Teorie laseru

T. Ostatnický

21. října 2021

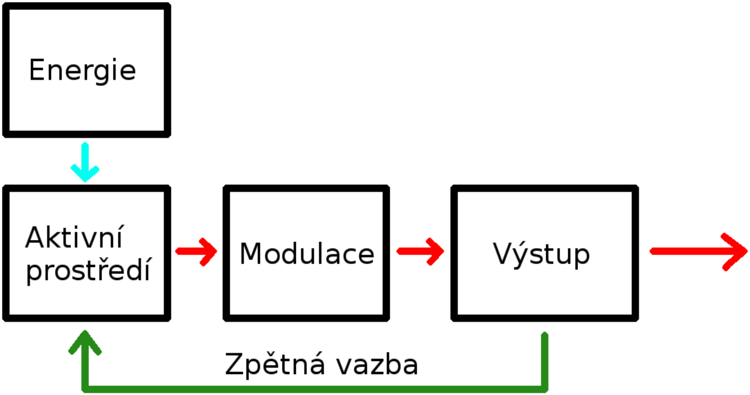
Úvod

Sylabus

- Úvod
- Optický rezonátor, Purcellův faktor, mody, svazky.
- Úrovně popisu aktivního prostředí.
- Klasická teorie laseru.
- Interakce světla a látky na semiklasické úrovni.
- Dvouhladinový model.
- Blochovy rovnice, tlumení volné indukce, fotonové echo.
- Semiklasické laserové rovnice.
- Aplikace semiklasických rovnic.
- Plně kvantová teorie.
- Řešení plně kvantových rovnic, přechodové jevy, dynamika, stabilita.
- Vzájemná kompatibilita jednotlivých úrovní popisu.
- Zajímavosti — optická bistabilita, ultrakrátké pulsy, polaritonový laser, submikronový laser.

Historie

- **1917 A. Einstein**: Koncept a teorie spontánní stimulované emise.
- **1951 A. Prokorov, N. G. Basov**: Teorie MASERu (Microwave Amplification of Stimulated Emission of Radiation).
- **1953 C. H.Townes, J. P. Gordon, H. J. Zeiger**: Nezávisle zkonstruovali MASER (NH_3, 24.0 GHz, rezonátor z kovu).
- **1956 N. Bloembergen**: Návrh pevnolátkového MASERu.
- **1958 A. L. Schawlow, C. H. Townes**: Teorie a návrh MASERu pro infračervené a viditelné světlo, důležitý optický rezonátor.
- **1960 T. H. Maiman**: **Realizace rubínového LASERu**.
- **1961 A. G. Fox, T. Li**: Teorie optických rezonátorů.
- **1962 R. Hall**: Polovodičový laser (GaAs).
- **1962 F. J. McClung, R. W. Hellwarth**: Q-spínání (obrovské pulsy).
- **1962 L. F. Johnson, G. D. Boyd, K. Nassau, R. R. Sodden**: Kontinuální laser.
- **1965 G. Pimentel, J. V. V. Kasper**: Chemický laser.
- **1966 P. Sorokin, J. Lankard**: Barvivový laser.
- **1970 N. Basov** *et al.*: Excimerový laser.
- **1977 J. M. J. Madey** *et al.*: Laser na volných elektronech.
- **1985 S. Suckewer** *et al.*: Rentgenový laser v laboratoři.
- atd. . .



- Stimulovaná emise: vznik koherentního pole z *nekoherentní* inverze.
- Čerpání může být i jiným laserem, ale výstupní pole nezávisí na jeho fázi.
- Parametrická konverze — parametrický oscilátor, *není* to laser, nedochází ke stimulované, ale parametrické emisi.

Vlastnosti záření

- Z principu stimulované emise, která „replikuje“ fotony, plyne časoprostorová koherence, minimum fluktuací.
- Vysoká stabilita (využití v metrologii), směrovost: 1969 Apollo 11, umístěn reflektor na Měsíci; 1. 8. 1969 první odraz, $2-10$ ns pulsy z rubínového laseru, stopa na Měsíci cca 3 km.
- Vysoké výkony, špičkové intenzity, hustoty pole.
- Synchronizace modů (fázová stabilita): krátké pulsy pod 1 fs.
- Prostorová koherence: stopa v difrakčním limitu.
- Dosažitelné vlnové délky od rádiových frekvencí do RTG oblasti (desítky keV), teoreticky lze i gama záření.

Hamiltonián schematicky — systém ($c_{1,2}$) plus lázeň (c_ω):

$$H = \mu\left(c_1 c_2^+ b + c_2 c_1^+ b^+\right) + \sum_\omega \mu_\omega \left(c_\omega^+ b + c_\omega b^+\right)$$

Počet fotonů:

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left\langle b^+ b\right\rangle(t) = \mathrm{i}\hbar\partial_t \mathrm{Tr}\,\rho(t) b^+ b = \mathrm{Tr}\left\{\,[H(t), \rho(t)]\, b^+ b\right\}$$

$$\rho(t) = \rho(-\infty) - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} [H(\tau), \rho(\tau)]\,\mathrm{d}\tau$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t \left\langle b^+ b\right\rangle(t) = \mathrm{Tr}\left\{\,[H(t), \rho(-\infty)]\, b^+ b\right\} - \frac{\mathrm{i}}{\hbar}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{Tr}\left\{\,[H(t), [H(\tau), \rho(\tau)]]\,\mathrm{d}\tau\, b^+ b\right\}$$

- V integračním jádru člen s malou časovou koherencí díky lázni.
- K integrálu v podstatě přispívá pouze člen $[H(t), \rho(t)]$.
- QM-fáze systému sleduje fázi pole.
- Bornova–Markova aproximace: 1. řád TP, systém bez paměti.

$$\int_{-\infty}^{t} [H(\tau),\rho(\tau)]\,\mathrm{d}\tau \approx \xi\,[H(t),\rho(t)]$$

$$\mathrm{i}\hbar\partial_t\left\langle b^+b\right\rangle(t) = \mathrm{Tr}\left\{\,[H(t),\rho(-\infty)]\,b^+b\right\} - \frac{\mathrm{i}\xi}{\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\,[H(t),[H(t),\rho(t)]]\,b^+b\right\} =$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{H\rho b^+b - \rho H b^+b\right\} - \frac{\mathrm{i}\xi}{\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\big(HH\rho - H\rho H - H\rho H + \rho HH\big)b^+b\right\} =$$

$$= \mathrm{Tr}\left\{\big(b^+bH - Hb^+b\big)\rho\right\} - \frac{\mathrm{i}\xi}{\hbar}\mathrm{Tr}\left\{\big(HHb^+b - 2Hb^+bH + b^+bHH\big)\rho\right\}$$

$$\partial_t\left\langle b^+b\right\rangle = -\frac{\xi}{\hbar^2}\left\langle\big[H,\big[H,b^+b\big]\big]\right\rangle \qquad \text{(adiabatická aproximace)}$$

Po dosazení (fluktuace ošetřené faktorem ξ a integrací):

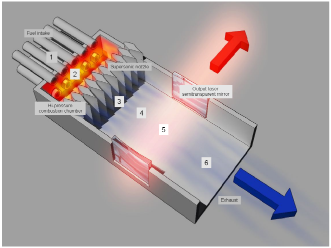
$$\big[H,b^+b\big] = \mu\big(c_1c_2^+b - c_2c_1^+b^+\big) \quad \text{(Faktorizace, aproximace středního pole.)}$$

$$\partial_t\left\langle b^+b\right\rangle = -2\xi\frac{\mu^2}{\hbar^2}\left\langle\big[c_2c_1^+b^+, c_1c_2^+b\big]\right\rangle = 2\xi\frac{\mu^2}{\hbar^2}\left\langle\big(c_2^+c_2 - c_1^+c_1\big)b^+b + c_1c_2^+c_2c_1^+\right\rangle =$$

$$= 2\xi\frac{\mu^2}{\hbar^2}\big[(n_2-n_1)N + n_2(1-n_1)\big] = 2\xi\frac{\mu^2}{\hbar^2}\big[(N+1)n_2(1-n_1) - Nn_1(1-n_2)\big]$$

- Stimulovaná emise závisí na inverzi $(n_2 - n_1)$ a počtu fotonů $\propto N$.
- Spontánní emise závisí pouze na počtu částic ve vyšším stavu n_2 plus zaplňování spodního stavu $\propto (1 - n_1)$.

Dělení dle aktivního prostředí (a tím i mechanismu činnosti).

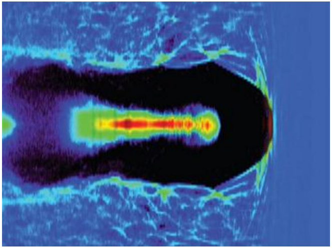


Plynové lasery

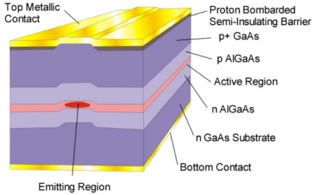
- Čerpání elektrickým výbojem, chemicky, opticky (excimerové lasery), mechanicky (dynamický laser).
- Velmi dobrá stabilizace, nehomogenně rozšířené čáry, vysoké výkony.

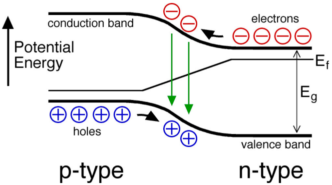
Plasmové lasery

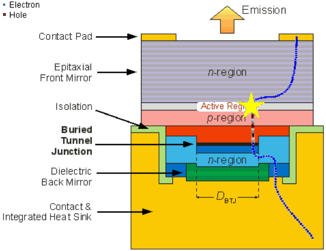
- Vysokoenergetický IČ puls ionizuje plyn (odpaření kovu z terčíku, přímá ionizace plynu).
- Rekombinace volných elektronů: stimulovaný proces v RTG spektru.
- Důležité sfázování IČ a RTG pulsu.
- Ionizaci lze provést i jiným nekonvenčním dodáním energie a odpařením pásku kovu.



Typy laserů







Pevnolátkové lasery

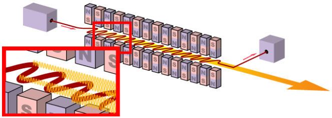
- Aktivní prostředí: ionty (podobné plynovým laserům, ale velké homogenní, zanedbatelné nehomogenní rozšíření), kvantové jámy, dráty, tečky, PN přechod.
- Čerpání: opticky, elektrickým proudem (!).
- Malé rozměry, krátké pulsy, vysoké hustoty toku energie, velké hodnoty zisku.
- Nanostruktury: VCSEL — jednomodové, dobře definovaná vlnová délka, možná výroba prvku na konkrétní vlnové délce.
- Integrovatelné do optoelektronických obvodů.

Lasery na volných elektronech

- Urychlené elektrony vstupují do undulátoru.
- Prostorově střídavé magnetické pole, příčně urychlující elektrické pole pro stabilizaci rychlosti.
- Pohyb jako v cyklotronu, vyzařování fotonů.
- Sfázování rychlosti elektronu a RTG fotonů — stimulovaná emise.

Barvivové lasery

- Organická barviva, čerpání opticky.
- Široké spektrum stimulované emise, laditelné, krátké pulsy.

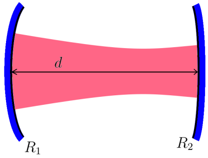


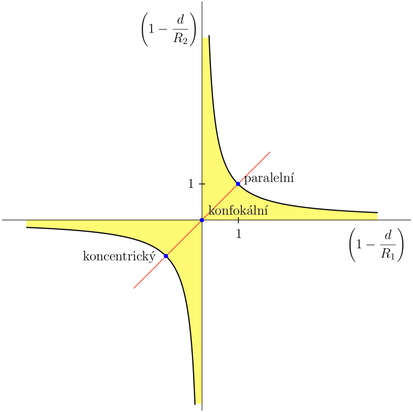
Rezonátory

- Zprosředkování zpětné vazby.
- Uzavření fotonů do konečného objemu, omezení radiačních ztrát.
- Prostorová a frekvenční modulace světla: podélné a příčné mody, délkou rezonátoru a tvarem zrcadel lze ladit a tvarovat svazky.
- Rezonátory uzavřené, otevřené (excimery).
- Zrcadla klasická (kovová, dielektrická), DBR v pevných látkách, vlákna, mikrorezonátory (kuličky, disky, kroužky, ...).
- Rozměry od m do μm, od toho se odvíjí modová struktura.
- Podmínka stability pro dvouzrcadlový rezonátor:

$$0 \leq \left(1 - \frac{d}{R_1}\right)\left(1 - \frac{d}{R_2}\right) \leq 1$$

- Boydův–Kogelnikův diagram stability.





Vlnová rovnice:

$$\left[\Delta_\mathrm{T} + \partial_z^2 - \frac{n^2}{c^2}\partial_t^2\right] E = 0$$

Hledáme harmonické paraxiální řešení ve tvaru:

$$E(\boldsymbol{r}, t) = \mathcal{E}(\boldsymbol{r}) \exp\left[\mathrm{i}(k_z z - \omega t)\right]$$

Paraxiální přiblížení:

$$\left|\partial_z \mathcal{E}\right| \ll \left|k_z \mathcal{E}\right|$$

Dosazením:

$$\left[\Delta_\mathrm{T} - k_z^2 + 2\mathrm{i}k_z\partial_z + \partial_z^2 + \frac{\omega^2 n^2}{c^2}\right] \mathcal{E} = 0$$

Položme BÚNO $k_z = \omega n/c$ a uvažujme pouze členy nejnižšího řádu derivace v z:

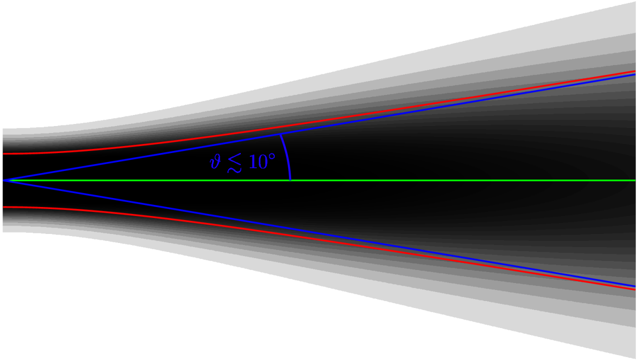
$$\left[\Delta_\mathrm{T} + 2\mathrm{i}k_z\partial_z\right] \mathcal{E} = 0$$

Helmholtzova paraxiální rovnice

Vlnová rovnice v paraxiálním přiblížení.

Paraxiální přiblížení

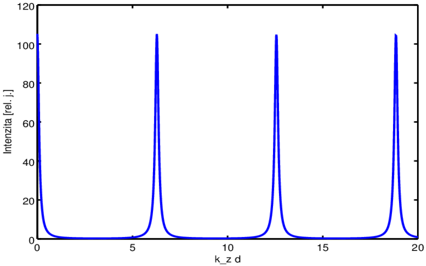
- Vlna se šíří ve směru z a je pouze lehce modulovaná v ostatních směrech.
- Modulace způsobuje i variace fáze ve směru šíření, ty jsou ale řádově mnohem menší než fázová změna $\propto k_z z$.
- V paraxiální přiblížení jsme schopni přibližně separovat podélný a příčný směr.
- Lze aplikovat pouze na omezený okruh problémů, např. takto nemůžeme popsat kulovou vlnu.
- Důležitý je úhel difrakce, ten nesmí překročit cca 10°.



Podélné mody

Odrazivost zrcadel $r_{1,2}$, intenzita uvnitř rezonátoru:

$$I \propto \left(1 - r_1 r_2 \exp\left[\mathrm{i} k_z d\right]\right)^{-1}$$



Podélné mody dány podmínkou:

$$\mathrm{Im}\left\{r_1 r_2 \exp\left[\mathrm{i} k_z d\right]\right\} = 0$$

- Perioda $\Delta d = 2\pi/k_z$ nebo $\Delta k_z = 2\pi/d$ nebo $\Delta\hbar\omega = \Delta k_z c/n = 2\pi\hbar c/nd$.
- Hustota stavů se zvyšuje s rostoucí optickou délkou rezonátoru.
- Šířka modů (homogenní) daná dobou života fotonu: odrazivost, absorpce, difrakce, rozptyl. . .

Mody rezonátoru

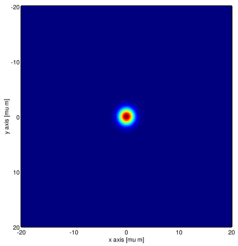
Příčné mody

Gaussovské svazky

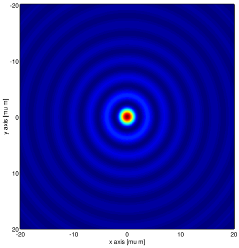
- Základní druh svazku v rezonátorech se sférickými zrcadly.
- Nepřímá úměra mezi velikostí ohniska a difrakčním úhlem ⇒ omezená možnost fokusace.
- Rychlý pokles intenzity na stranách.
- Vyšší řády, modulace intenzity → stabilní svazky s plochým maximem nebo naopak „dírou“.

Besselovské svazky

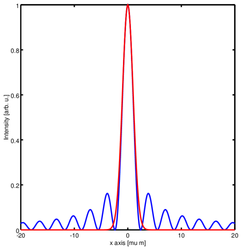
- Stabilní, bez difrakce.
- Velmi úzké maximum, lze lépe fokusovat než gaussovský svazek. . .
- . . . ale velmi pomalý pokles po stranách.
- Nelze uplatnit v rezonátoru, příliš velké difrakční ztráty.



Gaussovský



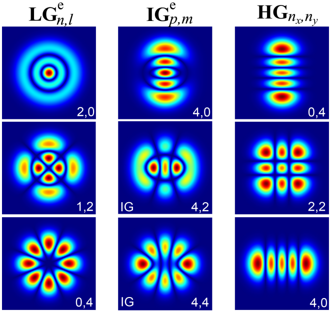
Besselovský

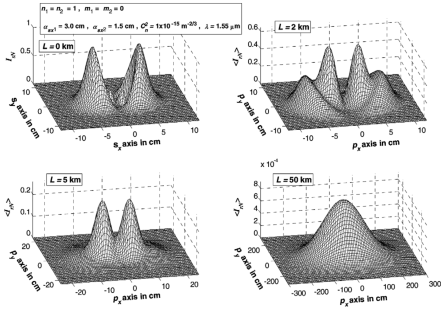


Porovnání G a B

Vyšší řády gaussovských svazků

- Profil svazku závisí na symetrii rezonátoru, tj. na jeho tvaru, tvaru zrcadel, prostorovém rozložení energie apod.
- Svazky s cylindrickou symetrií mohou mít nenulový moment hybnosti (fáze se při oběhu kolem středu svazku změní o násobek π) — mohou indukovat vířivé proudy v absorbujícím médiu.
- Matematická řešení paraxiální Helmholtzovy rovnice s uvážením gaussovské modulace — některé speciální polynomy.
- Hermitovské–Gaussovské (pravoúhlé), Laguerrovské–Gaussovské a Inceho–Gaussovské svazky.
- Modifikované gaussovské svazky — stabilní, ale mění se rozložení intenzity ve prospěch prostého gaussovského modu.





Purcellův faktor

Interakce elektronu a elektromagnetického pole:

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + V(\boldsymbol{r})$$

Intenzita elektrického pole:

$$\boldsymbol{E}(t) = \partial_t \boldsymbol{A}(t) - \nabla\varphi(t)$$

Harmonická vlna:

$$\boldsymbol{A}(\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{A} \exp[-\mathrm{i}\omega t] \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{A}(t) = \frac{\mathrm{i}}{\omega}\boldsymbol{E} \exp[-\mathrm{i}\omega t]$$

Lineární aproximace:

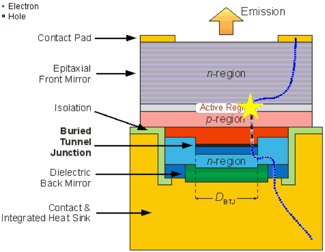
$$H = \frac{\boldsymbol{p}^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - 2\mathrm{i}\frac{e}{\omega}\boldsymbol{E} \cdot \boldsymbol{p} \exp[-\mathrm{i}\omega t]$$

Síla interakce je úměrná překryvu vlnové funkce elektronu a elektromagnetického pole.

Purcellův faktor

- V rezonátorech lze prostorově omezit elektromagnetickou vlnu, z důvodu normování tím roste její špičková intenzita.
- Zvýšení překryvu vlnových funkcí díky lokalizaci elektromagnetického pole.
- Nanostruktury: lokalizace elektronové vlnové funkce.
- Vhodně zvolené rozměry rezonátoru a nanostruktury: elektromagnetické mody v rezonanci nebo mimo rezonanci s dipólovým přechodem $\Rightarrow$ podpora nebo potlačení luminiscence.

- Purcellův faktor: $F_P = T_0/T$, kde T resp. T_0 jsou zářivé doby života dané hladiny v a mimo rezonátor.
- Lze dosáhnout řádově $F_P \approx 10$ nebo naopak $F_P \approx 0.1$,
- Purcellův faktor zrychluje i stimulované přechody: VCSEL laserové diody s vysokou účinností.



Úrovně popisu

- Výhodný co nejjednodušší model, který popisuje danou situaci — snaha o vysoký stupeň aproximace, relevantní pro daný systém.
- Např. není třeba zahrnovat popis celé laboratoře, stačí soustředit se pouze na prostor oscilátoru a interakci laboratoř–oscilátor popsat efektivně (přenos tepla, médií, dekoherence apod.).
- Obecně 3 úrovně popisu: *klasická*, *semiklasická* a *plně kvantová*.
- Úrovně vystihují pouze způsob popisu nelineárního prostředí a elektromagnetického pole, i tak je vždy otázkou aproximace, jak popíšeme efekty šíření pole, ostatní prvky v rezonátoru, atd.
- **Klasický popis**: Aktivní prostředí klasicky, roli hraje pouze inverze, která je hustotou energie (nemá fázi).
- Pole popsáno hustotou fotonů, není fáze, není spektrum, roli hraje efektivně pouze jeden mod.
- **Semiklasický popis**: Materiál plně kvantově, čerpání efektivně jako tok energie. Pole klasicky z Maxwellových rovnic včetně fáze.
- Obsažena informace o fázi pole i materiálové vlny, spektrální vlastnosti, interakce mezi mody, interakce pole a čerpání, plný popis nelinearit.
- **Plně kvantový popis**: Kvantovaný materiál i pole, kvantová interakce s tepelnou lázní (pole i materiál).
- Kvantové fluktuace, fotonová statistika.

Klasické laserové rovnice

Klasické laserové rovnice

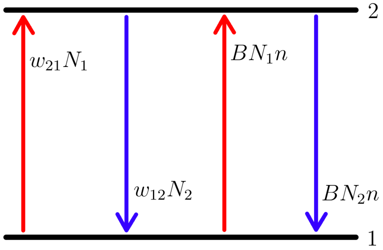
- Základní hladinové schéma vždy 2 hladiny, ze spodní čerpám na horní, z horní spontánní emise na dolní.
- Horní hladina kvazistabilní.
- Vždy je potřeba dosáhnout inverze $N_2 > N_1$, jinak převáží stimulovaná absorpce nad stimulovanou emisí.

$$\partial_t n = 2\xi \frac{\mu^2}{\hbar^2}\left[(N+1)n_2(1-n_1) - Nn_1(1-n_2)\right]$$

  Spontánní emise ale nehraje roli (v rovnicích dále je zanedbaná).
- Dosažení inverze:
  1. Intenzivním zdrojem energie (např. laserovým pulsem) — musí být ve fázi s dvohladinovým systémem $\Rightarrow$ koherentní, délka pulsu kratší než doba rozfázování. Čerpání je tedy ale samo o sobě laser.
  2. Tunelování elektronů z jiného nekoherentního invertovaného systému: PN přechod, zdroj napětí je invertovaný.
  3. Využití dalších hladin mimo rezonanci se zdrojem — shámata 3, 4 a více hladin s nestabilními přechodnými stavy.
  4. Další: chemické reakce (excimery), tlumení vibrací (dynamické lasery), ...

Klasické laserové rovnice

- Kvalitativní popis pouze na základě bilance energií.
- Předpokládáme existenci pouze jednoho modu nebo uvažujeme efektivní počet fotonů.
- Jakékoliv fluktuace nezajímavé. Použijeme aproximaci středního pole, elektromagnetické pole je klasické, elektrony také. Platí při velkých hustotách polí.
- Neuvažujeme žádné efekty koherence, všechno je ve fázi.



- $N_{1,2}$ . . . Efektivní obsazení hladin v celé dutině, které interagují s modem.
- n . . . Počet fotonů v celé dutině.
- B . . . Einsteinův koeficient.
- w_{21} . . . Čerpání.
- w_{12} . . . Relaxace.

Klasické laserové rovnice

$$\dot{N}_2 = +w_{21}N_1 - w_{12}N_2 + BN_1 n - BN_2 n$$
$$\dot{N}_1 = -w_{21}N_1 + w_{12}N_2 - BN_1 n + BN_2 n$$

- $N = N_2 + N_1$ je celkový počet elektronů, $\dot{N} = 0$.
- $D = N_2 - N_1$ je *inverze*, rovnice pro $\dot{N}_1$ a $\dot{N}_2$ lze nahradit rovnicemi pro $\dot{D}$, $\dot{N}$:

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{N - D}{2} \\ N_2 &= \frac{N + D}{2} \\ \dot{D} &= 2N_1 w_{21} - 2N_2 w_{12} + 2Bn(N_1 - N_2) = \\ &= N(w_{21} - w_{12}) - D\underbrace{(w_{21} + w_{12})}_{1/T} - 2BnD \end{aligned}$$

- T ... relaxační doba inverze.
- Označíme D_0 řešení při $n = 0$. Je to maximální dosažitelná inverze, názývá se *nesaturovaná inverze*:

$$D_0 = N\frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}}$$

$$\dot{D} = N(w_{21} - w_{12}) - D(w_{21} + w_{12}) - 2BnD$$

$$D_0 = N\frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}}$$

$$w_{21} + w_{12} = \frac{1}{T}$$

$$N(w_{21} - w_{12}) = D_0(w_{21} + w_{12}) = \frac{D_0}{T}$$

- Při přeskoku $\dot{N}_2 = \ldots - BN_2 n$ se vytvoří $n = 1$ fotonů.
- $1/2\gamma$ ... doba života fotonu.

