

prolíná náhoda i nutnost od mikrosvěta až do makrosvěta, a nejsou tedy tak neslučitelné, jak se nám zdálo. I klasické schéma KM, s mikrosvětlem odlišeným od makrosvěta, je dnes narušeno existencí makroskopických kvantových jevů, kterých jen přibývá. Budoucí teorie se bude muset vyrovnat s neexistencí dokonale izolované soustavy, brát v úvahu i samotného pozorovatele a znalost počátečních podmínek. Všechno se zdá spíše souviset dialekticky se vším a příkré rozpory se spíše přemostují, než prohlubují. To jen může vést k žádoucímu jednotnému fyzikálnímu i filozofickému pohledu na náš svět. Zdá se tedy, podle I. J. Manina, že „*neexistuje menší uzavřený systém než celý svět*“.

Víme, že nedovedeme ještě odpovědět na mnoho a mnoho otázek. Nevíme co je to život, jak vzniklo naše vědomí a inteligence, co je to fyzikální vakuum a nedovedeme odpovědět na Leibnizovu otázku, proč vůbec něco existuje. Pyšně mluvíme o vzniku vesmíru z „ničeho“ (z kvantové fluktuace) a o teorii „všeho“ (sjednocení všech interakcí snad pomocí teorie strun). Ale i pravda se má hovořit se skloněnou hlavou. „Ignoramus“ – nevíme toho příliš mnoho. Ale nechci podepsat to agnosticistické „ignorabimus“ – nebudeme vědět nikdy. Věda je teprve na začátku. Leccos již víme, ledacos se ještě dovíme. Můžeme jen závidět příštím generacím, které, jak doufám, uvidí další výsledky lidského intelektu. Pokud se nezničí sám mnohem dříve, než je doba života této naší šťastné kvantové fluktuace. Jsme na správné cestě a věda ukovála metody, které nás vedou jistě k lepšímu poznání, přes všechny vědecké a filozofické fluktuace. Není zatížena – i přes své omyly – dogmatismem a nebojí se kritiky. Možná, že budeme nakonec v mnohazměrných světech, v nichž náš je jen jednou z projekcí, omezení vlastním mozkiem a jeho způsobem myšlení. Zatím víme, že fyzikální zákonitosti jsou všude ve vesmíru stejné, a že jsme na začátku. Proto je mým možným být optimistou^{25, 72, 73}.

10 Supravodivost

„Fakta nejsou mnoho platná, pokud se na ně díváme jen jako na fakta. Matou nás svou početností a zdánlivou nesouvislostí. Jiná věc ovšem je, když je přetvoříme do podoby teorie a uvedeme do vzájemné harmonie.“

T. Poston

Supravodivost je jeden z nejvýznamnějších fyzikálních jevů ve fyzice pevné fáze. V tomto prohlášení se skrývají dva aspekty: teoretický a praktický. Fyzikům trvalo 45 let, než našli správné mikroskopické vysvětlení tohoto jevu. A vysvětlení neobyčejné a překvapující, které hraje stále velkou roli ve fyzice pevné fáze, jaderné fyzice, ve fyzice elementárních částic, astrofyzice atd.

Někteří fyzikové předpovídají, možná příliš optimisticky, že objev supravodivosti bude znamenat pro lidstvo asi totéž jako objev kola a že 21. století bude stoletím supravodivosti. Potenciální možnosti aplikace supravodivosti jsou skutečně veliké.

My si v dalším všimneme obou těchto aspektů podrobněji. A zase nás budou zajímat spíše fyzikální principy než konkrétní popisy určitých zařízení.

10.1 Trochu historie a základní pojmy

„Vědec musí uspořádat. Věda se staví s pomocí faktů jako dům s pomocí cihel. Ale soubor faktů je vědou asi tak jako hromada cihel domem.“

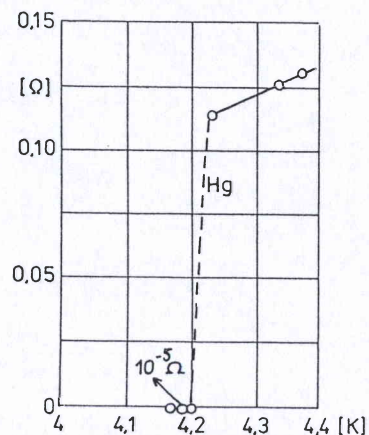
H. Poincaré

A. Vymizení odporu – kritická teplota a pole

Po zkapalnění posledního permanentního plynu helia (izotopu ^4He) byl H. Kamerlingh-Onnes (1853–1926) ve výhodné

pozici vůči celému světu. Nikde jinde než v jeho laboratoři tak nízké teploty neexistovaly. Při čerpání par ${}^4\text{He}$ se, od teploty bodu varu při normálním tlaku $T = 4,2\text{ K}$, dostal až k teplotě 1 K . Ihned se rozhodl provést měření elektrického odporu některých látek: platiny a zlata. Odpor s teplotou klesal, ale vždycky k malé hodnotě *zbytkového odporu*, a to i v nejčistších vzorcích (zbytkový odpor přičítal nečistotám). Proto si vybral nakonec rtuť, která se dala opakovanými destilacemi zbavit všech příměsí a nečistot. Dne 28. dubna 1911 (a to je již H. Kamerlingh-Onnesovi skoro 60 let) sdělil holandské Akademii věd (Communication č. 120b) svůj objev o poklesu odporu rtuti v oblasti teplot $4,2\text{ K}$. V Communication č. 124c z 25. listopadu 1911 již mluví o náhlé změně poklesu odporu rtuti. Na obr. 10.1.1 je tato slavná závislost. Hodnota, na kterou poklesl odpor rtuti, nebyla měřitelná jeho prostředky, i když je stále zlepšoval. sám přechod v oblasti teploty přechodu, kterou budeme nyní nazývat *kritickou teplotou* (měří se obvykle, ale ne vždy, v polovině výšky oblasti přechodu), byl velice „úzký“ – jen $0,02\text{ K}$.

Tedy překvapení. Ale je to vlastnost jen rtuti, tj. je to jev unikátní, zcela ojedinělý, anebo jde o jev univerzální, jemuž by se měly podřídit všechny čisté kovy? H. Kamerlingh-Onnes hledá další kovy a našel, že olovo a cín rovněž ztrácejí ná-

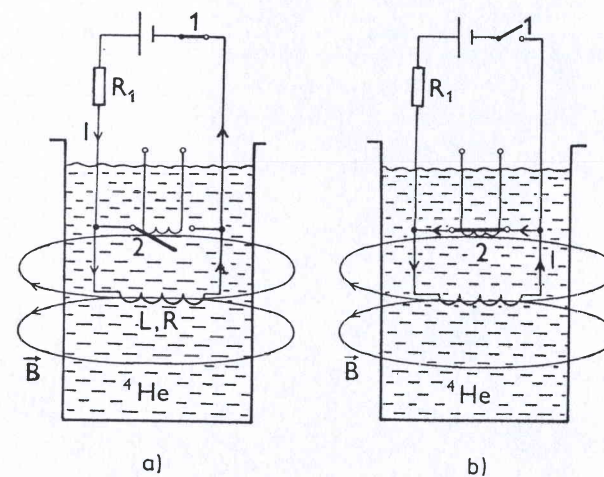


Obr. 10.1.1. Historická závislost (mírně upravená) odporu rtuti na teplotě naměřená v roce 1911 H. Kamerling-Onnesem (otištěna v Leiden Communications 124 c z 25. 11. 1911 pod názvem „O náhlé změně průběhu, při němž odpor rtuti vymizí“).

hle odpor při zhruba $7,2\text{ K}$ (Pb) a $3,7\text{--}5,3\text{ K}$ (Sn). Ukázalo se, že jde o jev velice častý, a to nejen u kovů, ale i u slitin atd.

V článku z března roku 1913, v roce kdy dostává Nobelovu cenu za zkvalitnění helia a za studium vlastností látek při nízkých teplotách, se poprvé objevuje nové slovo *supravodivost*. V nobelovské přednášce pak H. Kamerlingh-Onnes vyslovil domněnku, že tento jev vysvětlí nová kvantová mechanika, o které se již tehdy ve fyzikálních kruzích vědělo.

Klasická mechanika a elektrodynamika nedávaly žádné objasnění pozorovanému jevu. Proč zmizí najednou odpor v kovu? Jak to, že elektrony „nevidí“ kmitající mřížku, nečistoty, poruchy mřížky atd.? Kde se ztratil zbytkový odpor? A je to vlastně nulový odpor? Je možné změřit jeho hodnotu? Sám H. Kamerlingh-Onnes provedl klasický pokus. Navinul z olověného drátu cívku, kterou umístil v kapalném heliu a napájel z vnější baterie přes dva klíče. Do cívky pustil určitou hodnotu stejnosměrného proudu přes první klíč 1 (druhý klíč byl otevřen) – viz obr. 10.1.2. Po vytvoření statického



Obr. 10.1.2. a) Buzení supravodivé cívky s indukčností L , a s odporem R z vnějšího zdroje přes odpor R_1 při rozpojeném supravodivém klíči 2 (tj. při zapnutém vyhřívání klíče). b) Supravodivá cívka v zaklíčovaném stavu – vyhřívání klíče 2 vypnuto při sepnutém klíči 1. Tento klíč 1 je možné po nabuzení magnetu a snížení zdroje na nulu vypnout.

magnetického pole kolem cívky uzavřel klíč 2, rovněž ze supravodiče, čímž vlastně uzavřel proud cívky přes tento supravodivý klíč, jehož odpor R se také blížil či rovnal nule. Pak mohl odpojit vnější baterii a takto zachycené magnetické pole do magnetu udržovat na trvalé hodnotě. Tato metoda nabuzení supravodivých magnetů a „zamrazení“ či „zaklíčování“ jejich pole s pomocí vnitřního supravodivého klíče je i dnes jedinou metodou, jak toto pole udržet na vysoké hodnotě časové stability. Ale jak dlouho bude toto pole stabilní? Budeme-li jeho hodnotu měřit nějakým magnetometrem, můžeme ocenit jeho stabilitu, a tím i odpor supravodivé cívky z poklesu tohoto pole v čase.

Protože v obvodu je pouze indukčnost cívky L a její odpor R (odpor klíče zanedbáme), bude pokles magnetického pole dán jednoduchým exponenciálním poklesem

$$(10.1.1) \quad B(t) = B(t = 0) \exp(-t/t_R),$$

kde $t_R = L/R$ a $B(t)$ jsou hodnoty magnetické indukce v bodě měření. Počkáme-li, např. tak dlouho až čas $t = t_R$, pak, protože indukčnost L známe, můžeme ze vztahu $R = L/t_R$ určit hodnotu odporu R .

H. Kamerlingh-Onnes zjistil, že odpor při $T < T_c$ klesne nejméně o šest řádů. Při posledních měřeních určil tuto hodnotu až na dvanáct řádů. Ale i to byla hodnota omezená jeho měřicími možnostmi. V roce 1962 byl v USA proveden pokus, v němž se v takové supravodivé cívce udržoval proud po dva a půl roku. Kdyby asistent nebyl zapomněl dolít kapalné helium do chladicí soustavy, určitě by pokračoval déle. Rezi- stivita použitého supravodiče ρ_a byla oceněna na hodnotu $\rho_a \approx 10^{-25} \Omega \text{ m}$, zatímco například rezistivita tak vynikajícího vodiče, jako je měď, je při 20 K pouze $10^{-11} \Omega \text{ m}$, tj. o celých čtrnáct řádů větší.

Z tohoto jednoduchého pokusu můžeme ovšem vyvodit několik teoretických a praktických postřehů.

1. Za prvé vidíme, že odpor supravodiče je nekonečně malý, ale budeme psát raději $R \rightarrow 0$ než $R = 0$. To, že není roven nule se dá vysvětlit tím, že teplota T není rovna absolutní nu-

le a že v soustavě máme kromě supravodivých elektronů i nepatrnou, ale nenulovou složku normálních elektronů odpovídající nenulovému odporu. Tato *dvousložková teorie* chování kvantových kapalin je velice plodnou teorií. Obvykle nám normální složka představuje excitace základního stavu kvantové kapaliny.

2. Pokus ukazuje, že je možné „zamrazit“ či „zaklíčovat“ magnetické pole a dosáhnout obrovské stability pole, jakou nemůže dosáhnout žádný jiný magnet. Potvrzuje také existenci *trvalých* nevymírajících proudů v supravodivém prstenci či cívce. Tyto trvalé proudy, také se jim říká perzistentní proudy, jsou v supravodiči metastabilní. Neodpovídají rovnovážnému termodynamickému stavu, protože existuje stav s ještě nižší energií, tj. stav bez proudu. V poslední době byla stabilita těchto proudů oceněna na dobu $3 \cdot 10^{99}$ roků, což je mnohem větší doba, než je stáří našeho vesmíru. To umožňuje realizovat velice stabilní magnetická pole.

Metodika vytvoření supravodivého klíče 2 – viz obr. 10.1.2 – není jednoduchá. Obvykle jde o vyhřívaný supravodivý drátek, který je nejdříve nahřát na teplotu $T > T_c$, a je tedy v normálním stavu. Při zaklíčování vypneme topení a drát přejde do supravodivého stavu a „vezme“ proud cívky na sebe. Ale „supravodivé spoje“ klíče k cívce musí mít odpor velice malý, jinak se v nich disipuje Jouleovo teplo RI^2 a riskujeme, že přejdou do normálního stavu. Také bychom museli jejich odpor započítat do celkového odporu cívky a zhoršili bychom si stabilitu pole. Realizace takových dokonalých supravodivých spojů není věda, ale umění.

3. Kromě generace silných magnetických polí napadne možná čtenáře i jiná další důležitá aplikace těchto magnetů. Tyto magnety bychom mohli použít k nahromadění elektrické energie ve formě magnetického pole. Získali bychom tak tzv. akumulátory energie. Při malém zatížení v síti bychom mohli vyrobenou energii po usměrnění dodat do takových obrovských magnetických akumulátorů a v případě potřeby ji zase z takového magnetu postupně odebírat.

Na cestě vytváření silných magnetických polí však čekalo

H. Kamerlingh-Onnese zklamání, které se zdálo nepřekonatelné. A sám H. Kamerlingh-Onnes se správného řešení nedočkal. Ukázala se totiž, že u cívek zhotovených z čistých materiálů – tedy čistých kovových prvků – existuje magnetická indukce B_c , po jejímž dosažení magnet přejde do normálního odporového stavu. Kromě kritické teploty T_c existuje tedy i kritická indukce B_c . Při $B < B_c$ je vodič v supravodivém stavu, při $B > B_c$ je vodič opět v normálním odporovém stavu. Bohužel, hodnota tohoto pole B_c byla příliš malá a nedávala naději na vytváření silných magnetických polí. Kritická indukce B_c pro olovo je při $T \rightarrow 0$ K rovna 0,0803 T, pro niob 0,1944 T a pro rtuť 0,0411 T.

Řešení bylo nalezeno až po druhé světové válce a bylo právě na opačném konci, než předpokládal H. Kamerlingh-Onnes – ne v čistých materiálech, ale naopak a silně znečištěných slitinách některých kovů.

