získat řadu relaxací napětí podél deformační křivky. Popsanou metodou můžeme zkoumat napět'ovou či deformační závislost naměřených parametrů tepelné aktivace. Schéma křivky relaxace napětí je znázorněno na obr. 8, kde  $\Delta\sigma = \sigma_0 - \sigma$  je odrelaxované napětí,  $\sigma_0$  startovní napětí relaxace a  $\dot{\sigma}$  rychlost relaxace napětí.



Obr. 8. Křivka relaxace napětí.

Základní rovnici pro relaxaci napětí je možné odvodit postupem, který navrhli Lee a Hart [16]. Odvození této rovnice podrobně uvádí také Hamerský ve své habilitační práci [17]. Lze ji napsat ve tvaru:

$$\dot{\varepsilon} = -\frac{\dot{\sigma}}{M_R}, \quad (76)$$

kde  $M_R$  je komplexní modul pružnosti, pro který platí

$$\frac{1}{M_R} = \frac{1}{E} + \frac{S_0}{L_0} \frac{1}{K_S}. \quad (77)$$

Ve vztahu (3.5) je  $E$  Youngův modul vzorku,  $S_0$ ,  $L_0$  označuje počáteční průřez a počáteční délku vzorku a  $K_S$  je elastická tuhost deformačního stroje. Rovnice (76) je obecnou rovnicí relaxace napětí. Dává do souvislosti rychlost poklesu napětí  $\dot{\sigma}$  během relaxace napětí s rychlostí plastické deformace vzorku  $\dot{\epsilon}$ . Komplexní modul pružnosti  $M_R$  lze považovat za konstantu.

### Relaxace napětí a tepelně aktivované děje

Jak již bylo poznamenáno, relaxace napětí je jednou z metod, které umožňují studovat tepelně aktivované procesy v průběhu plastické deformace kovových materiálů. Plastická deformace je v krystalických kovových materiálech způsobena pohybem dislokací. Rychlost plastické deformace  $\dot{\epsilon}$  je svázána s hustotou pohybujících se dislokací  $\rho_m$  a jejich průměrnou rychlostí  $v_p$  Orowanovou rovnicí

$$\dot{\epsilon} = \frac{1}{\psi} b \rho_m v_p, \quad (78)$$

kde  $\psi$  je Taylorův faktor (ten převádí skluzové napětí  $\tau$  působící ve skluzové rovině na vnější napětí  $\sigma$  u polykrystalického materiálu), a  $b$  je velikost Burgersova vektoru.

Tepelně aktivovaný pohyb dislokací lze popsat dříve již zmíněnou Arrheniovou rovnicí, kterou v tomto případě napíšeme ve tvaru:

$$v_p = v_0 \exp\left(-\frac{\Delta G}{kT}\right), \quad (79)$$

kde  $v_0$  je konstanta, která závisí na frekvenci tepelných kmitů atomů a na charakteru lokálních překážek,  $G$  je Gibbsova volná entalpie,  $kT$  je součinem Boltzmannovy konstanty a termodynamické teploty.

Tepelně aktivovaný proces je řízen velikostí napět'ově závislé Gibbsovy volné entalpie  $\Delta G$ .

Další veličinou, která se zavádí pro popis tepelně aktivovaného procesu, je aktivační objem [18]:

$$V_d = -\psi \left( \frac{\partial \Delta G}{\partial \sigma^*} \right)_T, \quad (80)$$

kde  $\sigma^*$  představuje tepelně aktivovanou složku vnějšího napětí  $\sigma = \sigma^* + \sigma_i$  ( $\sigma_i$  je vnitřní napětí potřebné k překonání překážek dalekého dosahu). Napětí  $\sigma^*$  budeme dále nazývat efektivním napětím.

Pokud budeme uvažovat o pravoúhlé potenciálové bariéře  $\Delta G(\sigma^*)$ , lze pro aktivační objem  $V_d$  napsat:

$$V_d = bld, \quad (81)$$

kde  $l$  je průměrná vzdálenost krátkodosahových překážek, které mohou být překonány tepelnou aktivací, a  $d$  je jejich šířka. Takto definovaný aktivační objem bude dále nazýván geometrickým aktivačním objemem.

Vezmeme-li v úvahu rovnici (79) společně s Orowanovou rovnicí (78), můžeme napsat vztah pro rychlost tepelně aktivované deformace

$$\dot{\varepsilon} = \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta G(\sigma)}{kT}\right). \quad (82)$$

Předexponenciální člen  $\dot{\varepsilon}_0$  zde zastupuje výraz  $\frac{1}{\psi} b v_0 \rho_m$ .

Rychlost  $\dot{\varepsilon}$  danou vztahem (82) lze makroskopicky měřit.