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{n} &= BDn - 2\gamma n \\ \dot{D} &= \left(D_0 - D\right)\tfrac{1}{T} - 2BDn \end{aligned}}$$

Klasické laserové rovnice

Stacionární řešení

$$\dot{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad (D_0 - D) = 2TDBn$$

$$D_S = \frac{D_0}{1 + 2TBn} \qquad \dots \qquad \text{„saturace“ inverze polem}$$

$$\dot{n} = 0 \quad \Rightarrow \quad n\left(\frac{BD_0}{1 + 2TBn} - 2\gamma\right) = 0$$

Dvě možnosti:

- $n = 0$
- $n_S = \frac{BD_0 - 2\gamma}{4TB\gamma}$

Dále dosadíme zpět do vztahu pro D_S: $\quad D_S = 2\gamma/B$.

$n = 0$

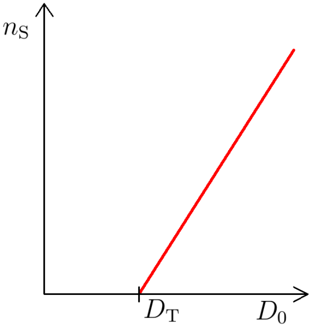
- Nestabilní řešení, při libovolném $n \neq 0$ exponenciální nárůst n.
- Matematicky existuje pouze kvůli zanedbání spontánních procesů.
- Řešení není fyzikální.

$BD_0 < 2\gamma$

- $n_S < 0$, nefyzikální řešení.
- Pokud předpokládáme $n > 0$ jako počáteční (fyzikálně správnou) podmínku, nikdy nelze $n < 0$.
- Matematické science–fiction.

$BD_0 \geq 2\gamma$

- Správné řešení.
- $\Rightarrow$ prahová podmínka: $D_0 \geq D_T = \frac{2\gamma}{B}$.



Nestacionární řešení — relaxační oscilace

$$
\begin{aligned}
D &= D_S + x \\
n &= n_S + y \\
xy &= 0
\end{aligned}
$$

$$\dot{D} = \dot{x} = \underbrace{(D_0 - D_S)\frac{1}{T} - 2BD_S n_S}_{=0} - \underbrace{\left(\frac{1}{T} + 2Bn_S\right)}_{D_0/D_S T} x - 2BD_S y$$

$$\dot{n} = \dot{y} = \underbrace{BD_S n_S - 2\gamma n_S}_{=0} + Bxn_S + \underbrace{BD_S - 2\gamma}_{=0} y$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{D_0}{D_S T} & -2BD_S \\ Bn_S & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$x = x_0 \exp[\alpha t], \qquad y = y_0 \exp[\alpha t]$$

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{D_0}{D_S T} - \alpha & -2BD_S \\ Bn_S & -\alpha \end{pmatrix} = 0$$

Nestacionární řešení — relaxační oscilace

$$\det\begin{pmatrix} -\frac{D_0}{D_S T}-\alpha & -2BD_S \\ Bn_S & -\alpha \end{pmatrix} = 0 \qquad D_S = \frac{2\gamma}{B}$$

$$\alpha^2 + \alpha\frac{BD_0}{2\gamma T} + 4B\gamma n_S = 0$$

$$\alpha = -\frac{BD_0}{4\gamma T} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\frac{B^2D_0^2}{4\gamma^2T^2} - 16B\gamma n_S} \qquad n_S = \frac{BD_0 - 2\gamma}{4BT\gamma}$$

$$\alpha = -\frac{BD_0}{4\gamma T}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma^2 T}{B^2D_0^2}(BD_0 - 2\gamma)}\right]$$

- Pod prahem $BD_0 < 2\gamma$ odmocnina $\sqrt{\ } > 1$, existuje kladné i záporné řešení: z počáteční podmínky $n > 0$ plyne jako fyzikální pouze záporné — aperiodický pohyb.
- Nad prahem $BD_0 > 2\gamma$ je $\sqrt{\ } < 1$: aperiodický pohyb pokud $\sqrt{\ } \in \mathbb{R}$ a vždy $\alpha < 0$ (tlumení), jinak $\alpha = \Gamma + i\omega \ \rightarrow$ *oscilace*.

Nestacionární řešení — relaxační oscilace

$$\alpha = -\frac{BD_0}{4\gamma T}\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{4\gamma^2 T}{B^2 D_0^2}(BD_0 - 2\gamma)}\right]$$

Hraniční případ mezi oscilacemi a aperiodickou (tlumenou) dynamikou:

$$4\gamma^2 T(BD_0 - 2\gamma) = B^2 D_0^2$$

$$D_0 = \frac{2\gamma}{B}(\gamma T)\left[1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{\gamma T}}\right]$$

- Pro existenci oscilací musí nutně $\gamma T > 2$: součet rychlosti relaxace a rychlosti čerpání elektronu menší než rychlost relaxace fotonu.
- Vždy existuje interval pro existenci oscilací: systém musí být čerpán dostatečně nad prahem, ale ne moc.
- Při $\gamma T \gg 1$ dostaneme:

$$D_0 \in \left(\frac{2\gamma}{B}; \frac{2\gamma}{B} 2\gamma T\right)$$

- Uvažujme $BD_0 \gg 2\gamma$ a $BD_0 \ll \gamma^2 T$:

$$\omega \approx \frac{1}{2}\sqrt{\frac{BD_0}{T}}$$

Semiklasické laserové rovnice

Interakce elektronu s elmg. polem

- Klasické pole, řešení Maxwellových rovnic.
- Jsou zavedené intenzity polí, potenciály a fáze.
- Elektrony kvantované.
- Atomární systém (lokální interakce).
- Odvození z hamiltoniánu pro elektron ($e < 0$).

$$H = \frac{(\boldsymbol{p} - e\boldsymbol{A})^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) = \frac{p^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - \frac{e}{2m}(\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}) + \frac{e^2}{2m}A^2$$

Zanedbáme dvoufotonové procesy ($A^2 \approx 0$), použijeme Coulombickou kalibraci $\nabla\cdot\boldsymbol{A} = 0$:

$$\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} = -\mathrm{i}\hbar(\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla) = -2\mathrm{i}\hbar\boldsymbol{A}\cdot\nabla = 2\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$$

$$H = \frac{p^2}{2m} + V(\boldsymbol{r}) - \frac{e}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p} = H_0 - \frac{e}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$$

H_0 … Neporušený hamiltonián elektronu, interakci budeme uvažovat jako poruchu.

Interakce elektronu s elmg. polem

Monochromatické pole:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{E} &= -\frac{\partial}{\partial t}\boldsymbol{A} \\
\boldsymbol{E} &= \widetilde{\boldsymbol{E}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \text{c.c.} \\
\boldsymbol{A} &= \widetilde{\boldsymbol{A}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \text{c.c.} \\
\widetilde{\boldsymbol{E}} &= \mathrm{i}\omega_0\widetilde{\boldsymbol{A}} \\
H &= H_0 + \frac{\mathrm{i}e}{m\omega_0}\left(\boldsymbol{p}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] - \boldsymbol{p}\cdot\widetilde{\boldsymbol{E}}^*\exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]\right)
\end{aligned}$$

Přechod k dipólovému momentu, *dipólová aproximace* $\langle \mathrm{f}|\boldsymbol{p}\cdot\boldsymbol{E}|\mathrm{i}\rangle = \langle \mathrm{f}|\boldsymbol{p}|\mathrm{i}\rangle\cdot\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}_0)$:

$$\begin{aligned}
&\left\langle \mathrm{f}\middle|[H_0,\boldsymbol{r}]\middle|\mathrm{i}\right\rangle = \left\langle \mathrm{f}\middle|\hbar\omega_\mathrm{f}\boldsymbol{r}\middle|\mathrm{i}\right\rangle - \left\langle \mathrm{f}\middle|\boldsymbol{r}\hbar\omega_\mathrm{i}\middle|\mathrm{i}\right\rangle = \hbar(\omega_\mathrm{f}-\omega_\mathrm{i})\langle \mathrm{f}|\boldsymbol{r}|\mathrm{i}\rangle = \frac{\hbar}{e}\omega_\mathrm{fi}\boldsymbol{d}_\mathrm{fi} \\
&\boldsymbol{d}_\mathrm{fi} = \langle \mathrm{f}|e\boldsymbol{r}|\mathrm{i}\rangle \in \mathbb{R} \\
&\left\langle \mathrm{f}\middle|[H_0,\boldsymbol{r}]\middle|\mathrm{i}\right\rangle = \left\langle \mathrm{f}\middle|\left[(p^2/2m)+V,\boldsymbol{r}\right]\middle|\mathrm{i}\right\rangle = \left\langle \mathrm{f}\middle|\boldsymbol{p}[\boldsymbol{p},\boldsymbol{r}]/m\middle|\mathrm{i}\right\rangle = -\mathrm{i}\frac{\hbar}{m}\langle \mathrm{f}|\boldsymbol{p}|\mathrm{i}\rangle
\end{aligned}$$

Po dosazení:

$$\left\langle \mathrm{f}\middle|H\middle|\mathrm{i}\right\rangle = \underbrace{\langle \mathrm{f}|H_0|\mathrm{i}\rangle}_{\hbar\omega_\mathrm{i}\delta_\mathrm{fi}} - \frac{\omega_\mathrm{fi}}{\omega_0}\boldsymbol{d}_\mathrm{fi}\cdot\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \widetilde{\boldsymbol{E}}^*\exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]\right)$$

- Dvě elektronové hladiny (kvantové) plus klasické pole, blízko rezonanci.
- Zatím koherentní vývoj bez relaxace.
- Pouze jeden elektron.

$$H = \hbar\omega_1 c_1^+ c_1 + \hbar\omega_2 c_2^+ c_2 - \frac{e}{m}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{p}$$

$$H = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & 0 \\ 0 & \hbar\omega_2 \end{pmatrix} - \frac{\omega_{21}}{\omega_0}\boldsymbol{d}_{21}\cdot\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \text{c.c.}\right)\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & \xi(t) \\ \xi(t) & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}$$

$$\xi(t) = -\frac{\omega_{21}}{\omega_0}\boldsymbol{d}_{21}\cdot\left(\widetilde{\boldsymbol{E}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \text{c.c.}\right)$$

- Počítáme časový vývoj matice hustoty:

$$\rho(t) = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}$$

$$\rho_{12} = \rho_{21}^*$$

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[H,\rho\right] = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & \xi(t) \\ \xi(t) & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \rho_{11} & \rho_{21}^* \\ \rho_{21} & \rho_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \hbar\omega_1 & \xi(t) \\ \xi(t) & \hbar\omega_2 \end{pmatrix}\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{11} = -\mathrm{i}\frac{\xi(t)}{\hbar}\left(\rho_{21} - \rho_{21}^*\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{22} = -\mathrm{i}\frac{\xi(t)}{\hbar}\left(\rho_{21}^* - \rho_{21}\right)$$
$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_{21} = -\mathrm{i}\frac{\xi(t)}{\hbar}\left(\rho_{11} - \rho_{22}\right) - \mathrm{i}\omega_{21}\rho_{21}$$

Definujeme inverzi $d = \rho_{22} - \rho_{11}$, frekvenci dipólu $\omega_{21} = \omega_2 - \omega_1$, polarizaci $p = \rho_{21}$ a interakční člen $\mu = (\boldsymbol{d}_{21} \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}}) \in \mathbb{C}$:

$$\dot{p} = -\mathrm{i}\omega_{21}p - \mathrm{i}d\frac{\omega_{21}}{\hbar\omega_0}\left(\mu\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \mathrm{c.c.}\right)$$
$$\dot{d} = 4\frac{\omega_{21}}{\hbar\omega_0}\left(\mu\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] + \mathrm{c.c.}\right)\mathrm{Im}p$$

- Snadno vidíme $p \propto \exp[-\mathrm{i}\omega_{21}t]$ a $\omega_0 \approx \omega_{21}$.
- Provedeme *aproximaci rotující vlny* (Rotating Wave Approximation): příspěvek $\mu^*\exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]$ k polarizaci osciluje vzhledem k p na frekvenci $\omega_0 + \omega_{21}$.
- Během jedné periody na frekvenci ω_{21} tak proběhne mnoho oscilací na součtové frekvenci a příspěvek se vyprůměruje do 0.
- V některých aplikacích ale tento příspěvek neopomenutelný, v poruchové teorii jej zanedbat můžeme.
- Podobně v rovnici pro inverzi zanedbáme v členu $\xi(t)\rho_{21}$ příspěvek $\propto \mu\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]$ a v členu $\xi(t)\rho_{21}^*$ část $\propto \mu^*\exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]$.

$$\hbar\tilde{\mu} = \mu$$
$$\frac{\omega_{21}}{\omega_0} \to 1$$

$$\dot{p} = -\mathrm{i}\omega_{21} p - i d\tilde{\mu}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]$$
$$\dot{d} = 4\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{\mu}^* p \exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]\right\}$$

Zavedení ad hoc relaxačních dob a čerpání: doba života horní hladiny $T_1 = 2\gamma_{||}^{-1}$, doba rozfázování $T_2 = \gamma_{\perp}^{-1}$:

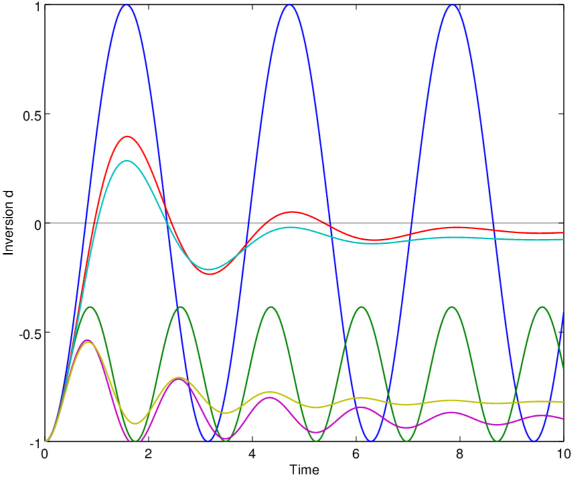
$$\boxed{\begin{aligned}\dot{p} &= (-\mathrm{i}\omega_{21} - \gamma_{\perp})p - i d\tilde{\mu}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]\\ \dot{d} &= 4\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{\mu}^* p \exp[+\mathrm{i}\omega_0 t]\right\} - \gamma_{||}(d+1)\end{aligned}}$$

Blochovy rovnice

- Převedení do pomalu rotujícího rámce.
- Uvažujeme $p \to p\exp[-\mathrm{i}\omega_{\mathrm{A}} t]$, definujeme $\delta = \omega_0 - \omega_{21}$:

$$\dot{p} = -\mathrm{i}d\tilde{\mu}\exp[-\mathrm{i}\delta t] - \gamma_{\perp} p$$
$$\dot{d} = +4\,\mathrm{Im}\{\tilde{\mu}^* p \exp[+\mathrm{i}\delta t]\} - \gamma_{||}(d+1)$$

Počáteční podmínka $d = -1$, $p = 0$, konstantní parametr $\tilde{\mu} = 1$:



	δ	$\gamma_{\parallel}$	$\gamma_{\perp}$
modrá	0	0	0
zelená	3	0	0
červená	0	.8	.2
tyrkysová	0	.8	.4
žlutá	3	.8	.2
purpurová	3	.8	.4

$$\gamma_{\perp} = \gamma_{\parallel}/4 + \gamma_{\perp}^{*}$$

V rezonanci, bez tlumení: $\delta = 0$, $\gamma_\perp = \gamma_\| = 0$.

$$\dot{p} = -\mathrm{i} d \tilde{\mu}$$
$$\ddot{d} = 4 \,\mathrm{Im}\, \tilde{\mu}^* \dot{p} = 4 \,\mathrm{Im}\,(-\mathrm{i}) |\tilde{\mu}|^2 d = -4 |\tilde{\mu}|^2 d$$

$$d = -\cos \Omega_\mathrm{R} t$$
$$p = \frac{\mathrm{i}\tilde{\mu}}{\Omega_\mathrm{R}} \sin \Omega_\mathrm{R} t$$
$$\Omega_\mathrm{R} = 2|\tilde{\mu}| \quad \ldots \quad \text{Rabiho frekvence}$$

- Rabiho oscilace na Rabiho frekvenci.
- Oscilace nezávisle na fázi pole: pouze polarizace sleduje fázi, inverze je vždy stejná.
- Lze dosáhnout inverze interakcí s koherentním pulsem: $\Omega_\mathrm{R} t = \pi = 2|\tilde{\mu}| t$, tedy

  $$t = \frac{\pi}{2|\tilde{\mu}|}$$

  je délka tzv. π-pulsu.
- Kvůli relaxačním procesům musí být t kratší než doba relaxace $\Rightarrow$ inverzi lze vybudit pouze velmi krátkým, ale intenzivním pulsem ($t \propto 1/|\tilde{\mu}|$).

Mimo rezonanci, bez tlumení: $\delta \neq 0$, $\gamma_\perp = \gamma_{||} = 0$.

$$d = A + B\cos\Omega t, \qquad A, B \in \mathbb{R} \quad \text{BÚNO}$$

$$\dot{d} = -B\Omega\sin\Omega t$$

$$\dot{p} = -\mathrm{i}\tilde{\mu}\exp[-\mathrm{i}\delta t](A + B\cos\Omega t) = -\mathrm{i}A\tilde{\mu}\exp[-\mathrm{i}\delta t] - \frac{\mathrm{i}B\tilde{\mu}}{2}\left(\exp[\mathrm{i}(\Omega-\delta)t] + \exp[-\mathrm{i}(\Omega+\delta)t]\right)$$

$$p = \frac{A\tilde{\mu}}{\delta}\exp[-\mathrm{i}\delta t] - \frac{B\tilde{\mu}}{2(\Omega-\delta)}\exp[\mathrm{i}(\Omega-\delta)t] + \frac{B\tilde{\mu}}{2(\Omega+\delta)}\exp[-\mathrm{i}(\Omega+\delta)t] + C$$

$$\begin{aligned}\dot{d} &= 4\,\mathrm{Im}\left(\tilde{\mu}^* p\exp[\mathrm{i}\delta t]\right) = \\ &= 4|\tilde{\mu}|^2\,\mathrm{Im}\left\{\frac{A}{\delta} - \frac{B}{2(\Omega-\delta)}\exp[\mathrm{i}\Omega t] + \frac{B}{2(\Omega+\delta)}\exp[-\mathrm{i}\Omega t] + \frac{C}{\tilde{\mu}}\exp[\mathrm{i}\delta t]\right\} = \\ &= -2|\tilde{\mu}|^2 B\left(\frac{1}{\Omega-\delta} + \frac{1}{\Omega+\delta}\right)\sin\Omega t + 4\Big(\mathrm{Re}\left\{\tilde{\mu}C\right\}\sin\delta t + \mathrm{Im}\left\{\tilde{\mu}C\right\}\cos\delta t\Big) = \\ &= -B\Omega\sin\Omega t \qquad \Rightarrow \qquad C = 0\end{aligned}$$

$$-B\,\Omega\sin\Omega t = -4|\tilde{\mu}|^2\frac{B\Omega}{\Omega^2-\delta^2}\sin\Omega t$$

$$\boxed{\Omega^2 = 4|\tilde{\mu}|^2 + \delta^2 = \Omega_\mathrm{R}^2 + \delta^2}$$

Mimo rezonanci, bez tlumení: $\delta \neq 0$, $\gamma_\perp = \gamma_\parallel = 0$.

$$d = A + B\cos\Omega t, \qquad A, B \in \mathbb{R} \quad \text{BÚNO}$$
$$\Omega^2 = \Omega_R^2 + \delta^2$$

$\underline{t = 0}$

$$d = -1 = A + B \qquad \Rightarrow \qquad A = -B - 1$$
$$p = 0 = \frac{A\tilde{\mu}}{\delta} - \frac{B\tilde{\mu}}{2(\Omega - \delta)} + \frac{B\tilde{\mu}}{2(\Omega + \delta)} \qquad \Big/ \cdot \frac{2\delta}{\tilde{\mu}}$$
$$0 = \frac{1}{\Omega^2 - \delta^2}\left[2(B+1)\underbrace{(\Omega^2 - \delta^2)}_{\Omega_R^2} + 2\delta^2\right]$$
$$B = -\frac{\Omega_R^2}{\Omega^2} = -\frac{\Omega_R^2}{\Omega_R^2 + \delta^2}$$
$$A = -\frac{\delta^2}{\Omega^2} = -\frac{\delta^2}{\Omega_R^2 + \delta^2}$$

- Amplituda oscilací inverze: lorentzovský tvar vzhledem k δ.
- Při $\delta \neq 0$ nelze dosáhnout inverze.

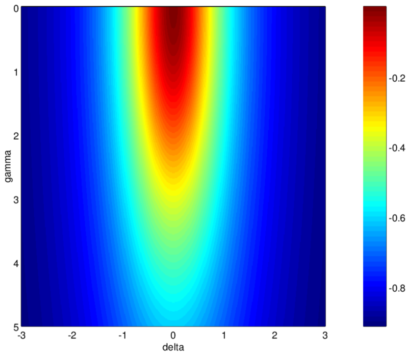
Stacionární řešení

$$
\begin{aligned}
p &= p_S \exp[-\mathrm{i}\delta t] \\
d &= d_S \\
\dot{p} &= -\mathrm{i}\delta p_S \exp[-\mathrm{i}\delta t] = -i d_S \tilde{\mu} \exp[-\mathrm{i}\delta t] - \gamma_\perp p_S \exp[-\mathrm{i}\delta t] \\
\dot{d} &= 0 = 4\,\mathrm{Im}\{\tilde{\mu}^* p_S \exp[\mathrm{i}(\delta - \delta)t]\} - \gamma_{\|}(d_S + 1)
\end{aligned}
$$

$$
p_S = -\frac{\mathrm{i}\tilde{\mu}}{\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta} d_S
$$

$$
d_S = -\frac{\gamma_{\|}\left(\gamma_\perp^2 + \delta^2\right)}{4\gamma_\perp |\tilde{\mu}|^2 + \gamma_{\|}\left(\gamma_\perp^2 + \delta^2\right)}
$$

$$
\left.\begin{aligned} \gamma_{\|} &= \gamma \\ \gamma_\perp &= \gamma/4 \end{aligned}\right\} \rightarrow
$$



Nikdy nelze dosáhnout inverze $d > 0$ ve stacionárním režimu, kladná inverze přechodový jev nebo musí být zapojeno více hladin.

Převod do 3D souřadného systému:

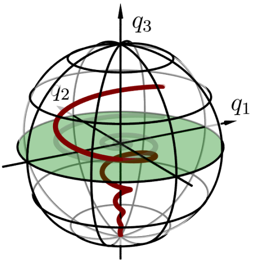
$$
\begin{aligned}
q_1 &= 2\,\mathrm{Re}\,p \\
q_2 &= 2\,\mathrm{Im}\,p \\
q_3 &= d \\
\tilde{\mu} &\in \mathbb{R} \qquad \text{BÚNO} \\
\dot{q}_1 &= -2\,\mathrm{Re}\,\dot{p} = 2\,\mathrm{Re}\,\{\mathrm{i}q_3\tilde{\mu}(\cos\delta t - \mathrm{i}\sin\delta t)\} - \gamma_\perp q_1 = -2\tilde{\mu}q_3\sin\delta t - \gamma_\perp q_1 \\
\dot{q}_2 &= -2\,\mathrm{Im}\,\dot{p} = 2\,\mathrm{Im}\,\{\mathrm{i}q_3\tilde{\mu}(\cos\delta t - \mathrm{i}\sin\delta t)\} - \gamma_\perp q_2 = -2\tilde{\mu}q_3\cos\delta t - \gamma_\perp q_2 \\
\dot{q}_3 &= 4\tilde{\mu}\,\mathrm{Im}\left\{\left(\frac{q_1}{2} + \mathrm{i}\frac{q_2}{2}\right)\left(\cos\delta t + \mathrm{i}\sin\delta t\right)\right\} - \gamma_{||}(q_3+1) = \\
&\qquad 2\tilde{\mu}(q_1\sin\delta t + q_2\cos\delta t) - \gamma_{||}(q_3+1)
\end{aligned}
$$

Položme $\boldsymbol{R} = (q_1, q_2, q_3)^T$:

$$
\begin{aligned}
\dot{\boldsymbol{R}} &= \boldsymbol{\Omega} \times \boldsymbol{R} - \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{R} + \boldsymbol{S} \\
\boldsymbol{\Omega} &= 2\tilde{\mu}\left(\cos\delta t, -\sin\delta t, 0\right)^T \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \begin{pmatrix} \gamma_\perp & 0 & 0 \\ 0 & \gamma_\perp & 0 \\ 0 & 0 & \gamma_{||} \end{pmatrix} \\
\boldsymbol{S} &= (0, 0, -\gamma_{||})^T
\end{aligned}
$$

Řešení Blochových rovnic

- Blochův vektor ukazuje stav polarizace a inverze včetně fáze.
- Relaxace polarizace a inverze: pohyb směrem k bodu $(0, 0, -1)$ po přímce, zkracování průmětu do roviny $q_1 q_2$.
- Interakce s polem: rotace kolem vektoru $\mathbf{\Omega}$.
- Rychlost rotace úměrná velikosti $\mathbf{\Omega}$.
- Vektor $\mathbf{\Omega}$ se otáčí v horizontální rovině s frekvencí δ.
- Úhel opsaný vektorem $\boldsymbol{R}$ určuje délku pulsu, viz π puls dříve.