Dnes již známe kolem 40 chemických prvků, které vykazují supravodivost v oblasti teplot od 10^{-4} K až do 9,2 K (niob). V různých slitinách a sloučeninách je ovšem možné dosáhnout T_c až kolem 100 K. V roce 1987 bylo takové hodnoty dosaženo ve vodivé keramice typu $Y_1Ba_2Cu_3O_{7-y}$, což ovšem znamená *revoluci v supravodivosti* a nejenom v ní¹⁰⁸⁻¹¹⁰ – viz tab. III. Ale jakýsi paradox zde zůstal. Kovy s vysokou elektrickou vodivostí (Cu, Ag, Au) nepřecházejí do supravodivého stavu ani při nejnižších teplotách, na které mohly být ochlazeny, zatímco špatně vodivé a často silně znečištěné vzorky olova, niobu a různých slitin přecházejí do tohoto podivného stavu velice snadno.

Přechod do supravodivého stavu se vyznačuje velmi strmou závislostí na teplotě. Bylo nasnadě, že jde o fázový přechod v soustavě elektronů, a nikoli mřížky, o které se zdálo, že se takového přechodu neúčastní. V té době bylo již známo, že elektrický proud v kovech je způsoben proudem volných elektronů, které jsou odtrženy od atomů. Klasická fyzika nemohla vysvětlit ani existenci takového elektronového „plynu“. Elektrony však přenášejí nejen elektrický náboj, ale také teplo, protože se srážejí s kmitající mříží, nečistotami, defekty

Tabulka III

Prvky s kritickou teplotou T_c nad 1 K

	T_c [K]	B_c (při $T = 0$ K) [T]
Al	1,175	0,0105
Ga	1,08	0,0059
Hg (α -fáze)	4,154	0,0411
In	3,408	0,0281
La (α -fáze)	4,88	0,08
Nb (supr. II typu)	9,25	0,206
Pb	7,196	0,0803
Sn	3,72	0,0305
Ta	4,47	0,0829
Tc (supr. II. typu)	7,8	0,141
Th	1,38	0,016
Tl	2,38	0,0178
V (supr. II. typu)	5,40	0,1408

Supravodivé slitiny a sloučeniny

	T_c [K]	B_{c2} (při $T = 4,2$ K) [T]
PbBi pájka	8,6	1,8
NbZr	10,0	9
NbTi	10,6	12
PbMo ₄ S ₆	14,4	50
Nb ₃ Sn	18,0	22
Nb ₃ Al	20,3	33
Nb ₃ Al _{0,8} Ge _{0,2}	20,7	41
Nb ₃ Ga	22,5	37
Nb ₃ Ge	23,2	40
Y ₁ Ba ₂ Cu ₃ O _{7-y}	≈ 92,0	200 (extrapolace)

v mříži apod. U kovů se ukázalo, že odpor klesá lineárně s teplotou, zatímco kinetická teorie ukazovala na odmocninovou závislost s teplotou. Také závislost měrného tepla kovů, která měla být podle pravidla Dulongova-Petitova konstantní, se ukázala být v příkrém rozporu s experimentálními hodnotami při klesající teplotě. Supravodivost těmito nedostatky klasických teorií nasadila korunu.

O vysvětlení tohoto jevu supravodivosti se pokoušeli i takoví géniové jako A. Einstein, W. Heisenberg a další, ale ani jeden z nich neuspěl. H. Kamerlingh-Onnes umírá v roce 1926, v roce do něhož vlastně klademe zrod základů nové teorie – kvantové mechaniky (1925–1930), která jediná může tento jev vysvětlit.

B. Kritický proud – kritická rychlost

I když neexistovala žádná teorie supravodivosti, pokračovali experimentátoři v pokusech, aby odkryli další vlastnosti supravodičů. V roce 1916 např. F. Silsbee vyslovil hypotézu, že u čistých kovů válcovitého tvaru, je supravodivost rozrušena tzv. *kritickým proudem* I který vyvolá na povrchu kritickou hodnotu magnetické indukce B_c [T]

$$(10.1.3) \quad I_c = 2 \pi R_0 B_c / \mu_0 \quad [A],$$

kde R_0 [m] je poloměr válcovitého vodiče, $\mu_0 = 4 \cdot 10^{-7} \text{ H m}^{-1}$ je permeabilita vakua.

Vztah (10.1.3) je v podstatě klasický výraz pro výpočet hodnoty indukce pole B ve vzdálenosti R_0 od nekonečně dlouhého vodiče.

Tento Silsbeeho vztah docela dobře souhlasil v případě čistých supravodičů válcovitého tvaru a u masívních vzorků. Kromě kritických parametrů (T_c , B_c) se nám objevuje třetí kritický parametr – kritický proud I_c .

Připomeňme hned, že výraz (10.1.3) nemůžeme použít pro výpočet I_c či B_c v případě tenkého filmu. U tenké vrstvy má B_c dvojí charakter. Mluvíme o kritické indukci $B_c^{(I)}$ vyvolané proudem I a úměrné tloušťce filmu d – $B_c^{(I)} \sim d$ – a o magnetické kritické indukci B_c (vzhledem k vnějšímu poli), která je nepřímo úměrná tloušťce filmu – $B_c \sim (d^{-1})$. Tak se může stát, že $B_c \gg B_c^{(I)}$. Vztah $B_c \sim d^{-1}$ platí jen v případě, že $d \ll \lambda_L$, kde λ_L je hloubka vniku magnetického pole do supravodiče.

Při zániku supravodivosti proudem však nedochází k fázo-

vému přechodu a mluvíme pouze o kritickém proudu rozpárování. Při proudu I , spojitě rostoucím od nuly do kritické hodnoty I_c se totiž část spárovaných supravodivých elektronů postupně rozpárovává na jednotlivé elektrony díky kinetické energii proudu. Hustota supravodivých elektronů n_s a supravodivého proudu J_s jsou tedy závislé na v_s . S podobnou závislostí a s kritickou rozpárovací rychlostí se setkáváme u všech kvantových kapalin.

C. Kinetická indukčnost – rychlost kondenzátu – induktivní charakter supravodiče

Odpor supravodiče R se pro stejnosměrné proudy blíží k nule $R \rightarrow 0$ (jinak R roste s kmitočtem – $R(\omega)$). Jeho obecná impedance $Z = R + i \omega L$, kde L je indukčnost a i imaginární jednotka, bude spíše induktivního charakteru než odporového. Supravodiče vystupují v elektrických obvodech spíše jako indukčnost, a ne jako odpor. Uvidíme dále, že kromě klasické lineární, geometrické či magnetické indukčnosti L , spojené s geometrickými charakteristikami vodiče, existuje ještě *kinetická indukčnost* L_k , spojená s pohybem makroskopického souboru supravodivých elektronů – kondenzátu. Můžeme napsat, že kinetická energie kondenzátu

$$m v_s^2 / 2 \sim L_k I^2 / 2,$$

a odtud vypočítat kinetickou indukčnost L_k pro $v_s = |v_s|$.

Vezměme si například supravodivý tenký drátek o délce l a průřezu A (budeme předpokládat, že proud teče celým tímto průřezem), jímž protéká proud $I = n_s e v_s A$, kde n_s je hustota supravodivých elektronů. Tyto elektrony mají kinetickou energii $n_s m v_s^2 l A / 2$. Porovnáním výrazů

$$n_s v_s^2 l A / 2 = L_k I^2 / 2 = L_k n_s^2 e^2 v_s^2 A^2 / 2$$

dostaneme, že kinetická indukčnost L_k spojená s pohybem kondenzátu je rovna

$$L_k = m l / n_s e^2 A.$$

Pro $l = 10^{-2} \text{ m}$, $A = 7,8 \cdot 10^{-15} \text{ m}^2$ ($r = 5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$), $n_s = 1 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-3}$ (n_s je závislé na teplotě a řádově je rovno $10^{25} - 10^{28} \text{ m}^{-3}$), $m = 9,1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$ a $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ dostaneme $L_k \approx 1,5 \cdot 10^{-9} \text{ H}$. V řadě případů v supravodivé kvantové mikroelektronice je to zanedbatelná hodnota.

Oceňme ještě řádově rychlost kondenzátu v_s ze vztahu $J_s = n_s e v_s$ či $J_c = n_s e v_c$, pro typickou hodnotu hustoty kritického proudu pro supravodič $J_c \approx 2 \cdot 10^{10} \text{ Am}^{-2}$ (závisí na B i T). Pro tuto hodnotu J_c a pro $n_s = 10^{28} \text{ m}^{-3}$ dostaneme $v_c \approx 10 \text{ ms}^{-1}$. Proud kondenzátu tedy teče v supravodiči relativně pomalu, rychlostí vynikajícího sprintera.

Ze supravodivého materiálu při $T < T_c$ ovšem neuděláme to, co z měděného drátu za pokojové teploty – vařič. Jouleovy ztráty v odporu RI^2 v supravodiči prakticky neexistují, protože $R \rightarrow 0$ a protože supravodič má induktivní charakter.

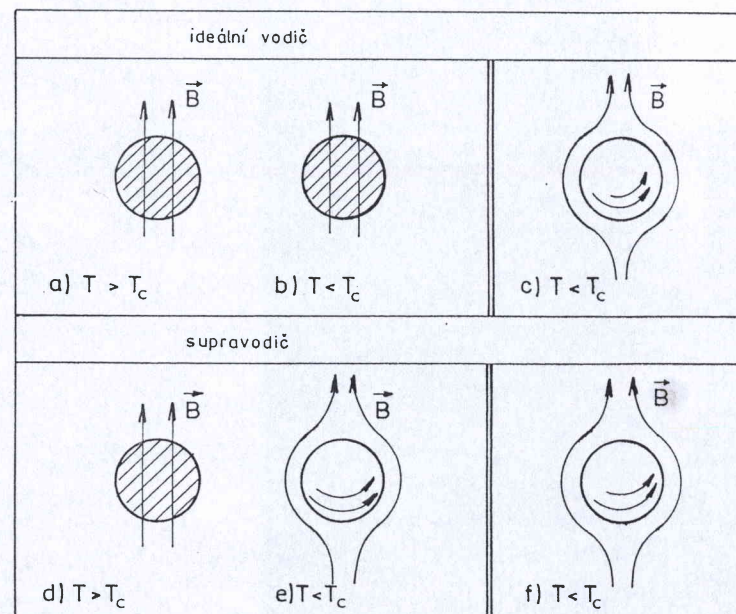
D. Vypuzování magnetického pole z vnitřku supravodiče – zhmotnění fotonu

Nyní přejdeme k jevu, který je snad důležitější než jev nulového odporu či jev induktivní povahy supravodiče. V roce 1933 zjistili v Berlíně W. Meissner a R. Ochsenfeld, že supravodič, a to nezávisle na své historii, tedy vratně, vytlačuje magnetickou indukci B ze svého vnitřku.

Asi dva měsíce před tímto závažným objevem publikovali němečtí autoři v čele s profesorem R. Beckerem teorii vysvětlující jev supravodivosti na základě představy o ideálním vodiči. Málokterá teorie měla tak krátkou dobu života.

Zprvu nebylo jasné, není-li supravodič jen *ideálním vodičem* s nulovým odporem. Takový ideální vodič nemá důvod vytlačovat ze svého vnitřku statickou magnetickou indukci při ochlazování z teploty $T > T_c$ na $T < T_c$ – viz obr. 10.1.3a,b. Jestliže na ideální vodič (bez pole) naložíme vnější magnetické pole, nedovolí mu *stínící proudy* vniknout dovnitř. Tyto stínící proudy vytvoří na povrchu ideálního vodiče takovou magnetickou indukci, že pole uvnitř vodiče se vyruší – obr. 10.1.3c. *Stav ideálního vodiče tedy závisí na jeho předcházející historii.*

V případě Meissnerova-Ochsenfeldova jevu je magnetická indukce B vypuzena z vnitřku supravodiče, jakmile teplota klesne pod T_c , což ideální vodič neudělá – obr. 10.1.3d,e. Při působení vnějšího pole B při $T < T_c$ je pak magnetická indukce vypuzena z vnitřku supravodiče podobně jako u ideálního vodiče – viz obr. 10.1.3f.

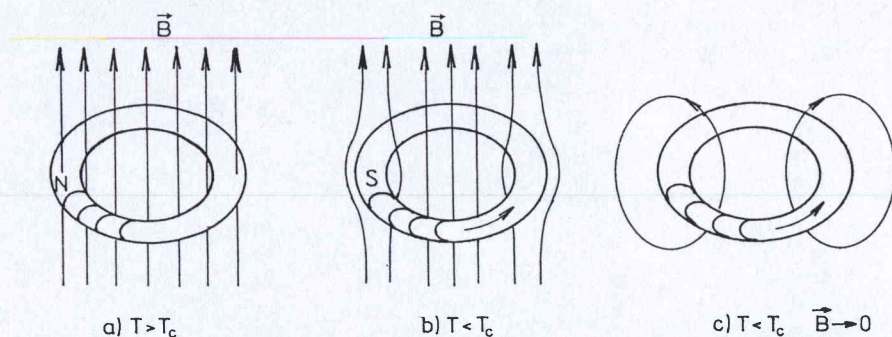


Obr. 10.1.3. a, b) Snižování teploty v přítomnosti statického magnetického pole B u ideálního vodiče. c) Aplikace pole B při $T < T_c$ u ideálního vodiče. d, e) Snižování teploty v přítomnosti pole u supravodiče I. typu. Magnetická indukce, na rozdíl od ideálního vodiče, je vytlačena z vnitřku supravodiče na povrch naindukovanými stínícími proudy. f) Aplikace pole B při $T < T_c$ u supravodiče.

Je poněkud kuriózní, že tento jev byl objeven až v roce 1933 přesto, že mohl být objeven dříve. Proč? Důvodem byla topologie měřeného vzorku. My už z kapitol o topologii i o Aharonově-Bohmově jevu víme, že existuje obrovský rozdíl mezi koulí a prstencem. Protože se měření vlastností vodiče při $T < T_c$ prováděla při nízkých teplotách, tak se z důvo-

dů ochlazení vzorků zmenšovala hmotnost vzorků a místo plného válce se bral vždy dutý válec. Zapomnělo se nějak, že jde o různou topologii. Při snižování teploty pak nedošlo k vypuzení pole z celého objemu válce, ale jen z objemu supravodiče tvořícího stěny válce. Šlo tedy o malou změnu, která mohla být přehlédnuta, a chování takového dutého válce bylo podobné chování ideálního vodiče. Tato „topologická drobnost“ zabránila tomu, že tento velice důležitý jev pro pochopení supravodivosti byl objeven až tehdy, když Meissner a Ochsenfeld vzali pro svůj pokus monokrystal cínu a olova, tedy topologicky jednoduše souvislou oblast. Tato skutečnost snad na 10 let či více opozdila chápání jevu supravodivosti.