Zkombinujeme-li základní rovnici (76) s rovnicí (82), obdržíme pro relaxaci napětí vztah

$$-\dot{\sigma} = M_R \dot{\varepsilon}_0 \exp\left(-\frac{\Delta G(\sigma)}{kT}\right). \quad (83)$$

Závislost  $\Delta G$  na napětí se často považuje za lineární, a to ve tvaru

$$\Delta G = \Delta G_0 - V_d \sigma^*. \quad (84)$$

To opět odpovídá pravoúhlé potenciálové bariéře.

Často je k určování parametrů tepelně aktivovaných dějů používán teoretický vztah [19]

$$\ln(-\dot{\sigma}) = C + n \ln \sigma, \quad (85)$$

kde  $C$  je konstanta a  $n$  parametr napět'ové citlivosti, pro který platí

$$n = \left( \frac{d \ln \dot{\varepsilon}}{d \ln \sigma} \right)_T. \quad (86)$$

Parametr napět'ové citlivosti  $n$  lze experimentálně určit jako směrnici závislosti  $\ln(-\dot{\sigma})$  versus  $\ln(\sigma/\sigma_0)$ , kde  $\sigma_0$  je opět výchozí napětí relaxace. S parametrem  $n$  je jednoduchým vztahem svázán aktivační objem  $V_a$ :

$$nkT = \sigma V_a. \quad (87)$$

Tento aktivační objem  $V_a$ , který lze snadno určit z výsledků relaxačních experimentů, bude dále nazýván zdánlivým aktivačním objemem. S geometrickým objemem je svázán vztahem

$$V_d = \psi V_a. \quad (88)$$

Křivka relaxace napětí bývá v literatuře popisována různými funkcemi času, resp. napětí. Přehled těchto závislostí lze nalézt např. v již citované práci Hamerského [17], v článku [20], popř. v [21]. Problematikou se zabývá mnoho jiných prací. Často citovanou je např. [22]. Studium napět'ových relaxací v komerčně důležité slitině AZ91 bylo provedeno v práci [23].

### Ukázka výsledků napět'ových relaxačních testů

Dále uvedené příklady jsou převzaty z několika prací týkajících se tepelně aktivovaných procesů v superlehkých slitinách Mg-Li, Mg-Li-Al a v kompozitech na bázi těchto slitin [např. 24-30]. V rámci těchto prací byly provedeny napět'ové relaxační testy (dále budou označovány jako SR = stress relaxation testy) na těchto materiálech při těchto teplotách:

1. Slitiny:

LA43....14 °C, 50 °C, 100 °C, 150 °C, 200 °C

LA45....14 °C, 50 °C, 100 °C, 150 °C, 200 °C  
LA83....14 °C  
LA123...14 °C

2. Kompozity zpevněné 10 obj.% krátkých vláken ( $\delta$ )Al<sub>2</sub>O<sub>3</sub> s matricemi:  
LA40....RT, 50 °C, 100 °C, 200 °C  
LA43....RT, 100 °C  
LA80....RT, 200 °C  
LA120...RT, 200 °C  
LA123...RT, 200 °C  
Mg.....RT

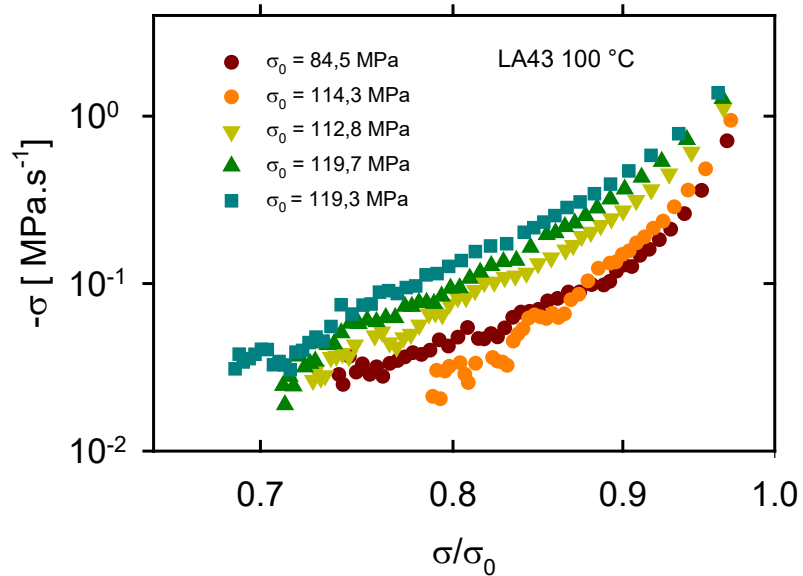
Úmyslně se zde rozlišuje mezi teplotami RT (room temperature = pokojová teplota) a 14 °C. RT je běžná pokojová, resp. laboratorní teplota, která je většinou 22 °C, nebo trochu vyšší. 14 °C je teplota, které bylo dosaženo chlazením pece jejím vodním chladícím okruhem.