Dynamika dvouhladinového systému

Nehomogenně rozšířený systém

- Například atomy plynu v kyvetě (dopplerovské rozšíření), nanostruktury (fluktuace rozměrů).
- Každý dvouhladinový systém svoji energii dipólového přechodu $\hbar\omega_{21}(\ell)$, tedy i své δ_ℓ.
- Pro zjednodušení uvažujeme $\tilde{\mu} = \tilde{\mu}_\ell$ nezávislé na systému.
- Pro každý z individuálních systémů platí Blochovy rovnice.
- Součet polarizací pak dává odezvu systému — (komplexní) makroskopickou polarizaci

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t) = \boldsymbol{d}_{12} \sum_\ell p_\ell(t) = \boldsymbol{d}_{12} \exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] \int N(\delta) p(\delta) \exp[\mathrm{i}\delta t] \, \mathrm{d}\delta$$

- Pro jednoduchost budeme uvažovat gaussovskou distribuční funkci centrovanou kolem ω_0:

$$N(\delta) = N_0 \frac{1}{\sigma\sqrt{\pi}} \exp\left[-\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right]$$

Tlumení volné indukce

- Po excitaci velmi krátkým ($\tau\delta \ll 1$) $\pi/2$ pulsem je inverze $d = 0$, polarizace maximální. $p = +\mathrm{i}/2$.
- Homogenní systém: makroskopická polarizace osciluje

$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \frac{\mathrm{i}N_0\boldsymbol{d}_{12}}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega_{21}t]$$

- Nehomogenní systém: fáze jednotlivých příspěvků se v součtu mikroskopických polarizací rozcházejí a postupně průměrují.

$$\begin{aligned}
\widetilde{\boldsymbol{P}}(t) &= \boldsymbol{d}_{12}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]\int N(\delta)p(0)\exp[\mathrm{i}\delta t]\,\mathrm{d}\delta = \\
&= \boldsymbol{d}_{12}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]\int \frac{N_0}{\sigma\sqrt{\pi}}\exp\left[-\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right]\frac{\mathrm{i}}{2}\exp[\mathrm{i}\delta t]\,\mathrm{d}\delta = \\
&= \frac{\mathrm{i}N_0\boldsymbol{d}_{12}}{2\sigma\sqrt{\pi}}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]\int \cos(\delta t)\exp\left[-\delta^2/\sigma^2\right]\mathrm{d}\delta = \\
&= \mathrm{i}\frac{N_0\boldsymbol{d}_{12}}{2}\exp[-\sigma^2 t^2/4]
\end{aligned}$$

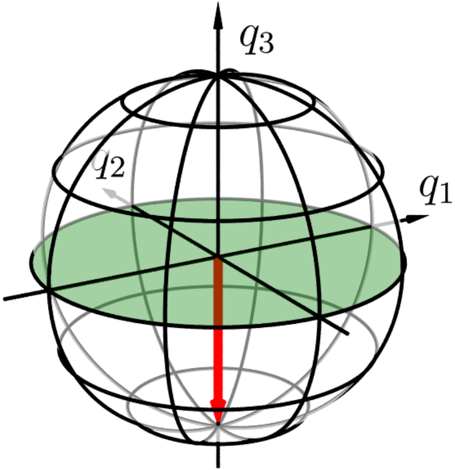
- Volná indukce (makroskopická polarizace) je tlumena i v plně koherentním systému.
- Rychlost tlumení při $P(0)/P(1/\Gamma) = \mathrm{e}$ je $\Gamma = \sigma/2 \propto \sigma$.

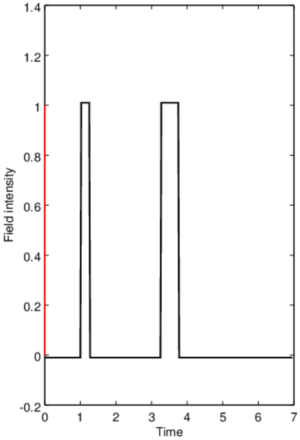
Dynamika dvouhladinového systému

Fotonové echo

- Použijeme jiný rotující rámec pro vektor $\boldsymbol{R}$: $q_1 = 2\,\mathrm{Re}\left\{p\exp[\mathrm{i}\delta t]\right\}$ a $q_2 = 2\,\mathrm{Im}\left\{p\exp[\mathrm{i}\delta t]\right\}$:
$$\boldsymbol{\Omega} = \left(2\tilde{\mu}, 0, -\delta\right)$$
- Složka odpovídající elektromagnetickému poli nerotuje, je ve směru $+q_1$.
- Bez elektromagnetického pole vektor rotuje kolem osy q_3.
- V tomto rámci je fáze $q_1 + \mathrm{i}q_2$ spřažená s elektromagnetickým polem.
- Makroskopická polarizace je potom úměrná prostému součtu složek vektorů $\boldsymbol{R}$:
$$\widetilde{\boldsymbol{P}} = \frac{\boldsymbol{d}_{12}}{2}\exp[-\mathrm{i}\omega_0 t]\sum_{\ell}\left[R_1(\ell) + \mathrm{i}R_2(\ell)\right]N_\ell$$
- Na Blochově sféře lze znázornit více systémů najednou.
- Sekvence pulsů: $\pi/2$ — tlumení volné indukce po dobu τ — π.
- První puls překlopí polohový vektor do roviny q_1q_2, druhý jej překlopí o 180° opět do roviny q_1q_2.
- Druhý puls překlápí o 180° nezávisle na δ (je to prostá rotace kolem osy q_1).

Fotonové echo





Fotonové echo analyticky Po iniciačním $\pi/2$ pulsu ($\tilde{\mu} \gg \delta, \gamma_\perp$, $\gamma_\| \approx 0$):

$$q_1(t_1) = 0$$
$$q_2(t_1) = 1$$
$$q_3(t_1) = 0$$

Vývoj mezi pulsy:

$$\dot{q}_1 = +\delta q_2 - \gamma_\perp q_1$$
$$\dot{q}_2 = -\delta q_1 - \gamma_\perp q_2$$
$$\dot{q}_3 = 0$$
$$q_1(t) = \sin\left[\delta(t - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right]$$
$$q_2(t) = \cos\left[\delta(t - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right]$$
$$q_3(t) = 0$$

Akce druhého pulsu v čase :

$$\dot{q}_1 = 0$$
$$\dot{q}_2 = -2\tilde{\mu} q_3$$
$$\dot{q}_3 = +2\tilde{\mu} q_2$$
$$q_1(t) = \sin\left[\delta(t - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right]$$
$$q_2(t) = \cos\left[\delta(t - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right] \cos\left[2\tilde{\mu}(t - t_2)\right]$$
$$q_3(t) = \cos\left[\delta(t - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right] \sin\left[2\tilde{\mu}(t - t_2)\right]$$

Dynamika dvouhladinového systému

$$
\begin{aligned}
q_1(t_2) &= +\sin\left[\delta(t_2 - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t_2 - t_1)\right] \\
q_2(t_2) &= -\cos\left[\delta(t_2 - t_1)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t_2 - t_1)\right] \\
q_3(t_2) &= 0
\end{aligned}
$$

Další vývoj:

$$
\begin{aligned}
\dot{q}_1 &= +\delta q_2 - \gamma_\perp q_1 \\
\dot{q}_2 &= -\delta q_1 - \gamma_\perp q_2 \\
\dot{q}_3 &= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
q_1(t) &= \Big\{ q_1(t_2)\cos\left[\delta(t-t_2)\right] + q_2(t_2)\sin\left[\delta(t-t_2)\right] \Big\} \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_2)\right] = \\
&= \Big\{ \sin\left[\delta(t_2-t_1)\right] \cos\left[\delta(t-t_2)\right] - \cos\left[\delta(t_2-t_1)\right] \sin\left[\delta(t-t_2)\right] \Big\} \exp\left[-\gamma_\perp(t-t_1)\right] = \\
&= -\sin\left[\delta(t + t_1 - 2t_2)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right] \\
q_2(t) &= \Big\{ -q_1(t_2)\sin\left[\delta(t-t_2)\right] + q_2(t_2)\cos\left[\delta(t-t_2)\right] \Big\} \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_2)\right] = \\
&= \Big\{ -\sin\left[\delta(t_2-t_1)\right] \sin\left[\delta(t-t_2)\right] - \cos\left[\delta(t_2-t_1)\right] \cos\left[\delta(t-t_2)\right] \Big\} \exp\left[-\gamma_\perp(t-t_1)\right] = \\
&= -\cos\left[\delta(t + t_1 - 2t_2)\right] \exp\left[-\gamma_\perp(t - t_1)\right] \\
q_3(t) &= 0
\end{aligned}
$$

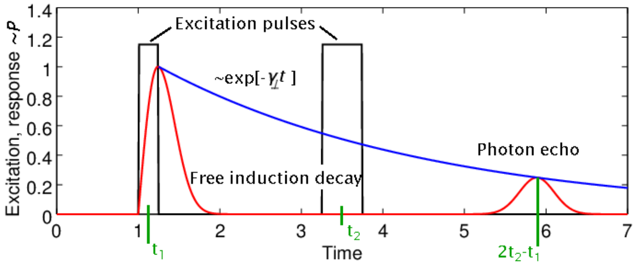
Dynamika dvouhladinového systému

$$\widetilde{\boldsymbol{P}}(t)\exp\left[\mathrm{i}\omega_0 t\right] = -\int \frac{N_0 \boldsymbol{d}_{12}}{\sigma\sqrt{\pi}}\left\{\sin\left[\delta(t+t_1-2t_2)\right] + i\cos\left[\delta(t+t_1-2t_2)\right]\right\}\cdot$$

$$\cdot\ \exp\left[-\frac{\delta^2}{\sigma^2}\right]\exp\left[-\gamma_\perp(t-t_1)\right]\mathrm{d}\delta =$$

$$= -\mathrm{i}N_0\boldsymbol{d}_{12}\exp\left[-\sigma^2((t-t_2)-\tau)^2/4\right]\exp\left[-\gamma_\perp(t-t_1)\right]$$

- V čase $\tau = t_2 - t_1$ po druhém pulsu se částečně zrekonstruuje polarizace ve tvaru odpovídajícím tlumení volné indukce.
- Plocha druhotné emise $\int |P|^2$ klesá $\propto \exp[-2\gamma_\perp t]$, a tedy $\propto \exp[-4\gamma_\perp \tau]$ neboť maximum je v čase $t_{\mathrm{MAX}} + t_1 - 2t_2 = 0 \ \Rightarrow\ t_{\mathrm{MAX}} = t_1 + 2\tau$.
- Přímé měření rychlosti rozfázování *excitací a sondováním* (obvykle $\gamma_\perp \gg \gamma_{||}$).



Maxwellovy–Blochovy rovnice

$$\nabla \cdot \boldsymbol{D} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{D} = \epsilon \boldsymbol{E} + \boldsymbol{P}$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{B} = 0 \qquad \nabla \times \boldsymbol{H} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial \boldsymbol{D}}{\partial t} \qquad \boldsymbol{B} = \mu_0 \boldsymbol{H}$$

$$c^{-2} = \mu_0 \epsilon_0 \qquad \boldsymbol{j} = \sigma \boldsymbol{E}$$

$$\nabla \times \nabla \times \boldsymbol{E} = -\triangle \boldsymbol{E} = -\mu_0 \partial_t \boldsymbol{j} - \mu_0 \partial_t^2 \boldsymbol{D} = -\mu_0 \sigma \dot{\boldsymbol{E}} - \mu_0 \ddot{\boldsymbol{P}} - \mu_0 \epsilon \ddot{\boldsymbol{E}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}
&\triangle \boldsymbol{E} - \mu_0 \sigma \dot{\boldsymbol{E}} - \frac{n^2}{c^2} \ddot{\boldsymbol{E}} = \mu_0 \ddot{\boldsymbol{P}} \\
&\boldsymbol{P}(t) = \boldsymbol{d}_{12} \exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] \int N(\delta) p(\delta) \exp[\mathrm{i}\delta t]\, \mathrm{d}\delta + \mathrm{c.c.} \\
&\dot{p} = -\frac{\mathrm{i}d}{\hbar} \left(\boldsymbol{d}_{21} \cdot \boldsymbol{E} \right) \exp[\mathrm{i}\omega_0 t] \exp[-\mathrm{i}\delta t] - \gamma_\perp p \\
&\dot{d} = \frac{4}{\hbar} \operatorname{Im}\left\{ \left(\boldsymbol{d}_{21} \cdot \boldsymbol{E}^* \right) p \exp[-\mathrm{i}\omega_0 t] \exp[+\mathrm{i}\delta t] \right\} - \gamma_{\|} (d+1) \\
&\delta = \omega_0 - \omega_{21}
\end{aligned}}$$

Maxwellovy–Blochovy rovnice

- Interakce pole s elektronem ovlivňuje elektromagnetické pole.
- Zvláště významné při malém počtu fotonů srovnatelném s počtem elektronů.
- Započítaná i dynamika vyzařování fotonů.
- Sekundárně vyzářené fotony mohou být opět absorbovány — oscilace.

Odvození semiklasických laserových rovnic

- Klasické elektromagnetické pole, budeme používat komplexní amplitudy:

$$\boldsymbol{E} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(t)\exp[-\mathrm{i}\omega t] + \text{c.c.}$$
$$\boldsymbol{P} = \widetilde{\boldsymbol{\mathcal{P}}}(t)\exp[-\mathrm{i}\omega t] + \text{c.c.}$$

  (POZOR! $\widetilde{\boldsymbol{\mathcal{E}}}(t)$ je pomalu se měnící obálka, kdežto $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ byla v dvouhladinovém modelu v čase konstantní amplituda.)
- Pole není monochromatické, proto frekvence ω může být libovolně zvolená, chybí jí tedy index „0“.
- Atomy budeme indexovat s pomocí indexu μ, pro každý označíme $\omega_\mu = \omega_{21}$.
- Polarizace atomů p_μ bude v pomalu rotujícím rámci na frekvenci ω_μ.
- Zavedeme rozdílovou frekvenci $\delta_\mu = \omega - \omega_\mu$.

Mody elektromagnetického pole

$$\ddot{\boldsymbol{E}} + \frac{c^2}{n^2}\mu_0\sigma\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{c^2}{n^2}\triangle\boldsymbol{E} = -\frac{c^2}{n^2}\mu_0\ddot{\boldsymbol{P}}$$

$$\mu_0\frac{c^2}{n^2} = \frac{1}{\epsilon}$$

$$\ddot{\boldsymbol{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon}\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{\mu_0\epsilon}\triangle\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\epsilon}\ddot{\boldsymbol{P}}$$

Vlastní mody (tj. řešení Maxwellových rovnic se započítáním okrajových podmínek) mají definované frekvence ω_λ, jejich normované amplitudy u_λ splňují (aproximace):

$$\left[\triangle + \mu_0\epsilon_\lambda\omega_\lambda^2\right]u_\lambda(\boldsymbol{x}) = 0 \qquad u_\lambda \in \mathbb{R}$$

Separace proměnných:

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{x}, t) = \sum_\lambda \boldsymbol{e}_\lambda E_\lambda(t)u_\lambda(\boldsymbol{x})$$

λ je multiindex zahrnující polarizaci, příčné i podélné mody a vektor $\boldsymbol{e}_\lambda$ je jednotkový polarizační vektor modu λ. Rozměr amplitudy E_λ není V/m jako u intenzity elektrického pole, ale kvůli normování $\mathrm{V}\sqrt{\mathrm{m}}$.

Dosadíme do vlnové rovnice za $\boldsymbol{E}$, označíme $\gamma_{c\lambda} = \sigma_\lambda/\epsilon_\lambda$ a dosadíme za $\triangle u_\lambda$:

$$\ddot{\boldsymbol{E}} + \frac{\sigma}{\epsilon}\dot{\boldsymbol{E}} - \frac{1}{\mu_0\epsilon}\triangle\boldsymbol{E} = -\frac{1}{\epsilon}\ddot{\boldsymbol{P}}$$

$$\sum_{\lambda'} \boldsymbol{e}_{\lambda'} u_{\lambda'}\left[\ddot{E}_{\lambda'} + \gamma_{c\lambda'}\dot{E}_{\lambda'} + \omega_{\lambda'}^2 E_{\lambda'}\right] = -\frac{1}{\epsilon}\ddot{\boldsymbol{P}} \qquad \Big/ \int \boldsymbol{e}_\lambda u_\lambda(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\ddot{E}_\lambda(t) + \gamma_{c\lambda}\dot{E}_\lambda(t) + \omega_\lambda^2 E_\lambda(t) = -\int \frac{u_\lambda(\boldsymbol{x})}{\epsilon}\left(\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \ddot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

Prostorová rozložení hustoty atomu s indexem μ:

$$\rho(\boldsymbol{x}) = \delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mu\right)$$

Makroskopická polarizace:

$$\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x},t) = \sum_\mu \boldsymbol{d}_{12}^\mu p_\mu(t)\delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mu\right)\exp\left[-\mathrm{i}\omega_\mu t\right] + \text{c.c.}$$

Dosazením do pravé strany vlnové rovnice:

$$-\int \frac{u_\lambda(\boldsymbol{x})}{\epsilon}\left(\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \ddot{\boldsymbol{P}}(\boldsymbol{x},t)\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = -\sum_\mu \frac{g_{\mu\lambda}}{\epsilon}\ddot{\left\{p_\mu(t)\exp\left[-\mathrm{i}\omega_\mu t\right] + \text{c.c.}\right\}}$$

$$g_{\mu\lambda} = \int u_\lambda(\boldsymbol{x})\delta\left(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_\mu\right)\left(\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{d}_{12}^\mu\right)\mathrm{d}\boldsymbol{x} = u_\lambda\left(\boldsymbol{x}_\mu\right)\left(\boldsymbol{e}_\lambda \cdot \boldsymbol{d}_{12}^\mu\right)$$

- Tímto postupem jsme se zbavili prostorových závislostí a převedli jsme diferenciální rovnici 2. řádu (Laplaceův operátor) na soustavu rovnic se sumou.
- Index λ nutně musí obsahovat i paritu v otevřeném systému, tj. zda je řešení symetrické (cos) nebo antisymetrické (sin).
- V uzavřeném systému se vybere parita podle symetrie okrajových podmínek, mody jsou tak degenerované pouze v polarizaci.
- Postup je aproximativní: definice vlastních modů je správně pouze se zahrnutím okrajových podmínek daných geometrií pasivních prvků (zrcadel apod.).
- Každý atom (zdroj) ale definuje novou okrajovou podmínku a narušuje tak symetrii, pro kterou jsou definované vlastní mody.
- Například zdroj v bodě $x = 0$ v 1D problému generuje pole $\propto \cos(\omega t - k|x|)$, což *není* superpozice vlastních modů $\cos(\omega t \pm kx)$ a $\sin(\omega t \pm kx)$.
- V laserové dutině, která je téměř uzavřená (malá propustnost zrcadel) je přiblížení vlastních modů v pořádku, pokud se zajímáme o charakteristiky výstupního záření.
- Pro výpočet rozložení pole uvnitř dutiny by bylo nutné uvážit plnou symetrii, prostorové derivace není možné se zbavit úplně.
- Okrajové podmínky jsou definované jakoby dutina byla uzavřená, tj. odrazivost zrcadel 100%.
- Vyzařování laseru resp. průnik vnějších polí skrz výstupní zrcadlo bereme jako ztráty pole resp. řízení zdrojovým členem, chybu plynoucí z narušení symetrie přítomností výstupního zrcadla zanedbáváme stejně jako v případě atomů.

- Uvažujeme $\boldsymbol{d}_{12}^{\mu}, \boldsymbol{e}_{\lambda} \in \mathbb{C}$ — kruhově–polarizační pasivní prvky v dutině, magnetické pole, ...
- Dosadíme pomalu se měnící komplexní obálky:

$$\left(-\omega^2\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda - 2\mathrm{i}\omega\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda + \ddot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \left(-\omega^2\widetilde{\mathcal{E}}^*_\lambda + 2\mathrm{i}\omega\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^*_\lambda + \ddot{\widetilde{\mathcal{E}}}^*_\lambda\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} +$$

$$+\left(-\mathrm{i}\omega\gamma_{c\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda + \gamma_{c\lambda}\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \left(+\mathrm{i}\omega\gamma_{c\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}^*_\lambda + \gamma_{c\lambda}\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^*_\lambda\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} +$$

$$+\omega_\lambda^2\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \omega_\lambda^2\widetilde{\mathcal{E}}^*_\lambda\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t} =$$

$$= -\frac{1}{\epsilon}\sum_\mu \tilde{g}^*_{\mu\lambda}\left(-\omega_\mu^2 p_\mu - 2\mathrm{i}\omega_\mu\dot{p}_\mu + \ddot{p}_\mu\right)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mu t} -$$

$$-\frac{1}{\epsilon}\sum_\mu \tilde{g}_{\mu\lambda}\left(-\omega_\mu^2 p^*_\mu + 2\mathrm{i}\omega_\mu\dot{p}^*_\mu + \ddot{p}^*_\mu\right)\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_\mu t}$$

$$\tilde{g}_{\mu\lambda} = u_\lambda(\boldsymbol{x}_\mu)\left(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{d}_{21}^{\mu}\right)$$

- Pomalu měnící se obálka splňuje $\left|\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda\right| \ll \omega_\lambda\left|\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda\right|$.
- Můžeme separovat kladnou a zápornou frekvenci, rovnice pro ně jsou komplexně sdružené.
- První derivace v prvním členu není možné se zbavit, neboť musíme vzít do úvahy i poslední člen před závorkou:

$$\left|\left(\omega_\lambda^2 - \omega^2\right)\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda\right| \ll \omega_\lambda^2\left|\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda\right| \gg \omega\left|\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda\right|$$

- Aplikujeme *aproximaci pomalu se měnící obálky* (Slowly Varying Envelope Approximation): zanedbání relevantních vyšších derivací.
- Aplikujeme *aproximaci rotující* vlny (Rotating Wave Approximation): uvážíme $\omega \approx \omega_\lambda \approx \omega_\mu$ a do kladné frekvence pole započítáme pouze příspěvek kladné frekvence polarizace.

$$\left[-\omega^2 \widetilde{\mathcal{E}}_\lambda - 2\mathrm{i}\omega \dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda - \mathrm{i}\omega\gamma_{c\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda + \omega_\lambda^2 \widetilde{\mathcal{E}}_\lambda\right]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} = \frac{\omega_\mu^2}{\epsilon}\sum_\mu \tilde{g}^*_{\mu\lambda} p_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\mu t}$$

- Rovnici vydělíme $2\mathrm{i}\omega$ a $\omega_\lambda/\omega = \omega_\mu/\omega = 1$.
- $\omega_\lambda^2 - \omega^2 \approx 2\omega(\omega_\lambda - \omega)$:

$$\boxed{\begin{aligned} \dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda &= \left[\mathrm{i}(\omega - \omega_\lambda) - \frac{\gamma_{c\lambda}}{2}\right]\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda + \frac{\mathrm{i}\omega}{2\epsilon}\tilde{g}^*_{\mu\lambda} p_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\mu t} \\ \dot{p}_\mu &= -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{g}_{\mu\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda d_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_\mu t} - \gamma_\perp p_\mu \\ \dot{d}_\mu &= \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{g}^*_{\mu\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}^*_\lambda p_\mu \mathrm{e}^{i\delta_\mu t}\right\} - (d_\mu - d_{\mu 0})/T \end{aligned}}$$

Semiklasické laserové rovnice

- $d_{\mu 0} \neq -1$: tento člen zohledňuje termální rozdělení a čerpání, je to nesaturovaná inverze jako v klasických rovnicích.
- Relaxační dobu $\gamma_{||}$ nahradíme relaxační dobou inverze $1/T = \gamma_{||} + w_{21}$ (w_{21} je rychlost čerpání).

Odvození klasických laserových rovnic

- Uvažujme jeden mod, jeden typ atomů, oscilace na frekvenci fotonového modu: $\omega = \omega_\lambda$.
- Pole i atomy v rotujícím rámci s frekvencí ω.

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = -\frac{\gamma_\mathrm{c}}{2}\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{\mathrm{i}\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^* p$$

$$\dot{p} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}d - \gamma_\perp p + \mathrm{i}\delta p$$

$$\dot{d} = \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\Big\{\tilde{g}^*\widetilde{\mathcal{E}}^* p\Big\} - \big(d - d_0\big)/T$$

- Polarizace kvazistatická: sleduje pole, nemá paměť (je silně tlumená):

$$\dot{p} = 0 \qquad \rightarrow \quad p(t) = -\frac{\mathrm{i}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}(t)d(t)}{\hbar\big(\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta\big)}$$

Odvození klasických rovnic

Dosadíme do rovnice pro inverzi a intenzitu:

$$\dot{d} + \left(d - d_0\right)/T = \frac{4\left|\tilde{g}\right|^2 \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 d}{\hbar^2} \operatorname{Im} \frac{-\mathrm{i}}{\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta} = -\frac{4\left|\tilde{g}\right|^2}{\hbar^2} \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 + \delta^2} \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 d$$

$$\partial_t \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 = \widetilde{\mathcal{E}}\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^* + \dot{\widetilde{\mathcal{E}}}\widetilde{\mathcal{E}}^* = -\frac{\gamma_\mathrm{c}}{2}\left(\widetilde{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}}^* + \widetilde{\mathcal{E}}^*\widetilde{\mathcal{E}}\right) + \frac{\mathrm{i}\omega N_0}{2\epsilon}\left(\tilde{g}^* p \widetilde{\mathcal{E}}^* - \tilde{g} p^* \widetilde{\mathcal{E}}\right) =$$

$$= -\gamma_\mathrm{c}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 + \frac{\omega N_0}{2\epsilon} \frac{\left|\tilde{g}\right|^2 \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2}{\hbar} d \left(\frac{1}{\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta} + \frac{1}{\gamma_\perp + \mathrm{i}\delta}\right) =$$

$$= -\gamma_\mathrm{c}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 + \frac{\omega N_0}{\epsilon} \frac{\left|\tilde{g}\right|^2}{\hbar} \frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 + \delta^2} \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 d$$

Struktura podobná klasickým rovnicím:

$$\dot{D} = \left(D_0 - D\right)\frac{1}{T} - 2BDn$$

$$\dot{n} = BDn - 2\gamma n$$

Odvození klasických rovnic

Počet fotonů — hustota toku energie:

$$\langle S\rangle = \langle|\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{H}|\rangle = \frac{n_0 c\epsilon_0}{2}\left|\boldsymbol{E}\right|^2 = 2n_0 c\epsilon_0\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 \overbrace{\left|u_\lambda\right|^2}^{\approx 1/L^3} =$$

$$= \underbrace{\frac{n}{L^3}}_{\text{hustota fotonů}} \frac{\overbrace{\hbar\omega c}^{\text{tok energie}}}{n_0} \qquad \Rightarrow \qquad n = \frac{2\epsilon}{\hbar\omega}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2$$

Po dosazení a definici:

$$2\gamma = \gamma_c$$

$$B = \frac{\omega\left|\tilde{g}\right|^2}{\hbar\epsilon}\frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2 + \delta^2}$$

$$D = N_0 d$$

$$\dot{D} - \frac{(D_0 - D)}{T} = -2BDn$$

$$\dot{n} = -2\gamma n + BDn$$

q.e.d.