V případě, že máme vodivý prstenec při $T > T_c$ vložený do magnetického pole, pak při $T < T_c$ dojde k redistribuci magnetického toku v prstenci. Z oblasti supravodiče musí být magnetický tok vytlačen – viz obr. 10.1.4 a, b. Při $T < T_c$ a po odstranění vnějšího pole se v prstenci „zachytí“ magnetický tok $\Phi = \mathbf{B}\mathbf{S}$, kde \mathbf{B} je indukce v díře prstence a \mathbf{S} je plocha, kterou prstenec obepíná. Tato hodnota $\Phi = \mathbf{B}\mathbf{S}$ je kon-



Obr. 10.1.4. a) Prstenec v normálním (nesupravodivém) stavu N ve vnějším statickém magnetickém poli \mathbf{B} při $T > T_c$. b) Tentýž prstenec, nyní supravodivý, ve vnějším poli při $T < T_c$ (v prstenci jsou indukovány slabé stínící proudy kompenzující vytlačení pole z objemu prstence). c) Tentýž supravodivý prstenec jako v b) při snížení vnějšího pole \mathbf{B} do nuly (v prstenci jsou nyní indukovány velké stínící proudy, které musí „vytvořit“ zaniklé vnější magnetické pole, protože magnetický tok přes vnitřní plochu prstence musí zůstat konstantní).

stantní, pro případ znázorněný na obr. 10.1.4b, c. Hodnota Φ v prstenci ale musí mít kvantovanou hodnotu (viz diskusi v paragrafu 8.1)

$$(10.1.4) \quad \Phi = n\Phi_0, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

kde $\Phi_0 = h/2e$, tzv. *fluxon*. Ale to poněkud předbíháme.

Z hlediska magnetických vlastností rozeznáváme zhruba látky feromagnetické, paramagnetické a diamagnetické. Látky feromagnetické se snadno magnetizují ve vnějším magnetickém poli a při jeho odstranění zůstávají obvykle zmagnetované. Jsou také silně přitahovány do oblasti magnetického pole. Látky paramagnetické se magnetizují slabě, jsou slabě přitahovány do magnetického pole a bez pole obvykle žádnou magnetizaci nevykazují.

Vlastnost diamagnetických materiálů – být z magnetického pole vypuzován a vnější pole zeslabovat – je univerzální vlastností všech látek. U feromagnetických a paramagnetických látek je však tato vlastnost překryta. Vysvětluje se podle Lenzova pravidla: magnetické pole vzbuzené indukovaným proudem má směr opačný než změna indukčního toku – $d\Phi/dt$ – a proto působí proti změně, kterou bylo vyvoláno. To by se dalo pochopit, namítne čtenář, ale v případě supravodiče se jedná o stejnosměrné magnetické pole, kdy $d\Phi/dt = 0$. Klasická elektrodynamika tady zklamává na celé čáře.

Magnetická indukce v materiálu o permeabilitě $\mu = \mu_r \mu_0$, kde μ_r je relativní permeabilita a $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Hm}^{-1}$ je

$$(10.1.5) \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mathbf{B}_v = \mu_0 (\mathbf{H} + \mathbf{I}) = \mu_0 (1 + \chi) \mathbf{H} = \mu_r \mu_0 \mathbf{H},$$

kde \mathbf{H} je intenzita vnějšího magnetického pole [Am^{-1}], \mathbf{B}_v je vnitřní indukce, \mathbf{I} je magnetizace prostředí ($\mathbf{I} = \chi \mathbf{H}$), χ je susceptibilita ($\mathbf{I} \equiv 0$ ve vakuu). Relativní permeabilita prostředí je

$$(10.1.6) \quad \mu_r = (1 + \chi).$$

Pro diamagnetické prostředí je $\chi < 0$ a $\mu_r < 1$. Pro paramagnetické prostředí je $\chi > 0$ a $\mu_r > 1$. Protože uvnitř masivního supravodiče je $\mathbf{B} \equiv 0$, můžeme říci, že v supravodiči je $\mu_r = 0$ a $\chi = -1$. *Supravodič není ideální vodič, ale ideální diamagnetikum.*

Ta skutečnost, že magnetický tok $\Phi = 0$ či magnetická indukce $\mathbf{B} \equiv 0$ v objemu supravodiče, a to nezávisle na historii, znamená, že jde o vratný jev a že můžeme na supravodivý stav použít termodynamiku a její metody.

V uzavřeném normálním válci či prstenci se indukují proudy, jen když se mění v čase pole $\mathbf{B}(t)$: napětí $V = -d\Phi/dt = -SdB(t)/dt$ (Faradayův zákon). V supravodivém prstenci však mohou existovat trvalé proudy i bez tohoto indukčního zdroje napětí. Maxwellova elektrodynamika nemůže tento jev popsat, a proto se musí Maxwellovy rovnice doplnit.

Diamagnetismus supravodiče se dá demonstrovat pokusem zvaným „Mohamedův hrob“, který poprvé provedl v roce 1945 sovětský fyzik V. K. Arkadiev. Podle legendy se totiž Mohamedova rakev ve svém hrobě vznáší, nadnášena neviditelnými silami.

Zhotovíme-li misku z olova a ponoříme-li ji do kapalného helia, bude miska supravodivá. Nyní budeme na vlákně spouštět do misky permanentní magnet. Při přiblížení k misce se magnet začne nadnášet, až bude „viset“ volně nad miskou. Magnet svým magnetickým polem vytváří v supravodivé misce stínící proudy a opačné magnetické pole, které působí proti váze magnetu. Čtenář si může představit zrcadlový magnet pod miskou a složit siločáry obou magnetů. Samozřejmě, že existuje i inverzní experiment k experimentu typu „Mohamedova rakev“ – supravodič levitovaný nad vhodně tvarovaným magnetickým polem.

Může ještě vzniknout otázka, zdali ideální diamagnetismus supravodiče není jen makroskopický zesílený atomární univerzální diamagnetismus. Není to pravda – jde o úplně nový typ diamagnetismu. Uvedeme alespoň jeden důvod.

Ze standardní KM již známe – viz 4.5.19 –, že proudová hustota vyvolaná částicí s hmotností m^* a s nábojem e^* je dá-

na v přítomnosti EM polí kalibračně invariantním výrazem

(10.1.7)

$$\mathbf{j} = +\frac{e^*}{2m^*} [\Psi^* (-i\hbar\nabla\Psi) + \Psi(i\hbar\nabla\Psi^*)] - \frac{e^{*2}}{m^*} |\Psi|^2 \mathbf{A}.$$

Tento výraz se dá pro vlnovou funkci $\Psi(x) = |\Psi| \exp i\Theta(x)$, kde $\Theta(x)$ je fáze, napsat také jako (v supravodiči $e^* = 2e$, $m^* = 2m$, $|\Psi|^2 = \rho = n_s/2$, ale jsou i práce, v nichž $e^* = 2e$ a $m^* = m$)

$$(10.1.8) \quad \mathbf{j} = \frac{e}{m} |\Psi|^2 \cdot (\hbar\nabla\Theta - 2e\mathbf{A}).$$

Proudovou hustotu \mathbf{j} v (10.1.8) si pak rozložíme

$$(10.1.9) \quad \mathbf{j} = \mathbf{j}_p + \mathbf{j}_d,$$

kde \mathbf{j}_p je „paramagnetický“ transportní proud, který nás nyní nebude zajímat, a \mathbf{j}_d proud diamagnetický, který není spojen s transportem náboje:

$$(10.1.10) \quad \mathbf{j}_d = -\frac{2e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}.$$

To je rovnice stínícího diamagnetického proudu.

Podle Maxwellových rovnic platí, že pro statické magnetické pole $\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \text{grad div } \mathbf{A} - \nabla^2 \mathbf{A} = \mu_0 \mathbf{j}$. Pro vybranou kalibraci $\text{div } \mathbf{A} = 0$ platí $\nabla^2 \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{j}$. Položíme-li do tohoto vztahu výraz (10.1.10), dostaneme pro $\mathbf{j} \equiv \mathbf{j}_d$

$$(10.1.11) \quad \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{2e^2 \mu_0}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A} = M_a^2 \mathbf{A} = \lambda_L^{-2} \mathbf{A},$$

kde „hmotnost fotonu“ $M_a = [2e^2 \mu_0 |\Psi|^2 / m]^{1/2}$ a tzv. „Londonská hloubka vniku“ $\lambda_L = M_a^{-1}$, či $\lambda_L = (\mu_0 n_s e^2 / m)^{-1/2}$.

Rovnici (10.1.11) můžeme také přepsat – ponecháme tuto úlohu čtenáři – na tvar

$$(10.1.12) \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \lambda_L^{-2} \mathbf{B} = M_a^2 \mathbf{B},$$

když víme, že platí $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ a $\nabla^2 (\text{rot } \mathbf{A}) =$

= $\text{rot}(\nabla^2 \mathbf{A})$. Rovnice tohoto typu je rovnicí pro *statické a hmotné vektorové pole B*.

Rovnice (10.1.12) je slavná vektorová rovnice vniku magnetického pole do supravodiče. Veličina λ_L zde hraje roli hloubky stínění EM pole či hloubky vniku a M_a , v jiné interpretaci, hmotnost fotonu EM pole v supravodiči – viz kap. 6.3

$$(10.1.13) \quad M_a = \lambda_L^{-1}.$$

Uvažme nyní, pro jednoduchost, místo tří rovnic (10.1.12) pouze jedinou rovnici pro jednorozměrnou úlohu. Vnější magnetické pole $B_o(x)$ aplikujeme ve směru osy z a budeme sledovat pouze jeho variaci ve směru osy x . Rovnice (10.1.12) bude vypadat pro $x > 0$, jestliže polorovinu od $x \geq 0$ bude vyplňovat supravodič, takto:

$$(10.1.14) \quad \frac{d^2 B_o(x)}{dx^2} = \lambda_L^{-2} B_o(x).$$

Řešením této diferenciální rovnice druhého řádu bude exponenciála

$$(10.1.15) \quad B_o(x) = B_o(0) \exp(-x/\lambda_L),$$

kde $B_o(0) = B_o$.

Hranice mezi normální fází či vakuem a supravodičem není náhlá, ale je „rozmazaná“ na vzdálenost λ_L . Z masivního supravodiče je pole vytlačeno do povrchové tloušťky λ_L . Řádově je $\lambda_L \approx (10^{-7} - 10^{-8})$ m. Rovnice (10.1.14) je dobře splněna pro masivní supravodiče, pro něž λ_L je mnohem menší než rozměry supravodiče.

Kdybychom nahradili supravodič obyčejným diamagnetikem, pak pole $B_o(x)$ bude dáno vztahem (pro $x \geq 0$)

$$B_o(x) = B_o / (1 - \chi),$$

a protože pro diamagnetikum je $\chi < 0$, bude v materiálu $B_o(x) = \text{konst.} < B_o$.

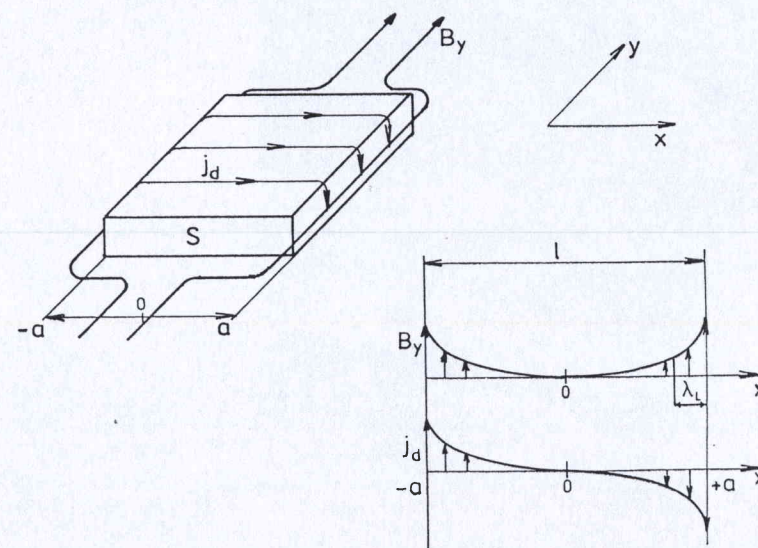
Závisí pronikání pole na velikosti materiálu? Ano. Do ten-

kých supravodivých vrstev s rozměry srovnatelnými s λ_L proniká magnetické pole téměř úplně a přitom si vrstva ponechává supravodivé vlastnosti. Dokonce může být *kritická hodnota B_c pro malé vzorky až o několik řádů větší* než u masivního vzorku. Pozor tedy na „zdravý rozum“. Kritické pole supravodivé tenké vrstvy je dokonce nepřímo úměrné tloušťce vrstvy, tj. roste s klesající tloušťkou vrstvy (při $d \ll \lambda_L$).

V této části se ještě zmíníme o pronikání magnetické indukce do masivního supravodiče.

Supravodiče můžeme rozdělit do dvou velikých skupin: I. typu a II. typu

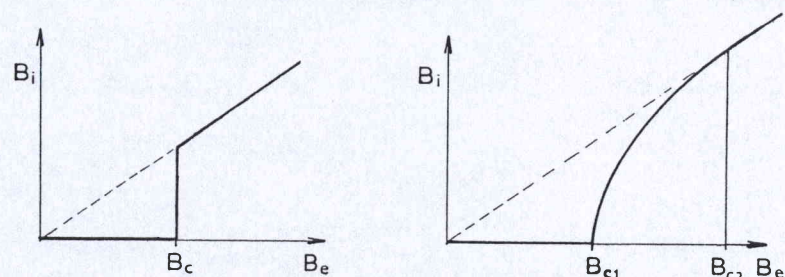
Supravodiče I. typu, jako např. kovy Pb, Sn, In (nikoli však Nb, V, Tc), mají pouze jedinou kritickou indukci B_c . Je-li vnější magnetické pole $B < B_c$, vniká jen do hloubky λ_L a na povrchu tělesa tečou, také jen do hloubky λ_L , stínící Meissnerovy proudy. Tyto proudy tečou bez přenosu náboje v objemu supravodiče, a tak jejich proudová intenzita v tomto objemu se rovná nule – viz obr. 10.1.5. V masivním supra-



Obr. 10.1.5. Magnetického pole $B_y(x)$ a proudová hustota $j_d(x)$ v supravodivém hranolku S pro případ $a \approx 4\lambda_L$. V případě, že $a \gg \lambda_L$, budou pole $B_y(x)$ a $j_d(x)$ vytlačeny prakticky z objemu na povrch supravodivého hranolku.

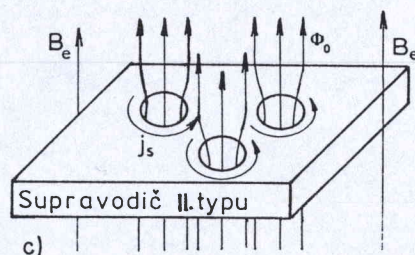
vodiči tečou stínící i transportní proudy po povrchu supravodiče.