Ve výše uvedeném přehledu materiálů je použito mezinárodně používané značení hořčikovými slitin. L značí lithium, A aluminium a čísla za těmito písmeny označují zastoupení těchto prvků ve hmotnostních procentech. Např. LA 43 označuje slitinu hořčíku se 4 hm.% lithia a 3 hm.% hliníku.

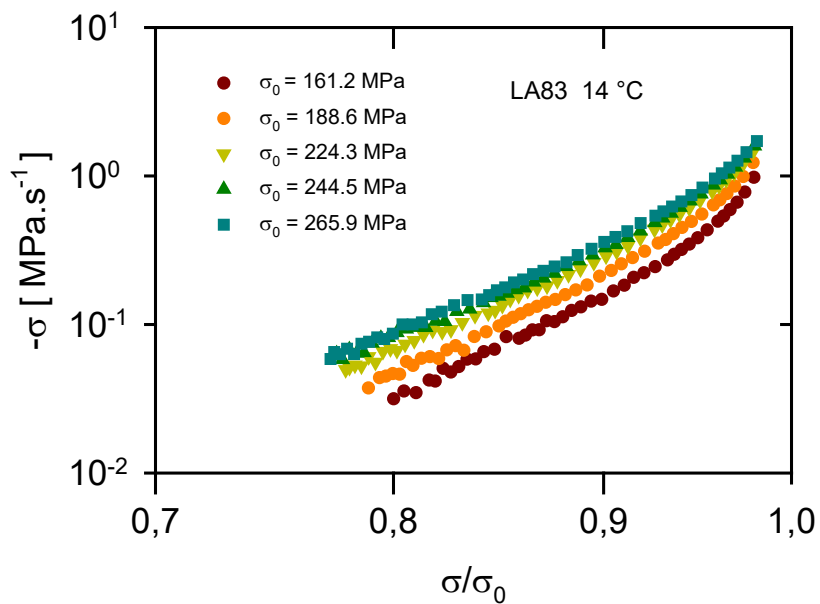
Následující obrázky (obr. 9-13) ukazují relaxační křivky v reprezentaci  $\log(-\dot{\sigma})$  vs.  $\log(\sigma/\sigma_0)$ . Pro lepší přehlednost grafů jsou v nich ponechány jenom některé body (každá křivka je jinak tvořena přibližně 3000 body). V grafech jsou uvedena startovní napětí jednotlivých relaxací. V této reprezentaci křivek běží relaxace v grafu zprava doleva. Logaritmická škála zvyrazňuje „rozmazání“ konců relaxačních křivek. Při zpracování křivek byly samozřejmě používány jejich kompletní verze se všemi experimentálně zjištěnými body. Směrnice začátků a konců křivek, které se rovnají hodnotám parametru napěťové citlivosti  $n$ , byly určovány pomocí lineární regrese příslušných „konců“ křivek.

Pro ilustraci je uvedeno pouze několik křivek, které ukazují rozdíly v chování jednotlivých typů těchto materiálů. Uvedené příklady se liší strukturou – slitiny obsahující 4 hm.% Li krystalizují v hexagonální struktuře (hcp) – tzv.  $\alpha$ -fáze, slitiny s 12 hm.% Li v krychlové, prostorově centrované struktuře (bcc) – tzv.  $\beta$ -fáze a slitiny s 8 hm.% Li obsahují obě fáze (hcp+bcc). Tyto slitiny se výrazně liší svými vlastnostmi. Společné však mají to, že jejich hustota se pohybuje okolo 1,5 g/cm<sup>3</sup> a jsou to tedy „nejlehčí“ kovové materiály použitelné pro konstrukční účely. Vzhledem k náročnosti a ceně jejich přípravy jsou a byly používány pouze ve velmi speciálních případech (např. ve slavném lunárním programu Apollo). Zpracování výsledků nebylo samozřejmě prováděno z takovýchto zjednodušených grafů, ale počítačovým zpracováním příslušných elektronických datových souborů. Důležitější než uvádět samotné SR křivky, je prezentovat z nich vypočítané výsledky. Jejich příklady jsou v příloze na konci této kapitoly.