Odvození frekvence oscilací

Výpočet frekvence oscilací při $\omega_\lambda \neq \omega_\mu$

- Jeden mod, jeden druh atomů.
- Optický mod a atomy nejsou v rezonanci, otázkou je, na jaké energii laser osciluje.
- Silně nelineární systém, oscilace mohou být na frekvenci odlišné od ω_λ a ω_μ.
- Laserové rovnice pro homogenní systém a jeden mod, podobně jako u odvození klasických rovnic, ale $\omega \neq \omega_\lambda$, vše osciluje na frekvenci ω:

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = \left[\mathrm{i}\left(\omega - \omega_\lambda\right) - \frac{\gamma_c}{2}\right]\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{\mathrm{i}\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^* p$$

$$\dot{p} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}} d - \gamma_\perp p + \mathrm{i}\delta p$$

$$\dot{d} = \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{g}^*\widetilde{\mathcal{E}}^* p\right\} - \left(d - d_0\right)/T$$

- Stacionární řešení: $\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = \dot{p} = \dot{d} = 0$.
- Rovnice pro $|\widetilde{\mathcal{E}}|^2$ stejně jako u odvození klasických rovnic:

Odvození frekvence oscilací

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 = 0 = -\gamma_\mathrm{c}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 + \frac{\omega N_0}{\epsilon}\frac{\left|\tilde{g}\right|^2}{\hbar}\frac{\gamma_\perp}{\gamma_\perp^2+\delta^2}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 d \quad \Rightarrow \quad d = \frac{\gamma_\mathrm{c}\epsilon\hbar\left(\gamma_\perp^2+\delta^2\right)}{\left|\tilde{g}\right|^2\omega N_0\gamma_\perp}$$

$$\dot{p} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = -\frac{\mathrm{i}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}(t)d(t)}{\hbar\left(\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta\right)}$$

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = 0 = \left[\mathrm{i}\left(\omega-\omega_\lambda\right) - \frac{\gamma_\mathrm{c}}{2}\right]\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{\mathrm{i}\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^*(-\mathrm{i})\frac{\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}}{\hbar\left(\gamma_\perp-\mathrm{i}\delta\right)}\frac{\gamma_\mathrm{c}\epsilon\hbar\left(\gamma_\perp^2+\delta^2\right)}{\left|\tilde{g}\right|^2\omega N_0\gamma_\perp}$$

$$\Downarrow$$

$$\gamma_\mathrm{c} - 2\mathrm{i}\left(\omega-\omega_\lambda\right) = \frac{\gamma_\mathrm{c}\left(\gamma_\perp+\mathrm{i}\delta\right)}{\gamma_\perp} \qquad \left(\delta = \omega - \omega_\mu\right)$$

$$\boxed{\bar{\omega} = \frac{\gamma_\mathrm{c}\omega_\mu + 2\gamma_\perp\omega_\lambda}{\gamma_\mathrm{c}+2\gamma_\perp}}$$

- Ve stacionárním režimu, kdy je inverze saturovaná a pole je s ní v rovnováze, je frekvence daná váženým průměrem, váhy jsou dány ztrátami.
- Mimo rovnováhu může laser oscilovat i na jiné frekvenci, jedná se o přechodový jev.

Řešení rovnic poruchovou řadou

- Chceme řešit laserové rovnice, ty jsou ale nelineární, provedeme proto nějakým způsobem linearizaci.
- Budeme předpokládat $\tilde{g}_{\mu\lambda} \leq \gamma_j$, potom můžeme použít poruchový výpočet (do libovolného řádu).

$$\widetilde{\mathcal{E}} = \widetilde{\mathcal{E}}^{(0)} + \widetilde{\mathcal{E}}^{(1)} + \widetilde{\mathcal{E}}^{(2)} + \dots$$
$$p = p^{(0)} + p^{(1)} + p^{(2)} + \dots$$
$$d = d^{(0)} + d^{(1)} + d^{(2)} + \dots$$

- Symbolicky zapíšeme laserové rovnice, vynecháme zatím indexy λ a μ.
- Symbol ξ je parametr síly vazby mezi členy v rovnicích.

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = \Theta_{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}} + \xi\Sigma_{\mathcal{E}}p$$
$$\dot{p} = \Theta_p p + \xi\Sigma_p\widetilde{\mathcal{E}}d$$
$$\dot{d} = \Theta_d(d - d_0) + \xi\,\mathrm{Im}\,\Sigma_d p\widetilde{\mathcal{E}}^*$$

- Po dosazení pro amplitudu elektrického pole:

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(0)} + \dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(1)} + \dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(2)} + \ldots = \Theta_{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}}(0) + \Theta_{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}}(1) + \Theta_{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}}(2) + \ldots$$
$$+ \xi\Sigma_{\mathcal{E}}\,\boldsymbol{p}^{(0)} + \xi\Sigma_{\mathcal{E}}\,\boldsymbol{p}^{(1)} + \xi\Sigma_{\mathcal{E}}\,\boldsymbol{p}^{(2)} + \ldots$$

- Srovnáváme vždy členy stejné velikosti v mocnině ξ.
- Počáteční podmínka $\widetilde{\mathcal{E}}(t=0) = \widetilde{\mathcal{E}}^{(0)}(t=0)$, a tedy $\widetilde{\mathcal{E}}^{(j)}(t=0) = 0$ pro $j > 0$.
- Podobně pro $p^{(j)}$ a $d^{(j)}$.

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}^{(j)} = \Theta_{\mathcal{E}}\widetilde{\mathcal{E}}^{(j)} + \xi\Sigma_{\mathcal{E}}\,\boldsymbol{p}^{(j-1)}$$
$$\dot{\boldsymbol{p}}^{(j)} = \Theta_p \boldsymbol{p}^{(j)} + \xi\Sigma_p \sum_{\ell} \left[\widetilde{\mathcal{E}}^{(\ell)} \boldsymbol{d}^{(j-\ell-1)}\right]$$
$$\dot{\boldsymbol{d}}^{(j)} = \Theta_d \left[\boldsymbol{d}^{(j)} - d_0\delta_{j,0}\right] + \xi \sum_{\ell} \operatorname{Im} \Sigma_d \widetilde{\mathcal{E}}^{*(\ell)} \boldsymbol{p}^{(j-\ell-1)}$$

Stabilita pole — kvazistacionární řešení poruchovou řadou

- Vypočítáme poruchovou řadou, jak optické pole ovlivňuje samo sebe skrze načerpané aktivní prostředí.
- Pro zjednodušení budeme v rezonanci $\omega = \omega_\lambda = \omega_\mu$.
- Počáteční podmínka je nesaturovaná inverze $d^{(0)}(0) = d_0$ a $p^{(0)}(0) = 0$.
- Koeficient malosti $\tilde{g}$ malý, ale zdrojový člen pro pole $\omega N_0/2\epsilon$ naopak velký, poruchový počet pro pole nelze aplikovat.
- Dynamika pole pomalá oproti atomům:
- Rychlost světla $c = 300\ \mu$m/ps, s uvážením indexu lomu a délky rezonátoru $\approx$ 1m je doba oběhu řádově desítky ns, což je horní odhad pro $1/\gamma_c$.
- Běžné relaxační doby $\gamma_\perp \approx 0.1 - 10$ ps, $T \approx 1$ ns.
- Použijeme kvazistacionární řešení, polarizace i inverze rychle reagují na změny pole.

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = -\frac{\gamma_c}{2}\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{i\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^*\left(p^{(1)} + p^{(3)} + \dots\right)$$

$$\dot{p}^{(1)} = -\gamma_\perp p^{(1)} - \frac{i}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}d^{(0)}$$

$$\dot{p}^{(3)} = -\gamma_\perp p^{(3)} - \frac{i}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}d^{(0)} - \frac{i}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}}d^{(2)}$$

$$\dot{d}^{(0)} = 0$$

$$\dot{d}^{(2)} = -d^{(2)}/T + \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\,\tilde{g}^*\widetilde{\mathcal{E}}^* p^{(1)}$$

Poruchová řada

- Budeme předpokládat, že poruchová řada konverguje.
- Provedeme výpočet až do 3. řádu v amplitudě elektrického pole.
- Výpočet lze vždy zpřesnit přidáním vyšších členů.

$$
\begin{aligned}
d^{(0)} &= d_0 \\
\dot{p}^{(1)} &= 0 \\
p^{(1)} &= -\frac{\mathrm{i}\tilde{g}}{\hbar\gamma_\perp}\widetilde{\mathcal{E}}d_0 \\
d^{(2)} &= -\frac{4Td_0\left|\tilde{g}\right|^2\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2}{\hbar^2\gamma_\perp} \\
p^{(3)} &= \frac{4\mathrm{i}Td_0\left|\tilde{g}\right|^2\tilde{g}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2\widetilde{\mathcal{E}}}{\hbar^3\gamma_\perp^2}
\end{aligned}
$$

Poruchová řada

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = -\frac{\gamma_c}{2}\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{\omega N_0 \left|\tilde{g}\right|^2 d_0}{2\hbar\epsilon\gamma_\perp}\widetilde{\mathcal{E}} - \frac{2\omega N_0 T \left|\tilde{g}\right|^4 d_0}{\hbar^3\epsilon\gamma_\perp^2}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2\widetilde{\mathcal{E}} =$$

$$= -\gamma\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{1}{2}BD_0\widetilde{\mathcal{E}} - 2BD_0\frac{\left|\tilde{g}\right|^2 T}{\hbar^2\gamma_\perp}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2\widetilde{\mathcal{E}}$$

- První dva členy: klasické laserové rovnice.
- Poslední člen: vliv nelinearity, self–modulace pole.
- Mechanický model z 2. Newtonova zákona:

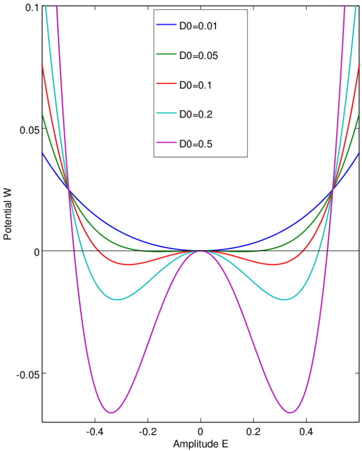
$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} = F(x)$$

- Okamžitá reakce na sílu: $m = 0$, pohyb není zpomalován setrvačnou hmotností, ale třením.
- Pohyb v potenciálu:
$$F(x) = -V'(x)$$
- Amplituda pole se tedy pohybuje v pseudopotenciálu:

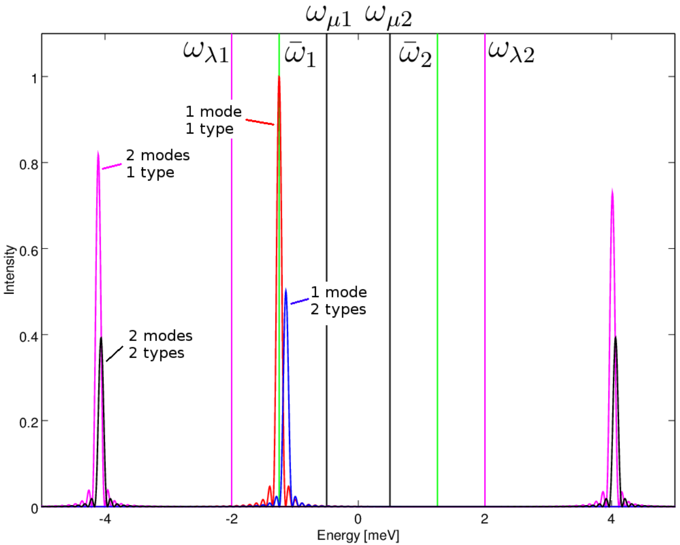
$$W(\widetilde{\mathcal{E}}) = -\frac{BD_0 - 2\gamma}{4}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 + \frac{BD_0\left|\tilde{g}\right|^2 T}{2\hbar^2\gamma_\perp}\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^4$$

Poruchová řada

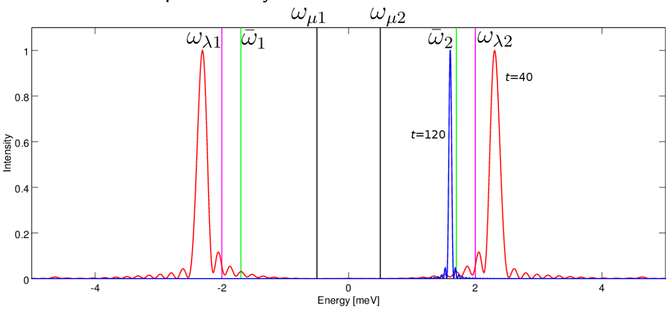
- Pod prahem $BD_0 < 2\gamma$: parabola, pole směřuje asymptoticky do počátku.
- Exponenciální pokles amplitudy, rovnovážná poloha bez fotonů.
- Nad prahem $BD_0 > 2\gamma$: postranní minima, která se s rostoucí nesaturovanou inverzí vzdalují.
- Stacionární stav: amplituda leží v minimu, s rostoucím čerpáním roste amplituda pole (vzdálenost od počátku).
- Stav $\widetilde{\mathcal{E}} = 0$ je stacionární, ale nestabilní, po prvotním impulsu (spontánně vyzářený foton) spěje systém do stabilní polohy.

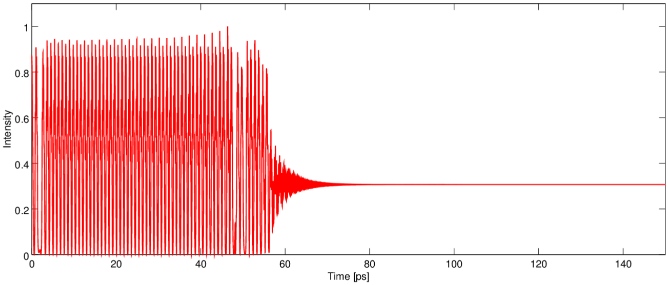


Jedno- a vícemodový režim, jeden a více druhů atomů.

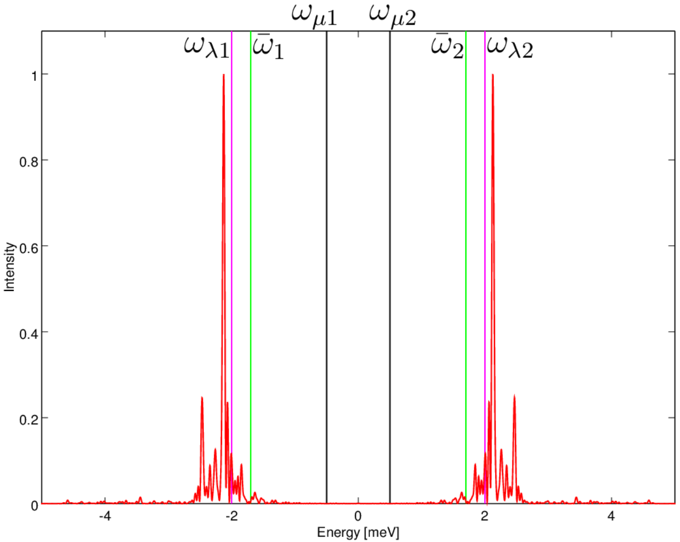


„Vyžírání inverze“ mírně preferovaným modem.





Chaotické chování.



Vlnové směšování, nerezonantní frekvence

- Uvažujme homogenní systém s jedním druhem atomů, ale se dvěma mody elektromagnetického pole $\lambda = 1, 2$.
- Neporušené frekvence fotonového modu $\omega_{1,2}$, skutečné $\Omega_{1,2}$ a $\Delta_{1,2} = \Omega_{1,2} - \omega_\mu$.
- Pokud jeden z modů prázdný, frekvence druhého modu se řídí rovnicí odvozenou dříve (je nezávislá na prázdném modu).
- Oba mody obsazené fotony — saturovaná inverze se liší od jednomodového případu (nelineární vazba mezi mody) a interakce modů způsobí oscilace na frekvencích posunutých od jednomodových řešení.
- 1. a další řády teorie poruch:

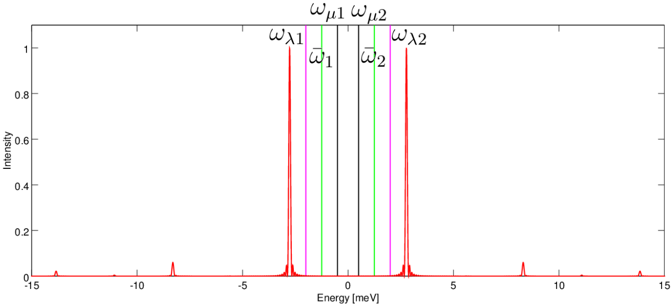
$$p^{(1)} \propto \widetilde{\mathcal{E}}_1 \exp\left[\mathrm{i}\Delta_1 t\right] + \widetilde{\mathcal{E}}_2 \exp\left[\mathrm{i}\Delta_2 t\right]$$

$$d^{(2)} \propto \left|\widetilde{\mathcal{E}}_1\right|^2 + \left|\widetilde{\mathcal{E}}_2\right|^2 + \left\{\widetilde{\mathcal{E}}_1 \widetilde{\mathcal{E}}_2^* \exp\left[\mathrm{i}\left(\Omega_2 - \Omega_1\right) t\right] + \text{c.c.}\right\}$$

$$p^{(3)} \propto \left(\widetilde{\mathcal{E}}_1 \exp\left[-\mathrm{i}\Delta_1 t\right] + \widetilde{\mathcal{E}}_2 \exp\left[-\mathrm{i}\Delta_2 t\right]\right)^2 \left(\widetilde{\mathcal{E}}_1^* \exp\left[\mathrm{i}\Delta_1 t\right] + \widetilde{\mathcal{E}}_2^* \exp\left[\mathrm{i}\Delta_2 t\right]\right)$$

- V rovnici pro amplitudu elektrického pole se objeví nové frekvence $2\Omega_1 - \Omega_2$ a $2\Omega_2 - \Omega_1$.
- Frekvence vzniklé čtyřvlnovým směšováním v nelineárním prostředí.
- Oscilace na těchto frekvencích i když neodpovídají modům rezonátoru.

- Intenzita postranních frekvencí tlumena faktorem $\propto 1/\left[\gamma_\perp^2 + \left(2\Omega_1 - \Omega_2 - \omega_\lambda\right)^2\right]$ podobně jako jsme spočítali odpovídající stacionární polarizaci při odvození klasických rovnic (tady je faktor v druhé mocnině, protože se jedná o indukovanou intenzitu pole).
- Podobně jsou ale intenzity hlavních modů tlumené s faktorem $1/\left[\gamma_\perp^2 + \left(\Omega_\lambda - \omega_\lambda\right)^2\right]$.
- Postranní frekvence mohou být srovnatelné co do intenzity vyzařování s hlavními mody.
- Postranní frekvence indukují další součtové frekvence...



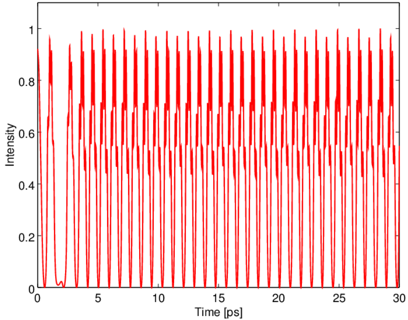
Mode locking

- Generování silných modů na směšovací frekvencích $2\Omega_1 - \Omega_2$ a $2\Omega_2 - \Omega_1$.
- Oscilace na těchto frekvencích silná, i když nejsou blízko neporušených frekvencí ω_λ.
- Efekt směšování znásoben blízkostí některého z neporušených modů.
- Pokud existuje třetí oscilující mod na frekvenci $\Omega_3 = 2\Omega_2 - \Omega_1$, oscilace robustní a odolné proti fluktuacím.
- V reálu lze jev pozorovat pokud měníme vnější parametr (např. vzdálenost zrcadel) dokud nenastane $\Omega_2 - \Omega_1 = \Omega_3 - \Omega_2$ (mody jsou ekvidistantní).
- V tomto stavu se mody „zamknou“ a jejich frekvence zůstanou stabilní při dalších (malých) změnách vnějšího parametru.

Semiklasické rovnice — shrnutí

- Oproti klasickým rovnicím bereme do úvahy fázi, a tedy i klasickou koherenci polí.
- Jsme schopni popsat i vícemodovou strukturu záření, nehomogenní aktivní prostředí.
- Oproti plným Maxwellovým–Blochovým rovnicím předpokládáme existenci stabilních modů pole, na určité úrovni aproximace zanedbáváme porušení symetrie pole vyzařujícími atomy.
- Parciální diferenciální rovnice se zjednoduší na vázané obyčejné diferenciální rovnice 1. řádu, což je významný krok pro naši schopnost rovnice řešit.
- Aproximace mají za následek nepřesný popis některých nelinearit, chybí opravné členy plynoucí z narušené symetrie.
- Dvouhladinový model popisuje pouze situaci, kdy je spodní hladina základním stavem elektronu. Pro jiné schéma je třeba oprava na proměnný počet aktivních atomů $N_0 \neq \text{const.}$.

- Kvantové fluktuace pouze ve formě rozfázování a relaxace na úrovni jednotlivých dvouhladinových systémů a jednotlivých modů pole: jejich vzájemná koherence není zahrnuta, z toho vyplývají vzájemné interference mezi mody, které nemohou být v reálu pozorovatelné.
- Přesto jsou semiklasické rovnice velmi užitečný nástroj pro výpočet dynamiky laserů.



Kvantové laserové rovnice

Úvodní poznámky

- **Semiklasická teorie:** klasické pole, odpovídá koherentnímu stavu.
- Z toho důvodu zanedbané neklasické kvantové fluktuace pole, matice hustoty tedy $\rho = \langle \rho_{\mathrm{TOT}} \rangle_{\mathrm{field,bath}}$.
- Role tepelné lázně: rozfázování, relaxace elektronu z horní hladiny, tlumení pole.
- Absence „startovního“ fotonu: pro $\widetilde{\mathcal{E}}(t{=}0) = 0$ je $\widetilde{\mathcal{E}}(t{>}0) = 0$.
- Obecně chybí spontánní procesy (nestředované).
- Fluktuace jsou středované a způsobují ad hoc dodané tlumení, předpokládá se, že fluktuace jsou tlumené a nemají tendenci růst.
- Přitom např. při vyšší než saturované inverzi je fluktuace pole exponenciálně zesilovaná!
- Stejně tak v chaotickém režimu má každá fluktuace za následek významnou změnu směru trajektorie systémuve fázovém prostoru.
- Fluktuace tedy nejsou vždy tlumené, mají významný vliv na dynamiku laseru, ale v semikalsické teorii nejsou zahrnuté.
- Matici hutoty je třeba rozšířit o stavy pole a tedy $\rho = \langle \rho_{\mathrm{TOT}} \rangle_{\mathrm{bath}}$.
- Relaxační členy je třeba odvodit z plně kvantové teorie, v potenciálně nestabilním/chaotickém systému není možné je rukou dopsat jako prostou exponenciální relaxaci.

Úvodní poznámky

- **Plně kvantová teorie:** zahrnutí všech důležitých částí do systému, tepelná lázeň je obecně velkým tepelným rezervoárem, kde jsou fluktuace silně tlumené.
- Obecně existují dva přístupy: Schrödingerův nebo Heisenbergův obraz.
- Přístup v Heisenbergově obraze: časově proměnné operátory, fluktuace jsou zdrojovými členy operátorů.
- Kinetické rovnice vedou na Langevinovy rovnice pro operátory.

$$m\ddot{x} + \sigma\dot{x} = F(x) + \xi(t)$$

- Přístup v Schrödingerově obraze: kinetika matice hustoty.
- Liouvillova rovnice:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \mathscr{L}\rho$$

- Matice hustoty ρ relativně velká, diskrétní, sousední členy nekorelované.
- Liouvilián $\mathscr{L}$ je nekonečná matice, jejíž prvky nejsou omezené, s rostoucí dimenzí divergují (!).
- Není možné jednoduše liouvilián oříznout, s nekonečnou maticí také nelze počítat.
- Lze zavést distribuční funkci jako v klasické mechanice: zavedeme hustotu pravděpodobnosti $p(x)$ a z Langevinovy rovnice odvodíme parciální diferenciální rovnici pro $p(x,t)$.

- Výsledkem je Fokkerova–Planckova rovnice:

$$\dot{p} = -\partial_x(\mu p) + \partial_x^2(Dp)$$

- μ ...drift, D ...difuze.
- Pro laser můžeme zavést kvantově-mechanický ekvivalent distribuční funkce, pro ni odvodíme Fokkerovu–Planckovu rovnici.
- Distribuční funkce:

$P(\alpha, \alpha^*)$	Glauberova–Sudarshanova (P) reprezentace
$Q(\alpha, \alpha^*)$	Husimiho (Q) reprezentace
$W(\alpha, \alpha^*)$	Wignerova reprezentace
$\rho_{\ell,m}$	Fockova reprezentace

- Obvykle laserové rovnice formulované v P reprezentaci.
- Výpočet dynamiky spojité „hezké“ funkce, omezené operátory, využití standardních metod matematické analýzy a numerické matematiky.
- Každý z přístupů má výhody a nevýhody, jejich využití je zvážit pro každý problém zvlášť.
- Zde odvodíme Langevinovy plně kvantové rovnice i přes jejich zdánlivě problematické řešení s pomocí operátorové algebry.

Postup

1. Mody elektromagnetického pole.
2. Hamiltonián pole.
3. Elektronové stavy.
4. Hamiltonián elektronů.
5. Elektron–fotonová interakce, celkový hamiltonián.
6. Fluktuace pole.
7. Fluktuace elektronů.
8. Kvantové laserové Langevinovy rovnice.