Supravodiče II. typu – „ideální“ i tzv. „tvrdé“ supravodiče – mají dvě kritické indukce: B_{c1} a B_{c2} . Pokud je vnější pole $B < B_{c1}$, chovají se stejně jako supravodiče I. typu. Je-li ovšem – viz. 10.1.6 – $B_{c1} < B < B_{c2}$, začne magnetické pole pronikat do vnitřku supravodiče. Ale zcela zvláštním způsobem. Začne tam vnikat ve formě vírových vláken. Každé toto vírové vlákno má normální nesupravodivé „jádro“, jímž proniká magnetický tok až do vzdálenosti zhruba λ_L od osy víru. Tento tok jednotlivým vírem je rovný právě jednomu kvantu magnetického toku Φ_0 (obecně se kvantuje *fluxoid* a nikoli magnetický tok). Tomuto kvantu říkáme *fluxon*. Kolem jádra cirkulují stínící proudy s hustotou j_s . Supravodič je tedy v té



a) I. typu

b) II. typu



Obr. 10.1.6. a) Závislost vnitřního pole B_i na vnějším poli B_e pro supravodič I. typu s jedinou hodnotou kritického pole B_c ; b) pro supravodič II. typu se dvěma kritickými indukcemi B_{c1} a B_{c2} ; c) schematické znázornění proniku tokotrubic magnetického pole s kvantem Φ_0 supravodivou destičkou u supravodiče II. typu při $B_{c1} < B_e < B_{c2} = \sqrt{2} \kappa B_c$, kde B_c je termodynamické kritické pole (u supravodiče I. typu $B_c = B_{c1}$, u supravodiče II. typu leží B_c mezi hodnotami B_{c1} a B_{c2}).

to oblasti polí protknut vírovými vlákny či tokotubicemi magnetického toku – vznikne tzv. *smíšený stav*. Vzroste-li jejich počet natolik, že celý supravodič je jimi protknut, pak supravodič přejde do normálního stavu a my jsme dosáhli hodnoty B_{c2} .

V masívních supravodičích I. typu může, při vytlačování magnetické indukce z objemu supravodiče na povrch, vzniknout v blízkosti části povrchu (v důsledku demagnetizačních jevů) taková hodnota indukce, která se již rovná kritické hodnotě B_c , zatímco v jiné části povrchu je $B \ll B_c$. V takovém případě magnetická indukce vniká do supravodiče postupně a vzorek se nám „rozbije“ na střídající se nepravidelné oblasti – domény (předpovězené L. Landauem a pozorované na cínu A. I. Šalnikovem), které jsou normální, a oblasti, které zůstávají supravodivé. Takovému stavu supravodiče I. typu říkáme *mezistav*^{2, 37, 38, 52–55}.

10.2 Elementární termodynamika supravodivosti

„Podíváme-li se na strukturu fenomenologické termodynamiky, nalezneme krásnou budovu obrovského estetického a fyzikálního kouzla.“

J. Serrin

Jakmile bylo jasné, že supravodivý přechod je termodynamicky vratný, tj. nezávisí na cestě, ale pouze na počátečním a konečném stavu, mohly se použít na tento jev metody termodynamiky. Tento přístup začali rozvíjet před druhou světovou válkou holandský fyzikové C. T. Gorter a H. B. G. Casimir. Šlo v podstatě o fenomenologický popis, nikoliv o mikroskopickou teorii jevu, která ještě neexistovala a k jejímuž vytvoření chyběly další experimenty a představy o základním stavu supravodiče. Nejvíce používanou teorií byla tehdy *dvousložková teorie*, vysvětlující supravodivost jako „směs“ normální a supratekuté fáze.

Ve fyzice existuje důležitá funkce – tzv. *volná energie*

$F = E - TS$, kde E je energie tělesa či soustavy a S je entropie. Volná energie F nám určuje množství energie tělesa, které je schopno se přeměnit v práci, a určuje nám také základní, tj. nejnižší stav soustavy. V bodě $T = T_c$ by měly být volná energie normálního stavu $F_N(T)$ a supravodivého stavu (bez vnějšího pole) sobě rovny $F_S(B = 0, T_c) = F_N(T_c)$. Předpokládáme, že F_N nezávisí na magnetickém poli.

Vložíme-li nyní supravodič do vnějšího magnetického pole B_a , zvětší se jeho volná energie o energii magnetického pole „vypuzenou“ ze supravodivého objemu V_o .

$$(10.2.1) \quad F_S(B_a, T) = F_S(0, T) + B_a^2 V_o / (2 \mu_o \mu_r).$$

V okamžiku, kdy hodnota $B_a = B_c(T)$ a supravodič přejde do normálního stavu, se musí rovnat

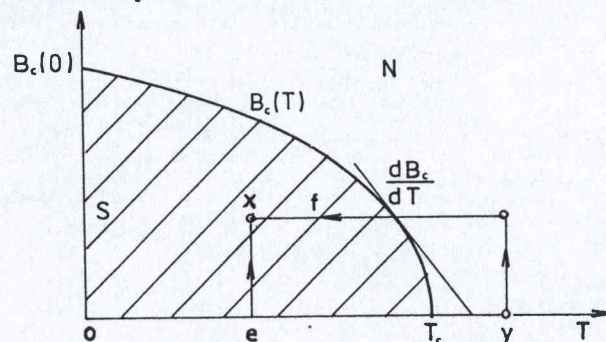
(10.2.2)

$$F_N(0, T) = F_N(B_c, T) = F_S(0, T) + V_o B_c^2 / (2 \mu_o \mu_r).$$

Odtud dostaneme výraz pro kritickou indukci B_c^2

$$(10.2.3) \quad B_c^2(T) = [F_N(0, T) - F_S(0, T)] 2 \mu_o \mu_r / V_o,$$

jako rozdíl volných energií v nulovém magnetickém poli při dané teplotě T . To je *základní rovnice termodynamiky supravodiče*. Závislost $B_c(T)$ můžeme snadno naměřit při různých T a dostaneme výsledek, který je zobrazen na obr. 10.2.1.



Obr. 10.2.1. Závislost termodynamického kritického pole B_c na teplotě T . Tato závislost je dobře aproximována empirickou parabolickou závislostí $B_c(T) \approx B_c(0) [1 - (T/T_c)^2]$.

Fakt, že fáze S je termodynamickou fází, potvrzuje to, že do bodu X se z bodu Y můžeme dostat buď cestou e či f – stav X nezávisí na cestě. Obr. 10.2.1 nám představuje fázovou křivku supravodiče oddělující od sebe normální fázi N od fáze supravodivé S. Tuto závislost popisuje zhruba také výraz

$$(10.2.4) \quad B_c(t) = B_c(0)(1 - t^2),$$

kde $t = T/T_c$.

Z dvousložkové teorie supravodivosti plynou také další závislosti na teplotě, a to pro $\lambda_L(T)$ a $n_s(T)$:

$$(10.2.5) \quad \lambda_L(T) = \lambda_L(0)/(1 - t^4),$$

$$(10.2.6) \quad n_s(T) = n_s(0)(1 - t^4),$$

kde $\lambda_L(0)$ při $T = 0$ K je zhruba 10^{-8} m a $n_s(0)$ při $T = 0$ K zhruba 10^{28} m^{-3} .

Experimenty vcelku potvrzovaly, s určitými omezeními, výsledky této fenomenologické teorie^{37, 38, 45},

Protože termodynamika nám říká, že entropie $S = \partial F(B, T)/\partial T$, pak při derivaci (10.2.3) dostaneme pro $V_o = 1$

$$(10.2.7) \quad B_c \frac{\partial B_c}{\partial T} = [S_N(0, T) - S_S(0, T)] \cdot \mu_o \mu_r.$$

Tento vztah nám říká, že když bude $\partial B_c/\partial T$ záporné – a to opravdu je, viz obr. 10.2.1, pak je entropie normálního stavu $S_N > S_S$. To ale znamená, že supravodivý stav je uspořádanější stav než normální. Jde tedy o fázi, v níž při $T < T_c$ existuje jakési uspořádání či pořádek na dlouhou vzdálenost.

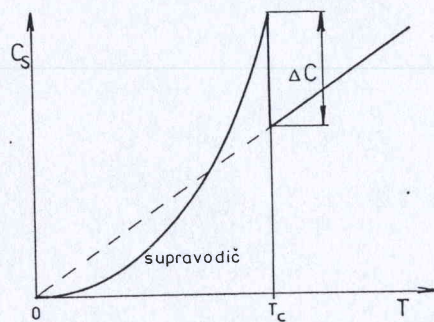
Ve vnějším magnetickém poli entropie supravodiče roste na rozdíl od paramagnetika. Tohoto faktu můžeme použít ke snižování teploty adiabatickou magnetizací supravodiče, nikoli demagnetizací jak u paramagnetika.

A další důsledek faktu rovnosti entropií při $B \equiv 0$ a $T = T_c$? Latentní teplo $L(B, T)$ je rovno nule v bodě přechodu $T = T_c$ (ne pod ním)

$$L(0, T_c) = T_c(S_N - S_S) = 0.$$

Z těchto dvou faktů, že $S_S(B, T) < S_N(B, T)$ pro $B < B_c$ a $T < T_c$ a rovnosti nule latentního tepla $L(0, T_c)$, usuzujeme, že supravodivost je charakterizována nějakým parametrem Ψ a že jde, v poli $\mathbf{B} \equiv 0$, o fázový přechod II. druhu.

V této fázi výkladu ještě připomeneme závislost měrného tepla C_S u supravodiče na teplotě, která vykazovala při T_c skok, a v blízkosti $T \rightarrow 0$ K exponenciální pokles. Předpokládáme, že za nízkých teplot u kovů bude mít měrné teplo dvě složky: měrné teplo mřížky ($\sim T^3$) a elektronů ($\sim T$). Měrné teplo mřížky se při přechodu do supravodivého stavu nemění (nemění se mřížka). Na obr. 10.2.2 je závislost $C_S(T)$ znázorněna. Skok $\Delta C = (C_N - C_S) \sim T_c(dB_c/dT)$. Potvrzuje se tušení, že přechod do supravodivého stavu se děje v soustavě elektronů, a nikoli v mřížce. A, za druhé, je tady náznak, že se ve spektru elektronů objevuje energetická mezera, jejíž velikost rychle roste pod $T < T_c$. Proto i měrné teplo supravodiče C_S rychle klesá a brzy je menší než měrné teplo elektronů normálního kovu C_N . Tak se při $T \rightarrow 0$ K pozoruje exponenciální pokles C_S , svědčící o tom, že elektrony „kondenzují“ postupně do základního stavu, odděleného od prvního vzbuzeného stavu energetickou mezerou.



Obr. 10.2.2. Měrné teplo C_S supravodiče v závislosti na teplotě T . Při teplotě T_c dojde ke skokové změně ΔC v hodnotě C_S . Měrné teplo $C_{eN} \sim T$ je měrné teplo elektronů v normálním kovu. V teorii slabé vazby BCS je hodnota $\Delta C = 1,43 C_{eN}$. Hluboko pod T_c je závislost $C_S(T)$ exponenciální, což ukazuje na existenci energetické mezery.

10.3 Bratři Londonové – další fenomenologická teorie

„Entity se nemají rozmnožovat, pokud to není nutné.“

W. Occam

Z fašistického Německa utíkají v roce 1934 dva němečtí fyzikové Fritz a Heinz Londonovi a nacházejí útočiště v anglickém Oxfordu. Fritz London pak odešel do Ameriky a je dnes prakticky považován za amerického fyzika. A protože jeho příspěvek k vysvětlení supravodivosti i k dalším fyzikálním jevům byl skutečně veliký, existuje dnes i vysoká americká cena F. Londona.

Oba bratři tehdy v roce 1934 doplnili Maxwellovy rovnice o dva vztahy, které vysvětlovaly *trvalé proudy* v supravodiči a *ideální diamagnetismus supravodiče*. Tyto rovnice bratří Londonů tvoří základ lineární elektrodynamiky supravodičů a určují nám vztahy mezi proudy a intenzitou elektrického pole \mathbf{E} a indukcí magnetického pole \mathbf{B} .

Jednu z těchto rovnic, tzv. první rovnici, jsme již použili při vysvětlení Meissnerova-Ochsenfeldova jevu. Je to rovnice

$$(10.3.1) \quad \nabla^2 \mathbf{B} = \lambda_L^{-2} \mathbf{B}$$

a nebudeme ji více diskutovat ($\lambda_L^{-2} = \mu_0 n_s e^2 / m$).

Ta druhá rovnice bratří Londonů je vlastně Newtonova rovnice pro sílu $m d\mathbf{v}_s / dt = \mathbf{F} = e\mathbf{E}$, kterou můžeme vyjádřit jako

$$(10.3.2) \quad dj_s / dt = \lambda_L^{-2} \mathbf{E} / \mu_0,$$

kde \mathbf{j}_s je proudová hustota transportního proudu supravodivých párů $\mathbf{j}_s = 2e\rho\mathbf{v}_s = en_s\mathbf{v}_s$, kde $2e$ je náboj supravodivých párů, \mathbf{v}_s rychlost kondenzátu a $\rho = n_s/2$ hustota kondenzátu párů. Pro stacionární proudění $dj_s / dt = 0$ platí, že $\mathbf{E} = 0$. Protože obecně může být $\mathbf{j}_s = \text{konst.}$ a nerovné nule, vysvětluje to trvalé proudy v supravodivém prstenci: $\mathbf{j}_s = \text{konst.}$ Elektrické pole \mathbf{E} vymizí, normální proud také (je

úměrný podle Ohmova zákona intenzitě \mathbf{E}) a zůstane pouze supravodivý proud.

Kromě supravodivého proudu (při stacionárních úvahách zanedbáme posuvný proud) teče v supravodiči proud normálních elektronů, jehož hustota je rovna $\mathbf{j}_n = en_n \mathbf{v}_n$, kde n_n a \mathbf{v}_n jsou hustota a rychlost normálních elektronů, pro něž platí Ohmův zákon

$$(10.3.3) \quad \mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E},$$

kde σ_n je vodivost normálních elektronů. Kdyby totiž při odporu $R \rightarrow 0$ byl transportní proud \mathbf{j}_s úměrný \mathbf{E} , pak by došlo k neomezenému růstu proudu, a to není možné – proto platí vztah (10.3.2).

V supravodiči mohou existovat nejméně tři proudy:

a) stínící Meissnerovy proudy (bez přenosu náboje) s proudovou hustotou $\mathbf{j}_d = -\lambda_L^{-2} \mathbf{A}/\mu_0$ úměrnou vektorovému potenciálu \mathbf{A} ,

b) transportní proudová hustota kondenzátu \mathbf{j}_s s rovnicí $d\mathbf{j}_s/dt = \lambda_L^{-2} \mathbf{E}/\mu_0$,

c) proudová hustota normálních elektronů (Ohmův zákon) $\mathbf{j}_n = \sigma_n \mathbf{E}$.

Lineární rovnice bratří Londonů však přece jen neplatí ve všech případech. Rovnice jsou totiž lokální, to znamená, že proud v daném místě závisí na velikosti polí v daném místě. Obecnější případ řešil anglický fyzik B. Pippard. Často se také rozlišuje tzv. londonovský a pippardovský případ. Obecně musíme totiž zavést ještě jednu nesmírně důležitou délku $\xi(T)$, která určuje vzdálenost, na kterou se mohou měnit v prostoru supravodivé vlastnosti. Tato délka se nazývá koherenční délkou. Souvisí také s průměrem ξ_0 Cooperova páru, tj. supravodivého „dvojčete“ dvou spárovaných elektronů. Charakterizuje „tvrdost“ či „měkkost“ kondenzátu supravodiče a je důležitou charakteristikou supravodivého materiálu.

Je-li $\lambda_L(T) \ll \xi(T)$, mluvíme o pippardovském případě. Magnetická indukce vniká jen do hloubky $\lambda_L(T)$ a neovlivňuje příliš kondenzát elektronů. Při teplotě T daleko od T_c je

$\xi(T)$ rovno Pippardově koherenční délce $\xi_0 \approx 0,2 \hbar v_F / k_B T_c$, kde v_F je Fermiho rychlost. Při T blízké se T_c obě veličiny $\xi(T)$ a $\lambda_L(T)$ divergují se stejnou teplotní závislostí. Je-li $\lambda_L(T) \gg \xi(T)$, mluvíme o *londonovském nelokálním případě*. Magnetické pole vniká do supravodiče docela jinak než v prvním případě, a to ve formě vírových vláken s kvantovým magnetickým tokem.