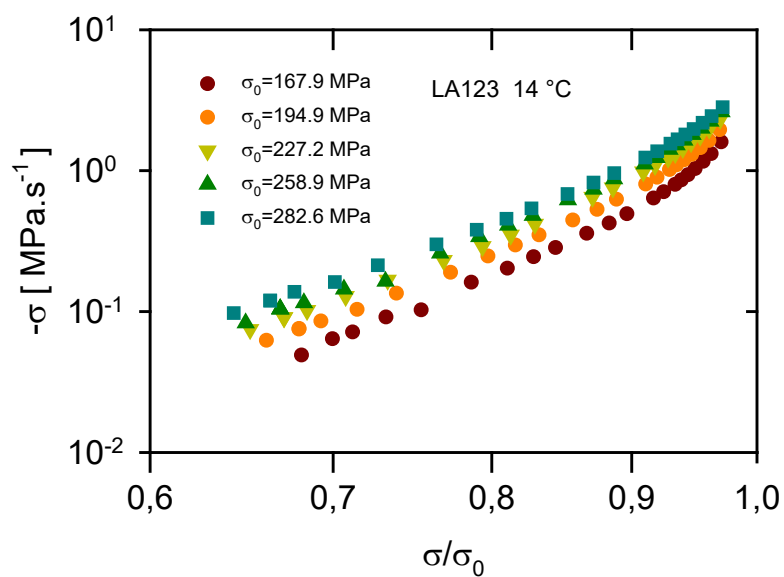
V obrázcích jsou vybrány SR křivky získané pro slitinu LA43 při teplotě 100 °C, LA83 a LA123 při teplotě 14 °C, kompozit s matricí LA43 při teplotě 100 °C a pro porovnání také kompozit s matricí Mg při pokojové teplotě připravený stejným technologickým postupem jako zpevněné slitiny. Relaxační testy trvaly 300 s.



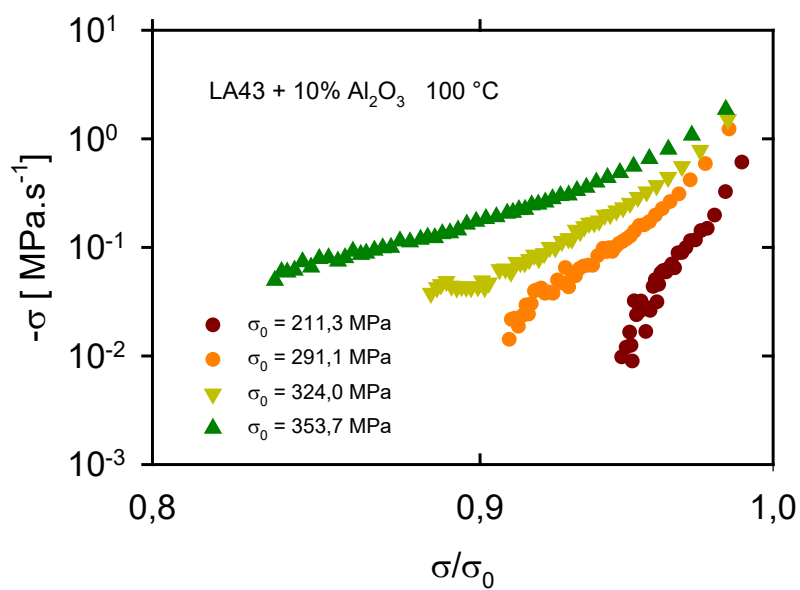
Obr. 9. SR křivky v logaritmické reprezentaci pro slitinu LA43 získané při teplotě 100 °C.



Obr. 10. SR křivky v logaritmické reprezentaci pro slitinu LA83 získané při teplotě 14 °C.

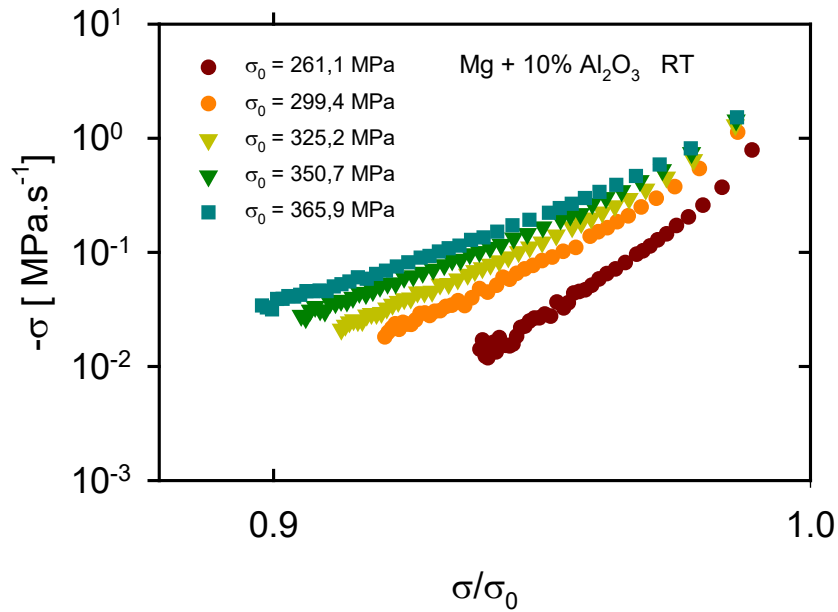


Obr. 11. SR křivky v logaritmické reprezentaci pro slitinu LA123 získané při teplotě 14 °C.