KL rovnice — mody pole

- Vlnová rovnice bez zdrojů v uzavřeném rezonátoru, okrajové podmínky definují mody.
- Vektorový potenciál: vektorový operátor.

$$\triangle\hat{\boldsymbol{A}} - \frac{1}{c^2}\partial_t^2\hat{\boldsymbol{A}} = 0$$

$$\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x},t) = \sum_\lambda \hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}^{(+)} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}) + \hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}^{(-)} \mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega t}\tilde{u}_\lambda^*(\boldsymbol{x})$$

$$\triangle\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}) + \frac{\omega_\lambda^2}{c^2}\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}) = 0$$

- Oproti semiklasickým rovnicím chceme $\tilde{u}_\lambda$ pro běžící mody, okrajové podmínky jsou splněné celkovým vektorovým potenciálem.

$$\hat{\tilde{\boldsymbol{A}}}_\lambda^{(+)} = \boldsymbol{e}_\lambda\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda\epsilon_0}}\hat{b}_\lambda$$

$$\hat{\boldsymbol{E}}_\lambda(\boldsymbol{x},t) = \mathrm{i}\sqrt{\frac{\hbar\omega}{2\epsilon_0}}\left[\boldsymbol{e}_\lambda\hat{b}_\lambda\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda t}\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{e}_\lambda^*\hat{b}_\lambda^+\mathrm{e}^{+\mathrm{i}\omega_\lambda t}\tilde{u}_\lambda^*(\boldsymbol{x})\right]$$

KL rovnice — hamiltonián pole

- Operátory $\hat{b}_\lambda$ jsou anihilační operátory harmonického oscilátoru, hamiltonián je totožný s harmonickým oscilátorem.

$$\left[\hat{b}_\lambda, \hat{b}^+_{\lambda'}\right] = \delta_{\lambda,\lambda'}$$

$$\boxed{\hat{H}_\mathrm{f} = \sum_\lambda \hbar\omega_\lambda \hat{b}^+_\lambda \hat{b}_\lambda}$$

- Stav pole ve Fockově reprezentaci vyjádřen počtem fotonů v jednotlivých modech λ:

$$\left|\Phi_{n_1,n_2,\ldots}\right\rangle = \left|n_1, n_2, \ldots\right\rangle = \frac{1}{\sqrt{n_1!n_2!\ldots}}\left(\hat{b}^+_1\right)^{n_1}\left(\hat{b}^+_2\right)^{n_2}\ldots\left|\mathrm{vac}\right\rangle$$

$$E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots = n_1\hbar\omega_1 + n_2\hbar\omega_2 + \ldots$$

$$n_\lambda = \left\langle \hat{b}^+_\lambda \hat{b}_\lambda \right\rangle$$

KL rovnice — stavy elektronů

- j-tá jednoelektronová vlnová funkce na μ-tém atomu $\varphi_{\mu j}(\boldsymbol{x})$.
- Elektronový anihilační operátor v bodě $\boldsymbol{x}$:

$$\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu,j} \hat{c}_{\mu j}\varphi_{\mu j}(\boldsymbol{x})$$

$$\hat{\Psi}^{+}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu,j} \hat{c}^{+}_{\mu j}\varphi^{*}_{\mu j}(\boldsymbol{x})$$

- (Anti-)komutační relace:

$$\left\{\hat{c}_j, \hat{c}_\ell\right\} = \hat{c}_j\hat{c}_\ell + \hat{c}_\ell\hat{c}_j = 0 \qquad \text{(antikomutace)}$$

$$\left\{\hat{c}_j, \hat{c}^{+}_\ell\right\} = \delta_{j,\ell}$$

$$\left\{\hat{\Psi}(\boldsymbol{x}), \hat{\Psi}^{+}(\boldsymbol{x}')\right\} = \sum_{\mu,j}\sum_{\mu',j'} \varphi_{\mu,j}(\boldsymbol{x})\varphi^{*}_{\mu',j'}(\boldsymbol{x}') \overbrace{\left\{\hat{c}_{\mu j}, \hat{c}^{+}_{\mu' j'}\right\}}^{\delta_{j,j'}\delta_{\mu,\mu'}} =$$

$$= \sum_{\mu}\sum_{j} \varphi_{\mu,j}(\boldsymbol{x})\varphi^{*}_{\mu,j}(\boldsymbol{x}') = \delta\left(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{x}'\right) \qquad \text{relace ortogonality}$$

KL rovnice — hamiltonián elektronů

- Obecný hamiltonián elektronů:

$$\hat{H}_\mathrm{e} = \sum_{\mu j} E_{\mu j} \hat{c}^+_{\mu j} \hat{c}_{\mu j}$$

- Dvouhladinové schéma, hladiny 1 a 2 na každém atomu.
- Energie základního stavu $E_1 = 0$ BÚNO.
- Označíme energii 2. hladiny $E_{2\mu} = \hbar\omega_\mu$.

$$\boxed{\hat{H}_\mathrm{e} = \sum_\mu \hbar\omega_\mu \hat{c}^+_{\mu 2} \hat{c}_{\mu 2}}$$

KL rovnice — elektron-fotonová interakce

- Hustota interakční energie semiklasicky:

$$\hat{H}(\boldsymbol{x}) = -\frac{e}{m}\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$$

- Kvantově je to stejné, jenom místo lokální (klasické) hodnoty vektorového potenciálu je operátor.
- Ve Schrödingerově obraze je hodnota $\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x})$ definovaná klasicky, operátor v souřadnicové reprezentaci $\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ dobře definovaný díky užití vlnové funkce také v souřadnicové reprezentaci.
- V Heisenbergově obraze používáme Fockovu reprezentaci, musíme najít lokální operátor $\hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$ (známe jen obsazovací čísla).
- Operátor lokální hustoty elektronů:

$$\hat{\varrho}(\boldsymbol{x}) = \sum_{\mu,j} \hat{c}^{+}_{\mu j}\hat{c}_{\mu j}\left|\varphi_{\mu j}(\boldsymbol{x})\right|^2 = \hat{\Psi}^{+}(\boldsymbol{x})\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})$$

- Pro Fockův stav s obsazovacími čísly $n_1, n_2, \dots$ ($n_j \in \{0, 1\}$) je zřejmě vlnová funkce $\psi\big(\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2, \dots\big) = \varphi_{1,n_1}\big(\boldsymbol{x}_1\big)\varphi_{2,n_2}\big(\boldsymbol{x}_2\big)\dots$ a jednočásticový operátor $\hat{O} = \hat{O}\big(\boldsymbol{x}_1\big) + \hat{O}\big(\boldsymbol{x}_2\big) + \dots$
- Pro fermiony evidentně

$$\langle\psi|\hat{O}|\psi'\rangle_{\boldsymbol{x}_1} = \big\langle n_1, n_2, \dots \big| \hat{c}^{+}_1 \varphi^* \hat{O}\varphi\hat{c}_1 \big| n'_1, n'_2, \dots \big\rangle_{\boldsymbol{x}_1}$$

$$\hat{O} = \int \hat{\Psi}^{+}(\boldsymbol{x})\hat{O}(\boldsymbol{x})\hat{\Psi}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

KL rovnice — elektron-fotonová interakce

- Elektron-fotonová interakce s operátorem $\hat{O}(\boldsymbol{x}) = -\frac{e}{m}\hat{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{x}) \cdot \hat{\boldsymbol{p}}(\boldsymbol{x})$:

$$\hat{H}_{\mathrm{e-f}} = \int \hat{\Psi}^{+}\left(-\frac{e}{m}\right)\hat{\boldsymbol{A}} \cdot \hat{\boldsymbol{p}}\,\hat{\Psi}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x} =$$

$$= -\frac{e}{m}\sum_{\lambda}\sum_{\mu,\mu'}\sum_{j,j'}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda \epsilon_0}}\overbrace{\left[\boldsymbol{e}_\lambda \hat{b}_\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda t}\tilde{\boldsymbol{u}}_\lambda(\boldsymbol{x}_\mu) + \mathrm{h.c.}\right]}^{\text{dipólová aproximace}} \cdot$$

$$\cdot \underbrace{\int \varphi^{*}_{\mu j}(\boldsymbol{x})\,\hat{\boldsymbol{p}}\,\varphi_{\mu' j'}(\boldsymbol{x})\hat{c}^{+}_{\mu j}\hat{c}_{\mu' j'}\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}}_{\propto \delta_{\mu,\mu'}} = \qquad \left(-\frac{e}{m}\langle j|\hat{\boldsymbol{p}}|j'\rangle = -\mathrm{i}\omega_{jj'}\langle j|e\boldsymbol{x}|j'\rangle\right)$$

$$= -\mathrm{i}\sum_{\lambda,\mu}\sum_{j,j'}\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega_\lambda \epsilon_0}}\omega_{jj'}\left[\boldsymbol{e}_\lambda \hat{b}_\lambda \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega_\lambda t}\tilde{\boldsymbol{u}}_\lambda(\boldsymbol{x}_\mu) + \mathrm{h.c.}\right]\hat{c}^{+}_{\mu j}\hat{c}_{\mu j'} \cdot$$

$$\cdot \int \varphi^{*}_{\mu j}(\boldsymbol{x})\,(e\boldsymbol{x})\,\varphi_{\mu j'}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

KL rovnice — celkový hamiltonián

- Hamiltonián elektron–fotonové interakce:

$$\hat{H}_{\mathrm{e-f}} = -\mathrm{i}\sum_{\lambda,\mu}\sqrt{\frac{\omega_\mu^2}{2\hbar\omega_\lambda\epsilon_0}}\left[\boldsymbol{e}_\lambda\hat{b}_\lambda(t)\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}_\mu)+\mathrm{h.c.}\right]\cdot$$

$$\cdot\left[\hat{c}_2^+\hat{c}_1\int\varphi_{\mu 2}^*(\boldsymbol{x})\,(e\boldsymbol{x})\,\varphi_{\mu 1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}-\mathrm{h.c.}\right]\approx \qquad \big(\mathrm{RWA}\big)$$

$$\approx -\sum_{\lambda,\mu}\hbar\tilde{g}_{\lambda\mu}\hat{b}_\lambda(t)\hat{c}_{\mu 2}^+\hat{c}_{\mu 1}-\sum_{\lambda,\mu}\hbar\tilde{g}_{\lambda\mu}^*\hat{b}_\lambda^+(t)\hat{c}_{\mu 1}^+\hat{c}_{\mu 2}$$

$$\tilde{g}_{\lambda\mu}=\mathrm{i}\sqrt{\frac{e^2\omega_\mu^2}{2\hbar\omega_\lambda\epsilon_0}}\,\tilde{u}_\lambda(\boldsymbol{x}_\mu)\int\varphi_{\mu 2}^*(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{e}_\lambda\cdot\boldsymbol{x})\varphi_{\mu 1}(\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}\boldsymbol{x}$$

$$\hat{b}_\lambda(t)=\hat{b}_\lambda\exp[-\mathrm{i}\omega_\lambda t]$$

- Problém: dodrželi jsme pořadí v součinu $\hat{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}$, ale hamiltonián nehermitovský, členy $\hat{b}_\lambda(t)\hat{c}_{\mu 2}^+\hat{c}_{\mu 1}$ a $\hat{b}_\lambda^+(t)\hat{c}_{\mu 1}^+\hat{c}_{\mu 2}$. Nutno provést QM specifickou opravu.
- Řešení 1: symetrizace $\hat{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}\to\big(\hat{\boldsymbol{A}}\cdot\hat{\boldsymbol{p}}+\hat{\boldsymbol{p}}\cdot\hat{\boldsymbol{A}}\big)/2$.
- Řešení 2 (v kvantové optice obvyklé a funkční): normální pořadí, křížky vlevo:

$$\hat{H}_{\mathrm{e-f}}=\sum_{\lambda,\mu}\hbar\tilde{g}_{\lambda\mu}\hat{c}_{\mu 2}^+\hat{c}_{\mu 1}\hat{b}_\lambda(t)-\sum_{\lambda,\mu}\hbar\tilde{g}_{\lambda\mu}^*\hat{b}_\lambda^+(t)\hat{c}_{\mu 1}^+\hat{c}_{\mu 2}$$

- Celkový hamiltonián obsahuje navíc interakci s tepelnou lázní.

$$\hat{H}_{\mathrm{TOT}}=\hat{H}_{\mathrm{e}}+\hat{H}_{\mathrm{f}}+\hat{H}_{\mathrm{e-f}}\;+\;\underline{\hat{H}_{\mathrm{f-B}}+\hat{H}_{\mathrm{e-B}}+\hat{H}_{\mathrm{B}}}$$

KL ROVNICE — FLUKTUACE POLE

- Interakce s tepelnou lázní, jejíž hamiltonián přesně neznáme, ale můžeme jej odhadnout:

$$\hat{H}_{\mathrm{B}} = \sum_{\omega} \hbar\omega \hat{B}_{\omega}^{+} \hat{B}_{\omega}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{f-B}} = \sum_{\lambda} \hat{b}_{\lambda}^{+} \hat{B}_{\lambda} + \mathrm{h.c.}$$

- Tepelná lázeň velká, rychle se v ní ztrácejí korelace, tzn. nemůže zapříčinit vazbu mezi mody. Každý mod můžeme uvažovat zvlášť, vynecháme index λ:

$$\hat{H}_{\mathrm{f-B}} = \hat{b}^{+} \hat{B} + \hat{B}^{+} \hat{b}$$

- Zavedeme symbolicky operátor $\hat{B}$, operátory $\hat{B}_{\bar{\omega}}$ jsou pomalu se měnící obálky a posuneme $\omega_{\lambda} \to 0$ a tím i $\omega \to \bar{\omega}$ (interakční obraz):

$$\hat{B}(t) = \hbar \sum_{\bar{\omega}} q_{\bar{\omega}} \hat{B}_{\bar{\omega}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega} t}$$

$$\hat{H}_{\mathrm{f-B}} = \hbar \hat{b}^{+} \sum_{\bar{\omega}} q_{\bar{\omega}} \hat{B}_{\bar{\omega}} \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega} t} + \mathrm{h.c.}$$

KL ROVNICE — FLUKTUACE POLE

- Časové změny operátorů z Heisenbergovy rovnice:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\left[\hat{b}, \hat{H}_{\mathrm{f-B}}\right] = -\mathrm{i}\sum_{\bar{\omega}} q_{\bar{\omega}}\hat{B}_{\bar{\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega}t}$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{B}_{\bar{\omega}} = -\mathrm{i}\hat{b}q^*_{\bar{\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}$$

$$\hat{B}_{\bar{\omega}}(t) = -\mathrm{i}\int_{t_0}^{t}\hat{b}(t')q^*_{\bar{\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t'}\,\mathrm{d}t' + \hat{B}_{\bar{\omega}}(t_0)$$

- Dosazením 1. rovnice do 3.:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = -\int_{t_0}^{t}\hat{b}(t')\sum_{\bar{\omega}}\left|q_{\bar{\omega}}\right|^2\exp\left[\mathrm{i}\bar{\omega}(t'-t)\right]\mathrm{d}t' - \mathrm{i}\sum_{\bar{\omega}} q_{\bar{\omega}}\hat{B}_{\bar{\omega}}(t_0)\exp\left[-\mathrm{i}\bar{\omega}t\right]$$

- Uvažujme slabou závislost $\left|q_{\bar{\omega}}\right|$ na $\bar{\omega}$ (slabá závislost zde znamená malá variace na šířce spektrální čáry fotonového modu), potom $\left|q_{\bar{\omega}}\right|^2 \approx q^2$ a

$$\sum_{\bar{\omega}}\left|q_{\bar{\omega}}\right|^2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}(t'-t)} \approx q^2\sum_{\bar{\omega}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}(t'-t)} = 2\varkappa\delta(t-t')$$

- Markovovský proces (okamžitá odezva, proces bez paměti).

KL rovnice — fluktuace pole

- Dále označíme fluktuující zdrojový člen jako stochastický operátor:

$$-\mathrm{i}\sum_{\bar\omega} q_{\bar\omega}\hat{B}_{\bar\omega}(t_0)\exp\left[-\mathrm{i}\bar\omega t\right] = \hat{F}(t)$$

- Výsledná rovnice pro pole:

$$\boxed{\dot{\hat{b}} = -\varkappa\hat{b} + \hat{F}(t)}$$

- Korelační funkce:

$$\left\langle\hat{F}(t)\right\rangle = -\mathrm{i}\sum_{\bar\omega} q_{\bar\omega}\left\langle\hat{B}_{\bar\omega}(t_0)\right\rangle e^{-\mathrm{i}\bar\omega t} = -\mathrm{i}\sum_{\bar\omega} q_{\bar\omega} e^{-\mathrm{i}\bar\omega t}\,\mathrm{Tr}\,\hat{B}_{\bar\omega}(t_0)\overbrace{\rho_{th,B}}^{\text{diagonální}} = 0$$

$$\left\langle\hat{F}^+(t)\right\rangle = 0$$

$$\left\langle\hat{F}(t)\hat{F}(t')\right\rangle = \left\langle\hat{F}^+(t)\hat{F}^+(t')\right\rangle = 0$$

$$\left\langle\hat{F}^+(t)\hat{F}(t')\right\rangle = \sum_{\bar\omega,\bar\omega'} q^*_{\bar\omega}q_{\bar\omega'}\exp\left[\mathrm{i}\left(\bar\omega t - \bar\omega' t'\right)\right]\overbrace{\left\langle\hat{B}^+_{\bar\omega}(t_0)\hat{B}_{\bar\omega'}(t_0)\right\rangle}^{\delta_{\bar\omega,\bar\omega'}\bar{n}_{\bar\omega}} =$$

$$= 2\varkappa\bar{n}_{\mathrm{th}}\delta(t-t')$$

$$\left\langle\hat{F}(t)\hat{F}^+(t')\right\rangle = 2\varkappa\left(\bar{n}_{\mathrm{th}}+1\right)\delta(t-t')$$

- Fluktuace a intenzita pole:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\langle\hat{b}^+(t)\hat{b}(t)\rangle = -\langle\dot{\hat{b}}^+(t)\hat{b}(t) + \hat{b}^+(t)\dot{\hat{b}}(t)\rangle =$$
$$= -2\varkappa\langle\hat{b}^+(t)\hat{b}(t)\rangle + \langle\hat{b}^+(t)\hat{F}(t) + \hat{F}^+(t)\hat{b}(t)\rangle$$

$$\hat{b}(t) = \hat{b}(t-\Delta t) + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \dot{\hat{b}}(t')\,\mathrm{d}t'$$

$$\langle\hat{F}^+(t)\hat{b}(t)\rangle = \langle\hat{F}^+(t)\hat{b}(t-\Delta t\rangle + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \langle\hat{F}^+(t)\dot{\hat{b}}(t')\rangle\,\mathrm{d}t =$$

$$= \underbrace{\langle\hat{F}^+(t)\hat{b}(t-\Delta t)\rangle}_{=0\ \text{(kauzalita)}} - \underbrace{\varkappa\int\limits_{t-\Delta t}^{t} \langle\hat{F}^+(t)\hat{b}(t')\rangle\,\mathrm{d}t'}_{\langle\hat{F}^+(t)\hat{b}(t)\rangle\,\mathrm{d}t\to 0} + \int\limits_{t-\Delta t}^{t} \langle\hat{F}^+(t)\hat{F}(t')\rangle\,\mathrm{d}t' =$$

$$= \int\limits_{-\Delta t}^{0} \langle\hat{F}^+(t)\hat{F}(t+\tau)\rangle\,\mathrm{d}\tau \overset{\text{krátká korelace}}{=} \frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \langle\hat{F}^+(0)\hat{F}(\tau)\rangle\,\mathrm{d}\tau = \varkappa\bar{n}_{\mathrm{th}}$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\langle\hat{b}^+\hat{b}\rangle = 2\varkappa\left[\bar{n}_{\mathrm{th}} - \langle\hat{b}^+\hat{b}\rangle\right]$$

KL rovnice — fluktuace elektronů

- Podobný postup jako s fotonovým polem, pracujeme v interakčním obraze $\bar{\omega} = \omega - \omega_\mu$:

$$\hat{H}_{\mathrm{e-B}} = \hbar \sum_{\bar{\omega}} g^*_{\bar{\omega}} \hat{B}^+_{\bar{\omega}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t} \hat{c}^+_1 \hat{c}_2 + \mathrm{h.c.}$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{B}_{\bar{\omega}} = -\mathrm{i} g^*_{\bar{\omega}} \hat{c}^+_1 \hat{c}_2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t}$$

$$\hat{B}_{\bar{\omega}}(t) = -\mathrm{i} \int_{t_0}^{t} g^*_{\bar{\omega}} \hat{c}^+_1(t')\hat{c}_2(t')\mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}t'}\,\mathrm{d}t' + \hat{B}_{\bar{\omega}}(t_0)$$

$$\left[\hat{c}^+_1\hat{c}_2, \hat{c}^+_2\hat{c}_1\right] = \hat{c}^+_1\hat{c}_1\hat{c}_2\hat{c}^+_2 - \hat{c}_1\hat{c}^+_1\hat{c}^+_2\hat{c}_2 \overset{\hat{c}^+_1\hat{c}_1 = 1 - \hat{c}_1\hat{c}^+_1}{=} \hat{c}^+_1\hat{c}_1(1 - \hat{c}^+_2\hat{c}_2) - -(1 - \hat{c}^+_1\hat{c}_1)\hat{c}^+_2\hat{c}_2 = \hat{c}^+_1\hat{c}_1 - \hat{c}^+_2\hat{c}_2$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}^+_1\hat{c}_2\right) = -\mathrm{i}(\hat{c}^+_1\hat{c}_1 - \hat{c}^+_2\hat{c}_2)\sum_{\bar{\omega}} g_{\bar{\omega}}\hat{B}_{\bar{\omega}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega}t}$$

$$(\hat{c}^+_1\hat{c}_1 - \hat{c}^+_2\hat{c}_2)\hat{c}^+_1\hat{c}_2 = \hat{c}^+_1(1 - \hat{c}^+_1\hat{c}_1)\hat{c}_2 - \hat{c}^+_1\hat{c}^+_2\underbrace{\hat{c}_2\hat{c}_2}_{=0} = \hat{c}^+_1\hat{c}_2$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}^+_1\hat{c}_2\right) = -\hat{c}^+_1\hat{c}_2 \int_{t_0}^{t} \underbrace{\sum_{\bar{\omega}} \left|g_{\bar{\omega}}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\bar{\omega}(t'-t)}}_{2\gamma\delta(t-t')}\,\mathrm{d}t \underbrace{-\mathrm{i}(\hat{c}^+_1\hat{c}_1 - \hat{c}^+_2\hat{c}_2)\sum_{\bar{\omega}} g_{\bar{\omega}}\hat{B}_{\bar{\omega}}(t_0)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\bar{\omega}t}}_{\Gamma_{12}(t)}$$

KL rovnice — fluktuace elektronů

- Interakce elektronů s druhou lázní: čerpání a relaxace inverze. V korespondenci se semiklasickým modelem zavedeme rychlosti čerpání a relaxace a rovnice v interakčním obraze jsou:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\hat{c}_1^+\hat{c}_2) &= -\gamma\hat{c}_1^+\hat{c}_2 + \hat{\Gamma}_{12}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\hat{c}_1^+\hat{c}_1) &= -w_{21}\hat{c}_1^+\hat{c}_1 + w_{12}\hat{c}_2^+\hat{c}_2 + \hat{\Gamma}_{11}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)(\hat{c}_2^+\hat{c}_2) &= +w_{21}\hat{c}_1^+\hat{c}_1 - w_{12}\hat{c}_2^+\hat{c}_2 + \hat{\Gamma}_{22}(t)
\end{aligned}
$$

- Lze spočítat korelační funkce:

$$
\begin{aligned}
\langle\hat{\Gamma}_{k\ell}(t)\hat{\Gamma}_{mn}(t')\rangle &= G_{k\ell,mn}\delta(t-t') \\
\langle c_\ell^+ c_\ell\rangle &= n_\ell \\
G_{11,11} &= w_{12}n_2 + w_{21}n_1 \\
G_{11,22} &= G_{22,11} = -w_{21}n_1 = w_{12}n_2 \\
G_{22,22} &= w_{21}n_1 + w_{12}n_2 \\
G_{12,12} &= G_{21,21} = 0 \\
G_{12,21} &= w_{12}n_2 - w_{21}n_1 + 2\gamma n_1 \\
G_{21,12} &= w_{21}n_1 - w_{12}n_2 + 2\gamma n_2
\end{aligned}
$$

Kvantové laserové Langevinovy rovnice

- Celkový (koherentní) hamiltonián bez rezervoáru, jeho akce je již vyjádřena v pohybových rovnicích:
$$\hat{H}_{\mathrm{COH}} = \hat{H}_{\mathrm{e}} + \hat{H}_{\mathrm{f}} + \hat{H}_{\mathrm{e-f}}$$
- Pohybová rovnice:
$$\mathrm{i}\hbar(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{O} = \left[\hat{O}, \hat{H}_{\mathrm{COH}}\right]$$
- Akce rezervoárů:

$$\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b}_\lambda &= -\varkappa\hat{b}_\lambda + \hat{F}_\lambda(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu2}\right) &= -\gamma\left(\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu2}\right) + \hat{\Gamma}_{\mu12}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu1}\right) &= -w_{21}\left(\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu1}\right) + w_{12}\left(\hat{c}^+_{\mu2}\hat{c}_{\mu2}\right) + \hat{\Gamma}_{\mu11}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}^+_{\mu2}\hat{c}_{\mu2}\right) &= +w_{21}\left(\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu1}\right) - w_{12}\left(\hat{c}^+_{\mu2}\hat{c}_{\mu2}\right) + \hat{\Gamma}_{\mu22}(t)
\end{aligned}$$

- **Vracíme se zpět z interakčního obrazu do Heisenbergova:** $\omega_\lambda \neq 0$ a $\omega_\mu \neq 0$.
- Pole:
$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b}_\lambda = \left(-\mathrm{i}\omega_\lambda - \varkappa\right)\hat{b}_\lambda + \mathrm{i}\tilde{g}^*_{\lambda\mu}\hat{c}^+_{\mu1}\hat{c}_{\mu2} + \hat{F}_\lambda(t)$$

Kvantové laserové Langevinovy rovnice

- Komutátory elektronových operátorů:

$$
\begin{aligned}
\left[\hat{c}_1^+\hat{c}_2,\hat{c}_2^+\hat{c}_1\right] &= \hat{c}_1^+\hat{c}_1-\hat{c}_2^+\hat{c}_2 \\
\left[\hat{c}_1^+\hat{c}_2,\hat{c}_1^+\hat{c}_1\right] &= \hat{c}_1^+\left[\hat{c}_1^+,\hat{c}_1\right]\hat{c}_2 = 2\,\overbrace{\hat{c}_1^+\hat{c}_1^+}^{=0}\hat{c}_1\hat{c}_2-\hat{c}_1^+\hat{c}_2 = -\hat{c}_1^+\hat{c}_2 \\
\left[\hat{c}_1^+\hat{c}_2,\hat{c}_2^+\hat{c}_2\right] &= \hat{c}_1^+\hat{c}_2 \\
\left[\hat{c}_1^+\hat{c}_1,\hat{c}_2^+\hat{c}_1\right] &= -\hat{c}_2^+\hat{c}_1
\end{aligned}
$$

- Kinetické rovnice:

$$
\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_2\right) &= \left(-\mathrm{i}\omega_\mu-\gamma\right)\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_2\right)+\mathrm{i}\tilde{g}_{\mu\lambda}\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_1-\hat{c}_2^+\hat{c}_2\right)b_\lambda+\hat{\Gamma}_{\mu 12}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_1\right) &= -w_{21}\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_1\right)+w_{12}\left(\hat{c}_2^+\hat{c}_2\right)+\left[\mathrm{i}\tilde{g}_{\mu\lambda}^*\hat{b}_\lambda^+\hat{c}_1^+\hat{c}_2+\mathrm{h.c.}\right]+\hat{\Gamma}_{\mu 11}(t) \\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\left(\hat{c}_2^+\hat{c}_2\right) &= +w_{21}\left(\hat{c}_1^+\hat{c}_1\right)-w_{12}\left(\hat{c}_2^+\hat{c}_2\right)-\left[\mathrm{i}\tilde{g}_{\mu\lambda}^*\hat{b}_\lambda^+\hat{c}_1^+\hat{c}_2+\mathrm{h.c.}\right]+\hat{\Gamma}_{\mu 22}(t)
\end{aligned}
$$

Kvantové laserové Langevinovy rovnice

- V korespondenci se semikalsickým modelem zavedeme:

$$\hat{d}_\mu = \hat{c}^+_{\mu 2}\hat{c}_{\mu 2} - \hat{c}^+_{\mu 1}\hat{c}_{\mu 1}$$
$$\hat{p}_\mu = \hat{c}^+_{\mu 1}\hat{c}_{\mu 2}$$
$$\hat{\Gamma}_{\mu d} = \hat{\Gamma}_{\mu 22} - \hat{\Gamma}_{\mu 11}$$
$$\gamma_\perp = \gamma$$
$$T = \frac{1}{w_{21} + w_{12}}$$
$$d_0 = \frac{w_{21} - w_{12}}{w_{21} + w_{12}}$$

- Rovnice výše přepíšeme (sumy přes λ a μ jsme vynechali):

$$\boxed{\begin{aligned}
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b}_\lambda &= \left(-\mathrm{i}\omega_\lambda - \varkappa\right)\hat{b}_\lambda + \mathrm{i}\tilde{g}^*_{\lambda\mu}\hat{p}_\mu + \hat{F}_\lambda(t)\\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{p}_\mu &= \left(-\mathrm{i}\omega_\mu - \gamma_\perp\right)\hat{p}_\mu - \mathrm{i}\tilde{g}_{\mu\lambda}\hat{d}_\mu\hat{b}_\lambda + \hat{\Gamma}_{\mu 12}(t)\\
(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{d}_\mu &= -\left(\hat{d}_\mu - \hat{d}_0\right)/T - \left[2\mathrm{i}\tilde{g}^*_{\mu\lambda}\hat{b}^+_\lambda\hat{p}_\mu + \mathrm{h.c.}\right] + \hat{\Gamma}_{\mu d}(t)
\end{aligned}}$$

Kvantové laserové rovnice

Srovnání se semiklasickou teorií

- Semiklasické rovnice:

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}}_\lambda = \left[\mathrm{i}(\omega-\omega_\lambda) - \frac{\gamma_{c\lambda}}{2}\right]\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda + \frac{\mathrm{i}\omega}{2\epsilon}\tilde{g}^*_{\mu\lambda} p_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\delta_\mu t}$$

$$\dot{p}_\mu = -\frac{\mathrm{i}}{\hbar}\tilde{g}_{\mu\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}_\lambda d_\mu \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\delta_\mu t} - \gamma_\perp p_\mu$$

$$\dot{d}_\mu = \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{g}^*_{\mu\lambda}\widetilde{\mathcal{E}}^*_\lambda p_\mu \mathrm{e}^{i\delta_\mu t}\right\} - (d_\mu - d_{\mu 0})/T$$

- Operátor $\hat{b}$ v kvantových rovnicích úměrný komplexní amplitudě vektorového potenciálu, ne elektrického pole.
- Komplexní amplituda intenzity elektrického pole srovnatelná s operátorem $\bar{b} = \mathrm{i}\hat{b}$ a navíc kvantový parametr $\tilde{g}$ srovnatelný se semiklasickým $\mathrm{i}\tilde{g}$, zavedeme $\mathrm{i}\tilde{g}' = \tilde{g}$.