Londonovy rovnice také neplatí ve vysokých polích. Pozorný čtenář se však může podívat, proč mluvíme o dvou rovnicích, když se dá např. aplikací operace rotace na rovnici (10.3.2) a s pomocí Maxwellovy rovnice $\text{rot } \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$ odvodit rovnici (10.3.1). Tato otázka není vůbec triviální. Ale tvrzení o takovém odvození by bylo velkou chybou. Vlastně bychom tak odvodili diamagnetické stínící proudy z proudů transportních. V čem je chyba? V topologii. Takové „odvození“ se dá provést jen v případě, když je supravodič jednoduše souvislý, ale neplatí to již pro prstenec či dutý válec. Ale v těchto strukturách právě existují trvalé proudy, proudy tak charakteristické pro supravodič. Naznačíme jen stručně, v čem je chyba. Jestliže např. z rovnice (10.3.2) dostáváme, že

$$\begin{aligned} \text{rot} \left[d\mathbf{j}_s/dt - \lambda_L^{-2} \mathbf{E}/\mu_0 \right] &= \text{rot } \mathbf{v}_0 = 0, \\ \text{div} \left[d\mathbf{j}_s/dt - \lambda_L^{-2} \mathbf{E}/\mu_0 \right] &= \text{div } \mathbf{v}_0 = 0, \end{aligned}$$

byla by chyba, kdybychom výraz v hranatých závorkách považovali za rovný nule. V netriviální topologii (prstenec, dutý válec apod.) musíme totiž vzít v úvahu i existenci nenulového vektorového pole \mathbf{v}_0 splňujícího v supravodiči S podmínky: $\text{rot } \mathbf{v}_0 = 0$, $\text{div } \mathbf{v}_0 = 0$ a $(\mathbf{v}_0)_{\perp S} = 0$ (proudové nevytékají z povrchu prstence ven). Pak bude

$$d\mathbf{j}_s/dt - \lambda_L^{-2} \mathbf{E}/\mu_0 = a(t) \mathbf{v}_0,$$

kde $a(t)$ je časově závislá funkce. V takovém případě nemůžeme jednu rovnici odvodit z druhé a nemůžeme také minout důležité trvalé proudy \mathbf{j}_s úměrné $\mathbf{v}_0(r)$, které tečou paralelně s povrchem.

Podtrhujeme znovu obecný případ dvou proudů v supravodiči. Každá z Londonových rovnic popisuje jeden z nich. I když toto rozdělení může být někdy formální, je dobře, když čtenář nebude směřovat Meissnerovy stínící proudy s transportními proudy. Transportní proudová hustota je hustota vnutená supravodiči polem \mathbf{E} v jednoduše souvislém supravodiči či hustota trvalého proudu v prstenci apod. Stínící proudová hustota diamagnetických proudů je úměrná \mathbf{A} (v objemu je proud nulový a jestliže v jednom místě tečou proudy jedním směrem, pak v druhém místě tečou směrem právě opačným).

Takové rozdělení proudů je také okamžitě zřejmé ze známého výrazu z kvantové mechaniky – viz kalibračně invariantní výraz (10.1.7 – 10.3.5)

(10.3.5)

$$\mathbf{j} = \frac{eh}{2m} [\Psi^* (-i\nabla\Psi) + \Psi (+i\nabla\Psi^*)] - \frac{2e^2}{\mu} |\Psi|^2 \mathbf{A}.$$

Pro

$$(10.3.6) \quad \Psi = |\Psi| \exp [i\Theta(\mathbf{r}, t)]$$

se (10.3.5) dá napsat jako (viz (10.1.8))

$$(10.3.7) \quad \mathbf{j} = \frac{e}{m} |\Psi|^2 (\hbar\nabla\Theta - 2e\mathbf{A}).$$

První člen odpovídá transportnímu proudu a je úměrný gradientu makroskopické fáze $\Theta(\mathbf{r}, t)$ kondenzátu supravodičových elektronů

$$(10.3.8) \quad \mathbf{j}_s = \frac{eh}{m} |\Psi|^2 \nabla\Theta.$$

Vytvoříme-li ve vzorku gradient fáze, poteče v supravodiči proud. Bude-li $\nabla\Theta$ konstantní, bude \mathbf{j}_s na čase nezávislým proudem.

Druhý člen v (10.3.7) nám dává diamagnetický proud úměrný EM potenciálu \mathbf{A} (viz (10.1.10))

$$(10.3.9) \quad \mathbf{j}_d = -\frac{2e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}.$$

Snadno můžeme porovnat oba vztahy (10.3.8) a (10.3.9) s fenomenologickými rovnicemi bratří Londonů (10.3.2) a (10.3.1). Rovnice (10.3.8) např. ukazuje, že „hnací silou“ transportního proudu je gradient fáze $\nabla\Theta$ či časová změna gradientu fáze $\partial\nabla\Theta/\partial t \sim \mathbf{E}$.

10.4 Vrchol fenomenologických teorií – teorie Ginzburgova–Landauova

„Jak přicházíte ke svým objevům? „Sedím ve své místnosti, pozoruji hezké holky a občas mne něco napadne.“

laureát Nobelovy ceny
P. W. Anderson

Již F. London tušil – a to přesněji než H. Kamerlingh-Onnes, že záhada supravodivosti bude mít kvantověmechanické řešení. Vytušil, že supravodivé elektrony – na rozdíl od normálních elektronů – musí být v jakémsi makroskopickém koherentním stavu. Musí být nějak vázány, a to tak, aby měly společný těžiškový pohyb – jedinou hybnost \mathbf{p}_s (bez proudu je $\mathbf{p}_s = 0$). Proto mluvil o „tuhé“ vlnové funkci.

Co bylo stále nepochopitelné, byl fakt, že elektrony v kovu se řídí „individualistickou“ statistikou Fermiho-Diraca a ta nepřipouští obsazení jednoho stavu větším počtem elektronů. A přesto F. London a po něm L. D. Landau a V. L. Ginzburg předpokládali, že $\Psi^* \Psi = |\Psi|^2 = n_s/2$, kde n_s je hustota supravodivých elektronů, jako kdyby měla platnost Boseova–Einsteinova statistika. „Tuhost“ vlnové funkce je třeba chápat jako její „odolnost“ vůči vnějším i vnitřním tepelným poruchám a polím.

V roce 1950 publikovali sovětské fyzikové V. L. Ginzburg a L. D. Landau nelineární fenomenologickou teorii supravodivosti, která popisovala (ne vysvětlovala z mikroskopického hlediska) chování supravodičů v obrovské šíři a obsahovala již i kvantově mechanický popis. Tato teorie byla založena na Landauově teorii fázových přechodů 2. druhu z roku 1937.

Fázové přechody byly popisovány pomocí parametru uspořádání v méně symetrických fázích při $T < T_c$. Parametr uspořádání se rovná nule při $T \geq T_c$. Jejich fenomenologická teorie se stala, a to více než následující mikroskopická teorie, základem téměř všech praktických výpočtů v teorii a v praxi supravodičů.

Předpokládejme, že pod teplotou $T < T_c$ existuje supravodivá fáze (kondenzát) elektronů popsána jedinou komplexní skalární funkcí

$$(10.4.1) \quad \Psi(r, t) = \Psi(r, t) \exp [i\Theta(r, t)].$$

Nyní, stejně jako v kapitole 6.4, se vyjádří volná energie soustavy F nebo hustota volné energie *ve tvaru rozvoje* podle tohoto *malého* parametru uspořádání Ψ . Odtud plyne okamžitě, že tato teorie bude platit v blízkosti $T \approx T_c$, kde je tento parametr malý a nikoli při $T \rightarrow 0$ K.

Tak můžeme napsat, bez magnetického pole, že

$$(10.4.2) \quad F = F_N + \alpha |\Psi|^2 + \beta |\Psi|^4 + \gamma |\nabla \Psi|^2,$$

kde F_N je volná energie normální fáze, γ a β jsou kladné koeficienty nezávislé na teplotě (pouze na hustotě tělesa) a $\alpha = \alpha_0 (T - T_c)$ je koeficient závislé lineárně na teplotě. V rovnici (10.4.2) nepíšeme argumenty (r, t) u Ψ . Hodnota $\alpha < 0$ pro $T < T_c$, $\alpha = 0$ při $T = T_c$ a $\alpha > 0$ při $T > T_c$. Koeficient $\gamma = \hbar^2/4m$ je vybrán tak, aby se paramagnetický proud vypočtený z (10.4.2) rovnal kvantově mechanickému výrazu $j_s = (e\hbar/m) |\Psi|^2 \nabla \Theta$.

Analýza rovnice (10.4.2) bez členu $\nabla \Psi$, tj. pro *homogenní supravodič*, byla provedena již v kapitole 6.4 a tak víme, že rovnovážná hodnota $|\Psi|$ při $T < T_c$ je dána minimalizací (10.4.2):

$$(10.4.3) \quad |\Psi|^2 = -\alpha/2\beta = \alpha_0 (T_c - T)/2\beta.$$

Jako příklad si uveďme výpočet rozdílu entropie v supravodivém stavu S_S a normálním stavu S_N při $T = T_c$ a rozdílu měrných tepel $\Delta C = (C_S - C_N)$, kde $C_{S,N}$ jsou měrná tepla obou fází, a to podle klasických vztahů

$$(10.4.4) \quad \begin{aligned} \Delta S &= (S_S - S_N) = d\Delta F(T)/dT, \\ \Delta C &= (C_S - C_N) = d(\Delta S T_c)/dT. \end{aligned}$$

Snadno dostaneme pro objem vzorku V výrazy

$$(10.4.5) \quad \Delta S = -2\alpha_0^2 V (T_c - T)/\beta,$$

$$(10.4.6) \quad \Delta C = +2\alpha_0^2 V T_c/\beta.$$

Okamžitě máme tedy vyjádřen skok měrného tepla ΔC při $T = T_c$, který jsme diskutovali již v kap. 10.2. Obdobně z rovnice (10.2.3) pro rozdíl volných energií

$$F_N(T) - F_S(T) = V \frac{\alpha_0^2}{\beta} (T_c - T)^2 = \frac{B_c^2(T)}{2\mu_0 \mu_r}$$

dostaneme lineární teplotní závislost B_c v blízkosti T_c

$$(10.4.7) \quad B_c \sim (T_c - T).$$

V případě přítomnosti magnetického pole můžeme výraz pro $F_S - F_N$ napsat stejně jako v (10.2.2), pokud zanedbáme člen s $\nabla \Psi$. Pokud je ovšem tento nehomogenní člen přítomen a chceme-li dostat transportní proudy, víme, že místo normální derivace musíme vzít obecnější kanonickou derivaci $D = -i\hbar \nabla - e^* \mathbf{A}$, čili $-i\hbar \nabla \Psi \rightarrow -i\hbar \nabla \Psi - e^* \mathbf{A} \Psi$, aby výraz byl *kalibračně invariantní*.

Aniž bychom prováděli tuto analýzu a variaci F podle \mathbf{A} , Ψ a Ψ^* na minimum, napíšeme si výsledek (v supravodiči $e^* = 2e$, $m^* = 2m$)

$$(10.4.8) \quad \frac{1}{4m} (-i\hbar \nabla - 2e\mathbf{A})^2 \Psi + \alpha \Psi + \beta |\Psi|^2 = 0,$$

$$(10.4.9) \quad \mathbf{j} = -\frac{ie\hbar}{2M} [\Psi^* \nabla \Psi - \Psi \nabla \Psi^*] - \frac{2e^2}{m} |\Psi|^2 \mathbf{A}$$

s hraniční podmínkou pro vakuum a dielektrikum (nikoli pro hranici supravodič-kov)

$$(10.4.10) \quad \mathbf{n}(-i\hbar \nabla \Psi - 2e\mathbf{A}) = 0,$$

kde \mathbf{n} je vektor kolmý k povrchu tělesa. I složka proudu kolmá na povrch je rovna nule, ale Ψ není rovno nule na hrani-

ci, protože se může měnit jen na vzdálenosti rovné koherenční délce $\xi(T)$.

Uvedme si několik poznámek k těmto G-L rovnicím.

1. Výraz $(-i\hbar\nabla - 2e\mathbf{A})$ v (10.4.8) je kalibračně invariantní hybnost částice.

2. Výraz j je nám také dobře znám z kvantové mechaniky jako výraz pro tok pravděpodobnosti. Vyjadřuje v podstatě oba příspěvky k proudu: paramagnetický a diamagnetický.

3. Fenomenologické teorie nemohly z principiálních důvodů určit koeficient u náboje e^* a hmotnost m^* . Proto v původních teoriích zůstávaly tyto koeficienty rovny jedné. Ale my už víme, že supravodivost bude spojena s vytvářením elektronových párů (Cooperových párů) s hodnotou $2e$ a $2m$. V napsaných rovnicích jsou již výrazy napsány s těmito koeficienty.

4. G-L rovnice (10.4.8–10) jsou *nelineární rovnice* pro Ψ a \mathbf{A} . Pro slabá pole je možné dostat analytická řešení a teorii bratří Londonů. G-L rovnice jsou obecnější a umožnily vysvětlit i *mezistav* u supravodičů I. typu a *smíšený stav* u supravodičů II. typu. Smíšený stav (fáze L. V. Šubnikova) – tj. proktnutí „tvrdého“ supravodiče při $B_{c2} > B > B_{c1}$ *soustavou vírových vláken* nesoucích kvanta magnetického toku předpověděl a spočítal vynikající Landaův žák A. A. Abrikosov.

5. Předpoklad, že $|\Psi|^2 = n_s/2$ znamená, že všechny supravodivé elektrony mohou být popsány jedinou makroskopickou funkcí. Tento fyzikální předpoklad je snad nejdůležitějším předpokladem teorie G-L. Neplatí pro normální elektrony, které musí „poslouchat“ Fermiho-Diracovu statistiku a Pauliho vylučovací princip. Je tady G-L teorie a Londonova vize „tuhé“ vlnové funkce ve sporu s kvantovou mechanikou? Teprve mikroskopická teorie nám ukázala, že párování elektronů (Cooperův jev) nám elektrony (fermiony) převede na bosony a odstraní tak velmi elegantně všechny námitky.

6. Protože sovětský fyzik L. P. Gorkov v roce 1959 v řadě prací dokázal, že G-L rovnice se dají odvodit z tehdy již existující mikroskopické teorie a protože A. A. Abrikosov velkolepým způsobem zkonstruoval teorii supravodičů druhého ty-

pu, bývá tato teorie supravodivosti nazývána teorií GLAG (V. L. Ginzburg, L. D. Landau, A. A. Abrikosov a L. P. Gorkov).

7. Fázi supravodiče bez topologických struktur (vírových vláken) budeme nazývat meissnerovskou fází. Mezistav u supravodičů I. typu byl studován sovětskými fyziky A. I. Šalnikovem a A. G. Meškovským v roce 1947 a později J. V. Šarvínem. Fáze supravodiče s topologickými strukturami u supravodičů II. druhu se nazývá smíšený stav nebo Šubnikovova fáze.