Obr. 12. SR křivky v logaritmické reprezentaci pro kompozit LA43 získané při teplotě 100 °C.





Obr. 13. SR křivky v logaritmické reprezentaci pro kompozit s matricí Mg získané při RT.

### Parametr napěťové citlivosti a aktivační objem

Mezi zdánlivým a dislokačním aktivačním objemem platí vztah

$$V_d = \psi V_a. \quad (89)$$

Taylorův faktor pro  $\alpha$ -fázi má hodnotu  $\psi = 6$ , pro  $\beta$ -fázi je  $\psi = 3,06$ .

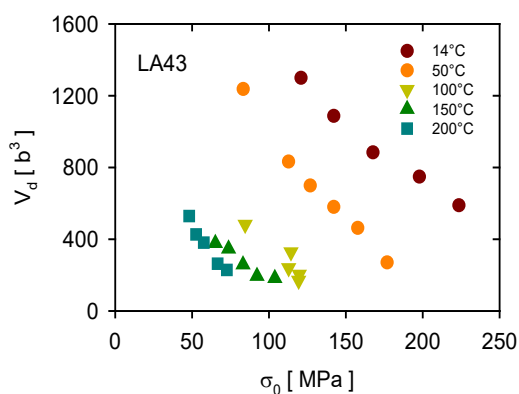
Dislokační aktivační objem můžeme geometricky interpretovat jako

$$V_d = bdl, \quad (90)$$

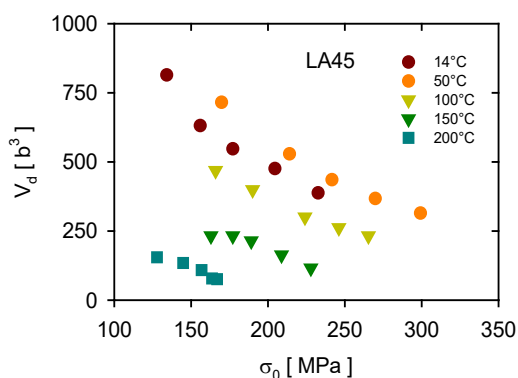
kde  $l$  je průměrná vzdálenost překážek krátkého dosahu, které mohou být překonány tepelnou aktivací, a  $d$  je jejich šířka. Obvykle se pokládá  $d \approx 2b$ , takže potom  $l = \frac{V_d}{2b^2}$ .

## Napětové a teplotní závislosti aktivačního objemu

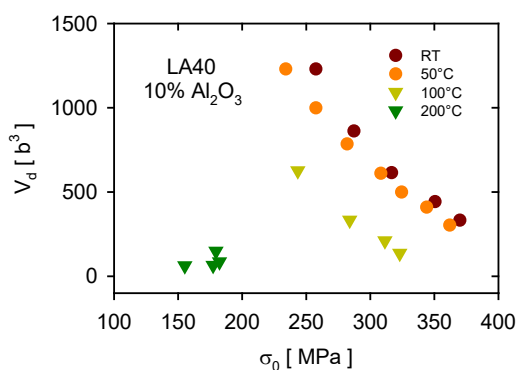
Na obr. 14 – 17 jsou znázorněny napětové závislosti aktivačního objemu  $V_d$  získané pro různé teploty. Hodnoty aktivačních objemů odpovídají začátkům relaxačních testů. V uvedených čtyřech grafech jde o slitiny LA43, LA45 a o kompozity s těmito maticemi.



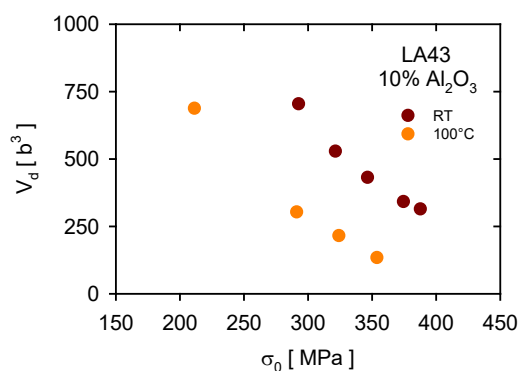
Obr. 14. Napětové závislosti aktivačního objemu pro různé teploty (slitina LA43).