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\bar{b}_\lambda = \left(-\mathrm{i}\omega_\lambda - \varkappa\right)\bar{b}_\lambda + \mathrm{i}\tilde{g}'^*_{\lambda\mu}\hat{p}_\mu + \hat{F}_\lambda(t)$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{p}_\mu = \left(-\mathrm{i}\omega_\mu - \gamma_\perp\right)\hat{p}_\mu - \mathrm{i}\tilde{g}'_{\mu\lambda}\hat{d}_\mu\bar{b}_\lambda + \hat{\Gamma}_{\mu 12}(t)$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{d}_\mu = -\left(\hat{d}_\mu - \hat{d}_0\right)/T - \left[2\mathrm{i}\tilde{g}'^*_{\mu\lambda}\bar{b}^+_\lambda\hat{p}_\mu + \mathrm{h.c.}\right] + \hat{\Gamma}_{\mu d}(t)$$

- Takto jsou rovnice co do znamének stejné ($2\mathrm{i}z + \mathrm{c.c.} = -4\,\mathrm{Im}\,z$).
- Středování $\widetilde{\mathcal{E}} \propto \langle\bar{b}\rangle$ atd. a aproximace středního pole $\langle\hat{A}\hat{B}\rangle \approx \langle\hat{A}\rangle\langle\hat{B}\rangle$ vedou přímo na semiklasické rovnice (fluktuace se vystředují $\langle\hat{\Gamma}_j\rangle(t) = \langle\hat{F}\rangle(t) = 0$).

Poruchové řešení

- V semiklasické teorii nemáme údaj o počtu fotonů, korelační funkce pole jsou klasické, odpovídají korelačním funkcím koherentního stavu.
- V plně kvantové teorii můžeme spočítat korelátor libovolného řádu, jeho Fourierova transformace dá spektrální funkci.
- Zkoumáme chování blízko prahu $d_S \approx d_0$, kvazistacionární řešení, uvažujeme jeden mod a rezonanci, rovnice pro pomalu se měnící obálky:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = -\varkappa\hat{b} + \mathrm{i}\tilde{g}^* N\left[\hat{p}^{(1)} + \hat{p}^{(3)}\right] + \hat{F}(t)$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{p}^{(3)} = -\gamma_\perp\hat{p}^{(3)} - \mathrm{i}\tilde{g}\hat{d}^{(2)}\hat{b} + \hat{\Gamma}_{12}(t)$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{d}^{(2)} = -\hat{d}^{(2)}/T - \left[2\mathrm{i}\tilde{g}^*\hat{b}^+\hat{p}^{(1)} + \mathrm{h.c.}\right] + \hat{\Gamma}_d(t)$$

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{p}^{(1)} = -\gamma_\perp\hat{p}^{(1)} - \mathrm{i}\tilde{g}d_0\hat{b} + \hat{\Gamma}_{12}(t)$$

- Fluktuace polarizace jsou relativně slabé (srovnatelné s fluktuací pole), ale jejich zesílení stimulovanými procesy je mnohem slabší (≈ 1) než zesílení fluktuací pole ($\approx N$).
- Do úvahy bereme pouze fluktuace v 3. a 4. řádu TP, poslední člen na 3. a 4. řádku zanedbáme.
- Stacionární řešení (bez fluktuací) implikuje nulovou levou stranu, fluktuace musíme integrovat, tj. 2. rovnice má řešení:

$$\hat{p}^{(3)} = -\frac{\mathrm{i}\tilde{g}\hat{d}^{(2)}\hat{b}}{\gamma_\perp} + \mathrm{e}^{-\gamma_\perp t}\int_{-\infty}^{t}\mathrm{e}^{\gamma_\perp t'}\hat{\Gamma}_{12}(t')\,\mathrm{d}t'$$

- Rovnice pro pole:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = G\hat{b} - C\hat{b}^{+}\hat{b}\hat{b} + \hat{F}_{\mathrm{TOT}}$$

$$G = \frac{|\tilde{g}|^2 d_0 N}{\gamma_\perp} - \varkappa$$

$$C = \frac{4|\tilde{g}|^4 d_0 N T}{\gamma_\perp^2}$$

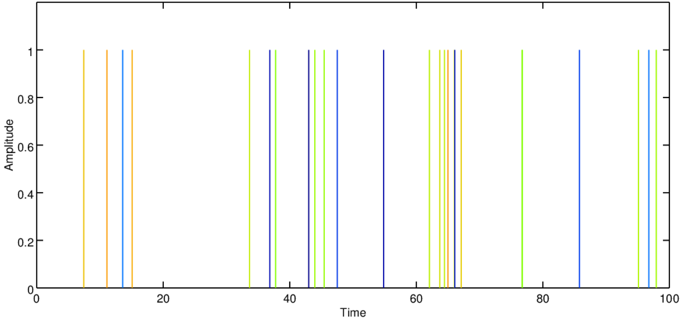
$$\hat{F}_{\mathrm{TOT}}(t) = \hat{F}(t) + 2\mathrm{i}\tilde{g}^* N \mathrm{e}^{-\gamma_\perp t} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\gamma_\perp t'} \hat{\Gamma}_{12}(t')\,\mathrm{d}t'$$

Pod prahem

- Z klasické teorie pod prahem nulová hustota fotonů (pouze spontánně vyzářené).
- Pole není v makroskopicky obsazeném stavu $\Rightarrow$ počet fotonů menší než 1 a tedy $\hat{b}\hat{b} = 0$ a nelineární člen s konstantou C můžeme zanedbat.
- Kinetika pole:

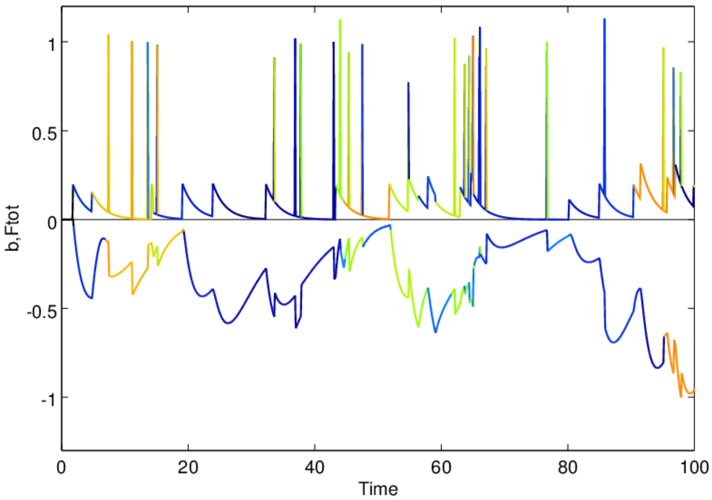
$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = G\hat{b} + \hat{F}_{\mathrm{TOT}}$$

- Operátory akce tepelné lázně se statisktický chovají jako bílý šum: impulsy v náhodném čase s náhodnou fází, amplituda δ-funkce, hustota šumu taková, aby např. $\langle \hat{F}^{+}(t)\hat{F}(t)\rangle = 2\varkappa\bar{n}_{\mathrm{th}}$.



Poruchové řešení pod prahem

- V reprezentaci, kde operátor $\hat{b}$ přejde na číslo můžeme jeho stochastický vývoj vykreslit.
- Šum pocházející od inverze doznívá pomaleji než šum pole díky paměti inverze.



Poruchové řešení pod prahem

- Kromě stochastického vývoje (tj. znázornění jediné trajektorie) nemáme přímý nástroj na výpočet střední hodnoty amplitudy pole v čase, např. vždy $\langle \hat{b}(t) \rangle = 0$ kvůli náhodnosti fáze a středování přes všechny realizace.
- Můžeme ale spočítat korelaci mezi počátečním a koncovým stavem, zavedeme korelační funkci 1. řádu $\mathcal{G}^{(1)}(t, t') = \mathcal{G}^{(1)}(t - t')$:

$$\mathcal{G}^{(1)}(t - t') = \left\langle \hat{b}^{+}(t) \hat{b}(t') \right\rangle$$

- De facto vyjadřuje vývoj amplitudy pole od času t do času t'. Pokud by např. $\hat{b}(t) = \hat{b}(t = 0) \exp[-\mathrm{i}\omega t]$, pak $\mathcal{G}^{(1)}(t) = \langle \hat{b}^{+}(0) \hat{b}(0) \exp[-\mathrm{i}\omega t] \rangle = n_0 \exp[-\mathrm{i}\omega t]$.
- Normovaná korelační funkce:

$$g^{(1)}(t - t') = \frac{\mathcal{G}^{(1)}(t - t')}{\mathcal{G}^{(1)}(0)}$$

- Spektrum záření odpovídá spektru korelační funkce:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^{(1)}(t) \exp[\mathrm{i}\omega t] \, \mathrm{d}t$$

Poruchové řešení pod prahem

- Výpočet korelační funkce: přímou integrací

$$\hat{b}(t) = \mathrm{e}^{Gt}\int_{-\infty}^{t} \hat{F}_{\mathrm{TOT}}(t')\mathrm{e}^{-Gt'}\,\mathrm{d}t'$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(t) = \mathrm{e}^{Gt}\int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{t} \langle \hat{F}^{+}_{\mathrm{TOT}}(u)\hat{F}_{\mathrm{TOT}}(u')\rangle \mathrm{e}^{-G(u+u')}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u'$$

- Fluktuace fotonů a atomů nekorelované, $\langle \hat{F}^{+}\hat{\Gamma}_{j\ell}\rangle = 0$.

$$\langle \hat{F}^{+}_{\mathrm{TOT}}(t')\hat{F}_{\mathrm{TOT}}(t)\rangle = \langle \hat{F}^{+}(t')\hat{F}(t)\rangle + 4|\tilde{g}|^2 N^2 \mathcal{I}$$

$$\mathcal{I} = \mathrm{e}^{-\gamma_\perp(t+t')}\int_{-\infty}^{t'}\int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{\gamma_\perp(u+u')}\langle \underbrace{\hat{\Gamma}_{21}(u')}_{=\hat{\Gamma}^{+}_{12}}\hat{\Gamma}_{12}(u)\rangle\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}u' =$$

$$= \begin{bmatrix} v = u - t \\ v' = u' - t' \end{bmatrix} = \int_{-\infty}^{0}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{\gamma_\perp(v+v')}\underbrace{\langle \hat{\Gamma}_{21}(v'+t')\hat{\Gamma}_{12}(v+t)\rangle}_{G_{21,12}\delta(v'+t'-v-t)}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}v' =$$

$$= \mathrm{e}^{-|\gamma_\perp(t-t')|}\int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{2\gamma_\perp v} G_{21,12}\,\mathrm{d}v = \mathrm{e}^{-\gamma_\perp|t-t'|}\frac{G_{21,12}}{2\gamma_\perp}$$

$$\langle \hat{F}^{+}_{\mathrm{TOT}}(t')\hat{F}_{\mathrm{TOT}}(t)\rangle = 2\varkappa\bar{n}_{\mathrm{th}}\delta(t-t') + 2|\tilde{g}|^2 N^2 G_{21,12}\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\perp|t-t'|}}{\gamma_\perp}$$

- Pro $\gamma_\perp \to \infty$ můžeme psát $\langle \hat{F}^{+}_{\mathrm{TOT}}(t')\hat{F}_{\mathrm{TOT}}(t)\rangle = 2\varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})\delta(t-t')$.

Poruchové řešení pod prahem

- Dosadíme mezivýsledek s označením $\alpha = 2\left|\tilde{g}\right|^2 N^2 G_{21,12}/\gamma_\perp$:

$$\mathcal{G}^{(1)}(t) = 2\varkappa\bar{n}_{\mathrm{th}}\mathrm{e}^{Gt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-2Gu}\,\mathrm{d}u + \alpha\mathrm{e}^{Gt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{-(\gamma_\perp+G)u}\int_{-\infty}^{u}\mathrm{e}^{(\gamma_\perp-G)u'}\,\mathrm{d}u'\mathrm{d}u +$$

$$+\,\alpha\mathrm{e}^{Gt}\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{(\gamma_\perp-G)u}\int_{-\infty}^{u}\mathrm{e}^{-(\gamma_\perp+G)u'}\,\mathrm{d}u'\,\mathrm{d}u = \ldots =$$

$$= -\frac{\varkappa}{G}\bar{n}_{\mathrm{th}}\mathrm{e}^{Gt} - \frac{2\left|\tilde{g}\right|^2 N^2 G_{21,12}}{\gamma_\perp^2 - G^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\perp t}}{\gamma_\perp} + \frac{\mathrm{e}^{Gt}}{G}\right]$$

- Vezmeme-li do úvahy kladnost ($\alpha, \varkappa > 0$) a zápornost ($G < 0$) členů, jsou oba sčítance kladné a celý výraz je tedy pod prahem kladný.
- Zbývá určit $G_{21,12}$ přímým dosazením:

$$G_{21,12} = \frac{d_0 - \langle\hat{d}\rangle}{2T} + \gamma_\perp\left(1 + \langle\hat{d}\rangle\right) \overset{\langle\hat{d}\rangle\approx d_0}{=} \gamma_\perp\left(1 + d_0\right)$$

- Celkem tedy:

$$\mathcal{G}^{(1)}(t) = -\frac{\varkappa}{G}\bar{n}_{\mathrm{th}}\mathrm{e}^{Gt} - \frac{2\left|\tilde{g}\right|^2 N^2\gamma_\perp\left(1 + d_0\right)}{\gamma_\perp^2 - G^2}\left[\frac{\mathrm{e}^{-\gamma_\perp t}}{\gamma_\perp} + \frac{\mathrm{e}^{Gt}}{G}\right]$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(t) = -\frac{\varkappa}{G}\left(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}}\right)\mathrm{e}^{Gt} \qquad (\text{pro } \gamma_\perp \to \infty)$$

Poruchové řešení pod prahem

- Bez interakce s atomy: $G = -\varkappa$ a $\tilde{g} = 0$, korelační funkce je $\mathcal{G}^{(1)}(t) = \bar{n}_{\mathrm{th}} \mathrm{e}^{-\varkappa t}$ a speciálně $\mathcal{G}^{(1)}(0) = \bar{n}_{\mathrm{th}}$ podle očekávání a předchozího výpočtu.
- Interakce s atomy, atomy v základním stavu $d_0 = -1$: dle vzorce

$$G = \frac{|\tilde{g}|^2 d_0 N}{\gamma_\perp} - \varkappa$$

je $G < -\varkappa$ a navíc $1 + d_0 = 0$, tedy $\mathcal{G}^{(1)}(t) \propto \mathrm{e}^{-|G|t}$ a $\mathcal{G}^{(1)}(0) < \bar{n}_{\mathrm{th}}$.

- Interakce s atomy, atomy v excitovaném stavu $d_0 > 0$: částečná kompenzace ztrát fotonů optickým ziskem $G > -\varkappa$, dvojexponenciální profil korelační funkce. Speciální případ

$$\mathcal{G}^{(1)}(0) = \underbrace{\frac{\varkappa}{|G|}}_{>1} \bar{n}_{\mathrm{th}} + \frac{2|\tilde{g}|^2 N^2 (1 + d_0)}{(\gamma_\perp + |G|)|G|}$$

- První člen dává větší počet fotonů než v prázdné dutině, fotony z rezervoáru jsou zesilovány v aktivním prostředí. Druhý člen vždy nezáporný, vyjadřuje spontánní emisi fotonů z atomů a jejich příspěvek do celkové hustoty fotonů v dutině.
- Interakce s atomy, velmi rychlé rozfázování ($\gamma_\perp \to \infty$): $\mathcal{G}^{(1)}(0) = \varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})/|G|$, tj. fotony termální a spontánně vyzářené, zesílené díky optickému zisku v aktivním prostředí. Srovnáním s předchozím výsledkem vidíme, že ad-hoc předpoklad o tom, že druhý člen popisuje spontánně vyzářené fotony, je správný.

Poruchové řešení pod prahem

- **Normovaná korelační funkce** $g^{(1)}(0) = 1$: platí vždy, (časová) koherence 1. stupně daná pouze časovou závislostí $g^{(1)}(t)$.
- **Spektrum záření** vypočteme Fourierovou tranformací korelační funkce:

$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^{(1)}(t) \exp[\mathrm{i}\omega t]\, \mathrm{d}t \approx (\gamma_\perp \to \infty) \approx$$

$$\approx 2 \frac{\varkappa}{2\pi G} (\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}}) \,\mathrm{Re}\, \frac{1}{\mathrm{i}\omega + G} = \frac{\varkappa}{\pi} \frac{\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}}}{\omega^2 + G^2}$$

- Spektrum lorentzovské, šířka odpovídá velikosti koeficientu zisku.
- Pokud vezmeme do úvahy paměť fluktuací polarizace, přibyde druhá složka se šířkou odpovídající rychlosti dekoherence $\gamma_\perp$.
- Spektrum i korelační funkce 1. řádu shodné s charaketristikami výbojky, laser pod prahem je „obyčejná výbojka“.

- **Korelační funkce 2. řádu**, určíme přímým výpočtem.
- *Pomocný výpočet.*

$$\sum_{\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4} q^*_{\omega_1} q^*_{\omega_2} q_{\omega_3} q_{\omega_4} \underbrace{\overbrace{\langle \hat{B}^+_{\omega_1} \hat{B}^+_{\omega_2} \hat{B}_{\omega_3} \hat{B}_{\omega_4} \rangle}^{\overset{(\triangle)}{\approx}(\delta_{\omega_1,\omega_3}\delta_{\omega_2,\omega_4}+\delta_{\omega_1,\omega_4}\delta_{\omega_2,\omega_3})\bar{n}_{\omega_1}\bar{n}_{\omega_2}}}_{\text{přes termální stav}} \exp\left[\mathrm{i}(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 - \omega_3 t_3 - \omega_4 t_4)\right] \approx$$

$$\approx \sum_{\omega_1} \bar{n}_1 \left|q_{\omega_1}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1(t_1-t_3)} \sum_{\omega_2} \bar{n}_2 \left|q_{\omega_2}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2(t_2-t_4)} +$$

$$+ \sum_{\omega_1} \bar{n}_1 \left|q_{\omega_1}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_1(t_1-t_4)} \sum_{\omega_2} \bar{n}_2 \left|q_{\omega_2}\right|^2 \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega_2(t_2-t_3)} =$$

$$= 4\varkappa^2 \bar{n}^2_{\mathrm{th}} \left[\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\right] =$$

$$= \left\langle \hat{F}^+(t_1)\hat{F}^+(t_2)\hat{F}(t_3)\hat{F}(t_4)\right\rangle$$

- ($\triangle$) Člen $\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = \omega_4$ je zanedbatelný proti ostatním příspěvkům (jednoduchá oproti dvojné sumě přes mnoho stupňů volnosti, tepelná lázeň je „nekonečně velká“).

Poruchové řešení pod prahem

- *Výpočet korelační funkce 2. řádu* přímo dosazením za $\hat{b}(t)$.
- Korelace mezi detekováním fotonu na dvou nezávislých detektorech, Hanburyho–Brownův–Twissův experiment.
- Pro zjednodušení opět položíme $\gamma_\perp \to \infty$ a nahradíme $\bar{n}_{\rm th} \to \bar{n}_{\rm th} + \bar{n}_{\rm sp}$.

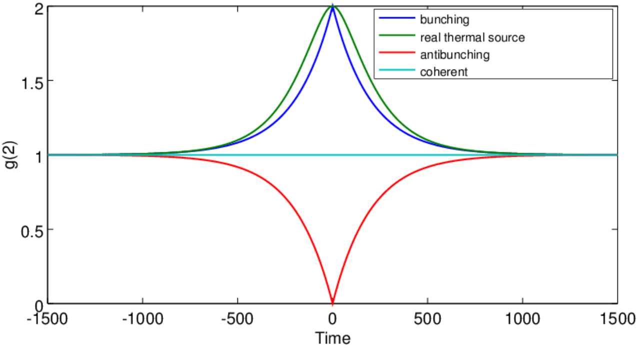
$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(2)}(t) &= \left\langle \hat{b}^+(t)\hat{b}^+(0)\hat{b}(0)\hat{b}(t) \right\rangle = \\
&= \mathrm{e}^{2Gt} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_3 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_4 \; \mathrm{e}^{-G(t_1+t_2+t_3+t_4)} \left\langle \hat{F}^+(t_1)\hat{F}^+(t_2)\hat{F}(t_3)\hat{F}(t_4) \right\rangle = \\
&= \mathrm{e}^{2Gt} \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_2 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_3 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_4 \; \mathrm{e}^{-G(t_1+t_2+t_3+t_4)} \,. \\
&\quad \cdot 4\varkappa^2(\bar{n}_{\rm th} + \bar{n}_{\rm th})^2 \left[\delta(t_1-t_3)\delta(t_2-t_4) + \delta(t_1-t_4)\delta(t_2-t_3)\right] = \qquad (t > 0) \\
&= 4\varkappa^2(\bar{n}_{\rm th} + \bar{n}_{\rm sp})^2 \mathrm{e}^{2Gt} \left[\int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_2 \; \mathrm{e}^{-2G(t_1+t_2)} + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{d}t_1 \int_{-\infty}^{t} \mathrm{d}t_2 \; \mathrm{e}^{-2G(t_1+t_2)} \right] = \\
&= \frac{\varkappa^2}{G^2} (\bar{n}_{\rm th} + \bar{n}_{\rm sp})^2 \left(1 + \mathrm{e}^{2|G|t}\right) \qquad \text{(obecně)}
\end{aligned}
$$

- Normovaná korelační funkce:

$$
g^{(2)}(t) = \frac{\mathcal{G}^{(2)}(t)}{\left[\mathcal{G}^{(1)}(0)\right]^2}
$$

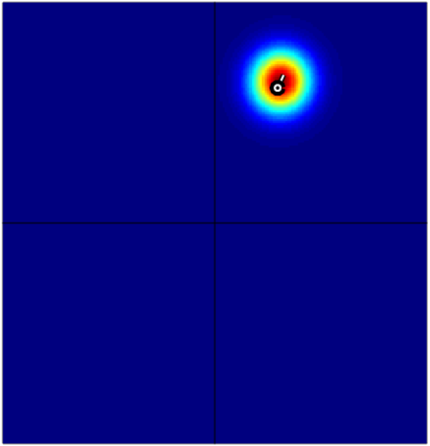
Poruchové řešení pod prahem

- *Normovaná korelační funkce:*
- $g^{(2)}(0) < 1$: *antibunching* — typický pro jednofotonový zdroj ($g^{(2)}(0) = 0$). Pokud do jednoho z detektorů dorazí foton, do druhého s nenulovou pravděpodobností ne.
- $g^{(2)}(0) > 1$: *bunching* — typický pro termální zdroj, vyzařující plně nekorelované fotony. Fotony putují vždy v balíku ve větším počtu.
- $g^{(2)}(0) = 1$: *Koherentní stav*. Charakteristické pro koherentní stav, ale nejenom pro něj. Pro potvrzení koherentnosti stavu je třeba změření časové závislosti $g^{(2)}(t) = 1$ a i vyšších korelací. Koherentní stav je stav laserového záření vysoko nad prahem.
- Skutečný profil s uvážením i vlivu atomů a bez zanedbání malých členů je hladší:



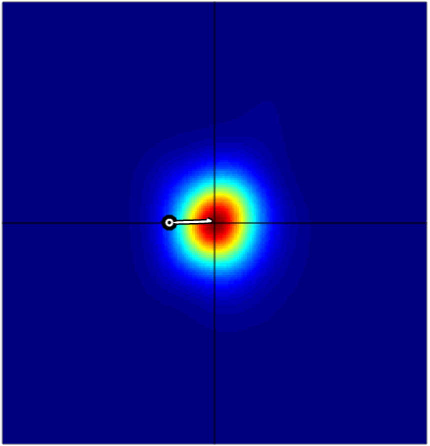
Poruchové řešení pod prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Hustota pravděpodobnosti stavu pole označena barevnou škálou.
- Aktuální stav pole je tečka.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = -1$, rozměr čtverce 0.75×0.75.