8. Vlnová funkce Ψ se nazývá makroskopickou, protože je určena makroskopickou veličinou n_s . Nepopisuje již jednotlivé elektrony v kovu, ale jejich *uspořádání na dlouhou vzdálenost*. Variace v prostoru a čase tohoto parametru uspořádání se mohou projevit jen v objemu minimálně srovnatelném s koherenční délkou $\xi(T) = (\hbar/2m|\alpha|)^{1/2}$, která je důležitým parametrem teorie.

Supravodiče I. a II. typu můžeme ještě rozlišit podle velikosti poměru dvou základních délek charakterizujících supravodič: hloubky vniku magnetického pole $\lambda_L(T)$ (Londonovy hloubky vniku) a koherenční délky $\xi(T)$, tj. minimální délky, na níž se mohou měnit supravodivé vlastnosti. Jejich poměr se také nazývá parametrem či *koeficientem Ginzburgovým-Landaovým* a označuje se jako $\kappa = \lambda_L(T)/\xi(T)$. Supravodiče I. typu mají $\kappa < 1/(2)^{1/2}$ a II. typu $\kappa > 1/(2)^{1/2}$.

10.5 Kvantování magnetického toku aneb všudypřítomná topologie

„Pouze čas – nejbližší roky či desetiletí – ukáže, jestli se nepřemění celá fundamentální fyzika v geometrii.“

J. B. Zeldovič, L. P. Griščuk

Že by náš známý a spojitý magnetický tok Φ , který mohl v Maxwellově elektrodynamice nabývat libovolných hodnot a jehož změna v čase vytváří, podle M. Faradaye, napětí

$V = -d\Phi/dt$ v různých elektrických obvodech, mohl mít kvantovanou hodnotu? Bude nutné doplnit klasickou elektrodynamiku o kvantové jevy elektromagnetických potenciálů v topologicky netriviálních prostorech?

Vezměme si jako příklad dvojnásobně souvislou oblast – prstenec či dutý válec. Nechť tento masivní prstenec je v supravodivém stavu a jeho rozměry jsou takové, že stínící i transportní proudy tečou jen v tenké vrstvě (zhruba v hloubce λ_L) po povrchu prstence. Víme již, že v supravodiči je hybnost supravodivých párů dána výrazem ($|\Psi|^2 = \rho = n_s/2$)

$$(10.5.1) \quad 2m\mathbf{v}_s = \hbar\nabla\Theta - 2e\mathbf{A}.$$

Protože $\mathbf{j} = n_s e \mathbf{v}_s = \rho 2e \mathbf{v}_s$, je možné napsat

$$(10.5.2) \quad \mathbf{j} = n_s e \hbar \nabla \Theta / 2m - e n_s 2e \mathbf{A} / 2m = n_s e (\hbar \nabla \Theta - 2e \mathbf{A}) / 2m.$$

Nyní si zvolme v prstenci nějakou uzavřenou dráhu Γ obepínající díru v prstenci, jíž proniká magnetický tok $\Phi = \mathbf{B} \cdot \mathbf{S}$, kde \mathbf{B} je indukce v díře a \mathbf{S} je plocha vymezená křivkou v prstenci.

Z rovnice (10.5.2) plyne

$$(10.5.3) \quad \hbar \nabla \Theta = \left(\frac{2m}{n_s e} \right) \mathbf{j} + 2e \mathbf{A}.$$

Pak dráhový integrál tohoto kanonického momentu po uzavřené křivce Γ bude

$$(10.5.4) \quad \hbar \oint_{\Gamma} \nabla \Theta d\mathbf{l} = \hbar \oint_{\Gamma} d\Theta = \oint_{\Gamma} \frac{2m}{n_s e} \mathbf{j} d\mathbf{l} + 2e \oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{l} = nh,$$

$$\text{anebo } \Psi_c = \frac{\hbar}{2e} \oint_{\Gamma} \nabla \Theta d\mathbf{l} = nh/2e = n\Phi_0, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Výraz (10.5.4) budeme nazývat *fluxoid*.

Vidíme, že dráhový integrál kanonické hybnosti je kvantován a připomíná nám známý vztah Bohrov-Sommerfeldův pro kvantování pohybu na atomových oběžných drahách. Že Ψ_c je v čase konstantní, je možné odvodit již z rovnic bratří

Londonů (kap. 10.3), ale že tato konstanta bude kvantována (úměrná \hbar !), poprvé vytušil, a v poznámce pod čarou ve své knize uvedl, v roce 1950 F. London.

Poznámky:

1. Výraz $\oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{l}$ upravíme podle Stokesova teorému známého z vektorové analýzy na

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{A} d\mathbf{l} = \oint_S \mathbf{B} d\mathbf{S} = \Phi,$$

kde \oint_S je plošný integrál přes plochu S . Pak

$$(10.5.5) \quad \Psi_c \frac{2m}{n_s e^2} \oint_{\Gamma} \mathbf{j} d\mathbf{l} + \Phi = n\Phi_0.$$

2. Výraz $\Phi_0 = h/2e$ je tzv. *fluxon* a je to ono kvantum magnetického toku, které kvantuje *fluxoid* Ψ_c . Čtenář nechť si povšimne toho, že toto kvantum je poměr základních fyzikálních konstant h a e a že ve jmenovateli je $2e$, a nikoli e .

3. Je-li dráha Γ vedena hluboko v supravodiči, pak v této hloubce netečou proudy a ($\mathbf{B} \equiv 0$, $\mathbf{E} \equiv 0$), které jsou vlastně omezené na hloubku λ_L $\mathbf{j} \equiv 0$. Pak ovšem můžeme fluxoid zjednodušit a psát pouze

$$(10.5.6) \quad \Phi = n\Phi_0.$$

V tomto případě mluvíme o *kvantování magnetického toku*. Nesmíme ovšem zapomínat, že přesně se kvantuje fluxoid.

4. Při obězích uzavřené křivky Γ se sice mění fáze Θ o $2\pi n$, ale vlnová funkce Ψ po oběhu musí zůstat *jednoznačná*:

$$(10.5.7) \quad \Psi' = \Psi \exp(i2\pi n) = \Psi \exp(i2e\Phi/\hbar),$$

protože $e^{i2\pi n} = 1$.

Při oběhu kolem „magnetického vírového vlákna“ se mění fáze vlnové funkce. S tímto faktem jsme se již setkali v kapitole o Aharonově-Bohmově jevu. Z kvantové mechaniky víme, že fyzikálně pozorovatelné jevy jsou dány pouze bilineární kombinací funkce Ψ a Ψ^* , tj. hodnotami $\Psi\Psi^* = |\Psi|^2$. Ale

nyní vidíme, že i samotná vlnová funkce určující *neklasické vlnové chování* bude mít v netriviální topologii (v supravodivé oblasti s děrami) pozorovatelné důsledky: kvantování fluxoidu (či nepřesně magnetického toku) ekvivalentní A-B jevu.

5. Podmínka kvantování magnetického toku je shodná s podmínkou celistvého počtu de Broglieových vln na dráze kolem „díry“.

6. Kvantování toku je za speciálních podmínek, o nichž jsme již mluvili v kap. 8.2, možné i v normálních prstencích. Toto kvantování má periodu (h/e) , ale i hodnotu $(h/2e)$.

7. Kvantování fluxoidu, ne toku, nezávisí na křivce Γ , pokud ji můžeme spojitě deformovat v objemu supravodiče na jinou Γ' . Víme již, že spojitě transformace (homotopie) nemění topologii. V případě magnetického toku to ovšem neplatí, protože kdybychom křivku Γ deformovali tak, že by ležela v hloubce λ_L , kde existuje magnetické pole a proudy, pak by $\Phi \neq n\Phi_0$ a museli bychom vzít v úvahu i integrál těchto proudů přes křivku Γ , tj. fluxoid.

8. Kvantování magnetického toku bylo v supravodičích experimentálně potvrzeno nezávisle dvěma skupinami – americkými fyziky B. S. Deaverem a W. M. Fairbankem a německými fyziky R. Dollem a M. Nábauerem^{2,52,45}.

A tak volné elektrony v kovu a v supravodiči nás nestačí udivovat:

- párují se do dvojic při $T < T_c$,
- vytvářejí korelovaný kondenzát popsáný jedinou vlnovou funkcí $\Psi = |\Psi| \exp(i\Theta)$,
- kvantují magnetický tok, či přesněji fluxoid,
- upřesňují nám role EM potenciálů či jejich integrálů po uzavřené křivce,
- kvantují magnetický tok i v normálních kovech, a to ve Φ_0 i $2\Phi_0$.

10.6 Konečně mikroskopická teorie supravodivosti – elektrony se přitahují

„Při úsměvu dítěte se rozšíří také úsměv na tváři dospělého. Tomu se říká interakce.“

J. Pondělíčková-Mašlová

V předcházejících kapitolách jsme nahromadili hodně fyzikálních představ o supravodivosti. Omezili jsme se jen na ty nejpodstatnější věci a spoustu podrobností jsme museli vynechat. Ale těmto otázkám jsou věnovány např. knihy^{2,32,37,38,42}.

Zbývá nám, zase jen z hlediska fyzikální intuice, objasnit *mikroskopickou teorii supravodivosti*, kterou v roce 1957 podali tři američtí fyzikové J. Bardeen, L. N. Cooper a J. R. Schrieffer (v dalším budeme tuto teorii nazývat teorií BCS). Všichni tři dostali v roce 1972 Nobelovu cenu za fyziku³⁵.

Z hlediska historie je snad třeba říci, že k základním fyzikálním představám přispěli i další pracovníci, i když byli později „zapomenuti“. Tak např. experimentální chemik R. A. Ogg⁷⁸ již v roce 1946 při svém studiu velmi zředěných roztoků alkalických prvků v kapalném čpavku tvrdil, že pozoruje trvalé proudy při $T = 180^\circ\text{C}$. Navrhl k vysvětlení existenci elektronových párů – tzv. dielektrony – a jejich Boseovu-Einsteinovu kondenzaci. J. M. Blatt⁷⁸ uvádí vtipnou veršovánku amerického fyzika ruského původu G. Gamova (známého i předpovědí reliktního záření), kterou lze přeložit takto:

“In Ogg’s theory it was his
intend
That current keep flowing,
once sent
So to save himself trouble
He put them in double

And instead of stopping, it
went.”

„Ogg ve své teorii chtěl, a to
byl jeho trumf či flek
by jednou zavedený proud
tu stále tek’
tak, aby ušetřil si trable
dal po dvou elektrony k so-
bě
a proud místo aby stál, tak
tek’.“

Podobnými idejemi se zabývala i skupina australských teoretiků J. M. Blatt, S. T. Butler a M. R. Shafroth. Ten poslední byl v roce 1955 v USA v Princetonu a často diskutoval o tomto problému s L. N. Cooperem⁷⁸.

V roce 1950 byl americkými fyziky objeven tzv. izotopový jev. Studovali různé izotopy rtuti a zjistili, že když vezmou izotopy s hmotností $M = 199,5$ a $203,4$ atomových jednotek, změní se kritická teplota T_c z $4,184$ K na $4,140$ K. Podařilo se jim určit závislost T_c na hmotnosti M daného izotopu

$$T_c = \text{konst. } M^{-1/2}.$$

Tento zdánlivě obyčejný výsledek však hovoří o tom, že hmotnost atomů v mřížce ovlivňuje T_c . Supravodivé vlastnosti musí tedy záviset na mřížce, i když samotná koherence se projevuje v elektronové soustavě. Dávno bylo známo, že kmitočet mřížkových oscilací $\sim M^{1/2}$. Kritická teplota T_c tedy závisí na interakci s mřížkou a s jejími kmity.

A pak stále tu byl onen fakt, že do supravodivého stavu přecházely ochotně všechny špatné vodiče, zatímco dobře vodivé kovy (Cu, Ag, Au) nejevily nejmenší „chuť“ přejít do supravodivého stavu. Tedy interakce elektronů s mřížkou a jejími kvantovanými zvukovými vlnami, tzv. fonony, měla být tím prvním klíčem. Jednou je tato interakce odpovědná (nebo alespoň přispívá) za odporový stav a podruhé za nekonečnou vodivost. Zdánlivě protichůdné věci. Ale dialektická syntéza už byla blízko. Chtělo to přitažlivou interakci mezi elektrony, mezi nimiž dosud dominovala odpudivá coulombovská interakce.

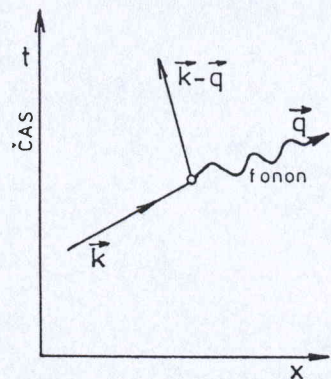
Anglický fyzik H. Fröhlich přichází první s představou *přitažlivé interakce mezi elektrony* a asi za rok po něm i J. Bardeen. Krystalovou mřížkou složenou z kladných iontů si můžeme představit jako polarizovatelné prostředí. Elektrony pohybující se v této mříži, anebo nábojová fluktuace elektronové hustoty, mohou lokálně polarizovat mřížku tak, že přitáhnou k sobě malou oblast kladných iontů. Tyto ionty pak, díky své malé pohyblivosti, i v době, kdy polarizující oblak elektronů je už kdesi jinde, vytvářejí v daném místě jakýsi

přebytek kladných nábojů (lokální narušení neutrálnosti krystalu). Další elektron či skupina elektronů pak může být k této kladné oblasti přitahována. Jde o složitý dynamický proces, který je možné také znázornit pomocí dvou kuliček na deformovatelné matraci, anebo spojit s představou jedoucí loďky, do jejíž „brázdy“ je vtažena jiná loďka. Konečně každý, kdo ležel na široké měkké matraci, ví, že se k němu další partner „přiblíží“ nejen z důvodů, řekněme, mezilidských vztahů, ale i z čistě fyzikálních důvodů snadné „polarizovatelnosti“ matrace hmotností partnera. Je pak mnoho těch, kteří si „elán“ partnera vysvětlují nefyzikálně milostnou nedolatelností svého šarmu.

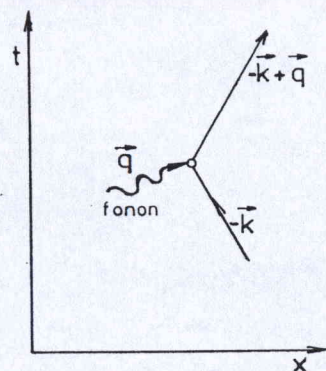
Z KM již víme, jak si takovou interakci znázornit. Každou interakci si představujeme jako výměnu virtuálních bosonů, existujících po dobu Δt , která je slučitelná s jejich energií ΔE a principem neurčitosti $\Delta E \Delta t > \hbar$. V našem případě těmito bosony budou fonony. Fonony jsou kolektivní excitace krystalové mřížky. V mřížce mají určité spektrální rozdělení a svůj maximální kmitočet, daný vztahem $\hbar \nu_{\max} = k_B \Theta_D$, kde Θ_D je Debyova teplota $10\text{--}10^3$ K a $\nu_{\max} \approx 10^{13}$ Hz. Vyšší kmitočty již nemají smysl, protože by jejich vlnová délka byla menší než vzdálenost mezi atomy. Elektrony si tedy mohou vyměňovat s mřížkou fonony od kmitočtu 0 do ν_{\max} . Toto rozdělení kmitočtů budou mít i *virtuální fonony*, které se v této přitažlivé interakci objevují jen na velmi krátkou dobu.