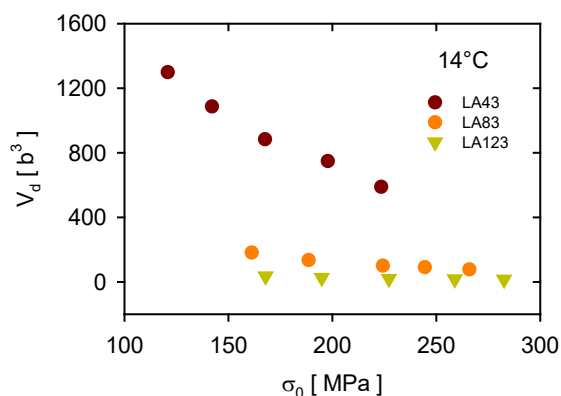
Obr. 15. Napětové závislosti aktivačního objemu pro různé teploty (slitina LA45).



Obr. 16. Napětové závislosti aktivačního objemu pro kompozit s maticí LA40.

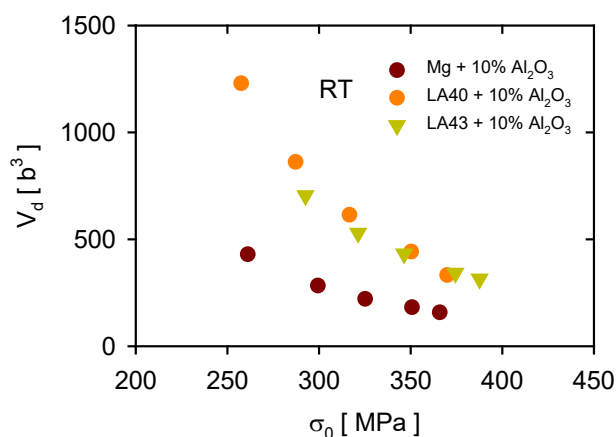


Obr. 17. Napětové závislosti aktivačního objemu pro kompozit s maticí LA43.



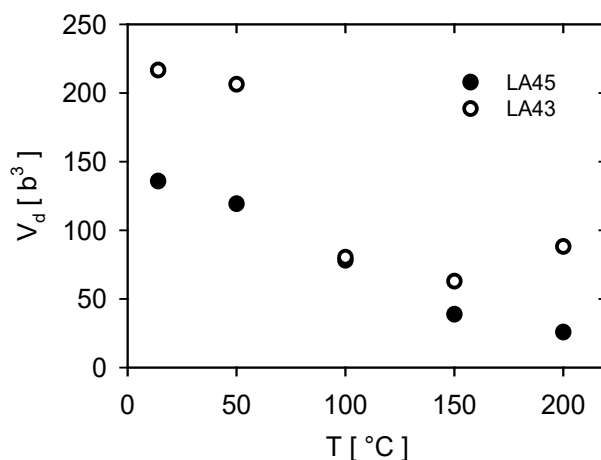
Obr. 18. Napětové závislosti aktivačního objemu pro slitiny reprezentující fáze  $\alpha$ ,  $\alpha+\beta$  a  $\beta$  při teplotě 14°C.

Obr. 18 ukazuje závislost aktivačního objemu na startovním napětí relaxace pro vzorky slitin fází  $(\alpha)$ Mg-Li,  $(\alpha+\beta)$ Mg-Li a  $(\beta)$ Mg-Li obohacených 3 hm.% Al. U LA43, tedy fáze  $\alpha$ , pozorujeme výrazný pokles hodnoty aktivačního objemu s rostoucím startovacím napětím relaxace. U zbývajících dvou slitin jsou hodnoty aktivačního objemu podstatně menší a ve zvoleném měřítku grafu jsou napěťové závislosti nevýrazné. Pohled do odpovídajících tabulek v příloze nám ale ukáže, že i tady jde o pokles aktivačního objemu zhruba na 40% hodnoty odpovídající první relaxaci v pořadí.



Obr. 19. Napěťové závislosti aktivačního objemu pro kompozity s maticemi Mg, Mg-4%Li a Mg-4%Li-3%Al.

Na obr. 19 je srovnání napěťových závislostí aktivačního objemu pro kompozit s maticí tvořenou pouze Mg, dále pak pro kompozit, jehož maticí je slitina Mg-4%Li, a nakonec Mg-4%Li se 3 hm.% Al. Závislosti byly změřeny při pokojové teplotě. Aktivační objem samotného zpevněného hořčíku je v porovnání se zpevněnou slitinou Mg-4%Li (LA40) podstatně menší. Průběh této závislosti pro kompozit se slitinou obsahující 3% Al je podobný jako u kompozitu se slitinou bez hliníku. Vzhledem k vyššímu startovacímu napětí první relaxace materiálu s maticí LA43 je ale srovnání poněkud komplikovanější.



Obr. 20. Teplotní závislost aktivačního objemu pro slitiny LA43 a LA45.

Ukázka teplotní závislosti aktivačního objemu pro slitinu LA43 a LA45 je znázorněna na obrázku 20. Aktivační objem byl počítán vždy pro první SR (tedy pro napětí blízké  $\sigma_{02}$ ).