Poruchové řešení pod prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Hustota pravděpodobnosti stavu pole označena barevnou škálou.
- Aktuální stav pole je tečka.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = -1$, rozměr čtverce 0.75×0.75.



Poruchové řešení nad prahem

Nad prahem

- Vezměme $\hat{b}(t) = b(t)$ jako klasickou veličinu a prozkoumejme její chování v čase.
- $b(t)$ komplexní, $b(t) = (r_0 + \rho(t))\exp[\mathrm{i}\varphi(t)]$ (pomalu se měnící obálka):

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = G\hat{b} - C\hat{b}^{+}\hat{b}\hat{b} + \hat{F}_{\mathrm{TOT}}$$
$$\dot{\rho} = G(r_0 + \rho) - C(r_0 + \rho)^3 + \operatorname{Re} F_{\mathrm{TOT}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$$
$$\dot{\varphi} = \operatorname{Im} F_{\mathrm{TOT}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}/(r_0 + \rho)$$

- Bez fluktuací $\rho = F_{\mathrm{TOT}} = 0$ a určíme $r_0^2 = G/C$ (tento výpočet evidentně neplatí pod prahem, neboť by $r_0^2 < 0$; řešení na sebe navazují na prahu $G = 0$).
- Nadále budeme předpokládat $\rho \ll r_0$ (vysoko nad prahem), v okolí prahu (nad ním, $G > 0$, $C > 0$) problém analyticky neřešitelný.
- Dosadíme za r_0^2, uvážíme nejnižší mocniny ρ a označíme $\tilde{F}_{\mathrm{TOT}} = F_{\mathrm{TOT}}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi}$:

$$\dot{\rho} = -2G\rho + \operatorname{Re}\tilde{F}_{\mathrm{TOT}}$$
$$\dot{\varphi} = \frac{1}{r_0}\operatorname{Im}\tilde{F}_{\mathrm{TOT}}$$

- Pohyb v komplexní rovině v okolí kružnice o poloměru r_0.
- Fluktuace posouvají skokově fázi $b(t)$ i velikost, ale velikost $b(t)$ relaxuje s dobou relaxace $1/2G$ zpět na kružnici o poloměru r_0. Fáze nerelaxuje, kopíruje fluktuace.
- Relaxace velikosti pole rychlejší pro velká G (velké čerpání), nad prahem $G > 0$.
- Fluktuace fáze zmenšené poloměrem $r_0 = \sqrt{G/C}$, s rostoucím čerpáním menší.
- Laser tedy s rostoucím čerpáním stabilnější.

Poruchové řešení nad prahem

- **Výpočet korelačních funkcí.** Přímou integrací

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \int_0^t \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(t')\,\mathrm{d}t'$$

- Zřejmě $\langle \varphi(t) - \varphi(0) \rangle = 0$, dále potřebujeme:

$$\left\langle \left(\varphi(t) - \varphi(0)\right)^2 \right\rangle = \frac{1}{r_0^2} \int_0^t \int_0^t \left\langle \operatorname{Im} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(u) \operatorname{Im} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(v) \right\rangle \mathrm{d}u\,\mathrm{d}v$$

- Bílý šum:

$$F_{\mathrm{TOT}}(t) = \sum_\nu \mathcal{A}\delta(t - t_\nu)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi_\nu}$$

- Víme:

$$\left\langle F^*_{\mathrm{TOT}}(t) F_{\mathrm{TOT}}(t') \right\rangle = \left\langle \sum_\nu \sum_{\nu'} \mathcal{A}^2 \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\varphi_\nu - \varphi_{\nu'})} \delta(t - t_\nu)\delta(t' - t_{\nu'}) \right\rangle =$$

$$= 2\varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})\delta(t - t')$$

- Potom můžeme vyčíslit:

$$
\begin{aligned}
&\left\langle \operatorname{Im} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(t) \operatorname{Im} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(t') \right\rangle = \\
&\quad = \frac{1}{4} \left\langle \sum_{\nu} \sum_{\nu'} \mathcal{A}^2 \left[\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\tilde{\varphi}_{\nu} - \tilde{\varphi}_{\nu'})} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\tilde{\varphi}_{\nu} - \tilde{\varphi}_{\nu'})} \right] \delta(t - t_{\nu}) \delta(t' - t_{\nu'}) \right\rangle = \\
&\quad = \varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}}) \delta(t - t') = \\
&\quad = \left\langle \operatorname{Re} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(t) \operatorname{Re} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(t') \right\rangle
\end{aligned}
$$

- Přímým dosazením:

$$
\left\langle \left(\varphi(t) - \varphi(0) \right)^2 \right\rangle = \frac{C}{G} \varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}}) t = 2\gamma_{\varphi} t
$$

$$
\gamma_{\varphi} = \frac{C}{G} \varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})
$$

Poruchové řešení nad prahem

- Korelace 1. řádu, považujeme ρ a φ za statisticky nezávislé, nejnižší řád v ρ a φ:

$$
\begin{aligned}
\mathcal{G}^{(1)}(t) &= \left\langle [r_0 + \rho(t)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}[r_0 + \rho(0)]\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \right\rangle \approx \\
&\approx r_0^2 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \right\rangle + r_0 \left\langle [\rho(t) + \rho(0)]\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \right\rangle = \\
&= r_0^2 \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \right\rangle + r_0 \underbrace{\left\langle \rho(t) + \rho(0) \right\rangle}_{=0} \left\langle \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varphi(t)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(0)} \right\rangle = \\
&= \langle r_0^2 \rangle - \mathrm{i} r_0^2 \underbrace{\langle \varphi(t) - \varphi(0) \rangle}_{=0} - \frac{r_0^2}{2} \left\langle \left(\varphi(t) - \varphi(0)\right)^2 \right\rangle + \ldots = \\
&= r_0^2 (1 - \gamma_\varphi t + \ldots) \approx r_0^2 \mathrm{e}^{-\gamma_\varphi t} = \frac{G}{C} \mathrm{e}^{-\gamma_\varphi t}
\end{aligned}
$$

- Korelace klesá pomaleji s rostoucím G (vysoko nad prahem), klesajícím $\varkappa$ (větší doba života fotonu, tj. vyšší kvalita rezonátoru), s klesajícími fluktuacemi.
- Střední počet fotonů $\mathcal{G}^{(1)}(0) = r_0^2 = G/C$.

Poruchové řešení nad prahem

- Korelace 2. řádu, nejnižší mocnina (vysoko nad prahem):

$$\mathcal{G}^{(2)}(t) = \left\langle \big(r_0 + \rho(t)\big) e^{-i\varphi(t)} \big(r_0 + \rho(0)\big) e^{-i\varphi(0)} \big(r_0 + \rho(0)\big) e^{i\varphi(0)} \big(r_0 + \rho(t)\big) e^{i\varphi(t)} \right\rangle =$$
$$= \left\langle \big(r_0 + \rho(t)\big)^2 \big(r_0 + \rho(0)\big)^2 \right\rangle \approx$$
$$\approx r_0^4 + 2r_0^3 \langle \rho(t) + \rho(0) \rangle = r_0^4 = \frac{G^2}{C^2}$$

- Do této korelační funkce nepřispívají členy v 1. mocnině poruchy, musíme vzít do úvahy tedy i 2. mocninu pro $\mathcal{G}^{(2)}$ i $\mathcal{G}^{(1)}$.
- Pomocný výpočet:

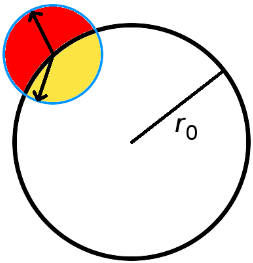
$$\rho(t) = e^{-2Gt} \int_{-\infty}^{t} e^{2Gt} \operatorname{Re} \tilde{F}_{\mathrm{TOT}}(u)\, du$$
$$\langle \rho^2(t) \rangle = \frac{\varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})}{4G}$$
$$\langle \rho(t)\rho(0) \rangle = \frac{\varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})}{4G} e^{-2Gt}$$

- Oprava pro korelační funkci 1. řádu:

$$\mathcal{G}^{(1)}(t) = r_0^2 e^{-\gamma_\varphi t} + \langle \rho(t)\rho(0) e^{-\varphi(t)+\varphi(0)} \rangle =$$
$$= r_0^2 e^{-\gamma_\varphi t} + \left\langle \rho(t)\rho(0) \big[1 - i\big(\varphi(t) - \varphi(0)\big) + \ldots\big] \right\rangle \approx$$
$$\approx r_0^2 e^{-\gamma_\varphi t} + \langle \rho(t)\rho(0) \rangle = r_0^2 e^{-\gamma_\varphi t} + \frac{\varkappa(\bar{n}_{\mathrm{th}} + \bar{n}_{\mathrm{sp}})}{4G} e^{-2Gt}$$

Poruchové řešení nad prahem

- Speciálně $\mathcal{G}^{(1)}(0) = r_0^2 + \frac{\varkappa(\bar{n}_{\text{th}}+\bar{n}_{\text{sp}})}{4G}$.
- Fluktuace sice posouvají počet fotonů do kladných i záporných hodnot, ale jednak působí ve 2D prostoru izotropně a více jich jde vně kruhu o poloměru r_0 (viz obr.).
- Navíc součet počtu fotonů při pohybu dovnitř a vně kruhu o stejnou vzdálenost $n_{\text{in}} + n_{\text{out}} \propto |r_0 - \Delta|^2 + |r_0 + \Delta|^2 = r_0^2 + \underline{2\Delta^2}$.
- S rostoucím ziskem G se naopak více svírá pseudopotenciál.
- Všechny tři jevy výše mají za následek klesající vliv fluktuací s rostoucím G.



- Vezmeme do úvahy vyšší mocniny:

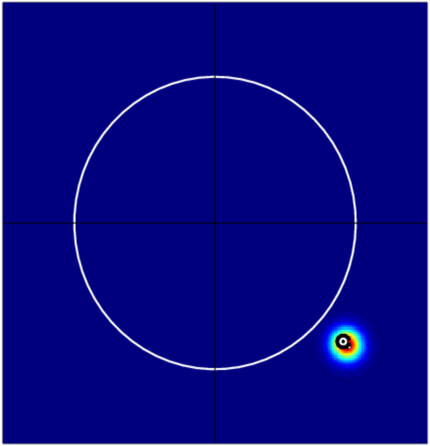
$$\mathcal{G}^{(2)}(t) = r_0^4 + r_0^2\langle 4\rho(t)\rho(0) + \rho^2(t) + \rho^2(0)\rangle$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(t) = \langle\hat{n}\rangle^2 + \frac{\varkappa r_0^2(\bar{n}_{\text{th}} + \bar{n}_{\text{sp}})}{2G}\left(2e^{-2Gt} + 1\right) = \left[\mathcal{G}^{(1)}(0)\right]^2 + \frac{\varkappa r_0^2(\bar{n}_{\text{th}} + \bar{n}_{\text{sp}})}{G}e^{-2Gt}$$

- Korelace 2. řádu klesá pro dlouhé časy k $[\mathcal{G}^{(1)}(0)]^2$, tj. $g^{(2)}(t \to \infty) = 1$.
- Hodnota $g^{(2)}(0) - 1$ závisí na zisku jako G^{-1}, tj. vysoko nad prahem $g^{(2)}(0) \to 1$.
- Zároveň vysoko nad prahem $\gamma_\varphi \propto 1/G \to 0$, a tedy záření vykazuje charakteristiky plně koherentního stavu.

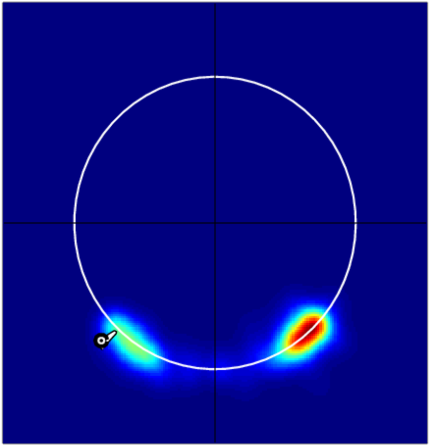
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Hustota pravděpodobnosti stavu pole označena barevnou škálou.
- Aktuální stav pole je tečka.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 1$, $C = 1$, rozměry čtverce 1.5×1.5.



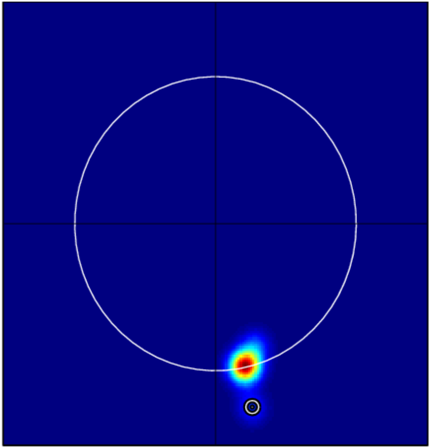
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Hustota pravděpodobnosti stavu pole označena barevnou škálou.
- Aktuální stav pole je tečka.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 1,\ C = 1$, rozměry čtverce 1.5×1.5.



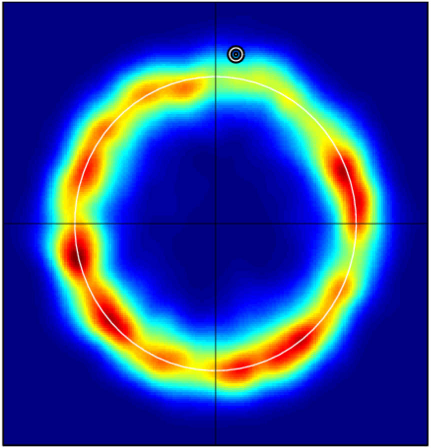
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Hustota pravděpodobnosti stavu pole označena barevnou škálou.
- Aktuální stav pole je tečka.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 0.2$, $C = 0.2$, rozměry čtverce 1.5×1.5.
- Časový krok $25\times$ větší než v minulém filmu.



Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Langevinovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 0.2$, $C = 0.2$, rozměry čtverce 1.5×1.5.
- Hustota pravděpodobnosti v čase $t \to \infty$ by měla odpovídat stacionárnímu řešení Fokkerových–Planckových rovnic, tj. stacionárnímu řešení rovnic pro hustotu pravděpodobnosti.
- Laser se může dostat i do stavu s prázdnou dutinou s nenulovou pravděpodobností.



- Výpočet distribuční funkce počtu fotonů nad rámec Langevinových rovnic.
- Se současným aparátem můžeme ale určit některé pomocné veličiny.
- Již víme, že *pod prahem* $\mathcal{G}^{(1)}(0) = \langle \hat{n} \rangle$ a $\mathcal{G}^{(2)}(0) = 2\langle \hat{n} \rangle^2$.
- Dále *vysoko nad prahem* $\mathcal{G}^{(1)}(0) = \langle \hat{n} \rangle$ a $\mathcal{G}^{(2)}(0) = \langle \hat{n} \rangle^2$.
- Variance:

$$\left\langle (\Delta \hat{n})^2 \right\rangle = \left\langle (\hat{n} - \langle \hat{n} \rangle) \right\rangle = \left\langle \hat{n}^2 \right\rangle - 2\langle \hat{n} \rangle \langle \hat{n} \rangle + \langle \hat{n} \rangle^2 = \left\langle \hat{n}^2 \right\rangle - \langle \hat{n} \rangle^2$$

$$\mathcal{G}^{(1)}(0) = \langle \hat{b}^+ \hat{b} \rangle = \langle \hat{n} \rangle$$

$$\mathcal{G}^{(2)}(0) = \langle \hat{b}^+ \hat{b}^+ \hat{b} \hat{b} \rangle = \left\langle \hat{n}^2 \right\rangle - \langle \hat{n} \rangle$$

$$\left\langle (\Delta \hat{n})^2 \right\rangle = \mathcal{G}^{(2)}(0) + \mathcal{G}^{(1)}(0) - \left[\mathcal{G}^{(1)}(0)\right]^2$$

- **Pod prahem**: $\left\langle (\Delta \hat{n})^2 \right\rangle = \langle \hat{n} \rangle (\langle \hat{n} \rangle + 1)$: typické pro termální rozdělení, Boltzmannova statistika.

$$p(n) = \overbrace{\frac{1}{\epsilon}}^{\text{normování}} \epsilon^n \qquad \epsilon = e^{-\frac{\hbar\omega}{k_B T}}$$

$$\langle \hat{n} \rangle = \sum_0^\infty n p(n) = \frac{1}{\epsilon - 1}$$

$$\left\langle \hat{n}^2 \right\rangle = \sum_0^\infty n^2 p(n) \frac{\epsilon + 1}{(\epsilon - 1)^2}$$

$$\left\langle \hat{n}^2 \right\rangle - \langle \hat{n} \rangle^2 = \frac{\epsilon}{(\epsilon - 1)^2} = \langle \hat{n} \rangle \big(\langle \hat{n} \rangle + 1\big)$$

- **Nad prahem**: $\left\langle(\Delta\hat{n})^2\right\rangle = \langle\hat{n}\rangle$, typické pro Poissonovo rozdělení.
- **Koherentní stav**:

$$|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}|n\rangle$$

$$\hat{b}|\alpha\rangle = \mathrm{e}^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\sqrt{n}|n-1\rangle = \alpha|\alpha\rangle$$

$$p(n) = \left|\langle n|\alpha\rangle\right|^2 = \frac{|\alpha|^{2n}\mathrm{e}^{-|\alpha|^2}}{n!}$$

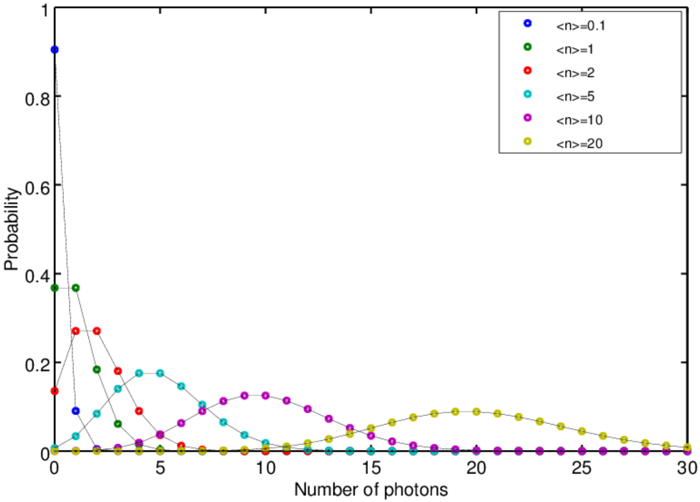
$$\langle\hat{n}\rangle = \langle\alpha|\hat{b}^+\hat{b}|\alpha\rangle = \langle\alpha|\alpha^*\,\alpha|\alpha\rangle = |\alpha|^2$$

$$p(n) = \frac{\langle\hat{n}\rangle^n\mathrm{e}^{-\langle\hat{n}\rangle}}{n!}$$

$$\left\langle\hat{n}^2\right\rangle = \langle\hat{n}\rangle\big(\langle\hat{n}\rangle + 1\big)$$

$$\left\langle\hat{n}^2\right\rangle - \langle\hat{n}\rangle^2 = \langle\hat{n}\rangle$$

Statistika fotonů



Dynamika hustoty pravděpodobnosti

- Řešení Fokkerových–Planckových rovnic pro hustotu pravděpodobnosti, v kvantové optice pro distribuční funkci.
- Zde použijeme distribuční funkci podobnou Wignerově distribuční funkci $f(x,y) = f(\mathrm{Re}\, b, \mathrm{Im}\, b)$, kde b je „klasická amplituda“.
- Kinetická rovnice odvozená z poruchové teorie 3. řádu:

$$(\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\hat{b} = G\hat{b} - C\hat{b}^{+}\hat{b}\hat{b} + \hat{F}_{\mathrm{TOT}}$$

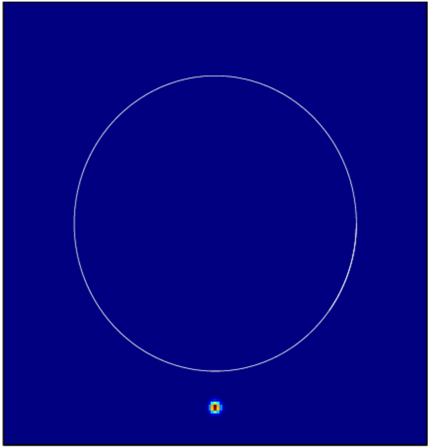
$$\frac{\partial f(x,y)}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x}\Big\{\big[Gx - C(x^2+y^2)x\big]f\Big\} - \frac{\partial}{\partial y}\Big\{\big[Gy - C(x^2+y^2)y\big]f\Big\} + \\ + \frac{1}{2}\bar{n}_{\mathrm{eff}}\varkappa\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right]$$

$$(r^2 = x^2 + y^2)$$

$$\frac{\partial f(r,\varphi)}{\partial t} = -\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\Big[\big(Gr^2 - Cr^4\big)f\Big] + \frac{\varkappa\bar{n}_{\mathrm{eff}}}{2}\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}\right]$$

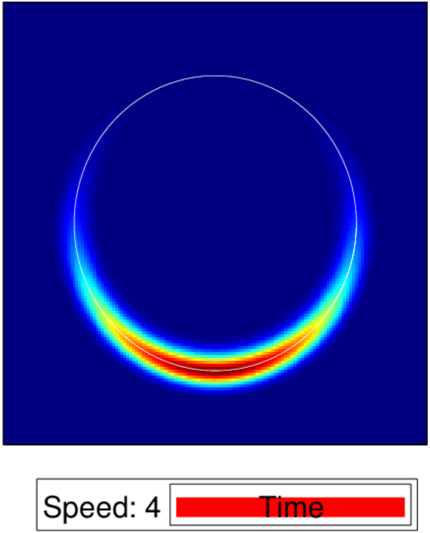
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Fokkerovy–Planckovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Distribuční funkce označena barevnou škálou.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 1$, $C = 1$, rozměry čtverce 1.5×1.5.



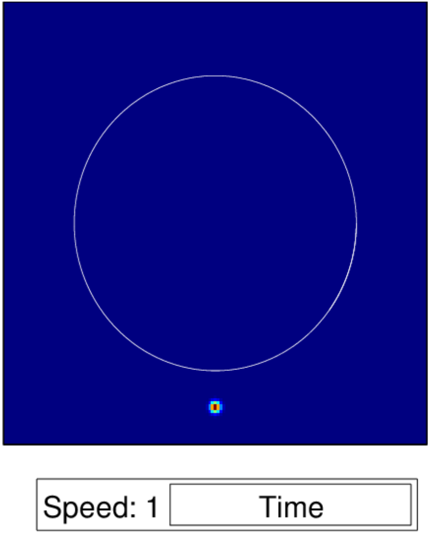
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Fokkerovy–Planckovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Distribuční funkce označena barevnou škálou.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 1$, $C = 1$, rozměry čtverce 1.5×1.5.



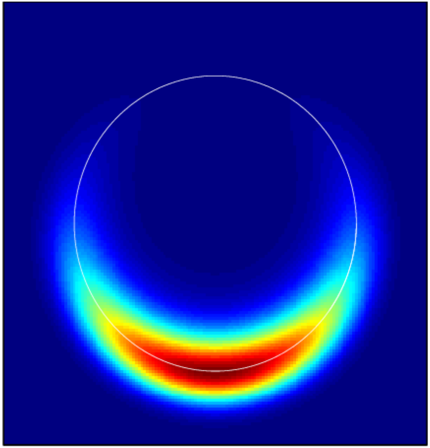
Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Fokkerovy–Planckovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Distribuční funkce označena barevnou škálou.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 0.2$, $C = 0.2$, rozměry čtverce 1.5×1.5.

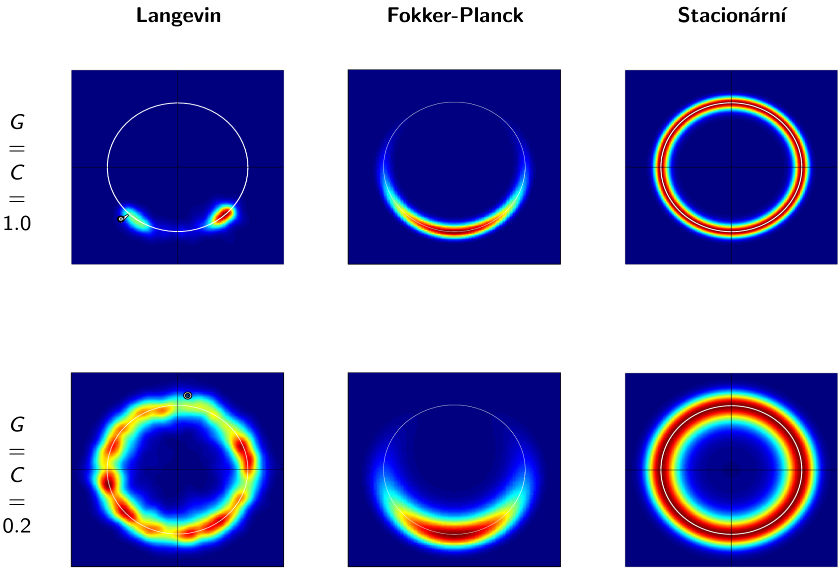


Poruchové řešení nad prahem

- Řešení Fokkerovy–Planckovy rovnice pouze s nelinearitou 3. řádu.
- Aktivní prostředí stacionární, bez paměti, nad prahem.
- Distribuční funkce označena barevnou škálou.
- Osy reálná a imaginární část $b(t)$.
- Parametry: $G = 0.2$, $C = 0.2$, rozměry čtverce 1.5×1.5.