Pro znázornění této interakce elektronů s mřížkou si obvykle kreslíme tzv. Feynmanovy diagramy. Představme si, že elektron s vlnovým vektorem k vyzáří během své dráhy fonon s vlnovým vektorem q a změní svůj vektor na $k - q$. Při tomto procesu musí platit zákon zachování hybnosti i energie. Na obr. 10.6.1a,b jsou znázorněny procesy emise a absorpce fononu. Záměrně jsme v případě absorpce fononu q na obr. 10.6.1b uvažovali, že bude právě absorbován elektron s vlnovým vektorem $-k$.

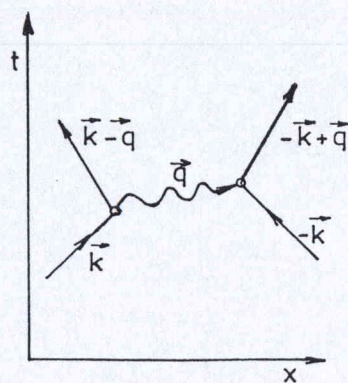
Musíme si tedy zvyknout na to, že elektrony se mohou také přitahovat – obr. 10.6.1c – a nejen odpuzovat, jak jsme se to učili ve škole. Odpuzování platí jistě ve vakuu, kde fonony



a) Emise fononu



b) Absorbce fononu



c) Přitažlivá interakce v supravodiči

Obr. 10.6.1. Feynmanovy diagramy pro emisi (a), absorpci (b) a výměnu fononu q mezi dvěma elektrony (c) s vlnovými vektory $(\mathbf{k}, -\mathbf{k})$. Převládne-li tato přitažlivá interakce (c) nad coulombovskou odpudivou interakcí v kovové mřížce, vznikne supravodivý stav.

nejsou, ale nikoli již v krystalové mřížce kovu. V mřížce, díky prostředí kladných iontů, je coulombovské odpuzování „stíněno“ – je menší než ve vakuu. Tak se může stát, že fononové přitahování při nízkých teplotách (pod $T < T_c$) převáží odpuzování a tím bude určeno chování elektronů.

|| Pár či dvojice elektronů \mathbf{k} a $-\mathbf{k}$ tvoří základ supravodivých dvojic, kterým budeme říkat *Cooperovy páry*, podle amerického fyzika L. Coopera. Ale to se již blíží rok 1956.

10.7 Idea párování

„Zvládnutí komplexnosti mnohočásticového systému je především intelektuální záležitostí, a teprve pak výpočetní. Spočívá v nalezení a rozvoji vhodných intermedieálních pojmů, které jsou vhodně aplikovány na řešený problém.“

I když R. Ogg a M. R. Shafroth uvažovali o „dielektronech“, nikdy jejich představy nevedly k vysvětlení celého jevu. V roce 1956 analyzoval L. N. Cooper dva elektrony v kovu, které měly energii o něco větší, než je energie Fermiho meze E_F . Všechny jedoelektronové stavy s energií $E \leq E_F$ jsou obsazeny (při $T = 0$ K) – mluvíme o zaplněném Fermiho moři. Tato skutečnost je důležitá, protože rozptyl elektronů může být uskutečněn jen tehdy, když počáteční stav je obsazen a konečný stav je prázdný – nezapomínejme, že jde o fermiony. Cooper ukázal, že tyto dva elektrony nad Fermiho mořem mohou vytvořit pár, který bude mít energii připadající na elektron menší než E_F . Tento pár, jehož vazebná energie je příčinou poklesu jeho energie, má maximální stabilitu, jestliže vlnové vektory obou elektronů jsou antiparalelní ($\mathbf{k}, -\mathbf{k}$) a jejich spiny mají hodnoty \mathbf{s} a $-\mathbf{s}$ (\uparrow a \downarrow). Pár má relativní hybnost $(\mathbf{k}) + (-\mathbf{k}) = 0$ – říkáme, že orbitální singletový stav má hodnotu orbitálního kvantového čísla $L = 0$ a jeho spinový stav je také singlet $S = 1/2 - 1/2 = 0$. Uvidíme později, že atomy supratekutého helia ^3He se párují do stavů s hodnotami $L = 1$ a $S = 1$ (orbitální a spinový triplet).

Tento pár je nejuvhodnější párovat se stavy s \mathbf{k} a $-\mathbf{k}$, protože tato varianta zajišťuje maximální počet rozptylů, při nichž zůstává $\mathbf{K} = 0$, kde $\mathbf{K} = (\mathbf{k}) + (-\mathbf{k}) = 0$. Protože každý akt výměny virtuálního fononu představuje přitahování, je tento stav nejvíce stabilní. Takové rozptyly, při nichž se výsledné \mathbf{K} zachovává, nazýváme koherentní. Pokud je kondenzát v klidu, je $\mathbf{K} = 0$. V proudovém stavu je ovšem již $\mathbf{K} \neq 0$.

Může vzniknout otázka, jak veliký je takový Cooperův pár? Jde přece o fermiony, a ty jsou nerady blízko sebe. Protože bude tento pár reprezentován vlnovým balíkem, budeme se snažit určit prostorové „rozmazání“ tohoto vlnového balíku ze vztahu neurčitosti $\Delta x \Delta p > \hbar$, kde $\Delta x = (x_1 - x_2)$ a $x_{1,2}$ jsou polohy obou elektronů. Tento vztah můžeme napsat také jako $\Delta x \Delta k \geq 1$, kde Δk je neurčitost ve vlnovém vektoru $\mathbf{k} = m\mathbf{v}/\hbar$. Z poměru $\Delta k/k_F = \Delta E/E_F$ plyne $\Delta k = k_F(\Delta E/E_F) = k_F(\Delta E)/(mv_F^2/2) = (2mv_F\Delta E)/(\hbar mv_F^2) = (2\Delta E)/\hbar v_F$ a $\Delta x \geq \hbar v_F/2\Delta E$. Vezmeme-li neurčitost v energii při $T = T_c \approx 4,2$ K rovnou právě $k_B T_c$, pak při rychlosti elektronů na Fermiho ploše $v_F \approx 10^6$ ms⁻¹ dostaneme hodnotu $\Delta x \approx \xi_0 \approx 10^{-6}$ m (viz paragraf 10.3).

Cooperův pár je tedy „obrovský“ a jeho rozměr má řádově stejnou hodnotu jako nám už známá koherentní délka supravodiče $\xi(T)$. Tuto délku můžeme nyní volně interpretovat jako rozměr Cooperova páru.

Vazebná energie takového páru je podle Coopera dána výrazem (pro $\lambda = V_{ef}N(0) \ll 1$)

$$(10.7.1) \quad E_{CP} = \hbar\omega_D \exp(-2/V_{ef}N(0)),$$

kde ω_D je Debyeův maximální kmitočet mřížkových vibrací, $N(0)$ je hustota elektronových stavů na Fermiho mezi E_F a V_{ef} je interakční dvoučásticový potenciál fononové interakce mezi elektrony a mřížkou. Cooper předpokládal, že V_{ef} je záporný a konstantní pro $0 < \omega < \omega_D$. Pro $\omega > \omega_D$ je roven nule. Energie vázaného stavu dvou elektronů je tedy nižší než energie $2E_F$ právě o vazebnou energii danou rovnicí (10.7.1).

Výraz (10.7.1) zahrnuje v sobě všechny potřebné fyzikální ingredience:

- mřížku a fonony (v hodnotě $\hbar\omega_D$),
- elektronové moře (v hustotě elektronových stavů u Fermiho hladiny $N(0)$),
- interakci elektron-mřížka (v hodnotě V_{ef} uvnitř tenké energetické vrstvy $\hbar\omega_D$),
- tepelnou energii $k_B T_c$.

Výraz (10.7.1) se nedá rozvinout v řadu, protože každý její člen v rozvoji exponenciály bude při $N(0)V_{ef} \rightarrow 0$ nekonečný a řada by divergovala. Taková rovnice se *nedá získat z teorie poruch* (!), kdy se obvykle omezíme na několik prvních členů a ostatní, vzhledem k jejich klesající hodnotě, zanedbáme. Odtud také plyne, že supravodivost je skutečným fázovým přechodem a nedá se „vypočítat“ poruchovým počtem.

Přesto však není ještě Cooperův pár modelem supravodivosti a *základní stav supravodivosti bude až koherentní superpozicí těchto párů*.

Vázaný stav elektronového páru může vznikat při *libovolně* malé hodnotě výrazu $\lambda = V_{ef}N(0)$ a stačí jen snížit energii $k_B T$ natolik, aby tento vázaný stav nebyl rozrušen. Fermiho moře v kovech při nízkých teplotách je tedy *nestabilní* vzhledem k tvorbě Cooperových párů.

Protože pro většinu supravodičů je $\lambda < 0,3$, mluvíme o tzv. *slabé vazbě*, a při $\lambda > 0,3$ o *silné vazbě*.

10.8 Překrytí párů a základní stav supravodivosti

„Každý si musí zničit život svým vlastním způsobem.“

J. Kurzweil

Cooperův jev byl východiskem pro teorii, kterou dnes nazýváme teorií BCS (viz kapitolu 10.7). Podstatou Cooperova jevu, jak jsme ukázali výše, je, že Fermiho moře je nestabilní vzhledem k tvorbě Cooperových párů. Rozměr Cooperova páru je řádově 10^{-7} až 10^{-6} m, což je vzdálenost mnohem větší než střední vzdálenost mezi elektrony. V objemu jednoho

Cooperova páru leží těžiště dalších 10^6 až 10^7 párů. Páry jsou tedy v prostoru silně překryty. Vlnová funkce takto překrytých párů bude, podle F. Londona, „tuhá“ a také „odolná“ vůči vnějším polím, poruchám i vnitřním fluktuacím.

Cooperův pár je orbitální i spinový singlet ($L = 0, S = 0$), tedy boson (přesněji pseudoboson, ale nebudeme tuto otázku diskutovat). Může tedy dojít za určitých okolností k Boseově-Einsteinově kondenzaci těchto párů v prostoru hybností. Při takové kondenzaci bude v základním stavu makroskopický počet párů, který budeme nazývat kondenzátem. Vlnová funkce takového kondenzátu může být napsána jako komplexní skalár

$$(10.8.1) \quad \Psi(\mathbf{r}, t) = |\Psi(\mathbf{r}, t)| \exp[i\Theta(\mathbf{r}, t)],$$

kde $|\Psi|^2 = \rho = n_s/2$ a ρ je hustota párů v kondenzátu.

V tomto kondenzátu je ovšem počet párů N neurčitý vzhledem ke střední hodnotě $\langle N \rangle$. Počet párů známe jen s neurčitostí $\Delta N / \langle N \rangle \sim 1 / \langle N \rangle^{1/2}$. A protože existuje relace neurčitosti mezi ΔN a neurčitostí fáze $\Delta\Theta$

$$(10.8.2) \quad \Delta N \Delta\Theta \approx 1 \quad (\text{pro } N \gg 1),$$

pak, bude-li ΔN veliké (v kondenzátu vznikají a zanikají páry), bude naopak $\Delta\Theta$ malé a soustava bude mít určitou fázi Θ . A to fázi makroskopickou, spojenou s kondenzátem a s jeho případným těžišťovým pohybem při vedení proudu. Právě takovou vlnovou funkci kondenzátu navrhl J. R. Schrieffer, jako vlnovou funkci základního stavu supravodivého stavu. Tuto funkci budeme v dalším značit jako funkci $|BCS\rangle$:

$$(10.8.3) \quad |BCS\rangle = \prod_k (u_k + v_k \exp(i\Theta) b_k^+) |0\rangle,$$

kde symbol \prod_k je symbol pro součin přes všechna \mathbf{k} , u_k a v_k jsou koeficienty splňující normalizační podmínku $|u_k|^2 + |v_k|^2 = 1$. Výraz $|u_k|^2$ určuje pravděpodobnost, že párový stav \mathbf{k} , tj. $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$, není obsazen a výraz $|v_k|^2$ určuje pravděpodobnost, že stav \mathbf{k} , tj. stav $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$ je obsazen. Stav $|0\rangle$ je základní stav bez párů (vakuum párů) a operátor

b_k^+ je operátor zrodu páru. Působením operátoru b_k^+ vznikne ve vakuu $|0\rangle$ Cooperův pár ve stavu $(\mathbf{k}\uparrow, -\mathbf{k}\downarrow)$. Nezapomeňme, že z důvodu fermionové povahy elektronů je dvojnásobná aplikace tohoto operátoru rovna nule $(b_k^+)^2 |0\rangle = 0$.

Vlnovou funkci (10.8.3) pro základní stav supravodiče můžeme přepsat do exponenciálního tvaru

$$(10.8.4) \quad |BCS\rangle = \prod_k (u_k \exp(S^+) |0\rangle,$$

$$\text{kde } S^+ = \sum_k v_k b_k^+ / u_k.$$

Z obou tvarů vlnové funkce vidíme, že působením operátorů b_k^+ či S^+ na vakuum $|0\rangle$ dostáváme nakonec superpozici všech možných párových stavů. V dalším zjednodušení se dá základní stav napsat ještě kompaktněji, jako

$$(10.8.5) \quad |BCS\rangle = \sum_N \lambda_N |N\rangle,$$

kde $|N\rangle$ je vlnová funkce s určitým počtem párů rovným hodnotě N a λ_N určuje pravděpodobnost obsazení stavu s N páry.

Stav $|BCS\rangle$ reprezentuje klasickou elektromagnetickou vlnu s určitou fází. Analogie s laserem je velice užitečná.

Všechny makroskopické kondenzáty (^3He , ^4He , koherentní záření, laser, neutronová hvězda, těžká jádra apod.) jsou popsány podobnými vlnovými funkcemi, jako je vlnová funkce $|BCS\rangle$.

Nejčastěji citovaným výsledkem teorie BCS je ovšem neporuchový výsledek pro kritickou teplotu (pro slabou vazbu, tj. $\lambda \ll 1$)

$$(10.8.6) \quad T_c \approx \Theta_D \exp(-1/\lambda), \text{ nebo} \\ T_c \approx [1,14 \hbar \omega_D \exp(-1/\lambda)] / k_B,$$

který jsme diskutovali v kapitole 10.7 a kde $\lambda = N(0)V_{\text{ef}}$.

Tak tedy příspěvky všech tří autorů této mikroskopické teorie – J. Bardeena (přitahování elektronů), L. N. Coopera (idea párování elektronů) a J. R. Schrieffera (idea překrytí párů a vlnové funkce s neurčitým počtem párů), pokud je můžeme takto vyčlenit – spolu s celou plejádou experimentálních a teoretických fyziků vedly nakonec k objasnění toho-

to skoro padesátiletého fyzikálního problému. Vidíme také, že klasická fyzika neměla žádnou šanci tento jev supravodivosti vysvětlit. Teorie BCS nám vysvětlila okamžitě celou řadu experimentálních závislostí a jevů a dala nám konečně nahlédnout pod povrch fenomenologických teorií. Její úspěch byl obrovský a tak není divu, že autoři byli odměněni Nobelovou cenou a že jejich teorie se stala základem pro další teorie ve fyzice pevné fáze, v jaderné fyzice, v teorii elementárních částic, v astronomii a v kosmologii.