Parametry vypočítané z uvedených relaxačních testů jsou pro ilustraci uvedeny v následujících tabulkách. Je zde vždy hodnota startovacího a konečného napětí relaxace ( $\sigma_1, \sigma_2$ ), parametr napěťové citlivosti na začátku a konci SR ( $n_1, n_2$ ), zdánlivý, nebo-li experimentálně určený aktivační objem pro začátek a konec SR ( $V_{1a}, V_{2a}$ ) uvedený v jednotkách  $m^3$  a nakonec zdánlivý aktivační objem přepočítaný na jednotku  $b^3$  („krychlový“ Burgersův vektor).

Tab. 1. Slitina LA43 při teplotě 100 °C.

$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$n_1$	$n_2$	$V_{1a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{2a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{1a}$ [b <sup>3</sup> ]	$V_{1d}$ [b <sup>3</sup> ]
84,5	62,3	43,1	6,5	2,63	0,537	80,3	481,6
114,3	90,0	39,8	11,1	1,79	0,635	54,6	327,8
112,8	81,8	28,8	10,1	1,31	0,636	40,0	239,9
119,7	85,0	25,7	10,2	1,11	0,618	33,9	203,2
119,3	82,0	21,5	10,1	0,928	0,634	28,3	169,9

Tab. 2. Slitina LA83 při teplotě 14 °C.

$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$n_1$	$n_2$	$V_{1a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{2a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{1a}$ [b <sup>3</sup> ]	$V_{1d}$ [b <sup>3</sup> ]
161,2	128,7	40,5	13,6	0,996	0,420	30,4	182,3
188,6	148,5	35,4	12,0	0,744	0,320	22,7	136,2
224,3	147,7	31,3	11,0	0,553	0,295	16,9	101,3
244,5	188,9	30,6	9,8	0,496	0,206	15,1	91,8
265,9	205,2	28,5	11,1	0,425	0,214	13,0	77,8

Tab. 3. Slitina LA123 při teplotě 14 °C.

$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$n_1$	$n_2$	$V_{1a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{2a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{1a}$ [b <sup>3</sup> ]	$V_{1d}$ [b <sup>3</sup> ]
167,9	114,4	21,1	7,3	0,498	0,253	11,7	35,1
194,9	128,8	18,1	7,2	0,368	0,222	8,6	25,9
227,2	148,2	16,3	7,4	0,284	0,198	6,7	20,0
258,9	168,2	16,1	7,3	0,247	0,172	5,8	17,4
282,6	181,7	15,4	6,4	0,216	0,140	5,1	15,2

Tab. 4. Kompozit LA43 s 10 obj.% krátkých (70  $\mu\text{m}$ ) vláken  $\text{Al}_2\text{O}_3$  při teplotě 100  $^\circ\text{C}$ .

$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$n_1$	$n_2$	$V_{1a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{2a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{1a}$ [b <sup>3</sup> ]	$V_{1d}$ [b <sup>3</sup> ]
211,3	198,0	154,0	28,3	3,76	0,737	114,7	688,5
291,1	264,6	93,6	175,7	1,66	3,42	50,7	304,0
324,0	286,4	74,4	12,2	1,18	0,220	36,0	216,1
353,7	295,5	50,4	16,6	0,735	0,290	22,4	134,6

Tab. 5. Kompozit Mg s 10 obj.% krátkých (70  $\mu\text{m}$ ) vláken  $\text{Al}_2\text{O}_3$  při pokojové teplotě (připraven stejnou technologií jako ostatní vzorky zkoumaných kompozitních materiálů).

$\sigma_1$ [MPa]	$\sigma_2$ [MPa]	$n_1$	$n_2$	$V_{1a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{2a} \cdot 10^{27}$ [m <sup>3</sup> ]	$V_{1a}$ [b <sup>3</sup> ]	$V_{1d}$ [b <sup>3</sup> ]
261,1	244,6	150,7	54,9	2,35	0,915	71,7	430,3
299,4	275,3	114,0	48,3	1,55	0,715	47,3	283,8
325,2	296,5	96,5	38,8	1,21	0,533	36,9	221,6
350,7	317,2	86,0	34,6	0,999	0,445	30,5	182,9
365,9	328,4	78,0	31,7	0,867	0,393	26,5	158,8

Text, který jste právě dočetli si kladl za cíl přiblížit ve stručnosti problematiku plastické deformace kovových materiálů. Nešlo přitom o teorii plastické deformace (ta je velmi složitá a vyžadovala by stovky stran textu týkajícího se dislokační dynamiky a dalších relevantních partií fyziky pevných látek. Zde šlo pouze o přehled popisného aparátu, který je důležitý při vyhodnocování tahových a tlakových deformačních experimentů. Jako konkrétní příklad využití jedné z experimentálních technik (napětových relaxačních testů) bylo v poslední části textu ukázáno, jak lze z takových experimentů určovat důležité makrostrukturní a mikrostrukturní parametry plastické deformace (parametr napětové citlivosti a aktivační objem). Znalost těchto parametrů je výchozím krokem pro studium tepelně aktivovaných dějů při plastické deformaci kovů.