Poruchové řešení nad prahem



Zajímavosti

- Laserový rezonátor, řízený vnějším polem, případně čerpáním aktivního prostředí.
- Semiklasické rovnice shodné s laserovými rovnicemi, ale v rovnici pro pole musíme přidat čerpání.
- Mody uvažujeme jako uzavřené stavy pole v dutině, fotony pronikající ven bereme jakoby tunelovaly skrz zrcadlo do vnějších modů.
- (Pozn. ve skutečnosti jsou mody delokalizované i mimo dutinu, ale v rámci aproximace jsme definovali okrajové podmínky s dokonalými zrcadly, abychom mohli pracovat s diskrétními mody. Jinak bychom museli uvažovat kontinuum a nedokázali bychom efektivně oddělit interakce pole s prostředím uvnitř a vně dutiny.)
- Pro jednoduchost budeme uvažovat 1 mod, 1 druh atomů. Rovnice se členy na frekveci ω:

$$\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = -\frac{\gamma_c}{2}\widetilde{\mathcal{E}} + \frac{i\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^* p + \widetilde{\mathcal{E}}_S$$

$$\dot{p} = -\frac{i}{\hbar}\tilde{g}\widetilde{\mathcal{E}} d - \gamma_\perp p + i\delta p$$

$$\dot{d} = \frac{4}{\hbar}\,\mathrm{Im}\left\{\tilde{g}^*\widetilde{\mathcal{E}}^* p\right\} - \left(d - d_0\right)/T$$

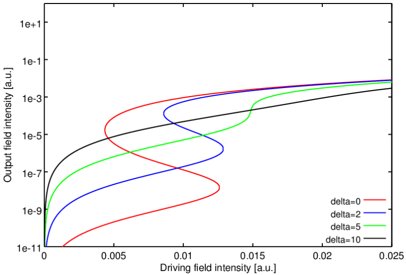
- Hledáme stacionární řešení $\dot{\widetilde{\mathcal{E}}} = \dot{p} = \dot{d} = 0$.

$$
\begin{aligned}
p_S &= -\mathrm{i}\frac{\tilde{g} d_S}{\hbar} \frac{\widetilde{\mathcal{E}}}{\gamma_\perp - \mathrm{i}\delta} \\
d_S - d_0 &= \frac{4T\left|\tilde{g}\right|^2 \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 d_S}{\hbar^2} \operatorname{Im} \frac{-\mathrm{i}(\gamma_\perp + \mathrm{i}\delta)}{\gamma_\perp^2 + \delta^2} \\
d_S &= \left[\frac{\gamma_\perp^2 + \delta^2}{\gamma_\perp^2 + \delta^2 + 4T\gamma_\perp \left|\tilde{g}\right|^2 \left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2 / \hbar^2} \right] d_0 \\
\frac{\gamma_c}{2}\widetilde{\mathcal{E}} &- \mathrm{i}\frac{\omega N_0}{2\epsilon}\tilde{g}^* p_S = \widetilde{\mathcal{E}}_S
\end{aligned}
$$

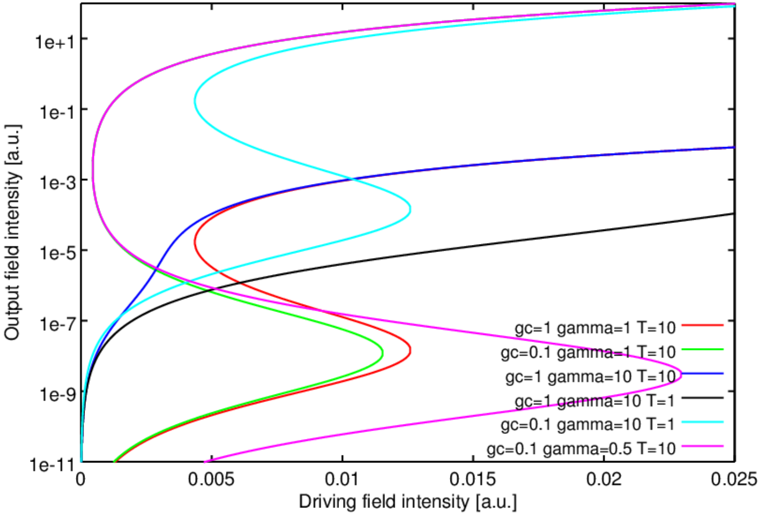
- Po dosazení z 1. a 3. do 4. řádku získáme implicitní rovnici pro $\widetilde{\mathcal{E}}$, kterou převedeme na kubickou rovnici pro $\left|\widetilde{\mathcal{E}}\right|^2$ vynásobením celé rovnice rovnicí komplexně sdruženou.
- Kubická rovnice má 3 kořeny: multistabilní systém, stacionární řešení jsou vždy 3, z toho minimálně jedno reálné, a tudíž fyzikální.

Optická bistabilita

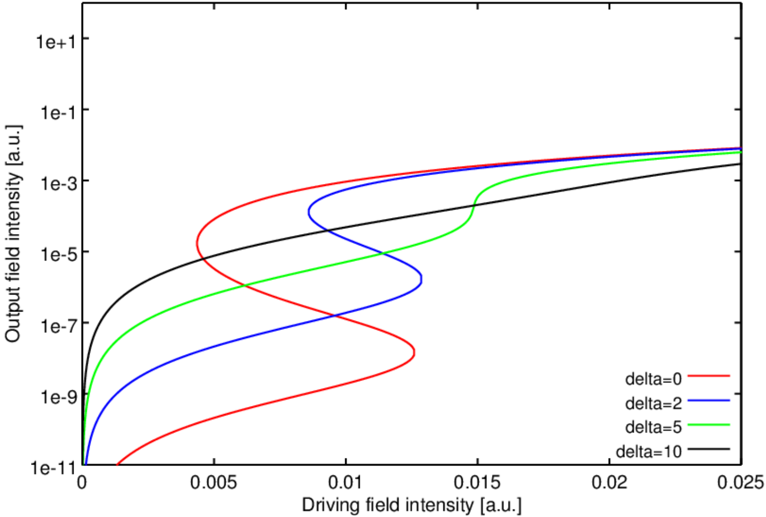
- Každé řešení má specifické požadavky na rovnováhu mezi polem a atomy, vnější pole samo vyvolává nerovnovážý stav inverze.
- Směr od $\left|\widetilde{\mathcal{E}}_S\right| = 0$: stoupání po spodní větvi až k bifurkačnímu bodu.
- Přímý přeskok na horní větev je možný díky fluktuacím, ale pravděpodobnost pod bifurkací velmi malá. Pole není dost intenzivní na vyvolání dostatečných změn v inverzi a polarizaci.



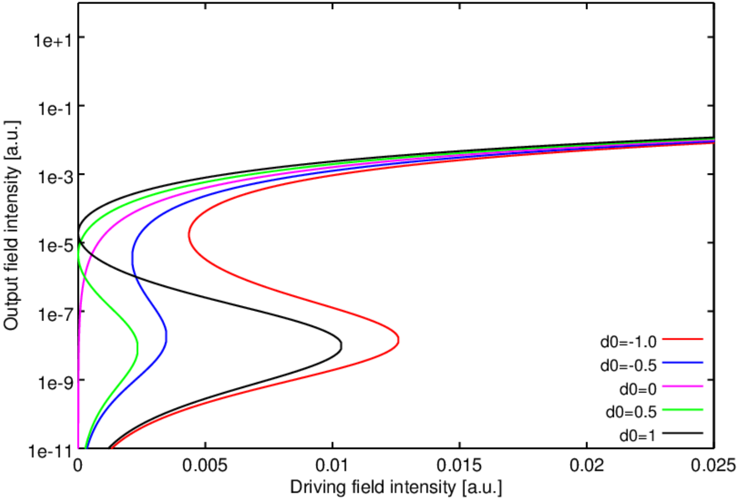
- U bifurkačního bodu pravděpodobnost přeskoku stoupá, fluktuace pravděpodobnější, v bifurkačním bodě je přeskok víceméně nutný. Pole při $\left|\widetilde{\mathcal{E}}_S\right|$ nad bifurkačním bodě nestacionární, ale přechodně může existovat, postupně se absorbuje energie k načerpání inverze, pole přejde spojitě na horní větev.
- Při klesajícím $\left|\widetilde{\mathcal{E}}_S\right|$ platí to samé, pole jde po horní větvi a přeskočí pod bifurkačním bodem. Přímý přeskok nad bifurkací je znemožněn díky tomu, že energie z inverze nemá kam disipovat, pole není dost silné na její absorbování v podobě vlastních fluktuací. Pod bifurkačním bodem se energie inverze postupně vyzáří a systém přejde spojitě na spodní větev.
- Využití: optická modulace, optické logické prvky.



- Vliv dob rozfázování: klesající γ_c posouvá horní větev nahoru, klesající $\gamma_\perp$ a rostoucí T posouvá spodní větev dolů.
- Klesající $\gamma_\perp$ zároveň rozšiřuje hysterezi (zelená, fialová), pokud je naopak velké, hystereze se ztrácí (modrá, černá).



- Vliv rozladění atomů: nejširší hystereze v rezonanci, v mezním případě je šířka nulová, při větším rozladění je systém monostabilní.



- Vliv inverze (čerpání atomů): spojitý přechod od bistabilního ($d_0 = -1$) do monostabilního stavu ($d_0 = 0$).
- Díky čerpání ($d_0 > 0$) je nenulové výstupní pole i při nulovém $\left|\widetilde{\mathcal{E}}_S\right|$. Bez vnějšího pole pracuje laser v bifurkačním bodě nebo $\widetilde{\mathcal{E}} = 0$ (chybí „startovní“ foton).

- Heisenbergovy relace neurčitosti, Wienerův–Chinčinův teorém:

$$\langle(\Delta\omega)^2\rangle\langle(\Delta t)^2\rangle \geq \frac{1}{4}$$

- Příklad: gaussovské klubko

$$\widetilde{\mathcal{E}}(t) = \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{\sigma\sqrt{\pi}}}\exp\left[-\mathrm{i}\omega_0 t - \frac{(t-t_0)^2}{\sigma^2}\right]$$

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty}\widetilde{\mathcal{E}}(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}}}\exp\left[-\mathrm{i}\omega t_0 - \frac{(\omega-\omega_0)^2\sigma^2}{4}\right]$$

$$\langle(\Delta\omega)^2\rangle = \frac{1}{\sigma^2}$$

$$\langle(\Delta t)^2\rangle = \frac{\sigma^2}{4}$$

$$\langle(\Delta\omega)^2\rangle\langle(\Delta t)^2\rangle = \frac{1}{4}$$

Ultrakrátké pulsy

- Odhad šířky spektra:

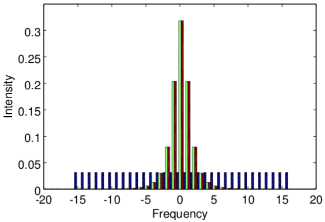
$$\langle (\Delta E)^2 \rangle \langle (\Delta t)^2 \rangle \geq \hbar^2/4$$
$$\sqrt{\langle (\Delta E)^2 \rangle} \geq \hbar \Big/ 2\sqrt{\langle (\Delta t)^2 \rangle}$$

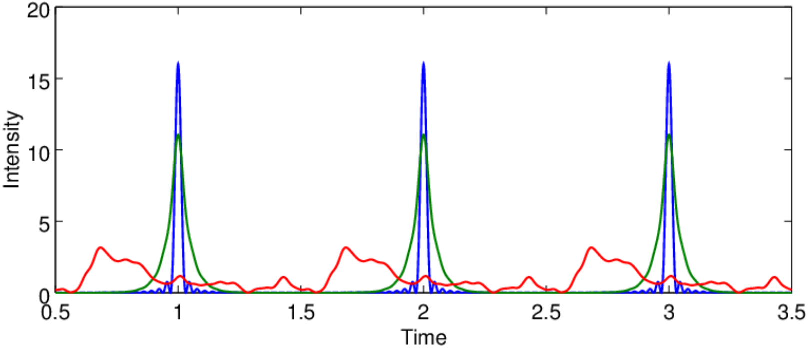
- Výsledné šířky spekter:

Mód	Délka pulsu	Šířka spektra
Mechanické přerušování	1 ms	$3 \cdot 10^{-13}$ eV
Akustooptická modulace	1 μs	$3 \cdot 10^{-10}$ eV
Q-spínání	1 ns	0.3 μeV
Ultrakrátké pulsy	1 ps	0.3 meV
Femtosekundové pulsy	0.1 ps	3 meV

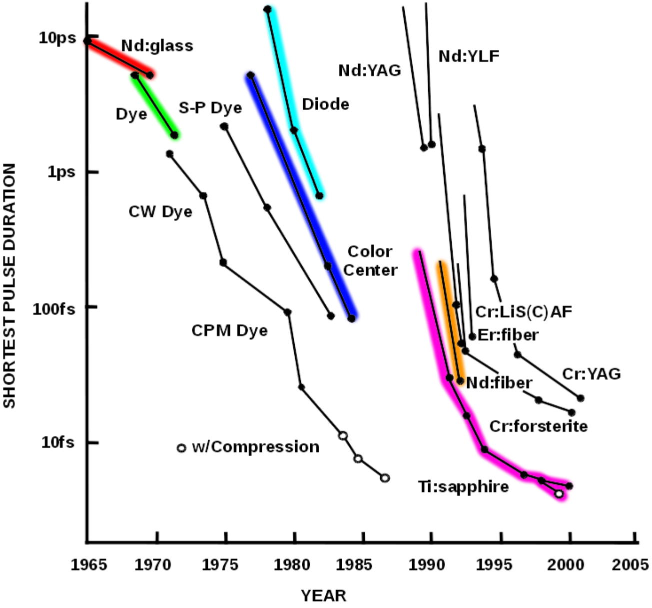
- Je třeba, aby šířka spektrální čáry aktivního prostředí a šířka spektra dutiny byly dostatečně široké.
- Přirozená homogenní šířka čáry na úrovni 10 μeV v atomárních prostředích při nízké teplotě, při $T = 300$ K je to cca $k_{\mathrm{B}} T \approx 25$ meV.
- Doba života fotonu relativně dlouhá, pro 10 oběhů v krátké dutině $L = 1$ mm vychází 70 ps (0.04 meV) $\Rightarrow$ nutné vícemodové oscilace, protože puls nelze na fs časové škále externě modulovat jako u Q–spínání.

- *Vícemodové oscilace v prázdné dutině.*
- Fixní fáze mezi mody, modulace pouze amplitudy: více či méně hladké pravidelné pulsy.
- Náhodné fáze mezi mody: chaotické pole, menší amplituda.
- Modrá, zelená: fixní fáze; červená: náhodná fáze.





- Obíhající puls má tendenci rozplývat se v čase stejně jako kvantově-mechanický vlnový balík díky posuvu a ztrátě korelace mezi mody.
- Rozplývání lze částečně kompenzovat lineárními prvky s vhodnou negativní dispersí: hranoly nebo mřížky.
- Dotvarování: synchronizace modů modulací ztrát — aktivní, pasivní, hybridní.
- *Amplitudová modulace:* aktivní synchronizace, periodicky se mění propustnost prvku (např. akustoopticky).
- *Frekvenční modulace:* aktivní synchronizace, periodicky se mění frekvenční posuv (např. elektroopticky).
- *Synchronní čerpání;* čerpání aktivního prostředí synchronně s oběhem pulsu, nejvyšší zisk má pouze obíhající puls kvůli periodicitě $|\widetilde{\mathcal{E}}|^2$ a d_0.
- *Saturabilní absorbér:* absorpční koeficient se saturuje polem, propouští intenzivní pulsy, pohlcuje málo intenzivní. Obvykle pomalá odezva, je to rezonantní jev (pohlcení fotonů a záchyt elektronů v reálných stavech).
- *Kerrovská nelinearita:* kerrovské médium (nelinearita 3. řádu, nerezonantní s polem) způsobuje samofokusaci, umístěním clonky dostaneme podobný efekt jako u saturabilního absorbéru, nerezonantní, rychlější.
- *Hybridní modulace:* spojení obou postupů.


10ps
1ps
100fs
10fs
SHORTEST PULSE DURATION
1965
1970
1975
1980
1985
1990
1995
2000
2005
YEAR
Nd:glass
Dye
S-P Dye
Diode
Nd:YAG
Nd:YLF
CW Dye
Color Center
CPM Dye
w/Compression
Cr:LiS(C)AF
Er:fiber
Nd:fiber
Cr:YAG
Cr:forsterite
Ti:sapphire

- Homogenní vlnová rovnice pro pomalu se měnící obálku:

$$\widetilde{E}(\boldsymbol{x},t) = \widetilde{\mathcal{E}}(z,t)\exp\left[\mathrm{i}k_0 z - \mathrm{i}\omega_0 t\right]$$

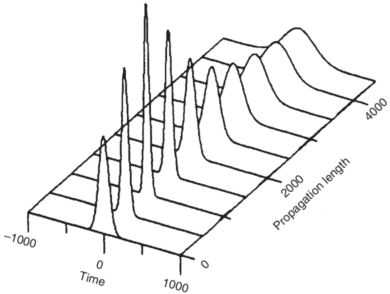
$$\frac{\partial}{\partial z}\widetilde{\mathcal{E}} - \frac{\mathrm{i}}{2}\frac{\partial^2 k_0}{\partial \omega^2}\frac{\partial^2}{\partial\left(t - z/v_g\right)^2}\widetilde{\mathcal{E}} = 0$$

$$v_g = \frac{\partial k_0}{\partial \omega} \qquad \text{grupová rychlost}$$

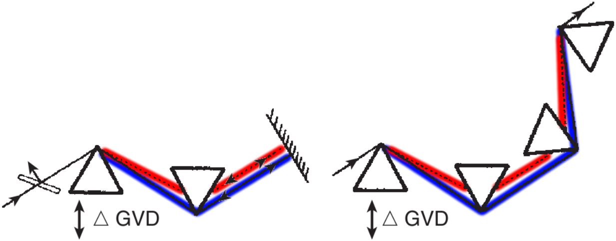
$$k_0 = \frac{n(\omega_0)\omega_0}{c} \qquad \text{vlnový vektor}$$

- Jednoduchá disperse pouze definuje grupovou rychlost, tvar pulsů neovlivňuje.

- *Disperse grupových rychlostí* (Group Velocity Dispersion) $\partial^2 k_0/\partial\omega^2$ má za následek rozšiřování pulsů v čase.
- Vznik *čerpu* (Chirp), tj. nelineární modulace fáze po délce pulsu (lineární modulace znamená pouze frekvenční posun).
- Rozdělení efektivní frekvence po délce pulsu.



- Čerpované pulsy
  je možné stlačovat až do limity dané relacemi neurčitosti (transform–limited pulse).

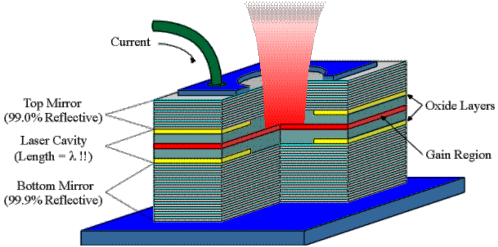


- **Výhody ultrakrátkých pulsů a jejich využití:**
- Vysoké časové rozlišení.
- Vysoké intenzity (nelinearity), malé tepelné ztráty (kontinuální laser na dané intenzitě by zničil vzorek).
- Generace attosekundových pulsů.
- Generace THz pulsů.

$$E_{\mathrm{SHG}} \propto \cos(2\omega t) = 2\cos^2 \omega t - 1$$
$$E(t) \propto E_0^2(t)\cos(2\omega t) + E_0(t)$$

VCSEL

- **Vertical Cavity Surface Emitting Laser**
- Malá vzdálenost braggovských zrcadel na kompaktně připravené struktuře.



- Velká spektrální vzdálenost frekvencí podélných modů ($\approx 1/L$), efektivně pouze jeden mod.
- Příčné mody lze potlačit konečnými rozměry apertury — možný jednomodový provoz.
- Velký překryv elektronové a elektromagnetické vlnové funkce ($\approx 1/\sqrt{L}$) — vysoká kvantová účinnost.
- Vyzařování z elektricky čerpaných elektron–děrových párů v ploše kvantové jámy.
- Oproti (objemovým) polovodičovým laserům s p-n přechodem vyzařuje z plochy (povrchu kvantové jámy), ne podél p-n rozhraní.
- Integrovatelnost, vysoké výkony z malého objemu, laditelnost.

- Struktura podobná VCSEL, vysoká odrazivost zrcadel, malá délka dutiny ($\lambda/2$).
- Efektivně pouze jeden podélný mod elektromagnetického pole, kontinuum příčných modů s parabolickou dispersí:

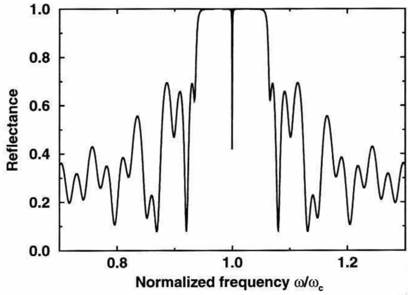
$$|\boldsymbol{k}|^2 = \underbrace{k_{z0}^2}_{\text{pevně dané délkou dutiny}} + \underbrace{k_x^2 + k_y^2}_{\text{libovolné}}$$

$k_{z0} \gg k_x, k_y$ pro mody vyzařované z povrchu (dáno světelným kuželem)

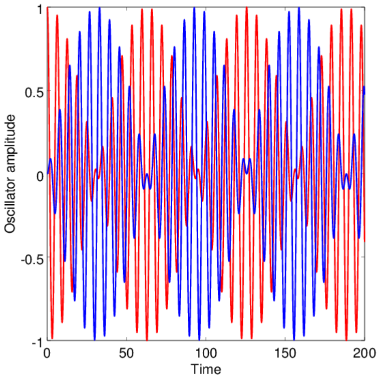
$$k \approx k_{z0} + \frac{k_x^2 + k_y^2}{2k_{z0}}$$

- Uvnitř dutiny jedna nebo několik kvantových jam, excitonová rezonance shodná s energií fotonového modu.
- Interakce hmotných fotonů (bosony) a excitonů (bosony) — spřažené harmonické oscilátory.

OBR.: Odrazivost prázdné mikrodutiny nebo VCSEL struktury.



- Spřažené harmonické oscilátory: vznik rázů, přelévání energie mezi mody.
- Fourierova transformace časového vývoje jedné z amplitud obsahuje dvě maxima, oscilace je lineární kombinací dvou vlastních modů.
- V mechanice separace pohybu těžiště a rozdílové amplitudy, v relacích kvantové mechniky je tento postup separací vlastních modů a diagonalizací hamiltoniánu.



- Hamiltonián kvantového modelu:

$$H = E_X a^+ a + \hbar\omega b^+ b + g\left(a^+ b + ab^+\right)$$

- Vlastní mody

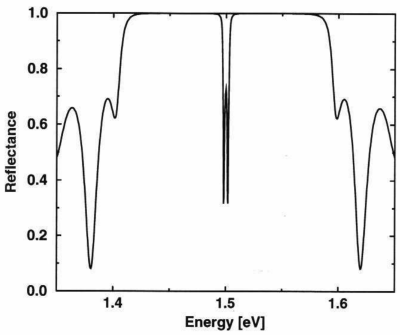
$$p_1 = \alpha a + \beta b$$
$$p_2 = \beta a - \alpha a$$
$$|\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

- Energie

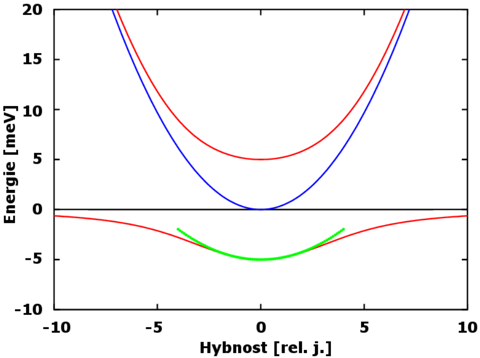
$$E_{1,2} = \frac{E_X + \hbar\omega}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(E_X - \hbar\omega\right)^2 + 4g^2}$$

- Rozštěpení fotonového modu do dvou smíšených modů spolu s excitonem.

- Dvě maxima propustnosti se objeví v důsledku přimísení fotonů do obou modů.
- V modelu nejsou započítané ztráty (rozfázování, v mechanickém modelu tření): pokud budou velké, oscilace způsobené vazbou budou tlumené a mody se nebudou mísit.
- Podmínka pro vazbu $2g > \hbar\left|\gamma_\perp - \gamma_c\right|$.
- Silná vazba → štěpení bosonového modu na horní a dolní větev.
- Slabá vazba → žádné mísení modů, jedno maximum propustnosti, VCSEL.

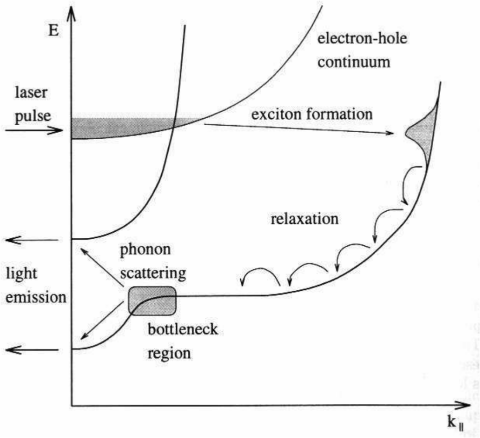


- Energie fotonů $\hbar\omega = \hbar kc \propto k_x^2 + k_y^2 \Rightarrow$ disperse závisející na vlnovém vektoru v rovině, dva mody.

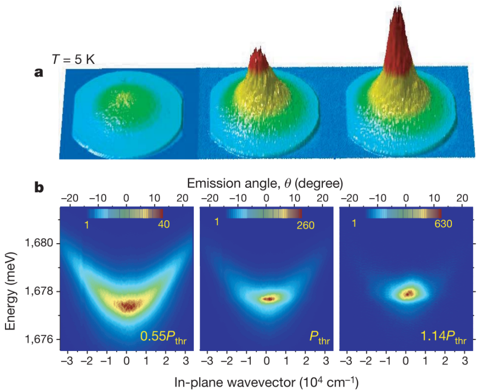


- Minimum disperse na nenulové energii — nenulová klidová hmotnost.
- Přibližně parabolický tvar disperse — hmotné částice, hmotnost 10^{-4} m_e.
- Bosony, kritická teplota vyšší než pokojová.
- Částice slabě interagují, mohou se pohybovat.

- Relaxace energie díky interakci s fonony, termalizace s mříží, snaha o termalizaci v minimu disperse (fotony ani 3D polaritony a plasmony se takto termalizovat nemohou kvůli nulové klidové hmotnosti).
- Fázový přechod do Bose-Einsteinova kondenzátu nebo supratekutého stavu (BKT teorie).



- Kondenzace, stimulovaný boson–bosonový rozptyl, laserování bez inverze.



- Ukázáno v GaAs na teplotě 5K, v GaN při 300K.
- Funguje i s elektrickým čerpáním.
- Funkčnost citlivá na přípravu, musí být nízké ztráty, drahé.

Literatura

- H. Haug: *Light. Vol. 1: Waves, photons, atoms*, North–Holland Physics Publishing, 1985.
- H. Haug: *Light. Vol. 2: Laser light dynamics*, North–Holland Physics Publishing, 1985.
- H. Haug, S. W. Koch: *Quantum theory of the optical and electronic properties of semiconductors*, World Scientific, 2004.
- J.-C. Diels, W. Rudolph: *Ultrashort laser pulse phenomena*, Elsevier, 2006.
- A. V. Kavokin, J. J. Baumberg, G. Malpuech, F. P. Laussy: *Microcavities*, Oxford University Press, 2007.
- E. Hecht: *Optics*, Addison Wesley, 2002.
- L. Mandel, E. Wolf: *Optical coherence and quantum optics*, Cambridge University Press, 1995.