Prakticky jen s malým zpožděním publikoval sovětský fyzik N. N. Bogoljubov mikroskopickou teorii supravodivosti založenou na zcela jiném přístupu. Jeho základní stav je zcela ekvivalentní stavu $|BCS\rangle$ (pro stejná u_k a v_k). Základní stav Bogoljubovův je stav představující *vakuum kvazičástic* a je jen historickou nespravedlností, že Bogoljubov nedostal také Nobelovu cenu.

Základní stav supravodiče je stav, v němž je střední hodnota celkové energie nejmenší. BCS předpokládali, že interakce $V_{kk'}$ mezi elektrony je přitažlivá, když vyměňovaná energie $\hbar\omega$ mezi nimi je menší než $\hbar\omega_D$. Základní stav supravodiče je oddělen od Fermiho energie *zakázaným pásem energií čili energetickou mezerou*

$$(10.8.7) \quad \Delta_k = - \sum_{k'} V_{kk'} u_{k'} v_{k'}$$

anebo, po provedení všech operací,

$$(10.8.8) \quad \Delta = 2\hbar\omega_D \exp(-1/\lambda),$$

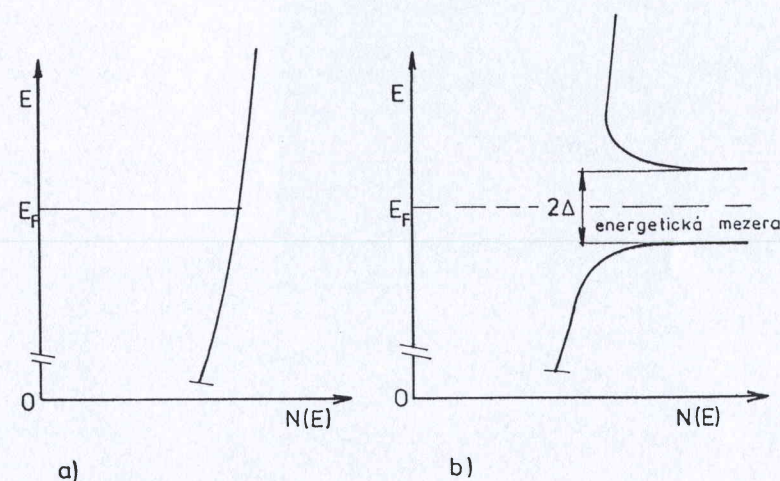
pro aproximaci izotropního průměrného potenciálu $\langle V_{kk'} \rangle = V_{ef}$ a $\lambda \ll 1$. Od prvního vzbuzeného stavu je tedy základní stav oddělen energií $2\Delta(T=0)$, protože na rozbití Cooperova páru je zapotřebí právě tato energie. Srovnáme-li $2\Delta(0)$ s energií $k_B T_c$, vidíme, že teorie BCS – teorie slabé vazby s $\lambda \ll 1$ – dává důležitý výsledek

$$(10.8.9) \quad 2\Delta(0)/k_B T_c \approx 3,5.$$

Experimentálně byla tato hodnota v průměru ověřena, ale existují hodnoty menší i větší než tento poměr (např. pro Hg resp. Pb je tento poměr 4,6 resp. 4,29 – 4,38, pro Cd a Zn byla nalezena hodnota 3,2).

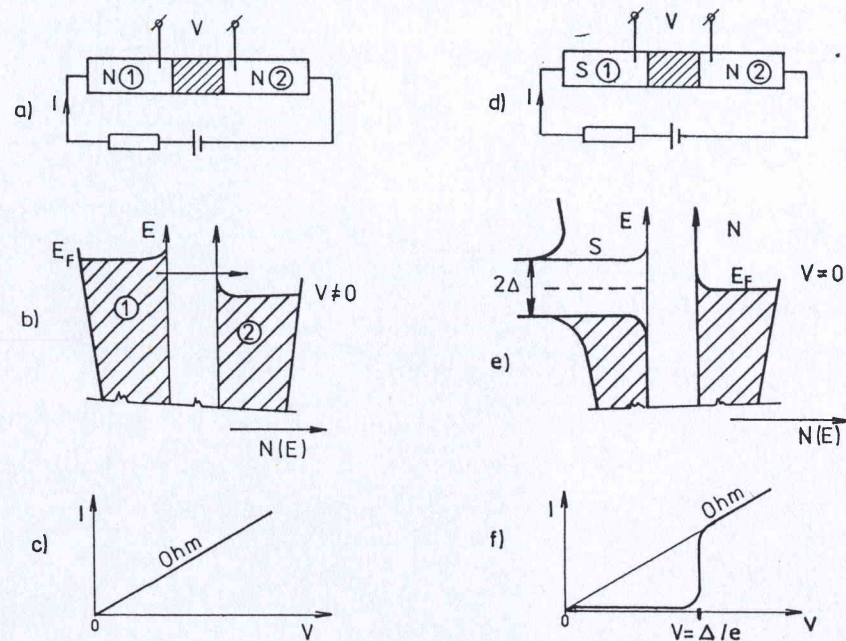
Na obr. 10.8.1 vidíme závislost energie na hustotě jednočasticových stavů pro normální kov (a) při $T = 0$ K a pro supravodič (b). Nejkrásnější důkaz o existenci této *energetické mezery* a ověření teorie BCS podal norský fyzik, pracující v USA, I. Giaever (čti giejvr), který se již delší dobu zabýval tunelováním normálních elektronů mezi dvěma normálními kovy oddělenými tenkou izolační vrstvou – viz obr. 10.8.2.

V případě, že zvyšujeme napětí na struktuře N-I-N (normální kov–izolátor (o tloušťce ≈ 5 nm) – normální kov), mohou normální elektrony snadno tunelovat z jedné strany izolační bariéry na druhou – obr. 10.8.2a,b,c. V případě, že jeden z kovů bude supravodič s typickou energetickou mezerou 2Δ , pak mohou elektrony tunelovat, až když je napětí V na struktuře S-I-N (supravodič–izolátor–normální kov) $V = \Delta/e$. Na



Obr. 10.8.1. Závislost energie E elektronů na hustotě jednočasticových stavů $N(E)$ u normálního kovu (a) a u supravodiče (b), kde se ve spektru objevuje energetická mezera $2\Delta(T)$ kolem energie Fermiho E_F . Energetická mezera u „klasických“ supravodičů je řádově několik meV, zatímco energie E_F je několik eV ($2\Delta(0) = 3,52 k_B T_c$ v teorii BCS).

voltampérové charakteristice dojde při tomto napětí ke kumulativnímu vzrůstu tunelovacího proudu — viz obr. 10.8.2 d,e,f.



Obr. 10.8.2. Voltampérové charakteristiky (c, f) pro tenkou tunelovou bariéru (blízko absolutní nuly) mezi dvěma normálními kovy (a, b) při napětí $V \neq 0$ a mezi normálním kovem a supravodičem (d, e). V případě a) je proud lineárních funkcí napětí V . Při $V = \Delta/e$ dojde k náhlému vzrůstu proudu I ve struktuře d). Na obr. b) jsou schematicky znázorněny závislosti energie E na hustotě stavů $N(E)$ pro dva normální kovy (pro $V \neq 0$) a na obr. e) pro supravodič (S) normální kov (N).

Čtenář sám si může promyslet např. situaci ve struktuře S-I-S, kdy dojde k tomuto vzrůstu proudu až při napětí $V = 2\Delta/e$.

Dostáváme tak *silně nelineární voltampérovou charakteristiku*, kterou můžeme využít v celé řadě aplikací především pro detekci elektromagnetického záření.

To bylo velice krásným a přesvědčivým důkazem o existenci energetické mezery. Tunelovací struktury slouží dodnes ke

studiu různých typů supravodičů, jejich energetické mezery, její závislosti na teplotě, k realizaci supravodivých bolometrů, detektorů atd. Není divu, že za tuto práci dostal v roce 1973 I. Giaever Nobelovu cenu.

Když je ovšem dielektrická bariéra mezi supravodiči mnohem menší než 5 nm, řekněme kolem 2 nm, pak již vlnová funkce supravodivého kondenzátu „zasahuje“ přes izolační bariéru do druhého supravodiče a *bude nenulová pravděpodobnost tunelování i Cooperových párů*. Ale to již bude tzv. stejnosměrný Josephsonův jev a další Nobelova cena za fyziku pro B. Josephsona, rovněž v roce 1973, který takový jev tunelování párů předpověděl.

Čtenář bude jistě se mnou souhlasit, že výraz pro kritickou teplotu v teorii BCS

$$(10.8.9) \quad T_c \approx (\hbar\omega_D/k_B) \exp(-1/N(0)V_{ef})$$

patří k těm matematickým či fyzikálním vztahům, které jsou krásné. Už jsme diskutovali, že v sobě slučuje všechno, co představuje základ mikroskopické teorie supravodivosti – mřížku (ω_D), elektronový systém ($N(0)$ – hustota stavů), elektron-fononovou interakci (V_{ef}), tepelnou energii ($k_B T_c$) i neporuchovost fázového přechodu $\exp(-1/NV)$. Tento výraz patří směle k těm krásným kompaktním obecným rovnicím, jako je Einsteinův vztah $E = mc^2$, Planckův vztah $h\nu$, de Broglieův vztah $\lambda_B = h/p$, Maxwellovy rovnice, Newtonovy vztahy atd. Jak říká P. Dirac: „*Škaredá teorie nemůže být pravdivá.*“ V teorii pevné fáze je to jedna z centrálních formulí. Její jednoduchost je i výrazem stupně obecného pochopení jevu supravodivosti, i když v ní je řada „ošklivých“ konkrétních jevů středována či zanedbána.

Přes tuto krásu, obecnost i relativně dobrý souhlas s experimentem u obrovské řady supravodičů je teorie BCS jen málo používána v praxi. Jednodušší Ginzburgovy-Landauovy rovnice a Londonovy rovnice nám pro řešení řady praktických úloh zcela stačí. Teorie BCS je však jeden z největších teoretických výsledků fyziky pevné fáze tohoto století a stojí zato se s ní seznámit na libovolné úrovni. I kdybychom si mě-

li pamatovat jen formu základního stavu $|BCS\rangle$ či výraz pro T_c .

Výraz (10.8.9) nám také ukazuje širokou cestu, kde hledat vysněné supravodiče s nejvyšší kritickou teplotou, tzv. vysokoteplotní supravodiče: potřebujeme látky se silnou elektron-fononovou interakcí, s vysokou hustotou elektronových stavů a také s vysokou hodnotou Debyeova kmitočtu ω_D . Od roku 1973 byla nejvyšší teplota 23,7 K u tenkých vrstev Nb_3Ge . Třináct let metalurgové a fyzikové nemohli najít nic lepšího. Ke konci roku 1986 však svitlo světlo v tunelu. Ve *vodivých keramikách typu La-Ba-Cu-O* byla nalezena T_c kolem 30–35 K a po záměně lanthanu yttriem pak v únoru 1987 *dokonce kritická teplota kolem 95–125 K*. To už je teplota nad kapalným dusíkem (77 K) a je to fantastický úspěch. Bylo-li řečeno, že supravodivost bude znamenat tolik, co vynález kola, tak se od tohoto roku zdá, že se toto kolo začíná otáčet. A zdá se, že nemusíme vymýšlet nějaké nové exotické mechanismy interakce elektronů s mřížkou. Snad bude stačit osvědčený fononový mechanismus BCS pro vysvětlení i těchto fantastických T_c .

Při hledání nových supravodičů je však formule (10.8.9) přece jen příliš obecná a konkrétně je situace v pevné látce příliš komplikovaná. Tohoto nedostatku tak obecné formule si byl vědom i americký fyzik B. Matthias. Ten se prakticky celý život věnoval přípravě různých supravodičů. Jako E. E. Kisch byl „zuřivým reportérem“, byl Matthias „zuřivým metalurgem“ supravodivosti. Když začínal svoji kariéru, bylo známo asi 40 supravodičů, a když ji, bohužel, nedávno skončil, bylo jich známo něco přes 840. Vymyslel a připravil kolem 800 nových supravodičů (!), vymyslel různá empirická pravidla (nazývají se Matthiasova pravidla) na základě Mendělejevovy tabulky, která doposud žádná teorie nevysvětlila. Sám byl tak trochu teorií BCS zklamán a nijak to neskrýval. „Vymyslel“ ze dvou supravodivých prvků supravodivé slitiny, které měly T_c větší než prvky, z nichž se skládaly, slitiny, v nichž malé procento nějakého prvku jednou T_c zvyšovalo a podruhé snižovalo atd. Technologie přípravy supravodičů

se stala „černou magií“ a teorie se nestačila divit. A diví se dodnes. Ale je třeba říci, že nesmíme chtít na ubohé teorii všechno. Spočítat z prvních principů strukturu a elektronové rozdělení v pevnofázovém konkrétním vzorku je nesmírně obtížný úkol, i když i tady teoretikové dosáhli vynikajících výsledků.

Vypráví se, že B. Matthias byl pracovní fanatik. Pracoval ve dne v noci, dokonce i v den svatby museli jeho spolupracovníci vypnout zkapalňovač helia, aby nemohl v ten den pracovat. Z historie si vzpomínám jen na podobný případ francouzského latinisty jménem du Caunes, který denně pracoval pravidelně 13 hodin na sestavení latinského slovníku a jedině v den svatby pracoval „pouze“ 6 hodin.

Supravodivý stav pod $T < T_c$ je výsledkem toho, že soustava elektronů si „vybere“ situaci, v níž je symetrie základního stavu nižší než výchozího hamiltoniánu, tj. dojde k narušení symetrie. Takové narušení je spjato s existencí nehmotných Goldstoneových bosonů¹⁴ (jejich energie jde k nule při kmitočtu blížícím se nule), které udržují v soustavě uspořádání na dlouhou vzdálenost (u supravodičů to jsou dlouhovlnné plasmony). Při $T < T_c$ se v elektronové soustavě objevuje Boseův-Einsteinův kondenzát silně se překrývajících Cooperových párů. Tento kondenzát se pohybuje s jedinou těžišťovou rychlostí v_s . S kanonickou hybností $\mathbf{P} = 2m\mathbf{v} + 2e\mathbf{A}$ je spojena také makroskopická de Broglieova vlna. Často se mluví o supravodičích jako o „*vlnovodech de Broglieových vln*“. Taková vlna je charakterizována jedinou společnou fází Θ , s níž je také vázána kanonická hybnost $\mathbf{P} = \hbar\nabla\Theta$.

Vytvoření energetické mezery ve spektru excitací supravodiče je velice důležitou ingrediencí teorie a vysvětluje řadu experimentálních faktů i „*tuhost*“ *makroskopické vlnové funkce*. Odolnost vůči vnitřním a vnějším polím a fluktuacím je dána nejen touto mezerou. Je to subtilnější jev a je způsoben především korelací překrývajících se párů, která zůstává v soustavě i v případě, že energetická mezera Δ je rovna nule a vzorek je přesto supravodivý. Takovou předpověď, že mezera Δ jde k nule rychleji než T_c , udělali sovětští fyzikové