### Citovaná literatura:

- [1] Kvasnica, J.; Havránek, A.; Lukáč, P.; Sprušil, B.: Mechanika. Academia, Praha 1988.
- [2] Macur, M.: Úvod do analytické mechaniky a mechaniky kontinua. UTIUM, Brno 2010.
- [3] Brdička, M.; Samek, L.; Sopko, B.: Mechanika kontinua. Academia, Praha 2005.
- [4] Hart, E.W.: Theory of the tensile test. Acta Met. 15 (1967) 351-355.
- [5] Ludwig P.: Elemente der technologischen Mechanik. Springer, Berlin 1900.
- [6] Hamerský, M.; Lukáč, P.; Trojanová, Z.: Kovové Materiály 28 (1990) 377.
- [7] Palm, I.H.: Appl. Sci. Res. A (1948), 198.
- [8] Voce, E.: Ist. Metals 74 (1948) 1021.
- [9] Kocks, U.F.: Phil. Mag. 13 (1948) 537.
- [10] Estrin, Y.; Mecking, H.: Acta Met. 32 (1984) 1021.
- [11] Seeger, A.; Berner, R.; Wolf, Z.: Z. Phys. 155 (1959) 247.
- [12] Haasen, P.: Physikalische Metallkunde. Springer, Berlin 1974.

- [13] Nabarro, F.R.N.: *Phil. Mag.* 16 (1967) 231.
- [14] Balík, J.; Lukáč, P.: *Key. Eng. Mater.* 97-98 (1998) 307.
- [15] Malygin, G.A.: *Phys. Stat. Sol. (a)* 119 (1990) 423.
- [16] Lee, D.; Hart, E.W.: *Metall. Trans.* 2 (1971) 1245.
- [17] Hamerský, M.: *Relaxace napětí*. Habilitační práce, 1990.
- [18] Li, J.C.M.: In: Rosenfield, A.R.; Hahn, G.T.; Bement, A.L.; Jaffee, R.I. (eds.), *Dislocations Dynamics*. Mc Graw-Hill 1968, p. 87.
- [19] Feltham, P.: *Phil. Mag.* 6 (1961) 209.
- [20] Hamerský, M.; Trojanová, Z.; Lukáč, P.: *Acta Techn. ČSAV* 37 (1977) 449.
- [21] Drozd, Z.: *Mechanické vlastnosti perspektivních materiálů*. Disertační práce, MFF UK Praha 2000.
- [22] Dotsenko, V.I.: *Phys. Stat. Sol. (b)* 93 (1979) 11.
- [23] Trojanová, Z.; Lukáč, P.; Gabor, P.; Drozd, Z.; Máthis, K.: *Kovové Mater.* 39 (2001) 368.
- [24] Trojanová, Z.; Kúdela S.; Lukáč, P.; Drozd, Z.; Máthis, K.; Kolenčíak, V.; Schweighofer, A.: *Mechanical properties of Mg-Li-Al alloys reinforced by short Saffil fibres*. *Kovové materiály* 39 (2001) 1-10.
- [25] Trojanová, Z.; Kúdela, S.; Lukáč, P.; Drozd, Z.; Ptáček, L.; Máthis, K.: *Mechanical properties of Mg-12Li-xAl alloys reinforced by short saffil fibres*. *Kovové materiály* 41 (2003) 203-211.
- [26] Trojanová, Z.; Drozd, Z.; Lukáč, P.; Kúdela, S.: *Deformation processes in Mg-Li-Al base composites*. *Key Engineering Materials* 419-422 (2003) 817-822.
- [27] Drozd, Z.; Trojanová, Z.; Kúdela, S.: *Deformation behavior of Mg-Li-Al alloys*. *Journal of Alloys and Compounds* 378 (2004) 192-195.
- [28] Trojanová, Z.; Drozd, Z.; Lukáč, P.; Chmelík, F.: *Deformation behaviour of Mg-Li alloys at elevated temperatures*. *Material Science and Engineering A* 410-411 (2005) 148-151.
- [29] Drozd Z.; Trojanová, Z.; Kúdela, S.: *Degradation of the mechanical properties of a Mg-Li-Al composite at elevated temperatures studied by the stress relaxation technique*. *Materials Science and Engineering A* A462 (2007) 234-238.
- [30] Trojanová, Z.; Drozd, Z.; Kúdela, S.; Száraz, Z.; Lukáč, P.: *Strengthening in Mg-Li matrix composites*. *Composites Science and Technology* 67 (2007) 1965-1973.